



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère De L'enseignement Supérieur et De

La Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Thème

**Etude d'un problème de contact sans frottement entre un corps électro -
élastique et une foundation adhésive conductrice avec une variable d'état
interne.**

Présenté par: Chaima Chouia

Soutenue devant le jury :

Président	Hadj Ammar Tedjani	Prof.	Univ El-Oued
Rapporteur	Douïb Bachir	M.C.B	Univ El-Oued
Examineur	Azeb Ahmed Abdel Aziz	Prof.	Univ El-Oued

Année universitaire : 2024/2025



Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un modèle impliquant un contact sans frottement entre un corps électro-élastique à mémoire longue et une base adhésive conductrice. Le processus est mécaniquement quasi-statique et électriquement quasi-statique. Nous modélisons le matériau à l'aide d'une loi de comportement électro-élastique non linéaire générale à variable d'état interne et le contact à compliance normale et contrainte unilatérale, où l'adhésion est prise en compte, ainsi qu'une condition de conductivité électrique régularisée.

Dans notre travail, nous avons présenté une formulation variationnelle du problème, puis établi l'existence et l'unicité de la solution sous certaines hypothèses sur les données.

La preuve repose sur des équations d'évolution non linéaires avec des opérateurs monotones, des équations différentielles et des arguments de point fixe de Banach.

Mots clés :

Processus quasi-statique, sans frottement, variable d'état interne, adhésion, compliance normale, solution faible, point fixe.

Abstract

This memoir is devoted to the study of the model involving a frictionless contact between an electro-elastic body characterized by long memory and a conductive adhesive foundation. The process is mechanically quasistatic and electrically static. We model the material with a general nonlinear electro-elastic constitutive law with internal state variable and the contact with normal compliance and unilateral constraint, where the adhesion is taken into account and a regularized electrical conductivity condition.

In our work we in present a variational formulation of the problem then we established the existence and uniqueness of the solution under assumptions on the data.

The proof is based on nonlinear evolution equations with monotone operators, differential equations and Banach fixed point arguments.

Keywords:

Quasistatic process, frictionless, variable state internal, adhesion, normal compliance, weak solution, fixed point.

ملخص

خصصت هذه المذكرة لدراسة مسألة تلامس بدون احتكاك بين جسم كهرو مرن ذو ذاكرة طويلة مع قاعدة موصلة للكهرباء في وجود تلامس. العملية شبه ساكنة ميكانيكيا و ساكنة كهربائيا. لقد نمذجنا المسألة مستخدمين قانون كهرو مرن غير خطي مع متغير داخلي للحالة، في وجود استجابة طبيعية على حافة التلامس وقيود أحادية الجانب. في عملنا هذا قدمنا صيغة تغيرية للمسألة ثم أثبتنا وجود ووحداية تحت فرضيات على المعطيات.

لقد اعتمدنا في برهاننا المعادلات التطورية غير الخطية لمؤثرات رتيبة، ومعادلات تفاضلية الى جانب نظرية النقطة الثابتة لبناخ.

الكلمات المفتاحية:

عملية شبه ساكنة، بدون احتكاك، متغير حالة داخلية، التماس، امتثال طبيعي، حل ضعيف، نقطة ثابتة.

DÉDICACES

A ma mère

A mon père

A mes frères et mes sœurs

*Je dédie mon mémoire de thèse de Master avec toute ma gratitude,
ma reconnaissance et mon amour.*

chaima

REMERCIEMENTS

*Je remercie **Dieu** Tout-Puissant qui ma permis de terminer ce travail.*

*J'adresse mes remerciements les plus chaleureuses et sincères à mon encadreur le docteur **Douib Bachir** de m'avoir beaucoup appris lors de son encadrement de mon mémoire de master. Son enthousiasme et sa compétence m'ont encouragé à mes travaux de recherche sous sa direction.*

*Je suis très honorée que Monsieur le docteur **Hadj Ammar Tedjani** a accepté de présider le jury de ma soutenance de ma thèse.*

*Je voudrais adresser tous mes remerciements sincèrement et appréciations au membre du jury Monsieur le docteur **Azeb Ahmed Abelaziz**, je leur prie de trouver ici l'expression de ma plus grande gratitude.*

*A **tous mes amis et collègues** qui m'ont accompagnés et soutenus durant mes années d'études, qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.*

*Aussi, je rends hommage à **tous mes maîtres et professeurs** à partir du primaire, à celles et ceux qui m'ont stimulé dans mes études, je leur dis du fond du cœur merci en espérant que cette thèse leur soit dédié comme fruit de leur travail.*

*A **tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ces travaux**, de près ou de loin, nous remercions et appréciations beaucoup.*

Chaima Chouia

Introduction générale	1
Notations principales	3
1 MODÉLISATION DU CONTACT PIÉZOÉLECTRIQUE	5
1.1 Cadre physique	5
1.2 Modèle mathématique	7
1.3 Lois de comportement piézoélectriques	8
1.3.1 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.	8
1.3.2 Loi de comportement élasto-piézoélectrique à longue mémoire et à variable d'état interne.	9
1.4 Conditions aux limites	9
2 Outils Mathématiques	14
2.1 Espaces fonctionnels	14
2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables	14
2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$	15
2.1.3 Espace de Hilbert	16
2.1.4 Espace de Sobolev	16
2.2 Espaces liés au problème à étudier	18
2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	21
2.3.1 Espaces $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$	21
2.3.2 Espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$	22
2.3.3 Espace de Sobolev $W^{k,p}(0, T; X)$	23
2.4 Équations d'évolution non linéaires avec opérateurs monotones	25

2.5	Équation différentielle ordinaire	27
2.6	Théorème du point fixe de Banach	28
2.7	Lemme de type Gronwall	28
3	PROBLÈME ÉLECTRO-ÉLASTIQUE AVEC UNE VARIABLE D'ÉTAT INTERNE	30
3.1	Formulation mécanique du problème	30
3.2	Formulation variationnelle du problème	32
3.3	Existence et unicité de la solution	38
3.3.1	Théorème d'existence et d'unicité	38
3.3.2	Démonstration du théorème	54

L'effet piézoélectrique est caractérisé par le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques des matériaux. Un matériau déformable présentant un tel comportement est appelé matériau piézoélectrique. Ces matériaux sont largement utilisés comme interrupteurs et actionneurs dans de nombreux systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, en électroacoustique et dans les équipements de mesure. Des modèles généraux pour les matériaux élastiques à effet piézoélectrique, appelés matériaux électro-élastiques, sont présentés dans [5]. Les problèmes de contact, avec ou sans frottement, entre deux corps déformables ou entre un corps rigide et un corps déformable sont très courants dans l'industrie et la vie quotidienne [9]. Récemment, ces problèmes impliquant des matériaux élasto-piézoélectriques [3], viscoélastiques [24] ou élasto-viscoplastiques [15] ont été étudiés. Les processus d'adhésion sont importants dans de nombreux environnements industriels où des pièces, généralement non métalliques, sont collées ensemble. C'est pourquoi le contact adhésif entre deux corps, lorsqu'une colle est ajoutée pour empêcher les surfaces de bouger l'une par rapport à l'autre, a récemment fait l'objet d'une attention accrue dans la littérature. La modélisation de base est présentée dans [13, 21]. L'analyse des modèles de contact adhésif est présentée dans [7, 8, 10] et dans les monographies [26]. Une application de la théorie du contact adhésif au domaine médical des prothèses a été étudiée dans [22].

Dans ce mémoire, nous étudions un problème de contact quasi-statique sans frottement pour des matériaux électro-élastiques avec adhésion, mémoire longue et une variable d'état interne dans le cadre de la théorie mathématique de la mécanique du contact. Notre objectif est de décrire des processus physiques impliquant à la fois le contact, l'adhésion et l'effet piézoélectrique, afin de montrer que les modèles obtenus conduisent à des problèmes mathématiques bien posés. La prise en compte de l'effet piézoélectrique dans l'étude des problèmes de contact

adhésif quasi-statique constitue la principale nouveauté de ce mémoire. Comme dans [8, 9, 19], nous utilisons un champ d'adhésion représenté par une variable β définie sur la zone de contact qui satisfait les restrictions $0 \leq \beta \leq 1$, si $\beta = 1$ en tout point de la zone de contact, l'adhésion est complète et toute l'adhésion est active, si $\beta = 0$ l'adhésion est incomplète et donc inactive, et par conséquent il n'y a pas d'adhésion, lorsque $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et seule une fraction β d'adhésion est active.

Avec [18, 23], ce mémoire constitue une contribution à l'étude des problèmes de contact pour les matériaux piézoélectriques. Nous étudions ici un modèle mathématique décrivant le contact unilatéral sans frottement entre un corps déformable à mémoire longue supposé électro-élastique et une fondation conductrice à variable d'état interne.

L'objectif principal de ce travail est d'étudier un nouveau modèle mathématique de contact sans frottement entre un corps électroélastique à mémoire longue et une variable d'état interne avec une base adhésive conductrice. Ce mémoire est organisée comme suit : Dans Le premier chapitre nous introduisons des notations générales de la mécanique nécessaire pour une bonne compréhension de la suite du problème traité. Nous commençons par le cadre physique, loi de comportement piézoélectrique et condition aux limites. Dans Le deuxième chapitre nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Nous abordons ensuite les résultats fondamentaux de l'analyse non linéaire, les inégalités quasi-variationnelles elliptiques, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes très utiles pour les démonstrations. Dans le troisième chapitre nous présentons l'énoncé du problème, puis nous listons les hypothèses sur les données et donnons la formulation variationnelle du problème et enfin, nous énonçons notre résultat principal d'existence et d'unicité basé sur des équations d'évolution non linéaires avec des opérateurs monotones et des arguments à point fixe.

NOTATIONS PRINCIPALES

si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, on note par

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels,
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω ,
Γ	la frontière de Ω supposée régulière,
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3}, a, b)$	une partie mesurable de la frontière Γ ,
$mes\Gamma_i (i = 1, a)$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ ,
ν	la normale unitaire sortante à Γ ,
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v ,
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ ,
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$,
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
Q	l'espace $L_s^2(\Omega)^{d \times d}$,
Q_1	l'espace $\{\sigma \in Q / \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ ,
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ ,
W	l'espace $\{\zeta \in H^1(\Omega) / \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$,
$\mathcal{W}$	l'espace $\{D = (D_i) / D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2(\Omega)\}$,
$\gamma : H_1 \longrightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

$(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de H ,

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ le produit de dualité entre H' et H ,

$\|\cdot\|_H$ la norme de H .

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, on note par

$C(0, T; H)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H ,

$C^1(0, T; H)$ l'espace des fonctions continument dérivables sur $[0, T]$ dans H ,

$L^p(0, T; H)$ l'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,

telles que $\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.

$\|\cdot\|_{L^p(0, T; H)}$ la norme de $L^p(0, T; H)$,

$W^{k,p}(0, T; H)$ l'espace de Sobolev de paramètres k et p ,

$\|\cdot\|_{W^{k,p}(0, T; H)}$ la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$.

Autre notations :

$\dot{u}, \ddot{u}$ les dérivées première et deuxième de u par rapport au temps,

$\nabla \varphi$ le gradient de φ ,

$\text{Div } \sigma$ divergence de σ ,

$\text{div } D$ divergence du vecteur D ,

$\varepsilon(u)$ le tenseur de déformation,

S^d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$,

Λ^n puissance n de l'opérateur Λ ,

c une constante générique strictement positive,

p.p. presque partout.

i.e. c'est-à-dire.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION DU CONTACT PIÉZOÉLECTRIQUE

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique de contact ou nous allons introduire le cadre physique utilisé dans ce mémoire, nous commençons de rappeler l'équation de mouvement de Cauchy et décrire les lois de comportement élasto-piézoélectrique et élasto-piézoélectrique à longue mémoire et à variable d'état interne. Par ailleurs nous précisons les conditions aux limites de contact concernant les problèmes étudiés dans ce mémoire.

1.1 Cadre physique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$; $d = 2, 3$, un domaine occupé par un corps électro-élastique à frontière lipschitzienne Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques telles que $mes \Gamma_1 > 0$. D'autre part, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est divisée en deux parties disjointes et mesurables Γ_a et Γ_b correspondant aux conditions aux limites électriques telle que $mes \Gamma_a > 0$. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques de densité volumiques q_0 . On suppose que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Le corps est soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_a de la frontière, ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2 agissent sur la partie Γ_b . Soit $[0, T]$, $T > 0$ l'intervalle de temps d'intérêt.

Nous désignons par S^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$; " $\cdot$ " représente le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$, S^d et $\|\cdot\|$ représentent respectivement la norme sur $\mathbb{R}^d$ et S^d .

Dans ce qui suit les indices i, j et l sont compris entre 1 et d , la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée et l'indice qui suit une virgule indique une dérivée partielle par

rapport à la composante correspondante de la variable indépendante. Nous avons

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i \cdot v_i, \|v\| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij}, \|\tau\| = (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in S^d. \end{aligned}$$

Pour un vecteur v , nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$\begin{cases} v_\nu = v \cdot \nu, \\ v_\tau = v - v_\nu \cdot \nu. \end{cases} \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \overline{\Omega}$ et $t \in [0, T]$.

Nous avons aussi pour un champ des contraintes σ nous dénotons par σ_ν et σ_τ les traces normale et tangentielle d'une fonction $\sigma \in H_1$, on rappelle que lorsque σ est une fonction régulière alors :

$$\begin{cases} \sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \\ \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \cdot \nu. \end{cases} \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma \nu) \cdot v = \sigma_\nu \cdot v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire dans l'établissement de formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2},$$

où $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses $\dot{u}$ les notations $\dot{u}_\nu$ et $\dot{u}_\tau$ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle

à la frontière, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{u}_\nu = \dot{u} \cdot \nu, \\ \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \cdot \nu. \end{cases} \quad (1.4)$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d,$$

en outre, le champ électrique est défini par la relation suivante

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i}). \quad (1.5)$$

remarque : la dérivé partielle de φ est noté par $\varphi_{,i}$.

1.2 Modèle mathématique

Le modèle mathématique étudié dans ce mémoire, décrit l'évolution du corps occupant Ω . Les fonctions inconnues de notre problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$, le champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, et le champ de variable d'état interne $k : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$.

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy

$$Div \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.6)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse, et " Div " représente l'opérateur divergence pour les tenseurs, $Div \sigma = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (1.6) s'appelle processus dynamique. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier, par exemple, dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé, dans ce cas l'équation (1.6) devient

$$Div \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T). \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) s'appelle l'équation d'équilibre. Le processus d'évolution défini par (1.7) s'appelle processus quasi-statique. Nous rappelons que dans le cadre physique, f_0 et f_2 varient très lentement par rapport au temps, par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables, nous plaçons donc le cas quasi-statique et nous utilisons l'équation (1.7).

L'évolution du corps élasto-piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques

$$\operatorname{div} D - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où " div " est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\operatorname{div} D = D_{i,i}$.

1.3 Lois de comportement piézoélectriques

Dans cette section, nous considérons la loi de comportement des matériaux électro-élastiques. Cette loi est utilisée dans de nombreux ouvrages portant notamment sur l'étude mathématique des problèmes de contact.

1.3.1 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ et le vecteur des déplacements électriques $D = (D_i)$ sont reliés par la loi de comportement

$$\begin{cases} \sigma = F\varepsilon(u) - \mathcal{E}^* E(\varphi), \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi), \end{cases} \quad (1.8)$$

où F est l'opérateur d'élasticité pas forcément linéaire, $E(\varphi) = (E_i(\varphi))$ représente le champ électrique défini par $E(\varphi) = -\nabla\varphi$, $B = (b_{ij})$ est le tenseur de permittivité électrique et $\mathcal{E}^* = (e_{ijl}^*)$ désigne la transposée du tenseur piézoélectrique du troisième ordre $\mathcal{E} = (e_{ijl})$ telle que

$$\mathcal{E}\sigma \cdot v = \sigma \cdot \mathcal{E}^* v \quad \forall \sigma \in S^d, v \in \mathbb{R}^d. \quad (1.9)$$

Pour plus de détails sur la loi de comportement (1.8), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [2].

1.3.2 Loi de comportement élasto-piézoélectrique à longue mémoire et à variable d'état interne.

La loi de comportement d'un matériau élasto-piézoélectrique à longue mémoire et à variable d'état interne est donnée par

$$\begin{cases} \sigma = F\varepsilon(u) + \int_0^t M(t-s, \varepsilon(u(s)), k(s))ds - \mathcal{E}^*E(\varphi), \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi), \\ \dot{k} = \Phi(\varepsilon(u), k), \end{cases} \quad (1.10)$$

où M est le tenseur de relaxation qui dépend de u et de la variable d'état interne k , Φ est une fonction constitutive non linéaire qui dépend de k . Il existe une variété de choix pour les variables d'état internes, nous renvoyons le lecteur à [7].

Nous utilisons la loi (1.10) dans le problème $\mathcal{P}$ qu'on va étudier dans le troisième chapitre de ce mémoire.

1.4 Conditions aux limites

Dans cette section, nous présentons les conditions de contact utilisées dans le problème aux limites que nous examinerons dans le mémoire. Nous définissons maintenant les conditions aux limites mécaniques et électriques sur chaque partie de Γ .

Condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1 \times [0; T]$, le champ des déplacements u est par conséquent nul

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.11)$$

Condition aux limites de traction

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur $\Gamma_2 \times [0; T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T). \quad (1.12)$$

Conditions aux limites électriques

Le potentiel électrique s'annule sur Γ_a et les charges électriques volumiques q_0 sont prescrites sur Γ_b , ce qui se traduit par

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T), \quad (1.13)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T). \quad (1.14)$$

Contact sans frottement

Le contact à la limite Γ_3 est sans frottement, ce qui se traduit par

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.15)$$

Contact unilatéral avec adhésion

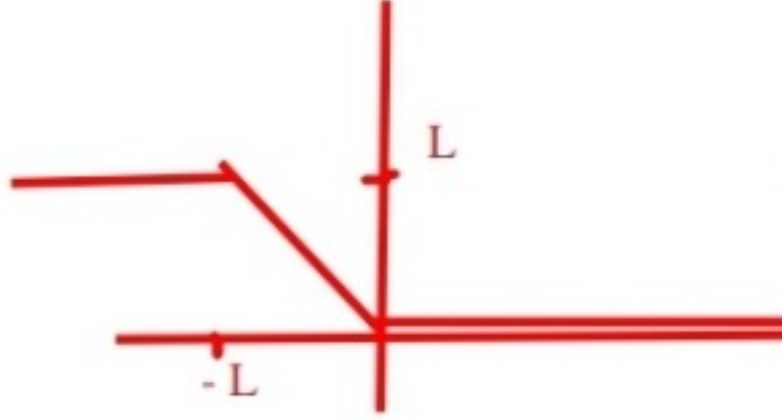
Le contact sur la frontière Γ_3 est unilatéral avec adhésion est exprimé par

$$\begin{cases} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p_\nu(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu) \leq 0, \\ (\sigma_\nu + p_\nu(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu))(u_\nu - g) = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Les conditions (1.16) représentent les conditions de Signorini avec adhésion, où u_ν est le déplacement normal, σ_ν représente la contrainte normale, c_ν désigne un coefficient d'adhérence donné, g est une constante strictement positive représentant l'écart dans la configuration de référence entre Γ_3 et la fondation, mesurée selon la direction de ν , p_ν est la fonction de compliance normale et R est l'opérateur de troncature défini par

$$R(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique de l'adhésion, au-delà de laquelle elle n'offre plus de traction supplémentaire. L'introduction de l'opérateur R est motivée par des arguments mathématiques mais elle n'est pas restrictive du point de vue physique, puisqu'aucune restriction sur la taille du paramètre L n'est faite dans ce qui suit.

FIGURE 1.1 – Illustration de l'opérateur R

Conditions électriques à la surface de contact

Dans ce paragraphe, nous allons énoncer les conditions de contact électrique, associées aux problèmes électro-mécaniques, sur la partie Γ_3 de la surface. Nous supposons que la fondation est conductrice et son potentiel est maintenu à φ_0 . La condition électrique sur Γ_3 est donnée par :

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - g)\phi_L(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.18)$$

où ψ et φ sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes : Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point de la surface (i.e. $u_\nu < g$), il n'y a pas de charges électriques sur la surface de contact et le champ de la composante normale du déplacement électrique disparaît i.e.

$$u_\nu < g \Rightarrow D \cdot \nu = 0. \quad (1.19)$$

Durant le processus de contact, (i.e. $u_\nu \geq g$) la composante normale du champ de déplacement électrique est liée de façon linéaire et supérieure proportionnelle à la différence de potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive λ comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq g \Rightarrow D \cdot \nu = \lambda(\varphi - \varphi_0). \quad (1.20)$$

Combinons (1.19) et (1.20) pour obtenir

$$D \cdot \nu = \lambda \chi_{[0, \infty[}(u_\nu - g)(\varphi - \varphi_0), \quad (1.21)$$

où $\chi_{[0, \infty[}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est donnée par :

$$\chi_{[0, \infty[}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (1.21) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de Signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications. Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition (1.21) par la condition (1.18) dans laquelle ψ est une fonction régulière qui va être décrite ci-dessous et ϕ est une fonction de troncation,

$$\phi(s) = \begin{cases} -L & \text{si } s < -L, \\ s & \text{si } -L \leq s \leq L, \\ L & \text{si } s > L, \end{cases} \quad (1.22)$$

où L est une constante positive très grande. De cette façon, la différence $\varphi - \varphi_0$ est remplacée par $\phi(\varphi - \varphi_0)$. Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'application du modèle puisque L peut être arbitrairement grand et donc dans les applications $\phi(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$.

Les raisons de la régularisation (1.18) et (1.21) sont mathématiques. Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction $\chi_{[0, \infty[}$ dans (1.21) par une fonction lipschitzienne. Un choix possible est l'exemple suivant :

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0, \\ \delta r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\delta}, \\ 1 & \text{si } r > \frac{1}{\delta}, \end{cases} \quad (1.23)$$

où $\delta > 0$ est un paramètre assez grand. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface, et se stabilise quand la pénétration $u_\nu - g$ atteint la valeur $\frac{1}{\delta}$. Deuxièmement, nous avons besoin du terme $\phi(\varphi - \varphi_0)$ pour rendre le terme $\phi(\varphi - \varphi_0)$ borné.

Evolutions du champ d'adhésion

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -(c_\nu \beta R(u_\nu)^2 - \varepsilon_a)_+, \\ \beta(0) = \beta_0. \end{cases}$$

Ici c_ν et ε_a sont des coefficients d'adhésion positifs et $r_+ = \max\{r, 0\}$ et R est un opérateur de troncation qui est défini par (1.17), β_0 représente la condition initiale d'adhésion. Rappelons ε_a qu'un représente ce que l'on appelle l'énergie de surface de Dupré et qu'elle mesure la quantité d'énergie nécessaire pour décoller une unité de surface, voir [12] pour plus de détails

Nous utiliserons ces conditions dans le chapitre 3 de ce mémoire.

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire, et donnons quelques propriétés nécessaires dans la suite. Ensuite nous passons aux résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, les lemmes de Gronwall et de certains théorèmes très utiles dans notre travail. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$.

2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions p intégrables et les espaces de Sobolev.

2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\overline{\Omega})$ et il est un espace de Banach pour la norme donnée par :

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)|, x \in \overline{\Omega}\}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur $\overline{\Omega}$. Pour tout entier k , l'espace $C^k(\Omega)$ donné par

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) \mid D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq k\},$$

est l'espace des fonctions k fois continûment différentiable sur $\overline{\Omega}$. Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

L'espace $C^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables :

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur l'ensemble à support compact inclus dans Ω , défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où $\text{supp } v = \overline{\{v \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction v . Si $\text{supp } v$ est un sous ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$

On suppose connues la définition des applications mesurables pour la mesure de Lebesgue et la définition de $L^1(\Omega)$: l'espace des fonctions intégrables sur Ω , muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |v(x)| \, dx.$$

Définition 2.1.1. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) l'ensemble :

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Grâce à l'inégalité de Minkowski, $L^p(\Omega)$ c'est un espace normé, dont la norme notée $\|v\|_{L^p(\Omega)}$, est définie par :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On appelle l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathcal{R} \text{ mesurable; } \exists c > 0, |v(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c; |v(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

2.1.3 Espace de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H i.e. $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive. On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (2.1). Soit H' l'espace dual de H c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{|\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}|}{\|v\|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente le produit de dualité entre H' et H .

2.1.4 Espace de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / u_{,i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d\}.$$

rémarque : la dérivé partielle de u est noté par $u_{,i}$. On note par $\nabla u = u_{,i} = -E(u)$ le vecteur de composante $u_{,i}$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. On sait que $H^1(\Omega)$ est un espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u_{,i}, v_{,i})_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}},$$

alors on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

Théorème 2.1.1. *(de densité).*

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.1.2. *(Rellich).*

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.1.3. *(trace de Sobolev). Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})$.*

Remarque 2.1.1. *L'espace $L^2(\Gamma)$ représente l'espace des fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \mapsto u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.*

Remarque 2.1.2. *On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.*

Définition 2.1.2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega) \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha}u\}.$$

Remarque 2.1.3. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Pour plus des détails sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [1, 6].

2.2 Espaces liés au problème à étudier

Dans cette section nous introduisons les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{cases} H = L^2(\Omega)^d = \{v = (v_i)_{1 \leq i \leq d} \mid v_i \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 = H^1(\Omega)^d = \{v = (v_i)_{1 \leq i \leq d} \mid v_i \in H^1(\Omega)\}, \\ Q = \{\tau = (\tau_{ij})_{1 \leq i,j \leq d} \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ Q_1 = \{\tau = (\tau_{ij})_{1 \leq i,j \leq d} \mid \tau \in Q, \tau_{ij,j} \in L^2(\Omega)\}, \\ Y = L^2(\Omega)^m = \{\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq m} \mid \lambda_i \in L^2(\Omega)\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les espaces H, H_1, Q, Q_1 et Y sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{cases} (u, v)_H = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \\ (u, v)_{H_1} = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) \, dx, \\ (\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau \, dx, \\ (\sigma, \tau)_{Q_1} = \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau \, dx + \int_{\Omega} \text{Div } \sigma \cdot \text{Div } \tau \, dx, \\ (u, v)_Y = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \end{cases} \quad (2.4)$$

où $\varepsilon : H_1 \rightarrow Q$ et $Div : Q_1 \rightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Les normes sur les espaces H , H_1 , Q , Q_1 et Y sont notées par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_1}$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{Q_1}$ et $\|\cdot\|_Y$ respectivement.

Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation γv pour désigner la trace de v sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ , et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ . Pour tout $\sigma \in Q_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que :

$$\langle \sigma\nu, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_Q + (\text{Div } \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \quad (2.5)$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$\langle \sigma\nu, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v \, da \quad \forall v \in H_1. \quad (2.6)$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v \, da \quad \forall v \in H_1. \quad (2.7)$$

Considérons maintenant le sous-espace fermé de H_1 défini par

$$V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (2.8)$$

Étant donné que $\text{mes}\Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn suivante est vraie :

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq c_K \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V, \quad (2.9)$$

où $c_K > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ . Une preuve de cette inégalité peut être trouver dans ([20] p. 79)

Sur l'espace V , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q \quad \forall u, v \in V, \quad (2.10)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q \quad \forall v \in V. \quad (2.11)$$

Il résulte de l'inégalité de Korn (2.9) que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et, par conséquent, $\|\cdot\|_V$ est un espace de Hilbert réel. De plus, d'après le théorème de trace de Sobolev, (2.9) et (2.10), il existe une constante c_0 dépendant uniquement des domaines Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (2.12)$$

Nous présentons également les espaces suivants

$$W = \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \quad \mathcal{W} = \{D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2(\Omega)\}.$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_a > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré suivante est vraie :

$$\|\nabla \psi\|_H \geq c_F \|\psi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \psi \in W, \quad (2.13)$$

où $c_F > 0$ est une constante qui ne dépend que de Ω et Γ_a . Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée, par exemple dans [6].

Sur l'espace W , on considère le produit scalaire donné par

$$(\varphi, \psi)_W = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx, \quad (2.14)$$

et soit W la norme associée ;

$$\|\psi\|_W = \|\nabla \psi\|_H. \quad (2.15)$$

Il résulte de (2.13) et (2.15) que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc $(\cdot, \cdot)_W$ est un espace de Hilbert réel. De plus, d'après le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $\tilde{c}_0$, dépendant uniquement de Ω , Γ_a et Γ_3 , telle que

$$\|\psi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 \|\psi\|_W \quad \forall \psi \in W. \quad (2.16)$$

L'espace $\mathcal{W}$ est un espace de Hilbert réel avec le produit scalaire

$$(D, E)_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega} D \cdot E \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \cdot \operatorname{div} E \, dx, \quad (2.17)$$

et la norme associée

$$\|D\|_{\mathcal{W}}^2 = \|D\|_H^2 + \|\operatorname{div} D\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.18)$$

De plus, lorsque $D \in \mathcal{W}$ est une fonction régulière, la formule de Green suivante est vérifiée

$$(D, \nabla \zeta)_H + (\operatorname{div} D, \zeta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \, \zeta \, da \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega). \quad (2.19)$$

Pour une fonction scalaire θ , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$Z = \{\theta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3) / 0 \leq \theta \leq 1, \forall t \in [0, T], p.p. \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel.

2.3.1 Espaces $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$

Notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X , respectivement, avec les normes

$$\|x\|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X,$$

$$\|x\|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{x}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition 2.3.1. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|u_n(t) - u(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

Définition 2.3.2. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable en $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de u en t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (u(t_0 + h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

Définition 2.3.3. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X dt = 0.$$

Théorème 2.3.1. (Bochner). Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurable et intégrable si et seulement si $t \mapsto \|u(t)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathcal{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

2.3.2 Espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$

Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf \{c > 0 \mid \|u(t)\|_X < c \text{ p.p. } t \in (0, T)\}, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Proposition 2.3.1.

1. $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) est un espace de Banach.
2. Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

3. $L^r(0, T; X) \subseteq L^q(0, T; X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

4. Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.3.4. Soient $u, w \in L^1(0, T; X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) w(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0, T).$$

$\mathcal{C}_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables à support compact dans $(0, T)$. Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

2.3.3 Espace de Sobolev $W^{k,p}(0, T; X)$

Définition 2.3.5. Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0, T; X)}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0, T; X)$ est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

Définition 2.3.6. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_i, b_i) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ on a $\sum_i \|u(b_i) - u(a_i)\|_X \leq \varepsilon$.

Théorème 2.3.2. Soient $1 \leq p \leq \infty, X$ un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0, T; X)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.

2. u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; X)$.

3. Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T; X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) \, ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Théorème 2.3.3. Si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$, $p \in [1, \infty]$. Nous avons alors :

1. $\|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X \, dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$

2. si de plus $p < \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t - s)^p \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p \, dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

3. si $p = \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}\|_{L^\infty(0, T; X)}(t - s) \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Théorème 2.3.4. Dans le cas où l'espace $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ est un espace de Hilbert et si $u \in W^{1,2}(0, T; H)$, alors

1. la fonction $t \rightarrow \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$.

$$2. \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 = (\dot{u}(t), u(t))_H \quad p.p. \quad t \in]0, T[.$$

$$3. \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_H \, ds \quad \forall t \in]0, T[.$$

2.4 Équations d'évolution non linéaires avec opérateurs monotones

Opérateur fortement monotone

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme associée $\|\cdot\|_X$

Définition 2.4.1. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, l'opérateur A est dite :

1. *monotone* si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0, \quad \forall u, v \in X,$$

2. *fortement monotone* s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2, \quad \forall u, v \in X,$$

3. *de Lipschitz* s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\| \leq M \|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X,$$

4. *hemicontinu* si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$(A(u + \lambda_n v), w)_X \rightarrow (A(u + \lambda v), w)_X, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. Tout opérateur de Lipschitz est hemicontinu.

Théorème 2.4.1. Soit X un espace de Hilbert. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur lipschitzien et fortement monotone. Alors, pour chaque $f \in X$, il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.

Le théorème (2.4.1) montre que si $A : X \rightarrow X$ un opérateur lipschitzien et fortement monotone défini sur un espace X de Hilbert, alors A est inversible. Les propriétés de son inverse, noté A^{-1} , sont données par le résultat suivant.

Proposition 2.4.2. *Soit X un espace de Hilbert. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur lipschitzien et fortement monotone. Alors, $A^{-1} : X \rightarrow X$ est un opérateur lipschitzien et fortement monotone.*

Les démonstration du théorème (2.4.1) et de la proposition (2.4.2) peuvent être trouver dans ([26] p 23 , 24).

Définition 2.4.2. *Soit une fonction $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *La fonction j est dite propre si elle n'est pas identiquement à $+\infty$, c'est-à-dire s'il existe $u \in X$ tel que $j(u) < +\infty$, et si elle ne prend jamais la valeur $-\infty$.*

2. *La fonction j est dite convexe si*

$$j(tu + (1 - t)v) \leq tj(u) + (1 - t)j(v), \quad \forall u, v \in X, \forall t \in [0, 1].$$

3. *La fonction j est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en u de l'espace X , si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de X convergeant vers u dans X , elle vérifie*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} j(u_n) \geq j(u). \quad (2.20)$$

4. *La fonction j est dite s.c.i. sur X si elle est s.c.i. pour tout point de X .*

Remarque 2.4.1. *Il convient de remarquer que dans la définition précédente, la suite d'éléments $(u_n)_n$ converge fortement vers un l'élément u . Si cette suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers un élément u et que l'inégalité (2.20) est vérifiée, alors la fonction j est dite fonction faiblement semi-continue inférieurement en point u .*

Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans la fonctionnelles non différentiable dépend de la solution elles sont appelées "inégalités quasi-variationnelles". Pour cela, nous considérons un espaces de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$, soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasi-variationnnelle suivante

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (2.21)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous considérons les hypothèses suivantes :

$$K \text{ est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de } X. \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ est un opérateur lipschitzien fortement monotone,} \\ c'est\text{-à-dire qu'il existe } m > 0 \text{ et } M > 0 \text{ tels que} \\ (a) (Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2, \quad \forall u, v \in X, \\ (b) \|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) j(u, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X \text{ pour tous } u \in X \\ (b) \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \leq \alpha\|u_1 - u_2\|_X\|v_1 - v_2\|_X, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

$$\alpha < m. \quad (2.25)$$

L'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.21) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2.4.2. *Supposons que les hypothèses (2.22)-(2.25) sont satisfaites. Alors, pour tout $f \in X$, l'inégalité quasi-variationnelle (2.21) a une solution unique.*

Une preuve du théorème (2.4.2) est présentée dans ([26] p 49). Nous utiliserons ce théorème dans le troisième chapitre de ce mémoire.

2.5 Équation différentielle ordinaire

Théorème 2.5.1. (Cauchy-Lipshitz) *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $\mathcal{F}(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{F}(t, x) - \mathcal{F}(t, y)\|_X \leq L_{\mathcal{F}}\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ \mathcal{F}(\cdot, x) \in L^p(0, T; X), \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = \mathcal{F}(t, x(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

On peut trouver les détails de ce théorème, par exemple, dans [2].

2.6 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans ce mémoire pour démontrer l'existence et l'unicité. Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$, $K \subset X$ une partie de X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ un opérateur défini sur K . On s'intéresse à l'existence d'une solution de l'équation

$$\Lambda u = u, \quad u \in K. \quad (2.26)$$

Une telle solution de (2.26) s'appelle un point fixe de Λ dans K .

Théorème 2.6.1. (*Théorème du point fixe de Banach*). Soit K une partie non vide et fermé de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contractante, i.e, $\exists c \in]0; 1[$ tel que

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq c \|u - v\|_X, \quad u, v \in K.$$

Alors il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$, i.e, Λ possède un point fixe unique dans K .

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus. Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur Λ sont définies récursivement par

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \text{ pour } m \geq 2.$$

Théorème 2.6.2. Sous les mêmes conditions du Théorème (2.6.1), on suppose que Λ^m est une contractante pour un certain entier $m \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Les démonstrations des théorèmes (2.6.1), (2.6.2) peuvent être trouver dans [14].

2.7 Lemme de type Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur le rappels figurant dans ce paragraphe, on pourra consulter par exemple [16].

Lemme 2.7.1. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ soit $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

1. Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T],$$

2. Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 2.7.1. Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$.

Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \cdot \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire (2.7.1) est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s) \psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. En appliquant corollaire (2.7.1) donne immédiatement la nullité de ψ .

CHAPITRE 3

PROBLÈME ÉLECTRO-ÉLASTIQUE AVEC UNE VARIABLE D'ÉTAT INTERNE

Dans ce chapitre nous étudions un problème de contact quasi-statique avec adhésion sans frottement pour un matériau électro-élastique avec mémoire longue et une variable d'état interne. Ce chapitre comporte trois sections, dans la première nous écrivons le problème mécanique, ensuite dans la deuxième nous présentons la formulation variationnelle du problème, enfin, dans la troisième section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème.

3.1 Formulation mécanique du problème

Le problème mécanique du contact quasi-statique d'un corps électro-élastiques avec un obstacle déformable s'écrit alors comme suit.

Problème $\mathcal{P}$. Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champs des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$, un potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, et qu'un champ de variable d'état interne $k : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, tel que

$$\sigma = F\varepsilon(u) + \int_0^t M(t-s, \varepsilon(u(s)), k(s))ds - \mathcal{E}^*E(\varphi) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\dot{k} = \Phi(\varepsilon(u), k) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$Div \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$div D - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} u_\nu \leq g, \sigma_\nu + p_\nu(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu) \leq 0, \\ (\sigma_\nu + p_\nu(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu))(u_\nu - g) = 0, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.9)$$

$$\dot{\beta} = -(c_\nu \beta R(u_\nu)^2 - \varepsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$D \cdot \nu = q_0 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.12)$$

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - g)\phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.13)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.14)$$

$$u(0) = u_0, k(0) = k_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (3.15)$$

Nous décrivons maintenant (3.1)-(3.15) et fournissons une explication des équations et des conditions aux limites. Premièrement, les équations (3.1)-(3.3) représentent la loi de comportement électro-élastique à mémoire longue et à variable d'état interne introduite dans le premier chapitre. Les équations (3.4) et (3.5) sont les équations d'équilibre pour les champs de contraintes et de déplacements électriques, respectivement, dans lesquelles "Div" et "div" désignent les opérateurs de divergence pour les fonctions à valeurs tensorielles et vectorielles, $Div \sigma = (\sigma_{ij,j})$, $div D = D_{i,i}$, et f_0 , q_0 désignent les densités des forces du corps et des charges électriques volumiques. Nous utilisons ces équations car le processus est supposé mécaniquement quasi-statique et électriquement quasi-statique. Tandis que les équations (3.6) et (3.7) représentent les conditions aux limites de déplacement et de traction, le contact sans frottement est décrit sur Γ_3 , par la relation (3.8). L'équation (3.9) représente les conditions de Signorini avec adhésion auxquelles est soumise la partie Γ_3 de la frontière Γ , qu'on détaille dans le chapitre 1. De plus, l'évolution du champ d'adhésion est régie par l'équation différentielle (3.10) avec des paramètres positifs donnés c_ν et ε_a , dans lesquels $r_+ = \max \{r, 0\}$ et pour la simplicité,

nous utilisons la notation $R(u_\nu)^2 = (R(u_\nu))^2$. Les équations (3.11) et (3.12) représentent des conditions aux limites électriques, l'équation (3.13) est la condition de contact électrique sur Γ_3 . Enfin, dans (3.14) et (3.15) β_0, u_0 et k_0 représentent respectivement les conditions initiales des champs d'adhésion, de déplacements et de variable d'état interne.

3.2 Formulation variationnelle du problème

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$, nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données. Nous listons les hypothèses sur le problème $\mathcal{P}$.

L'opérateur d'élasticité F et l'opérateur de relaxation M sont supposés satisfaire les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ F : \Omega \times S^d \rightarrow S^d, \\ (b) \text{ Il existe } M_F > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2)\| \leq L_F \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (c) \text{ Il existe } m_F > 0 \text{ tel que} \\ \quad (F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_F \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto F(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in S^d, \\ (e) \text{ L'application } x \mapsto F(x, 0) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ M : \Omega \times [0, T] \times S^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow S^d. \\ (b) \text{ Il existe } L_M > 0 \text{ telle que, } \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \\ \quad \|M(x, t, \varepsilon_1, k_1) - M(x, t, \varepsilon_2, k_2)\| \leq L_M (\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + \|k_1 - k_2\|) \quad \forall t \in (0, T) \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto M(x, t, \varepsilon, k) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega \\ \quad \text{pour tout } t \in (0, T), \varepsilon \in S^d, k \in \mathbb{R}^m. \\ (d) \text{ L'application } t \mapsto M(x, t, \varepsilon, k) \text{ est continue dans } (0, T) \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in S^d, k \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (e) \text{ L'application } x \mapsto M(x, t, 0, 0) \in Q, \quad \forall t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$, le tenseur de permittivité électrique B et la fonction Φ satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{E} = (e_{ijl}) : \Omega \times S^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ (b) \mathcal{E} = (e_{ijl}), \quad e_{ijl} = e_{ilj} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, l \leq d, \\ (c) \mathcal{E}(x) \sigma \cdot \tau = \sigma \cdot \mathcal{E}^* \tau, \quad \forall \sigma \in S^d, \forall \tau \in \mathbb{R}^d, \quad p.p. \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) B = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ (b) B(x, E) = (b_{ij}(x) E_j) \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \quad p.p. \quad x \in \Omega, \\ (c) b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ (d) Il existe $m_B > 0$ tel que \\ \quad \quad \quad BE \cdot E \geq m_B \|E\|^2 \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \quad p.p. \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \Phi : \Omega \times S^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ (b) Il existe $L_\Phi > 0$ tel que \\ \quad \quad \quad \|\Phi(x, \varepsilon_1, k_1) - \Phi(x, \varepsilon_2, k_2)\| \leq L_\Phi (\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + \|k_1 - k_2\|) \\ \quad \quad \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \quad p.p. \quad x \in \Omega, \\ (c) L'application $x \mapsto \Phi(x, \varepsilon, k)$ est Lebesgue mesurable sur Ω , \\ \quad \quad \quad pour tout $\varepsilon \in S^d$ et $k \in \mathbb{R}^m$, \\ (d) L'application $x \mapsto \Phi(x, 0, 0)$ appartient à $L^2(\Omega)$. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

La fonction de compliance normale p_ν et la fonction de conductivité électrique de surface ψ satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \\ (b) Il existe $L_\nu > 0$ tel que \\ \quad \quad \quad |p_\nu(x, \xi_1) - p_\nu(x, \xi_2)| \leq L_\nu |\xi_1 - \xi_2|, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, p.p. \quad x \in \Gamma_3, \\ (c) p_\nu(x, \xi) = 0 \quad \forall \xi \leq 0, p.p. \quad x \in \Gamma_3, \\ (d) L'application $x \mapsto p_\nu(x, \xi)$ est mesurable sur Ω , pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \\ (b) \ \text{Il existe } L_\psi > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\psi(x, \xi_1) - \psi(x, \xi_2)| \leq L_\psi |\xi_1 - \xi_2|, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, p.p. \ x \in \Gamma_3, \\ (c) \ \text{Il existe } M_\psi > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\psi(x, \xi)| \leq M_\psi \ \forall \xi \in \mathbb{R}, p.p. \ x \in \Gamma_3, \\ (d) \ \psi(x, \xi) = 0 \ \forall \xi \leq 0, p.p. \ x \in \Gamma_3, \\ (e) \ \text{L'application } x \mapsto \psi(x, \xi) \text{ est mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Nous supposons également que les densités de force volumique et surfacique ont la régularité

$$f_0 \in C(0, T; H), \ f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (3.23)$$

et les densités de charges électriques satisfont

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \ q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (3.24)$$

Les coefficients d'adhérence c_ν et ε_a satisfont les conditions

$$c_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \ \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \ c_\nu, \varepsilon_a \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.25)$$

Nous supposons que la fonction d'écart et le potentiel de la fondation satisfont

$$g \in L^2(\Gamma_3), \ g \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \ \varphi_0 \in L^2(\Gamma_3). \quad (3.26)$$

On note U_{ad} le sous ensemble convexe des champs de déplacements admissibles donnés par

$$U_{ad} = \{v \in V / v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3\}, \quad (3.27)$$

et, enfin, les données initiales satisfont

$$u_0 \in U_{ad}, \ \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \ 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \ k_0 \in Y. \quad (3.28)$$

Nous définissons la fonction $f : [0, T] \rightarrow V$, $q : [0, T] \rightarrow W$ et $h : V \times W \rightarrow W$ par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da, \quad (3.29)$$

$$(q(t), \zeta)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \zeta \, da - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \zeta \, da, \quad (3.30)$$

$$(h(u(t), \varphi), \zeta)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g) \phi(\varphi - \varphi_0) \zeta \, da, \quad (3.31)$$

pour tout $u, v \in V$, $\zeta \in W$, $t \in [0, T]$. On remarque que les conditions (3.22) et (3.23) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (3.32)$$

Nous définissons la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} -c_\nu \beta^2 R(u_\nu) v_\nu \, da, \quad (3.33)$$

ainsi que la fonctionnelle de compliance normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$j_{nc}(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu \, da. \quad (3.34)$$

On va donner la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$ pour ceci. En utilisant la formule de Green (2.7) on trouve

$$(\sigma, \varepsilon(v - u))_Q + (\text{Div} \sigma, v - u)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da \quad \forall v \in H_1.$$

D'après (3.4) on a

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - u) \, dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - u) \, dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da \quad \forall v \in H_1. \quad (3.35)$$

Mais on a

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da,$$

si $v \in V$ défini par (2.8), il résulte selon (3.6) et (3.7)

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - u) \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da.$$

D'après la formule (1.3) et la condition (3.8) on a

$$\int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da = \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v_\nu - u_\nu) \, da.$$

Si $v \in U_{ad}$, alors selon (3.9) nous trouvons, pour $u \in U_{ad}$

$$\begin{aligned} (\sigma_\nu + p_\nu(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu))(v_\nu - u_\nu) &= (\sigma_\nu + p_\nu(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu))(v_\nu - g) \\ &\quad + (\sigma_\nu + p_\nu(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu))(g - u_\nu) \\ &= (\sigma_\nu + p_\nu(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu))(v_\nu - g) \geq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v_\nu - u_\nu) \, da \geq \int_{\Gamma_3} c_\nu \beta^2 R(u_\nu) \cdot (v_\nu - u_\nu) - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) \cdot (v_\nu - u_\nu) \, da.$$

Donc

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) \, da \geq \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - u) \, da + \int_{\Gamma_3} c_\nu \beta^2 R(u_\nu) \cdot (v_\nu - u_\nu) - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) \cdot (v_\nu - u_\nu) \, da.$$

En revenant à l'équation (3.35), nous trouvons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - u) \, dx + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) \cdot (v_\nu - u_\nu) \, da + \int_{\Gamma_3} -c_\nu \beta^2 R(u_\nu) \cdot (v_\nu - u_\nu) \\ \geq \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - u) \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - u) \, da \quad \forall v \in U_{ad}, \end{aligned}$$

on a d'après les définitions (3.29), (3.33) et (3.34)

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - u(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) + j_{nc}(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in U_{ad},$$

enfin, il résulte d'après (3.1) et (1.5), pour $t \in [0, T]$

$$(F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q + \left(\int_0^t M(t - s, \varepsilon(u(s)), k(S)) ds, \varepsilon(v - u(t)) \right)_Q$$

$$\begin{aligned}
 & +(\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v - u(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) + j_{nc}(u(t), v - u(t)) \\
 & \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in U_{ad}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, la formule de Green(2.19) permet de donner, pour $D \in \mathcal{W}$

$$(D, \nabla \zeta)_H + (\operatorname{div} D, \zeta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \zeta \, da \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega),$$

or pour le dire

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \zeta \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \cdot \zeta \, da = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \zeta \, da \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega).$$

Où

$$\int_{\Gamma} D \cdot \nu \zeta \, da = \int_{\Gamma_a} D \cdot \nu \zeta \, da + \int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \zeta \, da + \int_{\Gamma_3} D \cdot \nu \zeta \, da.$$

Si $\zeta \in W$, alors

$$\zeta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a.$$

Donc, selon (3.5) ,(3.12) et (3.13) on a

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \zeta \, dx + \int_{\Omega} q_0 \zeta \, da = \int_{\Gamma_b} q_2 \zeta \, da + \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g) \phi(\varphi - \varphi_0) \zeta \, da \quad \forall \zeta \in W,$$

il résulte d'après l'équation (3.2) et les définitions (3.30),(3.31) et , pour $t \in [0, T]$

$$(B \nabla \varphi(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \zeta)_H + (h(u(t), \varphi), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W.$$

Enfin, on obtient la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$.

Problème $\mathcal{PV}$. Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, un potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ et qu'un champ de variable d'état interne $k : [0, T] \rightarrow Y$ tel que

$$u(t) \in U_{ad}, (F \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q + \left(\int_0^t M(t - s, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \varepsilon(v - u) \right)_Q +$$

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v - u(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) + j_{nc}(u(t), v - u(t)) \\
& \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in U_{ad}, t \in [0, T],
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\dot{k}(t) = \Phi(\varepsilon(u(t)), k(t)) \quad p.p. \quad t \in (0, T), \tag{3.37}$$

$$(B \nabla \varphi(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \zeta)_H + (h(u(t), \varphi), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W, t \in [0, T], \tag{3.38}$$

$$\dot{\beta}(t) = -(c_\nu \beta(t) R(u_\nu(t))^2 - \varepsilon_a)_+ \quad p.p. \quad t \in (0, T), \tag{3.39}$$

$$\beta(0) = \beta_0, \quad u(0) = u_0, \quad k(0) = k_0. \tag{3.40}$$

3.3 Existence et unicité de la solution

Notre principal résultat, qui énonce la solvabilité unique du problème $\mathcal{PV}$, est le suivant.

3.3.1 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 3.3.1. *Supposons que (3.16) - (3.28) sont vrais. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \min(m_F, m_B)$, le problème $\mathcal{PV}$ a une solution unique (u, φ, K, β) . De plus, la solution satisfait*

$$u \in C(0, T; V), \tag{3.41}$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \tag{3.42}$$

$$k \in C^1(0, T; Y), \tag{3.43}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z. \tag{3.44}$$

Un " quintuple " de fonctions $(u, \sigma, \varphi, D, \beta)$ qui satisfont (3.1), (3.2), (3.36) - (3.40) est appelé une solution faible du problème de contact $\mathcal{PV}$. Nous concluons par le théorème 3.3.1 que, sous les hypothèses énoncées, le problème $\mathcal{PV}$ a une solution faible unique.

Pour préciser la régularité de la solution faible on note que les relations constitutives (3.1) et (3.2), les hypothèses (3.16) - (3.19) et les régularités (3.41) - (3.44) montrent que $\sigma \in C(0, T; Q)$ et $D \in C(0, T; H)$. Il résulte de (3.4), (3.5) et des régularités (3.23), (3.24) que

$Div\sigma \in C(0, T; H)$ et $divD \in C(0, T; L^2(\Omega))$, et donc

$$\sigma \in C(0, T; Q_1), \quad (3.45)$$

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (3.46)$$

Nous concluons que la solution faible $(u, \sigma, \varphi, D, \beta)$ du problème de contact piézoélectrique $\mathcal{PV}$ a la régularité (3.41) - (3.46).

Nous passons maintenant à la preuve du théorème (3.3.1), qui repose sur des équations non linéaires classiques avec des opérateurs monotones et des équations différentielles ordinaires, combinées à des arguments à point fixe. Cela se fait en plusieurs étapes. Nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses (3.16) - (3.28) sont satisfaites. De plus, tout au long de cette section, c représentera une constante strictement positive qui peut dépendre des données du problème mais elle est indépendante du temps, et sa valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Soit Θ un sous-ensemble fermé de l'espace $C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\Theta = \{\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z / \beta(0) = \beta_0\}.$$

Première étape

Dans la première étape, nous considérons le problème auxiliaire pour le champ de déplacements et de potentiel électrique dans lequel $\beta \in \Theta$.

Problème P_β^1 . Trouver un champ de déplacements $u_\beta : [0, T] \rightarrow V$, et un potentiel électrique $\varphi_\beta : [0, T] \rightarrow W$ tels que :

$$\begin{aligned} u_\beta(t) \in U_{ad}, & (F\varepsilon(u_\beta(t)), \varepsilon(v - u_\beta(t)))_Q + \left(\int_0^t M(t-s, \varepsilon(u_\beta(s)), k(s)) ds, \varepsilon(v - u_\beta(t)) \right)_Q \\ & + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\beta(t), \varepsilon(v - u_\beta(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u_\beta(t), v - u_\beta(t)) + j_{nc}(u_\beta(t), v - u_\beta(t)) \\ & \geq (f(t), v - u_\beta(t))_V \quad \forall v \in U_{ad}, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} & (B \nabla \varphi_\beta(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(v - u_\beta(t)), \nabla \zeta)_H + (h(u_\beta(t), \varphi_\beta), \zeta)_W \\ & = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dans l'étude du problème P_β^1 nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Il existe $\alpha > 0$ qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, F, B$ et P_ν tel que le problème P_β^1 a une unique solution $(u_\beta, \varphi_\beta) \in C(0, T; V \times W)$, si $\alpha < \min(m_F, m_B)$.*

Preuve. La preuve comporte plusieurs étapes, que nous décrivons ci-dessous.

i) Dans la première étape, nous posons $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in C(0, T; Q \times Y)$ tel que $\eta_1(t) = \int_0^t M(t-s, \varepsilon(u_{\beta\eta}(s)), k(s)) ds$, $\eta_2(t) = \Phi(\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), k(t))$ et considérons l'espace de produits de Hilbert $X = V \times W$, avec le produit scalaire suivant

$$(x, y)_X = (u, v)_V + (\varphi, \psi)_W \quad \forall x = (u, \varphi), \forall y = (v, \psi) \in X, \quad (3.49)$$

et la norme associée $\|\cdot\|_X$. Nous introduisons également l'ensemble $K \subset X$ défini par

$$K = U_{ad} \times W. \quad (3.50)$$

Nous avons défini l'opérateur $A_\beta : X \rightarrow X$, la fonction $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $f_\eta(t) \in X$ par

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)x, y)_X &= (F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_Q + (B\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_H + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v))_Q - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi)_Q \\ &\quad + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) \quad \forall x = (u(t), \varphi(t)), y = (v, \psi) \in X, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$j(x, y) = j_{nc}(u(t), v) + (h(u(t), \varphi(t)), \psi)_W \quad \forall x = (u(t), \varphi(t)), y = (v, \psi) \in X, t \in [0, T], \quad (3.52)$$

$$(f_\eta(t), y)_X = (f(t), v)_V + (q(t), \psi)_W - (\eta^1(t), \varepsilon(v))_Q \quad \forall y = (v, \psi) \in X, t \in [0, T]. \quad (3.53)$$

Il est facile de voir que $x_{\beta\eta} = (u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}) : [0, T] \rightarrow X$ est une solution au problème (3.47), (3.48) de régularité $(u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}) \in C(0, T; X)$ si et seulement si $x_{\beta\eta} \in C(0, T; K)$ et satisfait

$$\begin{aligned} x_{\beta\eta}(t) \in K, (A_\beta(t)x_{\beta\eta}(t), y - x_{\beta\eta}(t))_X + j(x_{\beta\eta}(t), y) - j(x_{\beta\eta}(t), x_{\beta\eta}(t)) \geq \\ (f_\eta(t), y - x_{\beta\eta}(t))_X, \quad \forall y \in K, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

En effet

Soit $x_{\beta\eta} = (u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}) : [0, T] \rightarrow X$ une solution du problème P_β^1 . Soit $y = (v, \psi) \in K$ et soit

$t \in [0, T]$. On utilise la fonction test $\psi - \varphi_{\beta\eta}(t)$ dans (3.48)

$$\begin{aligned} (B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla(\psi - \varphi_{\beta\eta}(t)))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)), \nabla(\psi - \varphi_{\beta\eta}(t)))_H + (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \psi - \varphi_{\beta\eta}(t))_W \\ = (q(t), \psi - \varphi_{\beta\eta}(t))_W, \end{aligned}$$

on ajoute l'inégalité correspondante à (3.47)

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q + \left(\int_0^t M(t-s, \varepsilon(u_{\beta\eta}(s)), k(s)) ds, \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)) \right)_Q + \\ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u_{\beta\eta}(t), v - u_{\beta\eta}(t)) + j_{nc}(u_{\beta\eta}(t), v - u_{\beta\eta}(t)) + \\ (B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla(\psi - \varphi_{\beta\eta}(t)))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)), \nabla(\psi - \varphi_{\beta\eta}(t)))_H + (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \psi - \varphi_{\beta\eta}(t))_W \\ \geq (f(t), v - u_{\beta\eta}(t))_V + (q(t), \psi - \varphi_{\beta\eta}(t))_W, \end{aligned}$$

on utilise (3.49)–(3.53) pour obtenir (3.54).

Inversement, supposons que $x_{\beta\eta} = (u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}) : [0, T] \rightarrow K$ vérifie (3.54) et soit $t \in [0, T]$. Pour tout $v \in U_{ad}$, on prend $y = (v, \varphi_{\beta\eta}(t))$ dans (3.54). On a d'après (3.51), (3.52) et (3.53)

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)x_{\beta\eta}(t), y - x_{\beta\eta}(t))_X &= (F\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q + (B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla(\varphi_{\beta\eta}(t) - \varphi_{\beta\eta}(t)))_H \\ &\quad + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \nabla(\varphi_{\beta\eta}(t) - \varphi_{\beta\eta}(t)))_Q \\ &\quad + j_{ad}(\beta(t), u_{\beta\eta}(t), v - u_{\beta\eta}(t)) \\ &= (F\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q \\ &\quad + j_{ad}(\beta(t), u_{\beta\eta}(t), v - u_{\beta\eta}(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j(x_{\beta\eta}(t), y) - j(x_{\beta\eta}(t), x_{\beta\eta}(t)) &= j_{nc}(u_{\beta\eta}(t), v) + (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \varphi_{\beta\eta}(t))_W \\ &\quad - j_{nc}(u_{\beta\eta}(t), u_{\beta\eta}(t)) - (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \varphi_{\beta\eta}(t))_W \\ &= j_{nc}(u_{\beta\eta}(t), v - u_{\beta\eta}(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f_\eta(t), y - x_{\beta\eta}(t))_X &= (f(t), v - u_{\beta\eta}(t))_V + (q(t), \varphi_{\beta\eta}(t) - \varphi_{\beta\eta}(t))_W - (\eta^1(t), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q \\ &= (f(t), v - u_{\beta\eta}(t))_V - (\eta^1(t), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q. \end{aligned}$$

Alors, D'après (3.54) nous trouvons (3.47).

Ensuite, pour tout $\psi \in W$, on prend $y = (u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}(t) + \psi)$ dans (3.54). D'après (3.51), (3.52) et (3.53) on a

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)x_{\beta\eta}(t), y - x_{\beta\eta}(t))_X &= (F\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \varepsilon(u_{\beta\eta} - u_{\beta\eta}(t)))_Q + (B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla(\psi))_H \\ &\quad + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \varepsilon(u_{\beta\eta}(t) - u_{\beta\eta}(t)))_Q - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \nabla(\psi))_Q \\ &\quad + j_{ad}(\beta(t), u_{\beta\eta}(t), u_{\beta\eta} - u_{\beta\eta}(t)) \\ &= (B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla(\psi))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \nabla(\psi))_Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j(x_{\beta\eta}(t), y) - j(x_{\beta\eta}(t), x_{\beta\eta}(t)) &= j_{nc}(u_{\beta\eta}(t), u_{\beta\eta}(t)) + (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \varphi_{\beta\eta}(t) + \psi)_W \\ &\quad - j_{nc}(u_{\beta\eta}(t), u_{\beta\eta}(t)) - (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \varphi_{\beta\eta}(t) + \psi)_W \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f_\eta(t), y - x_{\beta\eta}(t))_X &= (f(t), u_{\beta\eta}(t) - u_{\beta\eta}(t))_V + (q(t), \psi)_W - (\eta^1(t), \varepsilon(u_{\beta\eta}(t) - u_{\beta\eta}(t)))_Q \\ &= (q(t), \psi)_W. \end{aligned}$$

Alors, selon (3.54) nous trouvons

$$(B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)), \nabla\psi)_H + (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \psi)_W \geq (q(t), \psi)_W. \quad (3.55)$$

Posons $y = (u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}(t) - \psi)$. D'après (3.51), (3.52) et (3.53) on a

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)x_{\beta\eta}(t), y - x_{\beta\eta}(t))_X &= (F\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \varepsilon(u_{\beta\eta} - u_{\beta\eta}(t)))_Q - (B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla(\psi))_H \\ &\quad + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \varepsilon(u_{\beta\eta}(t) - u_{\beta\eta}(t)))_Q + (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \nabla(\psi))_Q \\ &\quad + j_{ad}(\beta(t), u_{\beta\eta}(t), u_{\beta\eta} - u_{\beta\eta}(t)) \\ &= - (B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla(\psi))_H + (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \nabla(\psi))_Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j(x_{\beta\eta}(t), y) - j(x_{\beta\eta}(t), x_{\beta\eta}(t)) &= j_{nc}(u_{\beta\eta}(t), u_{\beta\eta}(t)) + (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \varphi_{\beta\eta}(t) - \psi)_W \\ &\quad - j_{nc}(u_{\beta\eta}(t), u_{\beta\eta}(t)) - (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \varphi_{\beta\eta}(t) - \psi)_W \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f_\eta(t), y - x_{\beta\eta}(t))_X &= (f(t), u_{\beta\eta}(t) - u_{\beta\eta}(t))_V - (q(t), \psi)_W - (\eta^1(t), \varepsilon(u_{\beta\eta}(t) - u_{\beta\eta}(t)))_Q \\ &= - (q(t), \psi)_W. \end{aligned}$$

Alors, selon (3.54) nous trouvons

$$(B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)), \nabla\psi)_H + (h(u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}), \psi)_W \leq (q(t), \psi)_W. \quad (3.56)$$

De (3.55) et (3.56), nous trouvons l'inégalité (3.48).

ii) Dans la deuxième étape, nous remarquons que les j_{ad} et j_{nc} sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$j_{ad}(\beta, u, -v) = -j_{ad}(\beta, u, v), \quad j_{nc}(u, -v) = -j_{nc}(u, v). \quad (3.57)$$

En utilisant (3.33), et les inégalités $|R(u_{1\nu})| \leq L$, $|\beta_1| \leq 1$, $|\beta_2| \leq 1$, $|u_{1\nu} - u_{2\nu}| \leq \|u_1 - u_2\|$, on trouve

$$\begin{aligned} j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) &= c_\nu \int_{\Gamma_3} (\beta_1^2 R(u_{1\nu}) - \beta_2^2 R(u_{2\nu}))(u_{1\nu} - u_{2\nu}) \, da \\ &\leq c_\nu L \int_{\Gamma_3} |\beta_1^2 - \beta_2^2| |u_{1\nu} - u_{2\nu}| \\ &\leq c_\nu L \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| |\beta_1 + \beta_2| |u_{1\nu} - u_{2\nu}| \\ &\leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \|u_1 - u_2\| \, da, \end{aligned}$$

ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.12), nous trouvons

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V. \quad (3.58)$$

Ensuite, nous choisissons $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (3.58) pour trouver

$$j_{ad}(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \quad (3.59)$$

Des manipulations similaires, basées sur la continuité Lipschitzienne des opérateurs R montrent

que

$$\begin{aligned}
|j_{ad}(\beta_1, u_1, v) - j_{ad}(\beta_2, u_2, v)| &= \int_{\Gamma_3} -c_\nu((\beta_1^2 R(u_{1\nu}) - \beta_2^2 R(u_{2\nu}))v_\nu) da \\
&= \int_{\Gamma_3} -c_\nu((\beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_2^2)R(u_{1\nu}) - \beta_2^2(R(u_{2\nu})))v_\nu da \\
&\leq \int_{\Gamma_3} (c_1|\beta_1 - \beta_2| + c_2|u_{1\nu} - u_{2\nu}|)|v_\nu| da,
\end{aligned}$$

Notons que $|u_{1\nu} - u_{2\nu}| \leq \|u_1 - u_2\|$, $|v_\nu| \leq \|v\|$ p.p. sur Γ_3 , on obtient

$$|j_{ad}(\beta_1, u_1, v) - j_{ad}(\beta_2, u_2, v)| \leq c \int_{\Gamma_3} (|\beta_1 - \beta_2| + \|u_1 - u_2\|)\|v\| da,$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.12) pour trouver

$$|j_{ad}(\beta_1, u_1, v) - j_{ad}(\beta_2, u_2, v)| \leq c(\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u_1 - u_2\|_V)\|v\|_V. \quad (3.60)$$

De plus, on prend $u_1 = v, u_2 = 0$ dans (3.59), puis on utilise l'égalité $R(0) = 0$ pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0. \quad (3.61)$$

Maintenant, nous utilisons (3.34),(3.21)(b) et (2.12) pour voir que

$$\begin{aligned}
|j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v)| &\leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})||v_\nu| da \\
&\leq L_\nu \int_{\Gamma_3} |u_{1\nu} - u_{2\nu}| |v_\nu| da \\
&\leq L_\nu \int_{\Gamma_3} \|u_1 - u_2\| \|v\| da \\
&\leq L_\nu c_0^2 \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V.
\end{aligned} \quad (3.62)$$

Nous utilisons à nouveau (3.34) pour obtenir

$$j_{nc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \leq \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu}))(u_{2\nu} - u_{1\nu}) da,$$

et alors, (3.21) (c) implique

$$j_{nc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \quad (3.63)$$

Enfin, nous utilisons les bornes $|\psi(v)| \leq M_\psi$, $|\phi(\varphi_1 - \varphi_0)| \leq L_\phi$, la continuité Lipschitzienne des fonctions ψ et ϕ , et les inégalités (2.12),(2.16) pour obtenir

$$(h(u_1, \varphi_1), \varphi_2)_W - (h(u_1, \varphi_1), \varphi_1)_W + (h(u_2, \varphi_2), \varphi_1)_W - (h(u_2, \varphi_2), \varphi_2)_W \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\Gamma_3} |\psi(u_{1\nu} - g)\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_{2\nu} - g)\phi(\varphi_1 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} |(\psi(u_{1\nu} - g) - \psi(u_{2\nu} - g) + \psi(u_{2\nu} - g)) \phi(\varphi_1 - \varphi_0) \\ &\quad - \psi(u_2 - g)\phi(\varphi_2 - \varphi_0))| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \int_{\Gamma_3} |\varphi_2 - \varphi_1|^2 + L_\psi L_\phi \int_{\Gamma_3} \|u_2 - u_1\| |\varphi_2 - \varphi_1| da \\ &\leq M_\psi c_0 \|\varphi_2 - \varphi_1\|_W^2 + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0 \|u_2 - u_1\|_V \|\varphi_2 - \varphi_1\|_W. \end{aligned}$$

iii) Dans cette étape, nous voyons que $A_\beta(t)$ est un opérateur lipschitzien continu fortement monotone sur X et qu'il satisfait

$$(A_\beta x_{\beta_1\eta} - A_\beta x_{\beta_2\eta}, x_{\beta_1\eta} - x_{\beta_2\eta})_X \geq \min(m_F, m_B) \|x_{\beta_1\eta} - x_{\beta_2\eta}\|_X^2. \quad (3.65)$$

En effet

Pour $x_{\beta_1\eta} = (u_{\beta_1\eta}, \varphi_{\beta_1\eta})$, $x_{\beta_2\eta} = (u_{\beta_2\eta}, \varphi_{\beta_2\eta}) \in X$ et pour tout $y = (v, \psi) \in X$. On utilise la définition (3.51) de l'opérateur A_β et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Nous trouvons

$$\begin{aligned} (A_\beta x_{\beta_1\eta} - A_\beta x_{\beta_2\eta}, y)_X &\leq \|F\varepsilon(u_{\beta_1\eta}) - F\varepsilon(u_{\beta_2\eta})\|_Q \|\varepsilon(v)\|_Q + \|B\nabla(\varphi_{\beta_1\eta}) - B\nabla(\varphi_{\beta_2\eta})\|_H \|\nabla(\psi)\|_H + \\ &\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_{\beta_1\eta}) - \mathcal{E}^*\nabla(\varphi_{\beta_2\eta})\|_Q \|\varepsilon(v)\|_Q + \|\mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta_1\eta}) - \mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta_2\eta})\|_H \|\nabla(\psi)\|_H + |j_{ad}(\beta, u_{\beta_1\eta}, v) - j_{ad}(\beta, u_{\beta_2\eta}, v)|, \end{aligned}$$

d'après les hypothèses (3.16) et (3.18)- (3.19) on obtient

$$\begin{aligned} (A_\beta x_{\beta_1\eta} - A_\beta x_{\beta_2\eta}, y)_X &\leq c(\|\varepsilon(u_{\beta_1\eta}) - \varepsilon(u_{\beta_2\eta})\|_Q \|\varepsilon(v)\|_Q + \|\nabla(\varphi_{\beta_1\eta}) - \nabla(\varphi_{\beta_2\eta})\|_H \|\nabla(\psi)\|_H \\ &\quad + \|\nabla(\varphi_{\beta_1\eta}) - \nabla(\varphi_{\beta_2\eta})\|_H \|\varepsilon(v)\|_Q + \|\varepsilon(u_{\beta_1\eta}) - \varepsilon(u_{\beta_2\eta})\|_Q \|\nabla(\psi)\|_H) \\ &\quad + |j_{ad}(\beta, u_{\beta_1\eta}, v) - j_{ad}(\beta, u_{\beta_2\eta}, v)|, \end{aligned}$$

les égalités (2.11), (2.15) et (3.60) donnent

$$\begin{aligned} (A_\beta x_{\beta_1\eta} - A_\beta x_{\beta_2\eta}, y)_X &\leq c (\|u_{\beta_1\eta} - u_{\beta_2\eta}\|_V \|v\|_V + \|\varphi_{\beta_1\eta} - \varphi_{\beta_2\eta}\|_W \|\psi\|_W \\ &\quad + \|\varphi_{\beta_1\eta} - \varphi_{\beta_2\eta}\|_W \|v\|_V + \|u_{\beta_1\eta} - u_{\beta_2\eta}\|_V \|\psi\|_W) \end{aligned}$$

de la définition de $\|\cdot\|_X$, nous concluons que

$$(A_\beta x_{\beta_1\eta} - A_\beta x_{\beta_2\eta}, y)_X \leq c \|x_{\beta_1\eta} - x_{\beta_2\eta}\|_X \|y\|_X,$$

pour $y = A_\beta x_{\beta_1\eta} - A_\beta x_{\beta_2\eta}$, on obtient

$$\|A_\beta x_{\beta_1\eta} - A_\beta x_{\beta_2\eta}\|_X \leq c \|x_{\beta_1\eta} - x_{\beta_2\eta}\|_X.$$

Ce qui montre que $A : X \rightarrow X$ est un opérateur lipschitzien continu. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} (A_\beta x_{\beta_1\eta} - A_\beta x_{\beta_2\eta}, x_{\beta_1\eta} - x_{\beta_2\eta})_X &= (F\varepsilon(u_{\beta_1\eta}) - F\varepsilon(u_{\beta_2\eta}), \varepsilon(u_{\beta_1\eta}) - \varepsilon(u_{\beta_2\eta}))_Q \\ &\quad + (B\nabla(\varphi_{\beta_1\eta}) - B\nabla(\varphi_{\beta_2\eta}), \nabla(\varphi_{\beta_1\eta} - \varphi_{\beta_2\eta}))_H + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_{\beta_1\eta}) - \mathcal{E}^*\nabla(\varphi_{\beta_2\eta}), \varepsilon(u_{\beta_1\eta}) - \varepsilon(u_{\beta_2\eta}))_Q \\ &\quad - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta_1\eta}) - \mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta_2\eta}), \nabla(\varphi_{\beta_1\eta} - \varphi_{\beta_2\eta}))_H + j_{ad}(\beta, u_{\beta_1\eta}, u_{\beta_1\eta} - u_{\beta_2\eta}) - j_{ad}(\beta, u_{\beta_2\eta}, u_{\beta_1\eta} - u_{\beta_2\eta}). \end{aligned}$$

Nous savons que

$$(\mathcal{E}\varepsilon(u_1) - \mathcal{E}\varepsilon(u_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H = (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_1) - \mathcal{E}^*\nabla(\varphi_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_Q.$$

Ainsi, en utilisant (3.16)(c), (3.19)(d), (3.59), (2.11) et (2.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} (A_\beta x_{\beta_1\eta} - A_\beta x_{\beta_2\eta}, x_{\beta_1\eta} - x_{\beta_2\eta})_X &\geq m_F \|\varepsilon(u_{\beta_1\eta}) - \varepsilon(u_{\beta_2\eta})\|_Q^2 + m_B \|\nabla(\varphi_{\beta_1\eta} - \varphi_{\beta_2\eta})\|_H^2 \\ &\geq \min(m_F, m_B) (\|u_{\beta_1\eta} - u_{\beta_2\eta}\|_V^2 + \|\varphi_{\beta_1\eta} - \varphi_{\beta_2\eta}\|_W^2) \\ &\geq \min(m_F, m_B) \|x_{\beta_1\eta} - x_{\beta_2\eta}\|_X^2. \end{aligned}$$

Alors $A_\beta : X \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone sur X .

De plus, on peut facilement vérifier que, pour un $x \in X$ donné, la fonctionnelle $j(x, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et semi-continue inférieurement et qu'elle satisfait

$$j(x_1, y_2) - j(x_1, y_1) + j(x_2, y_1) - j(x_2, y_2) \leq (L_\nu c_0^2 + M_\psi c_0 + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0) \|x_1 - x_2\|_X \|y_1 - y_2\|_X. \quad (3.66)$$

En effet

En utilisant (3.52), (3.62) et (3.64), on trouve

$$\begin{aligned}
j(x_1, y_2) - j(x_1, y_1) + j(x_2, y_1) - j(x_2, y_2) &= j_{nc}(u_1, v_2 - v_1) + j_{nc}(u_2, v_1 - v_2) \\
&\quad + (h(u_1, \varphi_1), \psi_2)_W - (h(u_1, \varphi_1), \psi_1)_W \\
&\quad + (h(u_2, \varphi_2), \psi_1)_W - (h(u_2, \varphi_2), \psi_2)_W \\
&\leq L_\nu c_0^2 \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V \\
&\quad + M_\psi c_0 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\psi_1 - \psi_2\|_W \\
&\quad + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0 \|u_1 - u_2\|_V \|\psi_1 - \psi_2\|_W \\
&\leq (L_\nu c_0^2 + M_\psi c_0 + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0) \|x_1 - x_2\|_X \|y_1 - y_2\|_X.
\end{aligned}$$

Supposons que

$$\alpha = L_\nu c_0^2 + M_\psi c_0 + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0 < \min(m_F, m_B). \quad (3.67)$$

En utilisant un résultat standard d'existence et d'unicité sur les inégalités quasi-variationnelles elliptiques (2.4.2), il en résulte qu'il existe un élément unique $x_{\beta\eta} \in K$ qui satisfait (3.54).

Pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, un argument basé sur (3.54) montre que

$$\begin{aligned}
(A_\beta(t_1)x_{\beta\eta}(t_1), x_{\beta\eta}(t_2) - x_{\beta\eta}(t_1))_X &\geq -j(x_{\beta\eta}(t_1), x_{\beta\eta}(t_2)) + j(x_{\beta\eta}(t_1), x_{\beta\eta}(t_1)) \\
&\quad + (f_\eta(t_1), x_{\beta\eta}(t_2) - x_{\beta\eta}(t_1))_X,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(A_\beta(t_2)x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2))_X &\geq -j(x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_1)) + j(x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_2)) \\
&\quad + (f_\eta(t_2), x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2))_X.
\end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned}
&(A_\beta(t_1)x_{\beta\eta}(t_1), x_{\beta\eta}(t_2) - x_{\beta\eta}(t_1))_X + (A_\beta(t_2)x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2))_X \\
&= -(A_\beta(t_1)x_{\beta\eta}(t_1) - A_\beta(t_2)x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2))_X
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} - (A_\beta(t_1)x_{\beta\eta}(t_1) - A_\beta(t_2)x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2))_X &\geq -j(x_{\beta\eta}(t_1), x_{\beta\eta}(t_2)) + j(x_{\beta\eta}(t_1), x_{\beta\eta}(t_1)) \\ &\quad - j(x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_1)) + j(x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_2)) \\ &\quad - (f_\eta(t_1) - f_\eta(t_2), x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2))_X, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (A_\beta(t_1)x_{\beta\eta}(t_1) - A_\beta(t_2)x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2))_X &\leq j(x_{\beta\eta}(t_1), x_{\beta\eta}(t_2)) - j(x_{\beta\eta}(t_1), x_{\beta\eta}(t_1)) \\ &\quad + j(x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_1)) - j(x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_2)) \\ &\quad + (f_\eta(t_1) - f_\eta(t_2), x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2))_X \\ &\leq L_\nu c_0^2 + M_\psi c_0 + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0 \|x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2)\|_X^2 \\ &\quad + \|f_\eta(t_1) - f_\eta(t_2)\|_X \|x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2)\|_X. \end{aligned}$$

En utilisant (3.51), (3.16)(c), (3.19)(d), (3.58), (2.11) et (2.15), nous trouvons

$$\begin{aligned} (A_\beta(t_1)x_{\beta\eta}(t_1) - A_\beta(t_2)x_{\beta\eta}(t_2), x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2))_X &\geq \min(m_F, m_B) \|x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2)\|_X^2 \\ &\quad - c \|\beta(t_1) - \beta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2)\|_X. \end{aligned}$$

Alors

$$\|x_{\beta\eta}(t_1) - x_{\beta\eta}(t_2)\|_X \leq \frac{c}{\min(m_F, m_B) - \alpha} (\|\beta(t_1) - \beta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|f_\eta(t_1) - f_\eta(t_2)\|_X). \quad (3.68)$$

En rappelant les régularités $f_\eta \in C(0, T; X)$ et $\beta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$, il résulte de (3.68) que $x_{\beta\eta} \in C(0, T; X)$.

iv) Maintenant, soit $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in C(0, T; Q \times Y)$, nous définissons $k_\eta \in C^1(0, T; Y)$ et l'opérateur $\Lambda_\beta = (\Lambda_\beta^1, \Lambda_\beta^2) : C(0, T; Q \times Y) \rightarrow C(0, T; Q \times Y)$ par

$$k_\eta(t) = k_0 + \int_0^t \eta^2(s) \, ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.69)$$

$$\Lambda_\beta^1 \eta(t) = \int_0^t M(t-s, \varepsilon(u_{\beta\eta}(s)), k_\eta(s)) \, ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.70)$$

$$\Lambda_\beta^2 \eta(t) = \Phi(\varepsilon(u_{\beta\eta}(t), k(t))) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.71)$$

On utilise la notation $x_{\beta\eta_i} = (u_{\beta\eta_i}, \varphi_{\beta\eta_i}) = x_i = (u_i, \varphi_i)$ et $k_{\eta_i} = k_i$ pour $i = 1, 2$. De (3.70)

, (3.17) et (2.11) on a

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\beta^1 \eta_1(t) - \Lambda_\beta^1 \eta_2(t)\|_Q &\leq \int_0^t \|M(t-s, \varepsilon(u_1(s)), k_1(s)) - M(t-s, \varepsilon(u_2(s)), k_2(s))\|_Q ds \\
&\leq L_M \left(\int_0^t \|\varepsilon(u_1(s)) - \varepsilon(u_2(s))\|_Q ds + \int_0^t \|k_1(s) - k_2(s)\|_Y ds \right) \\
&\leq c \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|k_1(s) - k_2(s)\|_Y ds \right).
\end{aligned}$$

De même, nous utilisons (3.71), (3.20) et (2.11) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\beta^2 \eta_1(t) - \Lambda_\beta^2 \eta_2(t)\|_Y &= \|\Phi(\varepsilon(u_1(t)), k_1(t)) - \Phi(\varepsilon(u_2(t)), k_2(t))\|_Y \\
&\leq L_\Phi (\|\varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t))\|_Q + \|k_1(t) - k_2(t)\|_Y) \\
&\leq c (\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|k_1(t) - k_2(t)\|_Y).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\beta \eta_1(t) - \Lambda_\beta \eta_2(t)\|_{Q \times Y} &\leq c \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|k_1(s) - k_2(s)\|_Y ds \right. \\
&\quad \left. + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|k_1(t) - k_2(t)\|_Y \right). \tag{3.72}
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la relation (3.54) on trouve que

$$\begin{aligned}
(A_\beta(t)x_1(t) - A_\beta(t)x_2(t), x_1(t) - x_2(t))_X &\leq j(x_1(t), x_2(t)) - j(x_1(t), x_2(t)) \\
&\quad + j(x_2(t), x_1(t)) - j(x_2(t), x_2(t)) \\
&\quad + (f_\eta(t_1) - f_\eta(t_2), x_1(t) - x_2(t))_X \\
&\leq L_\nu c_0^2 + M_\psi c_0 + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0 \|x_1(t) - x_2(t)\|_X^2 \\
&\quad + \|\eta_1^1(t) - \eta_2^1(t)\|_Q \|x_1(t) - x_2(t)\|_X,
\end{aligned}$$

il résulte de (3.65) que

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|_X \leq \frac{1}{\min(m_F, m_B) - \alpha} \|\eta_1^1(t) - \eta_2^1(t)\|_Q$$

ce qui implique

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c \|\eta_1^1(t) - \eta_2^1(t)\|_Q. \tag{3.73}$$

De plus, à partir de (3.69) nous avons

$$\|k_{\eta_1}(t) - k_{\eta_2}(t)\|_Y \leq c \int_0^t \|\eta_1^2(s) - \eta_2^2(s)\|_Y ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.74)$$

Alors, d'après (3.72), (3.73) et (3.74), en obtient

$$\|\Lambda_\beta \eta_1(t) - \Lambda_\beta \eta_2(t)\|_{Q \times Y} \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{Q \times Y} ds \quad \forall t \in [0, T].$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\beta \eta_1(t) - \Lambda_\beta \eta_2(t)\|_{Q \times Y} &\leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{Q \times Y} ds, \\ \|\Lambda_\beta^2 \eta_1(t) - \Lambda_\beta^2 \eta_2(t)\|_{Q \times Y} &\leq c \int_0^t c \int_0^s \|\eta_1(r) - \eta_2(r)\|_{Q \times Y} dr ds, \\ \|\Lambda_\beta^2 \eta_1(t) - \Lambda_\beta^2 \eta_2(t)\|_{Q \times Y} &\leq c^2 \int_0^t \int_0^s \|\eta_1(r) - \eta_2(r)\|_{Q \times Y} dr ds, \\ \|\Lambda_\beta^3 \eta_1(t) - \Lambda_\beta^3 \eta_2(t)\|_{Q \times Y} &\leq c^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^r \|\eta_1(l) - \eta_2(l)\|_{Q \times Y} dl dr ds, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \|\Lambda_\beta^m \eta_1 - \Lambda_\beta^m \eta_2\|_{C(0,T;Q \times Y)} &\leq c^m \underbrace{\int_0^t \int_0^s \cdots \int_0^h}_{m \text{ integrals}} \|\eta_1(l) - \eta_2(l)\|_{C(0,T;Q \times Y)} dl \cdots dr ds. \end{aligned}$$

On sait que : $\int_0^r dl = r$,

et que $\int_0^s \int_0^r dl dr = \int_0^s r dr = \frac{s^2}{2}$,

et que $\int_0^t \int_0^s \int_0^r dl dr ds = \frac{t^3}{6}$,

$\int_0^t \int_0^s \cdots \int_0^r dl \cdots dr ds = \frac{t^m}{m!}$,

Alors

$$\|\Lambda_\beta^m \eta_1 - \Lambda_\beta^m \eta_2\|_{C(0,T;Q \times Y)} \leq \frac{c^m T^m}{m!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{C(0,T;Q \times Y)}.$$

L'estimation qui implique qu'une puissance Λ_β^m de Λ_β est une contraction sur l'espace $C(0, T; Q \times$

Y). Ainsi, Λ_β^m possède un unique élément fixe $\eta_\beta \in C(0, T; Q \times Y)$ qui est également un unique point fixe de Λ_β , i.e.

$$\Lambda_\beta \eta_\beta(t) = \eta_\beta(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.75)$$

Enfin, notons $u_{\beta\eta} = u_\beta$ et $\varphi_{\beta\eta} = \varphi_\beta$, le couple (u_β, φ_β) est l'unique solution du problème (3.47)-(3.48). En effet, l'existence et l'unicité découlent de (3.54), (3.57) - (3.75).

Deuxième étape

Afin de prouver le théorème (3.3.1), nous avons besoin d'autres résultats intermédiaires. Considérons u_β la solution obtenue ci-dessus et définissons le problème de Cauchy suivant énoncé comme suit.

Problème P_β^2 . Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que,

$$\dot{\theta}_\beta(t) = -(\theta_\beta(t)c_\nu R(u_{\beta\nu}(t))^2 - \varepsilon_a)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.76)$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0. \quad (3.77)$$

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *Le problème P_β^2 a une solution unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z$.*

Preuve. Considérons l'application $F_\beta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ définie par

$$F_\beta(t, \theta) = -(\theta_\beta(t)c_\nu R(u_{\beta\nu}(t))^2 - \varepsilon_a)_+.$$

Pour tout $t \in [0, T]$ et $\theta \in L^2(\Gamma_3)$. Il résulte des propriétés de l'opérateur de troncature R que F_β est lipschitzienne continue par rapport au second argument. De plus, pour tout $\theta \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \mapsto F_\beta(t, \theta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. En utilisant maintenant une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (2.5.1), nous obtenons l'existence d'une unique fonction $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui résout (3.76), (3.77). Nous notons que (3.39) et (3.40) garantissent que $\beta(t) \leq \beta_0$ et, par conséquent, l'hypothèse (3.28) montre que $\beta(t) \leq 1$, pour $t \geq 0$ p.p. sur Γ_3 . D'autre part, si $\beta(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il résulte de (3.39) et (3.40) que $\dot{\beta}(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc, $\beta(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ p.p. sur Γ_3 . Nous concluons que

$0 \leq \beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. sur Γ_3 . Par conséquent, d'après la définition de l'ensemble Z , on trouve que $\theta_\beta \in Z$ ce qui conclut la preuve du lemme.

Il résulte du lemme (3.3.2) que pour tout $\beta \in \Theta$ la solution θ_β du problème P_β^2 appartient à Θ . Nous considérons l'opérateur $\Lambda : \Theta \rightarrow \Theta$ donné par $\Lambda\beta = \theta_\beta$.

Dernière étape

Dans cette étape, nous prouverons le résultat suivant.

Lemme 3.3.3. *Il existe un élément unique $\beta^* \in \Theta$ tel que $\Lambda\beta^* = \beta^*$.*

Preuve. Supposons que β_1, β_2 soient deux fonctions de Θ et notons $x_{\beta_i} = x_i, \theta_{\beta_i} = \theta_i$ les fonctions obtenues respectivement dans les lemmes (3.3.1) et (3.3.2) pour $\beta = \beta_i, i = 1, 2$. Pour $t \in [0, T]$, un argument basé sur (3.54) montre que

$$\begin{aligned} (A_{\beta_1}(t)x_1(t) - A_{\beta_2}(t)x_2(t), x_1(t) - x_2(t))_X &\leq j(x_1(t), x_2(t)) - j(x_1(t), x_1(t)) \\ &\quad + j(x_2(t), x_1(t)) - j(x_2(t), x_2(t)) + (f_\eta(t) - f_\eta(t), x_1(t) - x_2(t))_X \\ &\leq L_\nu c_0^2 + M_\psi c_0 + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0 \|x_1(t) - x_2(t)\|_X^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (3.51) (3.16)(c), (3.19)(d), (3.58), (2.11) et (2.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} (A_{\beta_1}(t)x_1(t) - A_{\beta_2}(t)x_2(t), x_1(t) - x_1(t))_X &= (F\varepsilon(u_1) - F\varepsilon(uu_2), \varepsilon(u_1) - u_2))_Q \\ &\quad + (B\nabla(\varphi_1) - B\nabla(\varphi_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_1) - \mathcal{E}^*\nabla(\varphi_2), \varepsilon(u_1) - u_2))_Q \\ &\quad - (\mathcal{E}\varepsilon(u_1) - \mathcal{E}\varepsilon(u_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H + j_{ad}(\beta_1, u_1, u_1 - u_2) - j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \\ &\geq \min(m_F, m_B) \|x_1(t) - x_2(t)\|_X^2 - c \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|x_1(t) - x_2(t)\|_X. \end{aligned}$$

Donc

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|_X \leq \frac{c}{\min(m_F, m_B) - \alpha} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)},$$

ce qui implique

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}. \quad (3.78)$$

D'autre part, il résulte de (3.76) et (3.77) que

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\theta_i(s) c_\nu R(u_{i\nu}(s))^2 - \varepsilon_a)_+ ds,$$

et puis

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\theta_1(s) R(u_{1\nu}(s))^2 - \theta_1(s) R(u_{2\nu}(s))^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

En utilisant la définition de R et en écrivant $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$, nous obtenons

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \left(\int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right).$$

Par l'inégalité de Gronwall, il s'ensuit que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

en utilisant (2.12) nous obtenons

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds.$$

Nous déduisons

$$\|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds. \quad (3.79)$$

Nous combinons maintenant (3.78) avec (3.79) pour déduire

$$\|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

en réitérant cette inégalité m fois (en utilisant la même méthode de lemme (3.3.1)), cela donne

$$\|\Lambda^m\beta_1 - \Lambda^m\beta_2\|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{c^m T^m}{m!} \|\beta_1 - \beta_2\|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))}.$$

Alors, pour m suffisamment grand, l'opérateur Λ^m est une contraction sur $C(0, T; L^2(\Gamma_3))$, alors Λ^m admet un unique point fixe β^* qui est aussi un unique point fixe de Θ .

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour fournir la preuve du théorème (3.3.1).

3.3.2 Démonstration du théorème

Existence Soit $\beta^* \in \Theta$ le point fixe de l'opérateur $\Lambda : \Theta \rightarrow \Theta$ donné par $\Lambda\beta = \theta_\beta$ et soit (u^*, φ^*) la solution du problème P_β^1 obtenue dans le lemme 3.3.1 pour $\beta = \beta^*$, i.e. $u^* = u_{\beta^*}, \varphi^* = \varphi_{\beta^*}$. Puisque $\theta_{\beta^*} = \beta^*$ nous concluons par (3.47)-(3.48), (3.76)-(3.77) et (3.69) que $(u^*, \varphi^*, k^*, \beta^*)$, où $k^* = k_{\beta^*}$ est une solution du problème $\mathcal{PV}$ et β^* satisfait (3.44). De plus, puisque $\theta_{\beta^*} = \beta^*$, l'inégalité (3.68) implique que le couple (u^*, φ^*) appartient à $C(0, T; X)$, et l'égalité (3.69) implique que la fonction k^* appartient à $C^1(0, T; Y)$, dont les fonctions u^*, φ^*, k^* ont la régularité exprimée dans (3.41)-(3.43).

Unicité L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ . En effet, soit (u, φ, k, β) une solution du problème $\mathcal{PV}$ satisfaisant (3.41)–(3.44). Il résulte de (3.47)–(3.48) que (u, φ) est une solution du problème P_β^1 , et comme ce problème a une solution unique notée (u, φ) d'après le lemme (3.3.1), on obtient

$$u = u_\beta, \quad \varphi = \varphi_\beta. \quad (3.80)$$

Ensuite, nous remplaçons $u = u_\beta, \varphi = \varphi_\beta$ dans (3.37), (3.39) et utilisons la condition initiale (3.40) pour voir que k est une solution de (3.69) et β est une solution du problème P_β^2 . Puisque par le lemme (3.3.2), ce dernier problème a une solution unique, notée θ_β nous trouvons

$$k = k_\beta, \quad \beta = \theta_\beta. \quad (3.81)$$

Nous utilisons maintenant $\Lambda\beta = \theta_\beta$ et (3.81) pour obtenir que $\Lambda\beta = \beta$, i.e. β est un point fixe de l'opérateur Λ . Il résulte maintenant du lemme (3.3.3) que

$$\beta = \beta^*. \quad (3.82)$$

L'unicité du théorème découle désormais des égalités (3.80)- (3.82).

Dans ce mémoire, nous avons étudié un nouveau modèle mathématique décrivant le contact sans frottement d'un processus quasi-statique entre un corps électro-élastique à longue mémoire et une base adhésive conductrice. Le contact est décrit par une condition de compliance normale et d'adhésion. La loi de comportement associée au matériau électro-élastique étudié est la loi de Coulomb avec une variable d'état interne, dans laquelle l'adhésion des surfaces de contact est prise en compte, et une condition de conductivité électrique régularisée.

Nous avons présenté une formulation des équations et des inéquations variationnelles de ce problème à étudier, pour ceci en utilisant la formule de Green.

Enfin, l'existence et l'unicité d'une solution faible sont établies sous quelques hypothèses de faible conductance de surface. La preuve repose sur des arguments tirés des résultats généraux sur les équations d'évolution non linéaires avec opérateurs monotones, le théorème de Cauchy-Lipshitz, le lemme de Gronwall et le point fixe de Banach.

- [1] ADAMS, R. A. Sobolev Spaces, Academic Press, New York, (1975).
- [2] AZEB AHMED, A. Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [3] BARBOTEU, M. ; FERNANDEZ, J. R. ; OUAFIK, Y. Numerical analysis of two frictionless elastic-piezoelectric contact problems, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008), 905–917.
- [4] BARBU, V. ; PRECUPANU, T. Convexity and optimisation in Banach spaces, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1986).
- [5] BATRA, R.C. ; YANG, J.S. Saint-Venant’s principle in linear piezoelectricity, J. Elast. 38 (1995), 209–218.
- [6] BRÉZIS, H. Analyse fonctionnelle, Théorie et Application, Masson, (1987).
- [7] CHAU, O. ; FERNANDEZ, J.R. ; SHILLOR, M. ; SOFENEA, M. Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion, J. Comput. Math. Appl. 159 (2003), 431–465.
- [8] CHOUGUI, N. ; DRABLA, S. ; HEMICI, N. Variational analysis of an electro-viscoelastic contact problem friction and adhesion, J. Korean Math. Soc. 53 (2016), 161–185.
- [9] COCU, M. Existence of solutions of Signorini problems with friction, Int. J. Engng. Sci. 22 (1984), 567–581.
- [10] COCU, M. ; ROCCA, R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion, Math. Model. Num. Anal. 34 (2000), 981–1001.
- [11] CRISTESCU, N. ; SULICIU, I. Viscoplasticity, Martinus Nijhoff Publishers, Editura Tehnica, Bucharest 1982.
- [12] FRÉMOND, M. Adhérence des solides, J. Mécanique Théorique et Appliquée 6 (1987), 383–407.

-
- [13] FRÉMOND, M. *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin 2002.
 - [14] HAN, W. ; SOFONEA, M. *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, *Studies in Advanced Mathematics* 30, American Mathematical Society and International Press, (2002).
 - [15] HAN, W. ; SOFONEA, M. ; KAZMI, K. Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196 (2007), 3915–3926.
 - [16] IONESCU, I. R. ; SOFONEA, M. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).
 - [17] GUETTAF, R. ; TOUZALINE, A. Analysis of a contact problem with adhesion for electro-viscoelastic materials with long memory, *REV. ROUMAINE MATH. PURES APPL.* 58(1) (2013), 67-84.
 - [18] LATRECHE, S. ; SELMANI, L. Analysis of a frictionless contact problem with adhesion for piezoelectric materials, *TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS* 21(1) (2017), 81-105.
 - [19] LERGUET, Z. ; SOFONEA, M. ; DRABLA, S. Analysis of a frictional contact problem with adhesion, *Acta Math. Univ. Comenianae* Vol.LXXVII(2) (2008), 181–198.
 - [20] NECAS, J. ; HLAVACEK, I. *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies, An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, (1981).
 - [21] RAOUS, M. ; CANGÉMI, L. ; COCU, M. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 177 (1999), 383–399.
 - [22] ROJEK, J. ; TELEGA, J. J. Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I : General developments, *J. Theor. Appl. Mech.* 39 (2001), 655–677.
 - [23] SELMANI, L. A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variable, *APPLICATIONES MATHEMATICAE* 40(1) (2013), 1-20.
 - [24] SOFONEA, M. Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body, *Adv. Math. Sci. Appl.* 14(2) (2004), 613-631.
 - [25] SOFONEA, M. ; MATEI, A. *Mathematical Models in Contact Mechanics*, Cambridge University Press, New York, (2012).
 - [26] SOFONEA, M. ; HAN, W. ; SHILLOR, M. *Analysis and approximation of contact problems with adhesion or damage*, *Pure and Applied Mathematics* 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006.