



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

**Thème**

Méthode d'itérations monotones appliquée  
aux équations différentielles fractionnaires

Présenté par: Sihem Rachdene

Souhaila Lammari

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Khadidja Nisse  
Lamine Nisse  
Mouhammed  
M.Bekkouch

MCA/Prof.  
Prof.  
MCA/MC

Président  
Rapporteur  
Examineur

Univ. El Oued  
Univ. El Oued  
Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

# Dédicace

Avec un énorme plaisir, un coeur ouvert et une immense joie,

que je dédie ce mémoire

à mes très chers, respectueux et magnifiques parents ma mère et mon père,

Qui m'ont soutenus tout au long de ma vie.

Par leur patience, leur amours et leur encouragement.

A mes frères,

à mes seours,

à toute ma famille,

à tous mes amis,

à tous mes enseignants, pour leur utiles consiels, leur patience et leur persévérance.

# Remerciements

Mon premier remerciement va à Allah soubhanahou wa tahala.

Je tenais à remercier vivement mon encadreur de mémoire, **Prof. NISSE Lamine**,  
pour ses

conseils, son encouragement et sa disponibilité dans ce travail.

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père, ma mère, mes frères et  
mes soeurs,

qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement.

Il est important pour moi de remercier toutes mes amies (Ben nacer Nour el houda et  
Charrahi Hanan).

Il est important pour moi de remercier tous les enseignants de l'université **Echahid  
Hamma Lakhdar - El-Oued**.

# Notations générales

$\mathbb{R}$	: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	: ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$	: espace vectoriel de dimension $n$ construit sur le corps des réels.
$[a, b)$	: intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémité $a$ et $b$ .
$C([0, h], \mathbb{R}^n)$	: ensemble des fonctions continues de $[0, h]$ dans $\mathbb{R}^n$ .
$D^\alpha$	: opérateur de dérivation d'ordre non entier $\alpha$ .
$ \cdot $	: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\Gamma(\cdot)$	: fonction Gamma d'Euler.
$E_\alpha$	: fonction de Mittag-Leffler.
$I^\alpha f(x)$	: intégration d'ordre $\alpha$ .
${}^C D^\alpha f(x)$	: dérivée d'ordre $\alpha$ selon la définition de Caputo.
${}^R D^\alpha f(x)$	: dérivée d'ordre $\alpha$ selon la définition de Riemann-Liouville.
$AC([a, b])$	: l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ .
$C^n([a, b])$	: l'espace des fonctions $f$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n$ continues sur $[a, b]$ .
$L^1([a, b])$	: l'espace des (classes de) fonctions $f$ réelles sur $[a, b]$ telles que $f$ est intégrable sur

# Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation des équations différentielles ordinaires où l'ordre de dérivation est considéré non entier.

Dans ce mémoire nous étudions la méthode des sur-solutions et des sous-solutions combinée avec la technique des itérations monotones appliquée aux équations différentielles fractionnaires avec des conditions initiales. On a appliqué cette méthode pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo.

**Les mots clé :** intégrale fractionnaire, dérivée fractionnaires, dérivée de Caputo, dérivée de Riemann-Liouville, théorèmes du point fixe, sous-solution, sur-solution.

# Abstract

Fractional differential equations are generalization of ordinary differential equations where the derivatives are of non integer order.

In this work we are studying the upper-solutions and lower-solutions method combined with the technique of monotonous iterations applied to the differential equations of fractional order. We considered this method for certain classes of differential equations of fractional order in the sense of Caputo.

**The key words :** fractional integral, fractional derivative, Caputo derivative, Riemann-Liouville derivative, fixed point theorems, upper-solution, lower-solution.

### ملخص

المعادلات التفاضلية الكسرية هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية في هذه المذكرة تطرقنا لدراسة طريقة الحل الفوقي و الحل التحتي المقترن بتقنية التكرار الرتيب المطبق على المعادلات التفاضلية الكسرية ذات شروط ابتدائية و قد تم تقديم هذه طريقة لبعض أصناف المعادلات التفاضلية ذات رتب ناطقة بمعنى كاييتو

**الكلمات المفتاحية :** التكامل الكسري، المشتق الكسري، مشتق كاييتو، مشتق ريمان ليوفيل، نظريات النقطة الثابتة، الحل الفوقي، الحل التحتي.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction au calcul fractionnaire</b>	<b>3</b>
1.1 Préliminaires et rappels sur le calcul fractionnaire . . . . .	3
1.1.1 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire . . . . .	3
1.1.2 Intégrale et dérivée fractionnaires . . . . .	4
1.2 Introduction aux équations différentielles fractionnaires . . . . .	10
1.2.1 Quelques théorèmes du point fixe . . . . .	10
1.2.2 Quelques résultats d'existence et d'unicité . . . . .	11
1.2.3 Stabilité . . . . .	14
<b>2 Méthode itérative et monotonie (itérations monotones)</b>	<b>15</b>
2.1 Espace de Banach ordonné . . . . .	15
2.2 Théorème de point fixe dans un espace de Banach ordonné . . . . .	16
2.3 Application aux équations différentielles . . . . .	17
2.3.1 Équations différentielles ordinaires . . . . .	17
2.3.2 Équations et systèmes d'équations différentielles fractionnaires . . . . .	19
<b>3 Application et résultat principal</b>	<b>28</b>
3.1 Résultat d'existence par la méthode des itérations monotones . . . . .	28
<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

# Introduction

La dérivation fractionnaire est un concept de généralisation de la dérivation (classique) à un ordre non entier. Si cet ordre est négatif, on parle d'une intégration non entière et s'il est positif, il s'agit d'une dérivation non entière.

La dérivation fractionnaire fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations intégrales. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matériaux qui conservent la mémoire des transformations passées (voir [1]). D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pendant ces dernières décennies.

Bien que le calcul différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre de phénomènes étudiés par les sciences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale que présentent certains systèmes complexes rencontrés dans la nature ou dans les interactions de la société. Les résultats expérimentaux montrent que plusieurs processus liés aux systèmes complexes ont une dynamique non-locale impliquant des effets à long terme. Les opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires présentent des similitudes avec certaines de ces caractéristiques, ce qui en fait un outil plus adapté pour la modélisation de ces phénomènes.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17<sup>ème</sup> siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de  $\frac{d^n y}{dx^n}$  lorsque  $n = \frac{1}{2}$ . Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et a écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tiré des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories ont fait leur apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique....

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini au 19<sup>ème</sup> siècle par Riemann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers.

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$ . Les définitions les plus utilisées sont celles de Riemann-Liouville et de Caputo.

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $p \in \mathbb{R}^+$  dans un intervalle  $[0; T]$  est définie par :

$$I^{(p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{(p-1)} f(\tau) d\tau$$

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $p \in \mathbb{R}^+$  est définie sur  $[0, T]$  par :

$${}^R D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{(n-p-1)} f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} (I^{(n-p)} f(t))$$

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre  $p$  sur  $[0; t]$  est définie par :

$${}^C D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t - \tau)^{(n-p-1)} f^{(n)}(\tau) d\tau = I^{(n-p)} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right)$$

avec  $n = [p] + 1$ ;  $[p]$  désigne la partie entière de  $p$ , et  $D^{(n)} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n$  désigne la dérivée usuelle d'ordre  $n$ , et  $\Gamma$  est la fonction Gamma ( la fonction factorielle généralisée) .

**Ce mémoire** bien qu'introductif au calcul et à l'analyse fractionnaire, il est consacré essentiellement aux **Méthode itérations monotones appliquées aux équations différentielles fractionnaires**.

*Premier chapitre* : dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions sur l'intégration et la dérivation fractionnaire, et on introduit les équations différentielles fractionnaires.

*Deuxième chapitre* : dans ce chapitre, nous fixons le cadre théorique à notre étude : espace de Banach ordonné, quelques résultats sur la théorie de point fixe dans un espace ordonné et son application aux équations différentielles.

*Troisième chapitre* : dans ce chapitre, on applique la méthode d'itérations monotones à un système fractionnaire multi-ordre.

# Chapitre 1

## Introduction au calcul fractionnaire

### 1.1 Préliminaires et rappels sur le calcul fractionnaire

#### 1.1.1 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire

Nous commençons par la définition de quelques fonctions qui sont très utilisées et importantes dans l'analyse et le calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction d'Euler (la fonction Gamma et la fonction Béta) et la fonction de Mittag-Leffler, (voir [1], [3], [4]). Nous tenons à préciser que cette partie du mémoire repose essentiellement sur [3]

#### La fonction Gamma

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Son interprétation est simplement la généralisation du factoriel  $n(n!)$  qui permet à  $n$  de prendre des valeurs non entières.

**Définition 1.1.1** Pour  $z \in \mathbb{R}$  tel que  $z > 0$ , la fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

#### Propriétés de la fonction Gamma

1. Une propriété importante de la fonction  $\Gamma(z)$  est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (1.2)$$

Qu'on peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

2.  $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty$ . Et aussi  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .
3.  $\Gamma(z)$  est une fonction monotone et strictement décroissante pour  $0 < z \leq 1$ .
4. Si  $n \in \mathbb{N}$  alors  $\Gamma(n + 1) = n!$  et aussi si  $n \in \mathbb{N} : \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n \cdot n!}$ .

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) = n(n - 1)! = n!. \quad (1.3)$$

## La fonction Béta

La fonction Béta est une fonction à deux variables et est définie par l'intégrale suivante :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (\Re(x) > 0, \Re(y) > 0) \quad (1.4)$$

La relation entre fonction Béta d'Euler et Gamma d'Euler est donnée par :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (1.5)$$

## La fonction de Mittag-Leffler

On appelle fonction de Mittag-Leffler la fonction définie par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (\alpha > 0) \quad (1.6)$$

On remarque bien sûr que  $E_1$  est l'exponentielle usuelle :

$$E_1(z) = \exp(z) \quad (1.7)$$

Il est aussi courant de représenter la fonction de Mittag-Leffler avec deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \quad (1.8)$$

Cette fonction a été introduite par R.P. Agarwal et Erdelyi en 1953-1954.

Dans ce qui suit nous présenterons les opérateurs d'ordre fractionnaire. Une définition unique de l'intégration non entière et plusieurs définitions de la dérivée non entière sont considérées.

### 1.1.2 Intégrale et dérivée fractionnaires

#### A. Intégrale fractionnaire

L'idée principale d'intégration fractionnaire est la généralisation d'intégrations itérées.

Soit  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $b$  pouvant être fini ou infini. Une primitive de  $f$  est donnée par :

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$\begin{aligned} (I_a^2 f)(x) &= \int_a^x I_a^1 f(u) du \\ &= \int_a^x \left( \int_a^u f(t) dt \right) du \\ &= \int_a^x \left( \int_t^x du \right) f(t) dt \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini nous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

Plus généralement la n-ième itération de l'opérateur  $I$  peut s'écrire :

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt \quad (1.9)$$

pour tout entier  $n$ .

Ainsi, on peut généraliser l'intégrale itérée d'ordre entier  $n$  (1.9) à une intégration d'ordre réel  $\alpha$ .

**Définition 1.1.2** Soit  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de  $f$  l'intégrale suivante :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \quad (1.10)$$

où  $\alpha$  est un réel positif ( $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ) (ou même complexe) convenablement choisi.

**Exemple 1.1.1** 1. Soit  $f(x) = x^\beta$  avec  $\beta > 1$  on a

$$(I_0^\alpha f)(x) := I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^\beta (x-t)^{\alpha-1} dt. \quad (1.11)$$

En posant :  $t = xu$ , (1.11) devient

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xu)^\beta (1-u)^{\alpha-1} x du.$$

En utilisant la fonction Béta (1.4) on arrive à :

$$\begin{aligned} (I^\alpha f)(x) &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

2. Considérons la fonction  $f(x) = (x-a)^\beta$ . Alors

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt. \quad (1.12)$$

Pour évaluer cette intégrale on pose  $t = a + (x-a)\tau$ , d'où

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta dt = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\beta+\alpha} \quad (1.13)$$

après utilisation de l'intégrale eulérienne de première espèce (la fonction Béta). On voit bien que c'est une généralisation du cas  $\alpha = 1$  où on a

$$I_a^1(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}(x-a)^{\beta+1}$$

à cause de la relation bien connue  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .

**Proposition 1.1.1** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ , pour toute fonction  $f \in C([a, b])$ , on a :

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta(I_a^\alpha f).$$

**Preuve :** Supposons d'abord que  $f \in C([a, b])$ , on a :

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha(I_a^\beta f)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds. \end{aligned}$$

Les intégrales figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout  $x \in [a, b]$ , et le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) \left[ \int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt.$$

En effectuant le changement de variable :

$$s = t + (x-t)y \quad (0 \leq y \leq 1),$$

on obtient

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy dt.$$

Finalement on arrive à,

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha+\beta-1} dt = (I_a^{\alpha+\beta} f)(x)$$

## B. Dérivée fractionnaires

Dans l'itération il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

### Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$  à valeurs réelles.

**Définition 1.1.3** La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  (avec  $n-1 < \alpha < n$ ) au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  est définie par :

$$({}^R D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt = \frac{d^n}{dx^n} (I_a^{n-\alpha} f)(x). \quad (1.14)$$

**Exemples 1.1.1** 1. Soit  $f(x) = (x - \alpha)^\beta$  avec  $\beta > -1$ , pour  $\alpha \geq 0$  tel que  $n - 1 \leq \alpha \leq n$ .

$${}^R D_a^\alpha f(x) = {}^R D^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + n - \alpha + 1)} {}^R D^n (x - a)^{n-\alpha+\beta}. \quad (1.15)$$

Alors, pour  $(\alpha - \beta) \in \{1, 2, \dots, n\}$  on a :  ${}^R D_a^\alpha (x - a)^{\alpha-j} = 0$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , par ailleurs si  $(\alpha - \beta) \notin \{1, 2, \dots, n\}$  on trouve

$${}^R D_a^\alpha x = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta-\alpha}.$$

2. En particulier, si  $\beta = 0$  et  $\alpha > 0$ , la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante  $f(x) = C$  est non nulle, sa valeur est :

$${}^R D_a^\alpha C = \frac{C(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}.$$

**Proposition 1.1.2** Soient  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $n - 1 \leq \alpha \leq n, m - 1 \leq \beta < m$ .

1. Pour  $f \in L^1([a, b])$ , l'inégalité :

$${}^R D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t) \quad (1.16)$$

est vraie pour tout  $x \in [a, b]$

2. Si  $0 < \beta < \alpha$ , alors pour  $f \in L^1([a, b])$ , la relation :

$${}^R D_a^\beta ({}^R D_a^\alpha f)(x) = (I^{\alpha-\beta} f)(x) \quad (1.17)$$

est vraie presque partout sur  $[a, b]$ .

3. Si  $0 < \alpha \leq \beta$  et si la dérivée fractionnaire  ${}^R D_a^{\beta-\alpha}$  existe, alors on a :

$${}^R D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = ({}^R D_a^{\beta-\alpha} f)(x). \quad (1.18)$$

4. Si  $f \in L^1([a, b])$  et  $I^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b])$  avec  $n = [\alpha] + 1$ , alors :

$$[I_a^\alpha ({}^R D_a^\alpha f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-1)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow a^+} [(\frac{d}{dx})^j I_a^{n-\alpha}] f(x). \quad (1.19)$$

### Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

On donne une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo. Soient  $\alpha > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $n - 1 < \alpha < n$  et  $f \in C^n([a, b])$ .

**Définition 1.1.4** La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo de la fonction  $f$  notée  ${}^C D_a^\alpha f$  est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= I^{n-\alpha} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(x) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

**Exemples 1.1.2** Pour  $f(x) = (x - \alpha)^\beta$  avec  $\beta \geq 0$ , on a

$$1. \text{ Si } \beta \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\} \quad {}^C D_a^\alpha f(x) = 0. \quad (1.20)$$

$$2. \text{ Si } \beta > n-1 \quad {}^C D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \quad (1.21)$$

En particulier, si  $f$  est constante sur  $[a, b]$ , alors :

$${}^C D_a^\alpha f(x) = 0 \quad (1.22)$$

**Proposition 1.1.3** *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo vérifie les propriétés suivantes*

1.  ${}^C D_a^\alpha [I_a^\alpha f] = f$
2. Si  ${}^C D_a^\alpha f = 0$  alors  $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (x-a)^j$  où les  $c_j$  sont des constantes réelles.
- 3.

$$I_a^\alpha [{}^C D_a^\alpha f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$$

La dernière relation de la proposition précédente nous permettra par la suite d'étudier des équations différentielles fractionnaires (au sens de Caputo) avec des conditions initiales classiques, c'est-à-dire des dérivées entières au point  $a$ , chose qui n'est pas possible de faire avec la dérivation au sens de Riemann-Liouville. Un des "défauts" de la dérivée de Caputo est qu'elle ne constitue pas une bonne interpolation entre les dérivées entières comme ce fut le cas pour Riemann-Liouville. En effet on a

$$\lim_{\alpha \xrightarrow{>} m} ({}^C D_a^\alpha f)(x) = f^{(m)}(x),$$

mais par contre

$$\lim_{\alpha \xrightarrow{>} m-1} ({}^C D_a^\alpha f)(x) \neq f^{(m-1)}(x).$$

Voici un lemme utile.

**Lemme 1.1.1** *Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $\alpha > 0$ , alors*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (I_a^\alpha f)(x) = 0.$$

**Preuve :** On a

$$\begin{aligned} |(I_a^\alpha f)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha, \end{aligned}$$

**Corollaire 1.1.1** *Si  $0 < \alpha < 1$  et  $f$  de classe  $C^1$  alors*

$$(I_a^\alpha \circ^R D_a^\alpha) f = f \quad \text{et} \quad ({}^C D_a^\alpha \circ I_a^\alpha) f = f.$$

C'est-à-dire que les dérivations au sens de Riemann-Liouville et de Caputo respectivement constituent l'inverse à droite et à gauche de l'opérateur de Riemann-Liouville (au moins sur les fonctions de classe  $C^1$ ). En voici un autre corollaire intéressant.

**Corollaire 1.1.2** *Si  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$  avec  $\alpha + \beta \leq 1$  et  $f$  de classe  $C^1$  alors*

$$({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta) f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f = ({}^C D_a^\beta \circ {}^C D_a^\alpha) f.$$

**Preuve :** Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta) f &= (I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx}) f & (1.23) \\ &= (I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{I_a^\beta \circ \frac{d}{dx}}_{{}^C D_a^{1-\beta}} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx}) f \\ &= (I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{{}^C D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta}}_{id} \circ \frac{d}{dx}) f \\ &= (I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \frac{d}{dx}) f \\ &= {}^C D_a^{\alpha+\beta} f. \end{aligned}$$

### Relation entre l'approche de Reimann-Liouville et celle de caputo

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Remann-Liouville.

**Théoreme 1.1.1** *soient  $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$ . si  $f$  possède  $(n - 1)$  dérivée en  $a$  et si  ${}^R D_a^\alpha$  existe,*

*alors :*

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = {}^R D_a^\alpha [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k] \quad (1.24)$$

*presque partout sur  $[a, b]$ .*

**Preuve :** D'après la définition on a :

$$\begin{aligned} {}^R D_a^\alpha [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k] &= {}^R D^n I_a^{n-\alpha} [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k] \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k] dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^{n-\alpha} [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k] &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k] dt \\ &= I_a^{n-\alpha+1} D [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k] \end{aligned}$$

de la même façon pour  $n - 1$  fois alors :

$$\begin{aligned} I_a^{n-\alpha}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] &= I_a^{n-\alpha+n} D^n [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] \\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha+1} D^n [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k]. \end{aligned}$$

Or  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$  est un polynôme de degré  $n - 1$ , alors :

$$I_a^{n-\alpha}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] = I_a^n I_a^{n-\alpha+1} D^n f(x).$$

Donc,

$$\begin{aligned} {}^R D_a^\alpha [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha+1} D^n f(x) \\ &= I_a^{n-\alpha+1} D^n f(x) \\ &= ({}^C D_a^\alpha f)(x) \end{aligned}$$

presque partout sur  $[a, b]$ .

## 1.2 Introduction aux équations différentielles fractionnaires

### 1.2.1 Quelques théorèmes du point fixe

Les démonstrations des différents théorèmes d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles se basent généralement sur des théorèmes classiques assurant l'existence et l'unicité de points fixes de certains opérateurs (voir [8], [11]).

#### **Théorème du point fixe de Banach**

**Théorème 1.2.1** (*Principe de contraction de Banach*)

Soient  $(U, d)$  un espace métrique complet non vide, et  $A : U \rightarrow U$  une application qui vérifie l'inégalité

$$d(Au, Av) \leq kd(u, v)$$

où  $0 \leq k < 1$ , pour tout  $u, v \in U$ . Alors,  $A$  possède un unique point fixe  $u^*$ . De plus, pour tout  $u_0 \in U$ , la suite  $(A^j u_0)_{j=1}^\infty$  converge vers  $u^*$ .

le théorème suivant est l'une des généralisations du principe de contraction de Banach

**Théorème 1.2.2** *Supposons que  $(U, d)$  est un espace métrique complet non-vide, et soit  $\alpha_j \geq 0$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et tel que la série  $\sum_{j=0}^\infty \alpha_j$  converge. Soit l'application  $A : U \rightarrow U$  qui vérifie l'inégalité*

$$d(A^j u, A^j v) \leq \alpha_j d(u, v)$$

pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et tout  $u, v \in U$ . Alors,  $A$  possède un unique point fixe  $u^*$ . De plus, la suite  $(A^j u_0)_{j=1}^\infty$  converge vers  $u^*$ .

une conséquence immédiate de ce théorème est

**Théorème 1.2.3** *( $U, d$ ) un espace métrique complet non vide, supposons que  $0 < \alpha < 1$  et soit l'application  $A : U \rightarrow U$  qui vérifie l'inégalité*

$$d(Au, Av) \leq \alpha d(u, v)$$

*pour tout  $u, v \in U$ . Alors,  $A$  possède un unique point fixe  $u^*$ . De plus, pour tout  $u_0 \in U$ , la suite  $(A^j u_0)_{j=1}^{\infty}$  converge vers ce point fixe  $u^*$ . On peut aussi citer un autre théorème qui assure uniquement l'existence du point fixe (pas l'unicité), mais avec des hypothèses plus faibles sur l'opérateur  $A$ .*

On peut aussi citer un autre théorème qui assure uniquement l'existence du point fixe (pas l'unicité), mais avec des hypothèses plus faibles sur l'opérateur  $A$ .

### **Théorème du point fixe de Schauder**

**Théorème 1.2.4** *( $E, d$ ) un espace de Banach, soit  $U$  une partie convexe et fermée de  $E$ , et soit  $A : U \rightarrow U$  une application telle que l'ensemble  $\{Au : u \in U\}$  est relativement compacte dans  $E$ . Alors  $A$  possède au moins un point fixe.*

Dans ce contexte on va rappeler la définition d'un ensemble relativement compact :

**Définition 1.2.1** *Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $F \subseteq E$ . L'ensemble  $F$  est dit relativement compact dans  $E$  si la fermeture de  $F$  est une partie compacte de  $E$*

### **Théorème d'Arzela-Ascoli**

**Théorème 1.2.5** *Soit  $F \subseteq C[a, b]$  supposons que les ensembles sont équipée de la norme de Chebyshev. Alors,  $F$  est relativement compact dans  $C[a, b]$ , si  $F$  est équicontinue (c-à-d pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $f \in F$  et tout  $x, x^* \in [a, b]$  avec  $|x - x^*| < \delta$  on a  $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ ) et uniformément bornée (c-à-d il existe une constante  $C > 0$  tel que  $\|f\|_{\infty} \leq C$  pour tout  $f \in F$ ).*

## **1.2.2 Quelques résultats d'existence et d'unicité**

Dans cette partie on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On va se restreindre à des problèmes aux conditions initiales. On utilisera les symboles  ${}^R D^{\alpha}$  et  ${}^C D^{\alpha}$  pour les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville et Caputo.

**Définition 1.2.2** *Soit  $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$  et  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  alors :*

$${}^R D^{\alpha} u(x) = f(x, u(x)) \tag{1.25}$$

*est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. Comme conditions initiales pour ce type d'EDF on utilise :*

$${}^R D^{\alpha-k} u(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} I^{n-\alpha} u(z) = b_n. \tag{1.26}$$

*De la même manière*

$${}^C D^{\alpha} u(x) = f(x, u(x)), \tag{1.27}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$u^k(0) = b_k \quad (k = 0, 2, \dots, n - 1). \quad (1.28)$$

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires (1.25) et (1.27) nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante, qu'on va prouver dans les théorèmes suivants, (voir [4]).

### Equation différentielle fractionnaire de type Caputo

Nous présentons quelques théorème concernant l'existence et l'unicité de la solution d'une équation de type Caputo (Voir ([4])

**Théoreme 1.2.6** Soit  $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$ . De plus, soit  $k > 0, h^* > 0$ , et  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ . On défini

$$G = [0, h^*] \times [b_0 - K, b_0 + K],$$

et soit la fonction continue  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors, il existe un réel  $h > 0$  et une fonction  $u \in C[0, h]$  solution de l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo muni des conditions initiales. Dans le cas  $\alpha \in (0, 1)$  le paramètre  $h$  est donné par la relation

$$h = \min\{h^*, (KT(\alpha + 1)/M^{\frac{1}{\alpha}})\} \quad \text{avec} \quad M = \sup_{(x,z) \in G} |f(x, z)|$$

Si de plus  $f$  vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire :

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| < L|u_1 - u_2|$$

avec  $L > 0$  une constante indépendante de  $x, u_1$  et  $u_2$ , alors la fonction  $u \in C[0, h]$  est unique.

**Lemme 1.2.1** Sous les hypothèses du théorème précédente, la fonction  $u \in C[0, h]$  est une solution de l'EDF de type Caputo avec les conditions initiales si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale de Volterra du second type :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t, u(t)) dt. \quad (1.29)$$

**Preuve :** Premièrement supposons que  $u$  est solution de l'équation précédente, on peut écrire cette équation sous la forme réduite :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} u_0^{(k)} + I_0^\alpha f(x, u(x)).$$

En appliquant l'opérateur de différentiation  ${}^R D_0^\alpha$  sur les deux cotés de cette relation on aura immédiatement que  $y$  est solution de l'équation différentielle.

Appliquons maintenant l'opérateur  ${}^R D_0^k, 0 \leq k \leq n - 1$  sur l'équation de Volterra.

$${}^R D_0^k u(x) = \sum_{j=0}^{n-1} ({}^R D_0^k) \frac{(x)^j}{j!} u_0^{(j)} + {}^R D_0^k I_0^k I_0^{\alpha-k} f(x, u(x)).$$

${}^R D_0^k(t)^j = 0$  pour  $j < k$  alors si  $x = 0$  on a :

$${}^R D_0^k u(0) = {}^R D_0^k \frac{(x)^k}{k!} u_0^{(k)}|_{x=0} + I_0^{\alpha-k} f(x, u(x))|_{x=0}$$

et comme  $\alpha - k > 0$ , l'intégrale est nul  $I_0^{\alpha-k} f(x, u(x))|_{x=0} = 0$

par suite  ${}^R D_0^k u(0) = u_0^k = b_k$ .

D'autre part on définit  $z(x) = f(x, u(x))$  alors  $z \in C[0, h]$  on réécrit l'équation de la forme

$$z(x) = f(x, u(x)) = {}^C D_0^\alpha u(x) = {}^R D_0^\alpha (u - T_{n-1}[u, 0])(x) = {}^R D_0^n I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])(x)$$

$T_{n-1}[u, 0]$  est le polynôme de Taylor de degré  $n - 1$

$$(T_{n-1}[u, 0]) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x)^k}{k!} u_0^{(k)}$$

pour la fonction  $f$  autour de 0. En appliquant l'opérateur  $I_0^n$  sur les deux termes de cette relation elle devient :

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])(x) + q(x).$$

Avec  $q$  un polynôme de degré ne dépassant pas  $n - 1$ . Comme  $z$  est continue la fonction  $I_0^n z$  a un zéro d'ordre au moins  $n$  à l'origine. En outre la différence  $y - T_{n-1}[y, 0]$  a la même propriété par construction. Et donc la fonction  $I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])$  doit avoir un zéro d'ordre  $n$  aussi. Par suite le polynôme  $q$  a la même propriété mais comme il est de degré ne dépassant pas  $n - 1$  il en résulte que  $q = 0$ , par conséquent :

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])(x).$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville  ${}^R D_0^{n-\alpha}$  sur les deux cotés de cette équation elle devient :

$$u(x) - T_{n-1}[u, 0](x) = I_0^\alpha z(x).$$

En substituant  $z(x)$  et  $T_{n-1}[u, 0](x)$  on retrouve l'équation de Volterra :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t, u(t)) dt.$$

**Lemme 1.2.2** *Sous les hypothèses du théorème (1.2.6) l'équation de Volterra*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t, u(t)) dt.$$

*possède une unique solution  $u \in C \in [0, h]$ .*

**Preuve :** Voir [11]

### 1.2.3 Stabilité

#### Point l'équilibre

Dans un premier temps, nous allons considérer le système autonome décrits par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (1.30)$$

ou  $f$  est classe  $C^1$

Une notion qui est primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion de point d'équilibre (voir [9]).

**Définition 1.2.3** *On dit que  $x_\epsilon$  est un équilibre ou point d'équilibre pour le système (1.30) si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\epsilon$$

*Mathématiquement :  $x_\epsilon$  vérifie l'équation  $f(x_\epsilon) = 0$ .*

#### Stabilité avec la dérivée Caputo

En 1996, Matignon a étudié le système différentiel suivant, impliquant la dérivée fractionnaire de Caputo (voir [5]).

$${}^C D_0^\alpha x(t) = Ax(t), \quad (1.31)$$

avec la condition initiale  $x(0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^T$ , ou  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  ${}^C D_0^\alpha x(t)$  dénote la dérivée Caputo. La stabilité de l'équilibre du système (1.31) a été définie et établie la première fois par Matignon.

**Définition 1.2.4** *Le système autonome (1.31) serait :*

- (a) *stable si pour tout  $x_0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tels que  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  pour  $t \geq 0$  ;*
- (b) *asymptotiquement stable si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0.$$

**Théoreme 1.2.7** *Le système autonome (1.31) est*

- (a) *asymptotiquement stable si  $|\arg(\lambda(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$  ;*
- (b) *stable si asymptotiquement stable, ou ces valeurs propres de la matrice cirtques qui satisfont  $|\arg(\lambda(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$  ont la multiplicité géométrique 1. (Ici  $\arg(\lambda(A))$  dénote argumentes des valeurs propres de la matrice caréee  $A$ )*

# Chapitre 2

## Méthode itérative et monotonie (itérations monotones)

### 2.1 Espace de Banach ordonné

**Définition 2.1.1** (Voir[10]) Soit  $X$  un espace vectoriel réel. Un cône  $K$  dans  $X$  est un sous-ensemble convexe de  $X$  tel que :

$\lambda K \subset K$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  et  $K \cap -K = 0$

**Proposition 2.1.1** (Voir [10]) Soient  $X$  un espace vectoriel réel et un cône  $K \subset X$ . La relation  $\leq_K$  dans  $X$  définie par :  $u \leq_K v$  si et seulement si  $v - u \in K$ , est une ordre (réflexive, transitive et antisymétrique) sur  $X$  (appelé la relation d'ordre induite par  $K$ ) compatible avec la structure vectorielle de  $X$ .

*i.e* : chaque fois que  $u_i, v_i \in X$  ,  $u_i \leq_K v_i$  ,  $i = 1, 2$ ; et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ .

Nous avons  $u_1 + u_2 \leq_K v_1 + v_2$  et  $\lambda u_1 \leq_K \lambda v_2$ .

**Définition 2.1.2** Un espace vectoriel réel doté d'un cône (de façon équivalente avec une relation d'ordre compatible avec sa structure vectorielle) est appelé un espace vectoriel ordonné.

**Définition 2.1.3** Un espace de Banach doté d'un cône fermé est appelé un espace de Banach ordonné.

**Définition 2.1.4** (Voir[10]) Soit  $(X, K)$  un espace de Banach ordonné et  $\leq$  la relation d'ordre induite par  $K$ .

Nous disons que :

1.  $K$  est un cône normal si :

$$0 \leq u_k \leq v_k , \quad v_k \rightarrow 0 \Rightarrow u_k \rightarrow 0$$

2.  $K$  est un cône régulier si :

$$u_k \leq u_{k+1} \leq v$$

pour  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_k)$  convergente

## 2.2 Théorème de point fixe dans un espace de Banach ordonné

**Théorème 2.2.1** *Soient  $(X, K)$  est un espace de Banach ordonné  $[u_0, v_0] \subset X$  un intervalle d'ordre et  $T : [u_0, v_0] \longrightarrow [u_0, v_0]$  un opérateur croissant continu. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i)  *$K$  est un cône régulier.*

(ii)  *$K$  est un cône normal et  $T$  est complètement continue.*

*Alors, il existe  $u^*, v^* \in [u_0, v_0]$  tels que :*

*la suite  $(T^k(u_0))$  est croissante et convergente vers  $u^*$*

*et la suite  $(T^k(v_0))$  est décroissante et convergente vers  $v^*$ .*

*De plus, tout point fixe de  $T$  est situé entre  $u^*$  et  $v^*$ .*

**Preuve :** L'opérateur  $T$  envoie  $[u_0, v_0]$  dans lui-même et seulement si

$$u_0 \leq T(u_0), \quad T(v_0) \leq v_0.$$

À partir de

$$u_0 \leq T(u_0) \leq T(v_0) \leq v_0$$

on obtient

$$u_0 \leq T(u_0) \leq T^2(u_0) \leq T^2(v_0) \leq T(v_0) \leq v_0,$$

et ainsi on arrive à

$$\begin{aligned} u_0 &\leq T(u_0) \\ &\vdots \\ &\leq T^k(u_0) \leq T^{k+1}(u_0) \\ &\vdots \\ &\leq T^{k+1}(v_0) \leq T^k(v_0) \\ &\vdots \\ &\leq T(v_0) \leq v_0. \end{aligned}$$

On suppose (i). Alors on a la convergente des suites  $T^k(u_0)$  et  $T^k(v_0)$ . Soit  $u^*, v^*$  sont leurs limites. Ainsi, avec la continuité de  $T$ , à partir de :

$$T^{k+1}(u_0) = T(T^k(u_0))$$

on déduit que  $u_* = T(u^*)$ . De même  $v^* = T(v^*)$ .

On suppose (ii). L'intervalle d'ordre  $[u_0, v_0]$  étant borné et  $T$  complètement continue,  $T([u_0, v_0])$  est alors relativement compact. Par conséquent,  $(T^k(u_0))_{k \geq 1}$  possède une sous-suite convergente  $(T^{k_j}(u_0))_{j \geq 1}$ .

Soit  $u^*$  sa limite. De toute évidence  $u^* \in [u_0, v_0]$ . Nous prétendons que la suite entière  $(T^k(u_0))_{k \geq 1}$  converge vers  $u^*$ .

En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$  il y a une  $j_\varepsilon$  telle que :

$$|T^{k_{j_\varepsilon}}(u_0) - u^*| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \gamma}.$$

Ici la constante  $\gamma > 0$  provient de la semi-monotonicité de la norme.

D'autre part, pour  $i \geq k_{j_\varepsilon}$  nous avons :

$$T^{k_{j_\varepsilon}}(u_0) \leq T^i(u_0) \leq u^*,$$

c'est

$$T^i(u_0) - T^{k_{j\varepsilon}}(u_0) \leq u^* - T^{k_{j\varepsilon}}(u_0).$$

Puis

$$|T^i(u_0) - T^{k_{j\varepsilon}}(u_0)| \leq \gamma |u^* - T^{k_{j\varepsilon}}(u_0)|.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |T^i(u_0) - u^*| &\leq |T^i(u_0) - T^{k_{j\varepsilon}}(u_0)| + |T^{k_{j\varepsilon}}(u_0) - u^*| \\ &\leq (\gamma + 1) |T^{k_{j\varepsilon}}(u_0) - u^*| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi  $T^i(u_0) \rightarrow u^*$  comme l'a soutenu. Utilisez les mêmes arguments pour prouver la convergence de  $(T^k(v_0))$ .

Supposons maintenant que  $w \in [u_0, v_0]$  est un point fixe de  $T$ . Alors

$$u_0 \leq T(u_0) \leq T(w) = w \leq T(v_0) \leq v_0$$

et en générale

$$T^k(u_0) \leq w \leq T^k(v_0).$$

Laisser  $k \rightarrow \infty$  nous obtenons  $u^* \leq w \leq v^*$ . Voir([10])

## 2.3 Application aux équations différentielles

### 2.3.1 Équations différentielles ordinaires

- Considérer le problème de Neumann

$$\begin{aligned} u'' &= f(t, u), \\ u'(a) &= 0, u'(b) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $f$  est une fonction continue.

**Théoreme 2.3.1** Soit  $\alpha$  et  $\beta \in C^2([a, b])$ ,  $\beta \leq \alpha$  et soit

$$E := \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) \leq u \leq \alpha(t)\}.$$

On suppose que  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, il existe  $M \in ]0, \left(\frac{\pi}{2(b-a)}\right)^2]$  tel que pour tout  $(t, u_1), (t, u_2) \in E$ ,

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{implique} \quad f(t, u_2) - f(t, u_1) \geq M(u_2 - u_1)$$

pour tout  $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &\geq f(t, \alpha(t)), & \alpha'(a) &\geq 0, & \alpha'(b) &\leq 0, \\ \beta''(t) &\leq f(t, \beta(t)), & \beta'(a) &\leq 0, & \beta'(b) &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Alors les suites  $(\alpha_n)_n$  et  $(\beta_n)_n$  définies par

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha, \\ \alpha_n'' + M\alpha_n &= f(t, \alpha_{n-1}) + M\alpha_{n-1}, \\ \alpha_n'(a) &= 0, \quad \alpha_n'(b) = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \beta, \\ \beta_n'' + M\beta_n &= f(t, \beta_{n-1}) + M\beta_{n-1}, \\ \beta_n'(a) &= 0, \beta_n'(b) = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

convergent de façon monotone dans  $C^1([a, b])$  vers les solutions  $u_{\max}$  et  $u_{\min}$  de (2.1) tels que

$$\beta \leq u_{\min} \leq u_{\max} \leq \alpha.$$

De plus, toute solution  $u$  de (2.1) dans  $E$  vérifie

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}.$$

- Considérons le problème suivant

$$\begin{aligned} u'' &= f(t, u, u'), \\ u'(a) &= 0, u'(b) = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Théoreme 2.3.2** Soit  $\alpha$  et  $\beta \in C^2([a, b])$ ,  $\alpha \leq \beta$ , et soit

$$E := \{(t, u, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) \leq u \leq \alpha(t)\}.$$

On suppose que  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, il existe  $M$  tel que pour tout  $(t, u_1, v), (t, u_2, v) \in E$ ,

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{implique} \quad f(t, u_2, v) - f(t, u_1, v) \geq M(u_2 - u_1);$$

il existe  $N \geq 0$  tel que pour tout  $(t, u, v_1), (t, u, v_2) \in E$ ,

$$|f(t, u, v_2) - f(t, u, v_1)| \leq N|v_2 - v_1|;$$

pour tout  $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &\geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)), & \alpha'(a) &\geq 0, & \alpha'(b) &\leq 0, \\ \beta''(t) &\leq f(t, \beta(t), \beta'(t)), & \beta'(a) &\leq 0, & \beta'(b) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Enfin, soit  $L \in [M, (\frac{\pi}{2(b-a)})^2]$  est tel que

$$(L - M) \cos \sqrt{L}(b - a) - N\sqrt{L} \sin \sqrt{L}(b - a) \geq 0$$

et

$$f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) - f(t, \beta(t), \beta'(t)) + L(\alpha(t) - \beta(t)) \geq 0.$$

Alors les suites  $(\alpha_n)_n$  et  $(\beta_n)_n$  définie par

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha, \\ \alpha_n'' + L\alpha_n &= f(t, \alpha_{n-1}, \alpha'_{n-1}) + L\alpha_{n-1}, \\ \alpha_n'(a) &= 0, \alpha_n'(b) = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \beta, \\ \beta_n'' + L\beta_n &= f(t, \beta_{n-1}, \beta'_{n-1}) + L\beta_{n-1}, \\ \beta_n'(a) &= 0, \beta_n'(b) = 0, \end{aligned}$$

convergent de façon monotone dans  $C^1([a, b])$  vers des solutions  $u$  et  $v$  de (2.5) tel que

$$\beta \leq u \leq v \leq \alpha.$$

**Théoreme 2.3.3** Soit  $\alpha$  et  $\beta \in C^2([a, b])$ ,  $\beta \leq \alpha$  et soit

$$E := \{(t, u, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) \leq u \leq \alpha(t)\}.$$

On suppose que  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $(t, u_1, v), (t, u_2, v) \in E$ ,

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{implique} \quad f(t, u_2, v) - f(t, u_1, v) \geq M(u_2 - u_1);$$

il existe  $N \geq 0$  tel que pour tout  $(t, u, v_1), (t, u, v_2) \in E$ ,

$$|f(t, u, v_2) - f(t, u, v_1)| \leq N|v_2 - v_1|;$$

pour tout  $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &\geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)), \alpha'(a) \geq 0, \alpha'(b) \leq 0, \\ \beta''(t) &\leq f(t, \beta(t), \beta'(t)), \beta'(a) \leq 0, \beta'(b) \geq 0. \end{aligned}$$

Supposons aussi  $b - a \leq \theta\left(M, \frac{N}{2}\right)$ , où  $\theta$  est défini à partir de (3.14) (voir [2]).

Soit  $\alpha_0 = \alpha$  et  $\beta_0 = \beta$ . Ensuite, les problèmes

$$\begin{aligned} \alpha_n'' - N|\alpha_n' - \alpha_{n-1}'| + M\alpha_n &= f(t, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}') + M\alpha_{n-1}, \\ \alpha_n'(a) &= 0, \alpha_n'(b) = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_n'' + N|\beta_n' - \beta_{n-1}'| + M\beta_n &= f(t, \beta_{n-1}, \beta_{n-1}') + M\beta_{n-1}, \\ \beta_n'(a) &= 0, \beta_n'(b) = 0, \end{aligned}$$

suites définies  $(\alpha_n)_n$  et  $(\beta_n)_n$  qui convergent de façon monotone dans  $C^1([a, b])$  vers des solutions  $u_{\max}$  et  $u_{\min}$  de (2.5) tel que

$$\beta \leq u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \leq \alpha.$$

De plus, tout solution  $u$  de (2.5) tel que  $\beta \leq u \leq \alpha$ . vérifie

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}.$$

## 2.3.2 Équations et systèmes d'équations différentielles fractionnaires

### Équations différentielles fractionnaires

Considérons le problème à valeur initiale de la forme :

$${}^C D^q u(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0. \quad (2.7)$$

Dans cette partie, nous allons présenter une méthode de monotonie généralisée pour le problème aux limites périodiques non linéaire (2.9) , considéré ci-après, en utilisant la notion de sur-solution et sous-solution et le problème de la valeur initiale correspondant (2.7), où  $f$  ne dépend pas de  $u$  (voir [7]),

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s) ds. \quad (2.8)$$

Considérons le problème aux limites périodiques non linéaire de la forme

$${}^C D^q u(t) = f(t, u(t)) + g(t, u(t)) \quad u(0) = u(T) \quad (2.9)$$

où  $f, g \in C[J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  et  $u \in C^1[J \times \mathbb{R}]$ .

Si  $u \in C^1[0, T]$  satisfais l'équation différentielle fractionnaire

$${}^C D^q u(t) = f(t, u(t)) + g(t, u(t)), \quad (2.10)$$

et  $u$  est telle que  $u(0) = u(T)$  pour tout  $t \in J$ , puis  $u$  est une solution périodique de (2.9).

De plus, on suppose que  $f$  est croissante en  $u$  et  $g$  est décroissante en  $u$  pour tout  $t \in J$ .

**Définition 2.3.1** Soit  $v_0, w_0 \in C^1[J, \mathbb{R}]$ . Puis  $v_0$  et  $w_0$  sont dites,

(i) *natural sur-solution et sous-solution de (2.9) si*

$$\begin{aligned} {}^C D^q v_0(t) &\leq f(t, v_0(t)) + g(t, v_0(t)) & v(0) &\leq v_0(T), \\ {}^C D^q w_0(t) &\geq f(t, w_0(t)) + g(t, w_0(t)) & w(0) &\geq w_0(T); \end{aligned} \quad (2.11)$$

(ii) *sur-solution et sous-solution de Type I de (2.9) si*

$$\begin{aligned} {}^C D^q v_0(t) &\leq f(t, v_0(t)) + g(t, w_0(t)) & v(0) &\leq v_0(T), \\ {}^C D^q w_0(t) &\geq f(t, w_0(t)) + g(t, v_0(t)) & w(0) &\geq w_0(T); \end{aligned} \quad (2.12)$$

(iii) *sur-solution et sous-solution de Type II de (2.9) si*

$$\begin{aligned} {}^C D^q v_0(t) &\leq f(t, w_0(t)) + g(t, v_0(t)) & v(0) &\leq v_0(T), \\ {}^C D^q w_0(t) &\geq f(t, v_0(t)) + g(t, w_0(t)) & w(0) &\geq w_0(T); \end{aligned} \quad (2.13)$$

(iv) *sur-solution et sous-solution de Type III de (2.9) si,*

$$\begin{aligned} {}^C D^q v_0(t) &\leq f(t, w_0(t)) + g(t, w_0(t)) & v(0) &\leq v_0(T), \\ {}^C D^q w_0(t) &\geq f(t, v_0(t)) + g(t, v_0(t)) & w(0) &\geq w_0(T); \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nous développons la monotonie généralisée méthode pour le problème aux limites périodiques via la valeur initiale problème approche. Nous obtenons des suites naturelles et suites entrelacées qui convergent uniformément et de façon monotone minimale et maximale associée à des solutions périodiques de (2.9).

Dans le théorème suivant, nous utilisons ainsi des sur-solutions et sous-solutions de Type I et d'obtenir des suites naturelles qui convergent uniformément et de façon monotone minimale et maximale associée à des solutions périodiques de (2.9).

**Théoreme 2.3.4** *Suppose que*

(A<sub>1</sub>)  $v_0, w_0$  sont des sous-solutions et sur-solutions de Type I de (2.9) avec  $v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)$  on  $J$  ;

(A<sub>2</sub>)  $f, g \in C[J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ ,  $f(t, u(t))$  est croissante en  $u$  et  $g(t, u(t))$  est décroissante en  $u$ .

Alors les suites définies par

$$\begin{aligned} {}^C D^q v_{n+1}(t) &= f(t, v_n(t)) + g(t, w_n(t)), \\ v_{n+1}(0) &= v_n(T), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} {}^C D^q w_{n+1}(t) &= f(t, w_n(t)) + g(t, v_n(t)), \\ w_{n+1}(0) &= w_n(T), \end{aligned} \quad (2.16)$$

sont telles que  $v_n(t) \rightarrow \rho(t)$  et  $w_n(t) \rightarrow r(t)$  dans  $C^1[J, \mathbb{R}]$  uniformément et de façon monotone, telle que  $\rho$  et  $r$  sont ainsi des solutions minimales et maximales de (2.9), respectivement, à condition que  $v_0 \leq u \leq w_0$ , où  $u$  toute solution est périodique de (2.9). C'est,  $\rho$  et  $r$  vérifient le système

$$\begin{aligned} {}^C D^q \rho(t) &= f(t, \rho(t)) + g(t, r(t)) \quad \text{on } J, \\ \rho(0) &= \rho(T), \\ {}^C D^q r(t) &= f(t, r(t)) + g(t, \rho(t)) \quad \text{on } J, \\ r(0) &= r(T), \end{aligned} \quad (2.17)$$

telle que  $\rho \leq u \leq r$

**Preuve :** Par hypothèse,  $v_0 \leq u \leq w_0$ . Nous allons montrer que  $v_0 \leq v_1 \leq u \leq w_1 \leq w_0$ .

Il résulte de (2.3.1) que

$$\begin{aligned} {}^C D^q v_0(t) &\leq f(t, v_0(t)) + g(t, w_0(t)) \quad v(0) \leq v_0(T), \\ {}^C D^q w_0(t) &\geq f(t, w_0(t)) + g(t, v_0(t)) \quad w(0) \geq w_0(T); \end{aligned} \quad (2.18)$$

et par (2.15), nous obtenons que

$$\begin{aligned} {}^C D^q v_1(t) &= f(t, v_0(t)) + g(t, w_0(t)), \\ v_1(0) &= v_0(T), \end{aligned} \quad (2.19)$$

Par conséquent,  $v_0(0) \leq v_0(T) = v_1(0)$ . Si on pose  $p = v_0 - v_1$ , puis  $p(0) \leq 0$  et,

$$\begin{aligned} {}^C D^q p &= {}^C D^q v_0 - {}^C D^q v_1 \\ &\leq f(t, v_0) + g(t, w_0) - f(t, v_0) + g(t, w_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Depuis  ${}^C D^q p \leq 0$  and  $p(0) \leq 0$ , par la corollaire 2.5 (voir [7]) nous avons que  $p(t) \leq 0$  et, par conséquent,  $v_0(t) \leq v_1(t)$  en  $J$ . Par un argument similaire, nous pouvons montrer que  $v_1(t) \leq u, u \leq w_1(t)$ , et  $w_1(t) \leq w_0(t)$ . Thus,  $v_0 \leq v_1 \leq u \leq w_1 \leq w_0$ . Maintenant nous allons montrer que  $v_k \leq v_{k+1}$  for  $k \geq 1$ . On suppose que

$$v_{k+1} \leq v_k \leq u \leq w_k \leq w_{k+1}, \quad (2.20)$$

pour  $k \geq 1$ .

Soit  $p = v_k - v_{k+1}$ . Puis

$$v_k(0) = v_{k-1}(T) \leq v_k(T) = v_{k-1}(0) \quad (2.21)$$

danc  $p(0) \leq 0$ . Par la nature croissante de  $f$  et la nature décroissante de  $g$  il s'ensuit que

$$\begin{aligned} {}^C D^q p &= {}^C D^q v_k - {}^C D^q v_{k+1} \\ &= f(t, v_{k-1}) + g(t, w_{k-1}) - f(t, v_k) + g(t, w_k) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

De même, par corollaire (2.5)(voir [7]), nous avons que  $p(t) \leq 0$  et par conséquent  $v_k(t) \leq v_{k+1}(t)$ . Par un argument similaire, nous pouvons montrer que  $w_{k+1} \leq w_k$ . En utilisant l'hypothèse que  $v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)$  on  $J$ , l'argument ci-dessus et nous pouvons montrer que l'induction  $v_{k+1} \leq u \leq w_{k+1}$ . Donc pour  $n \geq 1$ ,

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n \leq u \leq w_n \leq \dots \leq w_2 \leq w_1 \leq w_0 \quad (2.22)$$

Maintenant, nous devons montrer que les suites convergent uniformément. Nous allons utiliser le théorème de Arzela-Ascoli en montrant que les suites sont uniformément borné et équicontinues.

D'abord, nous montrons l'uniformement borné. Par hypothèse à la fois  $v_0$  et  $w_0$  sont délimités sur  $[0, T]$ , puis il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $|v_0(t)| \leq M$  et  $|w_0| \leq M$ . Depuis  $v_0(t) \leq v_n(t) \leq w_0(t)$  pour tout  $n > 0$ , il s'ensuit que

$$0 \leq v_n(t) - v_0(t) \leq w_0(t) - v_0(t) \quad (2.23)$$

et par conséquent  $\{v_n(t)\}$  est uniformément borné. Par un argument similaire  $\{w_n(t)\}$  est aussi uniformément bornée.

Pour montrer que  $\{v_n(t)\}$  est équicontinues, soit  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ . Puis pour  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} |v_n(t_1) - v_n(t_2)| &= \left| v_n(T) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} [f(s, v_{n-1}(s) + g(s, w_{n-1}(s))] ds - v_n(T) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} [f(s, v_{n-1}(s) + g(s, w_{n-1}(s))] ds \right| \\ &= \left| \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{q-1}] [f(s, v_{n-1}(s) + g(s, w_{n-1}(s))] ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} [f(s, v_{n-1}(s) + g(s, w_{n-1}(t))] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \left| [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] [f(s, v_{n-1}(s) + g(s, w_{n-1}(s))] \right| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} \left| (t_2 - s)^{q-1} [f(s, v_{n-1}(s) + g(s, w_{n-1}(t))] \right| ds \end{aligned} \quad (2.24)$$

Depuis  $\{v_n(t)\}$  et  $\{w_n(t)\}$  sont uniformément bornées et  $f(t, u(t))$  et  $g(t, u(t))$  sont continus sur  $[0, T]$ , il existe  $M$  independent de  $n$  telle que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \left| [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] [f(s, v_{n-1}(s) + g(s, w_{n-1}(s))] \right| ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} \left| [f(s, v_{n-1}(s) + g(s, w_{n-1}(t))] \right| ds \\ &\leq \frac{\bar{M}}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \left| [(t_2 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] \right| ds + \frac{\bar{M}}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} \left| [(t_2 - s)^{q-1}] \right| ds \\ &= -\frac{\bar{M}}{q\Gamma(q)} (t_1 - s)^q \Big|_0^{t_1} + \frac{\bar{M}}{q\Gamma(q)} (t_2 - s)^q \Big|_0^{t_1} - \frac{\bar{M}}{q\Gamma(q)} (t_2 - s)^q \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{\bar{M}}{\Gamma(q+1)} t_1^q + \frac{\bar{M}}{\Gamma(q+1)} (t_2 - t_1)^q - \frac{\bar{M}}{\Gamma(q+1)} t_2^q + \frac{\bar{M}}{\Gamma(q+1)} (t_2 - t_1)^q \\ &\leq \frac{2\bar{M}}{\Gamma(q+1)} (t_2 - t_1)^q = \frac{2\bar{M}}{\Gamma(q+1)} |t_2 - t_1|^q. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon \geq 0$  il existe  $\delta \geq 0$  independent de  $n$  tel que, pour chaque  $n$

$$|v_n(t_1) - v_n(t_2)| \leq \varepsilon, \quad (2.26)$$

À condition que  $|t_1 - t_2| \leq \delta$ .

De même nous pouvons montrer que  $\{w_n(t)\}$  est equicontinuous et uniformément borné. Cela montre que  $\{v_n(t)\}$  et  $\{w_n(t)\}$  sont equicontinuous et uniformément borné. On  $[0, T]$ . Donc par le théorème de Arzela-Ascoli il existe sous-suites  $\{v_{n_k}(t)\}$  et  $\{w_{n_k}(t)\}$  qui converge uniformément vers  $\rho(t)$  et  $r(t)$ , respectivement. Depuis les suites sont monotonie, les suites entiere converge uniformément.

Nous avons montré que les suites convergent dans  $C[0, T]$ . Afin de montrer qu'elle convergent dans  $C^1[0, T]$ , observer que puisque chaque  $v_n$  est construite comme suit

$$\begin{aligned} {}^C D^q v_n(t) &= f(t, v_{n-1}(t)) + g(t, w_{n-1}(t)), \\ v_n(0) &= v_{n-1}(T), \end{aligned} \quad (2.27)$$

nous obtenons que

$$v_n(t) = v_{n-1}(T) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t |(t-s)^{q-1} [f(s, v_{n-1}(s)) + g(s, w_{n-1}(s))]| ds. \quad (2.28)$$

Lorsque les limites quand  $n \rightarrow \infty$ , nous obtenons par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\rho(t) = \rho(T) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t |(t-s)^{q-1} [f(s, \rho(s)) + g(s, r(s))]| ds. \quad (2.29)$$

Par conséquent  $v_n(t) \rightarrow \rho(t)$  in  $C^1[0, T]$ . En outre, l'expression ci-dessus est équivalent à

$$\begin{aligned} {}^C D^q \rho(t) &= f(t, \rho(t)) + g(t, r(t)), \text{ on } J \\ \rho(0) &= \rho(T), \end{aligned} \quad (2.30)$$

Par un argument similaire  $w_n(t) \rightarrow r(t)$  dans  $C^1[0, T]$

$$\begin{aligned} {}^C D^q r(t) &= f(t, r(t)) + g(t, \rho(t)), \text{ on } J \\ r(0) &= r(T), \end{aligned} \quad (2.31)$$

Depuis  $v_n \leq u \leq w_n$  on  $[0, T]$  pour tout  $n$ , nous obtenons que  $\rho \leq u \leq r$  sur  $[0, T]$  ce qui montre que  $\rho$  et  $r$  sont minimales et maximales de solutions périodiques (2.9), respectivement. Cela termine la preuve.

Le prochain résultat utilise également des sur-solutions et sous-solutions de Type I. Cependant, nous obtenons des séquences entrelacées qui convergent à minimale et maximale combinée de solutions périodiques (2.9). Donc la preuve est similaire à Théorem 3.2 [7], nous ne sommes pas fournir la preuve

**Théoreme 2.3.5** . *Supposons que les conditions  $(A_1)$  et  $(A_2)$  du Théorem 3.2 [7] sont vérifiées. Alors l'itération donnée par*

$$\begin{aligned} {}^C D^q v_{n+1}(t) &= f(t, w_n(t)) + g(t, v_n(t)), \\ v_{n+1}(0) &= w_n(T), \\ {}^C D^q w_{n+1}(t) &= f(t, v_n(t)) + g(t, w_n(t)), \\ w_{n+1}(0) &= v_n(T), \end{aligned} \quad (2.32)$$

*donner suites alternant monotone  $\{v_{2n}, w_{2n+1}\}$  et  $\{v_{2n+1}, w_{2n}\}$  satisfais*

$$v_0(t) \leq w_1(t) \leq \dots \leq v_{2n}(t) \leq w_{2n+1}(t) \leq u(t) \leq v_{2n+1}(t) \leq w_{2n}(t) \leq \dots \leq v_1(t) \leq w_0(t) \quad (2.33)$$

pour tout  $n \geq 1$  on  $J$ , À condition que  $v_0 \leq u \leq w_0$ . De plus  $\{v_{2n}, w_{2n+1}\} \rightarrow \rho$  et  $\{v_{2n+1}, w_{2n}\} \rightarrow r$  in  $C^1[J, \mathbb{R}]$ , où  $\rho$  et  $r$  sont minimale et maximale de solutions périodiques (2.9), respectivement; C'est, si  $v_0 \leq u \leq w_0$  puis  $\rho \leq u \leq r$ , et  $\rho$  et  $r$  vérifient le système

$$\begin{aligned} {}^C D^q \rho(t) &= f(t, \rho(t)) + g(t, r(t)) \text{ on } J, \\ \rho(0) &= \rho(T), \\ {}^C D^q r(t) &= f(t, r(t)) + g(t, \rho(t)) \text{ on } J, \\ r(0) &= r(T), \end{aligned} \tag{2.34}$$

donner suites alternant monotone  $\{v_{2n}, w_{2n+1}\}$  et  $\{v_{2n+1}, w_{2n}\}$  satisfais

Au cours des deux théorèmes nous avons supposé l'existence de sous-solutions et sur-solutions de Type I. On peut énoncer deux résultats impliquant ainsi des sur-solutions et sous-solutions de Type II, Cependant ils ont besoin d'une hypothèse supplémentaire afin d'obtenir des suites naturelles ou liées à la convergence et solutions périodiques minimales et maximales de problème (2.9).

**Théoreme 2.3.6** . On suppose que

(B<sub>1</sub>)  $v_0$  et  $w_0$  sont sous-solutions et sur-solutions ode Type II de (2.9) qui  $v_0(t) \leq w_0(t)$  en  $J$ ,

(B<sub>2</sub>)  $f, g \in C[J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ ,  $f(t, u(t))$  est croissante en  $u$ , et  $g(t, u(t))$  est décroissante en  $u$ .

si  $u(t)$  est une solution de (2.9) tels que  $v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)$ . Puis les suites définies par (2.32) donnez en alternant suites monotone  $\{v_{2n}, w_{2n+1}\}$  and  $\{v_{2n+1}, w_{2n}\}$  satisfie

$$v_0(t) \leq w_1(t) \leq \dots \leq v_{2n}(t) \leq w_{2n+1}(t) \leq u(t) \leq v_{2n+1}(t) \leq w_{2n}(t) \dots v_1(t) \leq w_0(t), \tag{2.35}$$

pour tout  $n \geq 1$  on  $J$ , à condition que  $v_0 \leq w_1 \leq u \leq v_1 \leq w_0$ .

De plus  $\{v_{2n}, w_{2n+1}\} \rightarrow \rho$  et  $\{v_{2n+1}, w_{2n}\} \rightarrow r$  in  $C^1[J, \mathbb{R}]$ , où  $\rho$  et  $r$  sont minimale et maximale de solutions périodiques (2.9), respectivement; C'est, si  $v_0 \leq u \leq w_0$  then  $\rho \leq u \leq r$ , et  $\rho$  et  $r$  satisfie le système

$$\begin{aligned} {}^C D^q \rho(t) &= f(t, \rho(t)) + g(t, r(t)) \text{ on } J, \\ \rho(0) &= \rho(T), \\ {}^C D^q r(t) &= f(t, r(t)) + g(t, \rho(t)) \text{ on } J, \\ r(0) &= r(T), \end{aligned} \tag{2.36}$$

**Théoreme 2.3.7** . Suppose que les conditions (B<sub>1</sub>) et (B<sub>2</sub>) de Théorem 3.5 [7] sont vraies. puis la suites définie par (2.15) et (2.16) sont telle que  $v_n(t) \rightarrow \rho(t)$  et  $w_n(t) \rightarrow r(t)$  dans  $C^1[J, \mathbb{R}]$  uniformément et de façon monotone, à condition que  $v_0 \leq v_1 \leq u \leq w_1 \leq w_0$ , où  $\rho$  et  $r$  sont minimale et maximale de solutions périodiques (2.9), respectivement; C'est,  $\rho \leq u \leq r$  et  $\rho$  et  $r$  satisfais le système

$$\begin{aligned} {}^C D^q \rho(t) &= f(t, \rho(t)) + g(t, r(t)) \text{ on } J, \\ \rho(0) &= \rho(T), \\ {}^C D^q r(t) &= f(t, r(t)) + g(t, \rho(t)) \text{ on } J, \\ r(0) &= r(T), \end{aligned} \tag{2.37}$$

### Systèmes d'équations différentielles fractionnaires

Considérer le système suivant des équations fractionnaires non linéaire (voir [6])

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t, u(t), v(t)), & t \in [0, T] \\ D^\alpha v(t) = g(t, u(t), v(t)), & t \in [0, T] \\ t^{1-\alpha}u(t)|_{t=0} = x_0, t^{1-\alpha}v(t)|_{t=0} = y_0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Dans cette partie, on prouve l'existence de solutions de système non linéaire extrémale (2.38). On pose les hypothèses suivantes :

(H<sub>1</sub>) Il existe  $u_0, v_0 \in C_{1-\alpha}([0, T])$ , et  $u_0(t) \leq v_0(t)$  :

$$\begin{cases} D^\alpha u_0(t) \leq f(t, u_0(t), v_0(t)), & t \in (0, T) \\ t^{1-\alpha}u(t)|_{t=0} \leq x_0, \\ D^\alpha v_0(t) \geq g(t, u_0(t), v_0(t)), & t \in (0, T) \\ t^{1-\alpha}v(t)|_{t=0} \geq y_0, \end{cases}$$

(H<sub>2</sub>) Il existe  $M \in \mathbb{R}, N \geq 0$  tel que

$$\begin{cases} f(t, u, v) - f(t, \bar{u}, \bar{v}) \geq -M(u - \bar{u}) - N(v - \bar{v}) \\ g(t, u, v) - g(t, \bar{u}, \bar{v}) \geq -M(u - \bar{u}) - N(v - \bar{v}) \end{cases}$$

où  $u_0(t) \leq \bar{u} \leq u \leq v_0(t)$ ,  $u_0(t) \leq \bar{v} \leq v \leq v_0(t)$  et  $g(t, u, v) - f(t, u, v) \geq -M(u - v) - N(v - u)$ , avec  $u_0(t) \leq u \leq v \leq v_0(t)$

**Théoreme 2.3.8** *Supposons que les conditions (H<sub>1</sub>) et (H<sub>2</sub>) satisferaient. Alors il existe  $(u^*, v^*) \in [u_0, v_0] \times [u_0, v_0]$  une solution extrémale de le problème non linéaire (2.38). De plus, il existe des suites itératives monotones  $\{u_n\}, \{v_n\} \subset [u_0, v_0]$ , tel que :  $u_n \rightarrow u^*, v_n \rightarrow v^* (n \rightarrow \infty)$  uniformément sur  $[0, T]$  et*

$$u_0 \leq u_1 \dots \leq u_n \dots \leq u^* \leq v^* \dots \leq v_n \dots \leq v_1 \leq v_0. \quad (2.39)$$

**Preuve :** D'abord, pour tout  $u_{n-1} \in C_{1-\alpha}([0, T])$ ,  $n \geq 1$ , considérons le système linéaire

$$\begin{cases} D^\alpha u_n(t) = f(t, u_{n-1}(t), v_{n-1}(t)) + Mu_{n-1}(t) + Nv_{n-1}(t) - Mu_n(t) - Nv_n(t), & t \in (0, T) \\ D^\alpha v_n(t) = g(t, v_{n-1}(t), u_{n-1}(t)) + Nv_{n-1}(t) + Mu_{n-1}(t) - Mu_n(t) - Nv_n(t), & t \in (0, T) \\ t^{1-\alpha}u_n(t)|_{t=0} = x_0, & t^{1-\alpha}v_n(t)|_{t=0} = y_0 \end{cases} \quad (2.40)$$

À partir de de la lemme (2.2) [6], nous savons que (2.40) a un système unique de solutions dans  $C_{1-\alpha}([0, T]) \times C_{1-\alpha}([0, T])$ . Ensuite, nous montrons que  $u_n(t), v_n(t)$  satisfie la propriété

$$u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1}, n = 1, 2, \dots \quad (2.41)$$

Soit  $p = u_1 - u_0$ ,  $q = v_0 - v_1$ . De (2.40) et (H<sub>1</sub>), nous avons que

$$\begin{cases} D^\alpha p(t) = D^\alpha u_1 - D^\alpha u_0 \\ \geq -Mp(t) + Nq(t), \\ D^\alpha q(t) = D^\alpha v_0 - D^\alpha v_1 \\ \geq -Mq(t) + Np(t), \\ t^{1-\alpha}p(t)|_{t=0} \geq x_0 - x_0 = 0, \\ t^{1-\alpha}q(t)|_{t=0} \geq y_0 - y_0 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, par le lemme (2.4) [6], nous avons que  $p(t) \geq 0, q(t) \geq 0, \forall t \in (0, T]$ .  
Soit  $w = v_1 - u_1$ . Pour la condition  $H_2$  de (2.40), nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha w(t) = D^\alpha v_1 - D^\alpha u_1 \\ = g(t, v_0(t), u_0(t)) + Mv_0(t) + Nu_0 - Mv_1(t) - Mu_1(t) \\ - f(t, u_0(t), v_0(t)) - Mu_0(t) - Nv_0 + Mu_1(t) + Nv_1(t) \\ \geq -M(v_0 - u_0)(t) - N(u_0 - v_0)(t) + Mv_0(t) + Nu_0(t) - Mv_1(t) \\ - Nu_1(t) - Mu_0(t) - Nv_0(t) + Mu_1(t) + Nv_1(t) \\ = -(M - N)w(t), \\ t^{1-\alpha}w(t)|_{t=0} \geq y_0 - x_0 \geq 0. \end{array} \right.$$

Par le lemme (2.3) [6], nous obtenons  $w(t) \geq 0, \forall t \in (0, T]$ . Par conséquent, nous avons la relation  $u_0 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0$ .

Maintenant, nous supposons que  $u_{k-1} \leq u_k \leq v_k \leq v_{k-1}$ , pour tout  $k \geq 1$ , nous montrons que (2.41) est vrai pour  $k + 1$  aussi. Soit  $p = u_{k+1} - u_k$ ,  $q = v_k - v_{k+1}$  et  $w = v_{k+1} - u_{k+1}$ . Par ( $H_2$ ) et (2.40) nous avons que

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha p(t) \geq -Mp(t) + Nq(t), \\ D^\beta q(t) \geq -Mq(t) + Np(t), \\ t^{1-\alpha}p(t)|_{t=0} = 0, \\ t^{1-\alpha}q(t)|_{t=0} = 0. \end{array} \right.$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha w(t) \geq -(M - N)w(t), \\ t^{1-\alpha}w(t)|_{t=0} = 0. \end{array} \right.$$

Donc, par les Lemmes (2.3) et (2.4) [6], nous avons que  $u_k \leq u_{k+1} \leq v_{k+1} \leq v_k$ .

À partir de ce qui précède, par l'induction, il n'est pas difficile de prouver que

$$u_0 \leq u_1 \dots \leq u_n \dots \leq v_n \dots \leq v_1 \leq v_0. \quad (2.42)$$

L'application des arguments standards, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u^*(t)$$

,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = v^*(t)$$

Uniformement sur des sous-ensembles compacts de  $(0, T]$ , et la limite  $u^*, v^*$  satisfie (2.38). De plus,  $u^*, v^* \in [u_0, v_0]$ . En prenant les limites dans (2.40), nous savons que  $(u^*, v^*)$  est un système de solutions de (2.38) en  $[u_0, v_0] \times [u_0, v_0]$ . De plus, (2.39) est vrai.

Finalement, nous montrons que (2.38) a une solution extrême. Supposer que  $(u, v) \in [u_0, v_0] \times [u_0, v_0]$  est tout système de solutions de (2.38). C'est

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha u(t) = f(t, u(t), v(t)), \quad t \in [0, T] \\ D^\alpha v(t) = g(t, u(t), v(t)), \quad t \in [0, T] \\ t^{1-\alpha}u(t)|_{t=0} = x_0, t^{1-\alpha}v(t)|_{t=0} = y_0 \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Par (2.40), (2.43),  $(H_2)$  et le lemma 2.4 dans [6], il est facile de montrer que

$$u_n \leq u, v \leq v_n, n = 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

En prenant les limites dans (2.44) comme  $n \rightarrow \infty$ , nous avons que  $u^* \leq u, v \leq v^*$ . C'est,  $(u^*, v^*)$  est un système de solution extrême (2.38) en  $[u_0, v_0] \times [u_0, v_0]$ . Cela termine la preuve.

# Chapitre 3

## Application et résultat principal

Dans ce chapitre, qui constitue l'essentiel de notre travail et la contribution de ce mémoire, nous considérons le système différentiel multi-ordres fractionnaires suivant :

$$(IVP) \begin{cases} {}^C D^\alpha u(t) = f(u(t), v(t)), t > 0, \\ {}^C D^\beta v(t) = g(u(t), v(t)), t > 0, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases}$$

où les ordres de dérivation fractionnaire  $\alpha$  et  $\beta$  sont différents :  $\alpha \neq \beta$  dans  $]0, 1[$ .  
Si  $(u, v) \in C^p[0, T]$  satisfait le problème (IVP)

### 3.1 Résultat d'existence par la méthode des itérations monotones

**Lemme 3.1.1** Soit  $m \in C^1([0, T], \mathbb{R})$  s'il existe  $t_1 \in [0, T]$  tel que  $m(t_1) = 0$  et  $m(t) \leq 0$  sur  $[0, T]$ , alors il s'ensuit que

$${}^C D^\alpha m(t_1) \geq 0$$

**Preuve :** Soit  $t_1 \in [0, T]$ , l'utilisation de la relation (1.24) nous avons :

$${}^C D^\alpha m(t_1) = D^\alpha m(t_1) - \frac{m(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \geq D^\alpha m(t_1).$$

D'après le lemme de la dérivée de Riemann Liouville (voir [6]), nous avons  ${}^R D^\alpha m(t_1) \geq 0$  implique  ${}^C D^\alpha m(t_1) \geq 0$ , et la preuve est complète.

**Corollaire 3.1.1** Soit  $p \in C^1([0, T])$  tel que :

$${}^C D^\alpha p(t) \geq -Mp(t)$$

pour tout  $t \in [0, T]$  et  $M > 0, p(0) \geq 0$ . Alors  $p(t) \geq 0$ .

**Preuve :** Supposons que  $p(t) \geq 0$ , n'est pas vérifié sur  $[0, T]$ .

Donc  $\exists t' \in [0, T[$  tel que :  $p(t') = 0$  et  $\exists \delta > 0$  tel que  $p(t) < 0, \forall t \in ]t', t' + \delta]$ . (car  $p$  est continue)

Soit  $t_0$  la plus petite valeur,  $t_0 \geq t'$  tel que :

$$p(t_0) := \min_{t \in [t', t' + \delta]} p(t)$$

1.  $t_0 > t'$  (car  $p(t) < 0, \forall t \in ]t', t' + \delta[$ ).
2.  $p(t_0) < 0$ .

On pose

$$t_0 = t' + \delta' \quad 0 < \delta' \leq \delta$$

$\exists \varepsilon > 0$  tel que :

$$\begin{cases} p(t_0) + \varepsilon = 0 \\ p(t) + \varepsilon > 0, \quad \forall t \in ]t', t' + \delta[ \end{cases}$$

On pose  $m(t) = -p(t) - \varepsilon$

$$\begin{cases} m(t_0) = -p(t_0) - \varepsilon = 0 \\ m(t) = -p(t) - \varepsilon < 0, \forall t \in ]t', t_0[ \end{cases}$$

d'après Lemme 3.1.1

$$0 \leq^C D^\alpha m(t_0) = -^C D^\alpha p(t_0) \leq Mp(t_0)$$

$$\Rightarrow Mp(t_0) \geq 0$$

Donc  $p(t_0) \geq 0$  contradiction

**Définition 3.1.1**  $(w, z) \in C^p$  est appelé sous-solution du système différentiel (IVP), si :

$$\begin{cases} ^C D^\alpha w(t) \leq f(w(t), z(t)), t > 0, \\ ^C D^\beta z(t) \leq g(z(t), w(t)), t > 0, \\ w(0) \leq w_0, z(0) \leq z_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

De même  $(\bar{w}, \bar{z}) \in C^p$  est appelé sur-solution du système différentiel (IVP), si :

$$\begin{cases} ^C D^\alpha \bar{w}(t) \geq f(\bar{w}(t), \bar{z}(t)), t > 0, \\ ^C D^\beta \bar{z}(t) \geq g(\bar{z}(t), \bar{w}(t)), t > 0, \\ \bar{w}(0) \geq \bar{w}_0, \bar{z}(0) \geq \bar{z}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans cette section, on prouve l'existence de solutions extrémales de système non linéaire (IVP). On pose les hypothèses suivantes :

( $H_1$ ) il existe  $(w_0, z_0), (\bar{w}_0, \bar{z}_0) \in C^p([0, T])$ , et  $(w_0, z_0) \leq (u, v) \leq (\bar{w}_0, \bar{z}_0)$  :

$$\begin{cases} ^C D^\alpha w_0(t) \leq f(w_0(t), z_0(t)), & t \in [0, T] \\ ^C D^\beta z_0(t) \leq g(z_0(t), w_0(t)), & t \in [0, T] \\ w_0(0) \leq u_0, \quad z_0(0) \leq v_0, \\ ^C D^\alpha \bar{w}_0(t) \geq f(\bar{w}_0(t), \bar{z}_0(t)), & t \in [0, T] \\ ^C D^\beta \bar{z}_0(t) \geq g(\bar{z}_0(t), \bar{w}_0(t)), & t \in [0, T] \\ \bar{w}_0(0) \geq u_0, \quad \bar{z}_0(0) \geq v_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

tel que  $w_0 \leq u_0 \leq \bar{w}_0$   $z_0 \leq v_0 \leq \bar{z}_0$

( $H_2$ ) Il existe  $M > 0, N > 0$  tels que :

$$\begin{cases} f(u', v') - f(\bar{u}, \bar{v}) \geq -M(u' - \bar{u}) \\ g(u', v') - g(\bar{u}, \bar{v}) \geq -N(v' - \bar{v}) \end{cases}$$

où

$$w_0 \leq \bar{u} \leq u' \leq z_0, \quad \bar{w}_0 \leq \bar{v} \leq v' \leq \bar{z}_0$$

tel que :

$f$  est croissante en  $u$

$g$  est décroissante en  $v$

**Théoreme 3.1.1** *Supposons que les conditions  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont vérifiées. Alors il existe  $(w^*, z^*) \in [w_0, z_0] \times [w_0, z_0]$ , et  $(w^{**}, z^{**}) \in [\bar{w}_0, \bar{z}_0] \times [\bar{w}_0, \bar{z}_0]$  des solutions extrémales du problème non linéaire (IVP). De plus, il existe des suites itératives monotones  $\{(w_n, z_n)\} \subset [w_0, z_0] \times [w_0, z_0]$ , et  $\{(\bar{w}_n, \bar{z}_n)\} \subset [\bar{w}_0, \bar{z}_0] \times [\bar{w}_0, \bar{z}_0]$  telles que :*

(i)  $(w_n, z_n)$  est une suite croissante qui tend vers  $(w^*, z^*)$ ,

(ii)  $(\bar{w}_n, \bar{z}_n)$  est une suite décroissante qui tend vers  $(w^{**}, z^{**})$  quand  $(n \rightarrow \infty)$  uniformément sur  $[0, T]$ ,

et

$$(w_0, z_0) \leq (w_1, z_1) \dots \leq (w_n, z_n) \dots \leq (w^*, z^*) \leq (w^{**}, z^{**}) \dots \leq (\bar{w}_n, \bar{z}_n) \dots \leq (\bar{w}_1, \bar{z}_1) \leq (\bar{w}_0, \bar{z}_0).$$

**Preuve :** D'après l'hypothèse  $(H_1)$  on a  $(w_0, z_0) \leq (u, v) \leq (\bar{w}_0, \bar{z}_0)$ . Nous allons montrer que  $(w_0, z_0) \leq (w_1, z_1) \leq (\bar{w}_1, \bar{z}_1) \leq (\bar{w}_0, \bar{z}_0)$ . Nous considérons le système linéaire

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha w_n(t) = f(w_{n-1}(t), z_{n-1}(t)) + M w_{n-1}(t) - M w_n(t), & t \in [0, T] \\ {}^C D^\beta z_n(t) = g(z_{n-1}(t), w_{n-1}(t)) + N z_{n-1}(t) - N z_n(t), & t \in [0, T] \\ w_n(0) = u_0, \quad z_n(0) = v_0, \\ {}^C D^\alpha \bar{w}_n(t) = f(\bar{w}_{n-1}(t), \bar{z}_{n-1}(t)) + M \bar{w}_{n-1}(t) - M \bar{w}_n(t), & t \in [0, T] \\ {}^C D^\beta \bar{z}_n(t) = g(\bar{z}_{n-1}(t), \bar{w}_{n-1}(t)) + N \bar{z}_{n-1}(t) - N \bar{z}_n(t), & t \in [0, T] \\ \bar{w}_n(0) = u_0, \quad \bar{z}_n(0) = v_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

D'après  $(H_1)$  on a

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha w_0(t) \leq f(w_0(t), z_0(t)) \\ {}^C D^\beta z_0(t) \leq g(z_0(t), w_0(t)) \end{cases}$$

et  $w_0(0) \leq u_0 = w_1(0)$ ,  $z_0(0) \leq v_0 = z_1(0)$ .

Ainsi on a  $w_1(0) - w_0(0) \geq 0$  et  $z_1(0) - z_0(0) \geq 0$

pour  $n = 1$  le système (3.4) nous donne

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha w_1(t) = f(w_0(t), z_0(t)) + M w_0(t) - M w_1(t) \\ {}^C D^\beta z_1(t) = g(z_0(t), w_0(t)) + N z_0(t) - N z_1(t) \\ w_1(0) = u_0, \quad z_1(0) = v_0. \end{cases}$$

Par conséquent en posant  $p = w_1 - w_0$  et  $q = z_1 - z_0$

on obtient

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha p(t) = {}^C D^\alpha (w_1(t) - w_0(t)) \geq -M(w_1(t) - w_0(t)) \\ {}^C D^\beta q(t) = {}^C D^\beta (z_1(t) - z_0(t)) \geq -N(z_1(t) - z_0(t)) \end{cases}$$

avec  $p(0) \geq 0$  et  $q(0) \geq 0$ . Donc,  $p$  et  $q$  vérifient

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha p(t) \geq -M p(t) \\ {}^C D^\beta q(t) \geq -N q(t) \end{cases}$$

avec  $p(0) \geq 0$  et  $q(0) \geq 0$ .

D'après le corollaire 3.1.1 on a  $p(t) \geq 0$  et  $q(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ , ce qui implique que  $w_0(t) \leq w_1(t)$  et  $z_0(t) \leq z_1(t)$  dans  $[0, T]$ .

De la même manière en posant  $\bar{p} = \bar{w}_0 - \bar{w}_1$  et  $\bar{q} = \bar{z}_0 - \bar{z}_1$ , en suivant le raisonnement précédent, à l'aide du corollaire 3.1.1 on obtient

$\bar{w}_1(t) \leq \bar{w}_0(t)$ ,  $\bar{z}_1(t) \leq \bar{z}_0(t)$  dans  $[0, T]$ .

On a

$(w_1, z_1) \leq (u, v)$  ,  $(u, v) \leq (\bar{w}_1, \bar{z}_1)$ .

Finalement, on arrive à

$$(w_0, z_0) \leq (w_1, z_1) \leq (u, v) \leq (\bar{w}_1, \bar{z}_1) \leq (\bar{w}_0, \bar{z}_0).$$

À présent, en suivant pas à pas la démarche précédente nous allons montrer que

$$(w_k, z_k) \leq (w_{k+1}, z_{k+1}) \leq (\bar{w}_{k+1}, \bar{z}_{k+1}) \leq (\bar{w}_k, \bar{z}_k).$$

Supposons que  $(w_{k-1}, z_{k-1}) \leq (w_k, z_k) \leq (\bar{w}_k, \bar{z}_k) \leq (\bar{w}_{k-1}, \bar{z}_{k-1})$ .

Pour  $k \geq 1$ , soient  $p = w_{k+1} - w_k$  et  $q = z_{k+1} - z_k$ .

Puisque  $w_k(0) = u_0 = w_{k+1}(0)$ ,  $z_k(0) = v_0 = z_{k+1}(0)$ , alors  $p(0) \geq 0$  et  $q(0) \geq 0$ .

Ainsi, on peut montrer que  $p$  et  $q$  vérifient le système d'inéquations suivant

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha p(t) \geq -M(w_{k+1}(t) - w_k(t)) = -Mp(t) \\ {}^C D^\alpha q(t) \geq -N(z_{k+1}(t) - z_k(t)) = -Nq(t). \end{cases}$$

En utilisant encore le corollaire 3.1.1, on obtient  $p(t) \geq 0, q(t) \geq 0$  et par conséquent  $w_k(t) \leq w_{k+1}(t), z_k(t) \leq z_{k+1}(t)$  dans  $[0, T], \forall k \geq 1$ .

Par un argument similaire, nous montrons que

$$\bar{w}_{k+1}(t) \leq \bar{w}_k(t), \bar{z}_{k+1}(t) \leq \bar{z}_k(t).$$

D'après l'hypothèse  $(H_1)$  on a  $(w_0, z_0) \leq (u, v) \leq (\bar{w}_0, \bar{z}_0)$  dans  $[0, T]$ , ce qui donne pour tout  $k \geq 1$

$$(w_k, z_k) \leq (w_{k+1}, z_{k+1}) \leq (\bar{w}_{k+1}, \bar{z}_{k+1}) \leq (\bar{w}_k, \bar{z}_k)$$

Par induction, le processus précédent nous amène à

$$(w_0, z_0) \leq (w_1, z_1) \dots \leq (w_n, z_n) \dots \leq (\bar{w}_n, \bar{z}_n) \dots \leq (\bar{w}_1, \bar{z}_1) \leq (\bar{w}_0, \bar{z}_0).$$

Puisque la suite  $\{(w_n, z_n)\}_{n \geq 1}$  est monotone croissante et majorée, alors elle possède une limite. Donc, il existe  $(w^*, z^*)$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n, z_n) = (w^*, z^*).$$

La suite  $\{(\bar{w}_n, \bar{z}_n)\}_{n \geq 1}$  étant monotone décroissante et minorée, elle possède une limite. Donc, il existe  $(w^{**}, z^{**})$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{w}_n, \bar{z}_n) = (w^{**}, z^{**}).$$

Les convergences dans les limites précédentes sont uniformes sur  $[0, T]$ . Les fonctions limites  $(w^*, z^*)$  et  $(w^{**}, z^{**})$  vérifient le problème (IVP), de plus  $(w^*, z^*) \in [w_0, z_0] \times [w_0, z_0]$ , et  $(w^{**}, z^{**}) \in [\bar{w}_0, \bar{z}_0] \times [\bar{w}_0, \bar{z}_0]$ . En passant à la limite dans (3.4), nous obtenons

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha w^*(t) = f(w^*(t), z^*(t)), & t \in [0, T] \\ {}^C D^\beta z^*(t) = g(z^*(t), w^*(t)), & t \in [0, T] \\ w^*(0) = u_0, & z^*(0) = v_0, \\ {}^C D^\alpha \bar{w}^{**}(t) = f(\bar{w}^{**}(t), \bar{z}^{**}(t)), & t \in [0, T] \\ {}^C D^\beta \bar{z}^{**}(t) = g(\bar{z}^{**}(t), \bar{w}^{**}(t)), & t \in [0, T] \\ \bar{w}^{**}(0) = u_0, & \bar{z}^{**}(0) = v_0. \end{cases}$$

Donc  $(w^*, z^*)$  et  $(w^{**}, z^{**})$  sont bien des solutions du système (IVP) respectivement dans  $[w_0, z_0] \times [w_0, z_0]$  et  $[\bar{w}_0, \bar{z}_0] \times [\bar{w}_0, \bar{z}_0]$ .

À l'aide de (3.4), (IVP),  $H_2$  il est facile de montrer que

$$(w_n, z_n) \leq (u, v), (u, v) \leq (\bar{w}_n, \bar{z}_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

En effet,

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha u(t) - {}^C D^\alpha w_n(t) &= f(u(t), v(t)) - f(w_{n-1}(t), z_{n-1}(t)) - Mw_{n-1}(t) + Mw_n(t) \\ &\geq -M(u(t) - w_{n-1}(t)) - Mw_{n-1}(t) + Mw_n(t) \\ &\geq -M(u(t) - w_n(t)) \end{aligned}$$

et d'après le corollaire 3.1.1 on a  $u(t) - w_n(t) \geq 0$ , ce qui implique que  $u(t) \geq w_n(t)$ . On obtient de la même façon  $v(t) \geq z_n(t)$ . Par conséquent on a bien

$$(w_n, z_n) \leq (u, v). \quad (3.6)$$

En suivant un raisonnement analogue, et en utilisant les mêmes arguments on a

$$(u, v) \leq (\bar{w}_n, \bar{z}_n). \quad (3.7)$$

En passant aux limites lorsque  $n \rightarrow \infty$  en (3.5), on arrive à

$$(w^*, z^*) \leq (u, v), \quad (u, v) \leq (w^{**}, z^{**}).$$

Ainsi,  $(w^*, z^*)$  et  $(w^{**}, z^{**})$  sont des solutions extrémales du système (IVP) respectivement dans  $[w_0, z_0] \times [w_0, z_0]$  et  $[\bar{w}_0, \bar{z}_0] \times [\bar{w}_0, \bar{z}_0]$ .

**Exemple 3.1.1** *considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha u(t) = -3v(t) + u^3(t) + 1, t \geq 0, \\ {}^C D^\beta v(t) = -v^3(t) - u(t) + 1, t \geq 0, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

et

$$f(u(t), v(t)) = -3v(t) + u^3(t) + 1, \quad g(v(t), u(t)) = -v^3(t) - u(t) + 1,$$

avec  $f$  et  $g$  croissant et décroissant respectivement.

On pose  $(w_0, z_0) = (0, 0)$ ,  $(\bar{w}_0, \bar{z}_0) = (1, 1)$  sont sous-solution et sur-solution respectivement, car :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha w_0(t) = 0 \leq f(w_0(t), z_0(t)) = 1 \\ {}^C D^\beta z_0(t) \leq g(z_0(t), w_0(t)) = 1 \\ {}^C D^\alpha \bar{w}_0(t) \geq f(\bar{w}_0(t), \bar{z}_0(t)) = -1 \\ {}^C D^\beta \bar{z}_0(t) \geq g(\bar{z}_0(t), \bar{w}_0(t)) = -1, \end{cases}$$

On montre que  $(H_1)$  est vérifiée et  $(H_2)$  est vérifiée pour  $M = N = 2$ .

Donc, toutes les conditions du théorème 3.1.1 sont satisfaites, alors le système non linéaire (3.8) a des solutions extrémales  $(w^*, z^*) \in [w_0, z_0] \times [w_0, z_0]$ , et  $(w^{**}, z^{**}) \in [\bar{w}_0, \bar{z}_0] \times [\bar{w}_0, \bar{z}_0]$ .

# CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudié par la technique d'itérations monotones un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires avec des conditions initiales. Les résultats obtenus par cette méthode sont basée sur la théorie de point fixe dans un espace de Banach ordonné. Pour cela, nous avons commencé par des préliminaires où nous avons rappelé quelques notions des dérivées fractionnaires comme la dérivée fractionnaire de Riemann-liouville et de Caputo, et quelques outils de base du calcul fractionnaire avec quelques propriétés. Par la suite, nous avons énoncé quelques définitions des sur-solutions et des sous-solutions. ainsi que les démonstrations détaillées des résultats, qui nous ont permis de d'appliquer la technique d'itérations monotones.

# Bibliographie

- [1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier Science B. V., Amsterdam*,, **204**, (2006).
- [2] C. De Coster and P.Habets. *Two-Point Boundary Value Problems : Lower and Upper Solutions*, *MATHEMATICS IN SCIENCE AND ENGINEERING*, C.K.Chui, Stanford University, Elsevier, **205**, (2006).
- [3] Dib, H. *Equations Différentielles Fractionnaires, EDA-EDO (4ème Ecole) - Tlemcen 23-27 mai 2009, (2009)*.
- [4] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential, Lecture Notes in Mathematics V. 2004*, Springer-Verlag, Berlin (2010).
- [5] D. Qian, C, Li, R.P. Agarwal, P. J. Y. Wong, Stability analysis of fractional differential system with Rieman-Liouville derivative, *Mathematical and Computer Modelling* **52**, 862-874, (2010).
- [6] Guotao Wang, Ravi P. Agarwal, Alberto Cabada, Existence results and the monotone iterative technique for systems of nonlinear fractional differential equations, *Appl. Math. Lett.*, **25**, 1019-1024 (2012).
- [7] J. D. Ramirez , A. S. Vatsala, Generalized Monotone Iterative Technique for Caputo Fractional Differential Equation with Periodic Boundary Condition via Initial Value Problem, *International Journal of Differential Equations*, **ID 842813**, 1-17, (2012).
- [8] J. Weissinger. Zur theorie und anwendung des iterations verfahrens. *Math. Nachr*, **8**, 193–212, (1952).
- [9] P. Holmes, T. Eric, Stability, *Shea-Brown, Scholarpedia*, 1(10) : 1838, (2006).
- [10] Radu Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Springer-Science+Business Media, B.V. Romania, 163-167, (2002).
- [11] T. HOUMOR, Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentielles Fractionnaires, **Thèse de Doctorat**, Univ. CONSTANTINE 1, (2014).
- [12] V. Lakshmikanthama, A.S. Vatsalab. General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations, *Appl. Math. Lett.*, **21**, 828–834, (2008).
- [13] Zhang Shuqin, Monotone iterative method for initial value problem involving Riemann-Liouville fractional derivatives, *Nonlinear Analysis*, **71**, 2087-2093, (2009).