

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DESSCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Mémoire

**Analyse Mathématique d'un Problème de Contact
avec adhésion et frottement entre deux corps
en Electro-viscoélasticité avec mémoire
longue et endommagement.**

Présenté par: CHABANE Khaoula

MEZIOU Nour El Houda

Soutenu devant le jury composé de

Tedjani H. AMMAR

M.C.B

Rapporteur

Univ. d'El Oued

Abdel Aziz A. AHMED

M.C.B

Président

Univ. d'El Oued

Said A. MEZIENE

M.A.A

Examineur

Univ. d'El Oued

Année universitaire 2018 – 2019.



Dédicace

Nous dédions le fruit de nos efforts à ceux qui ont beaucoup souffert pour nous rendre joyeux et heureux.

A ceux qui se sont sacrifiés pour nous mettre sur la voie de connaissance et de savoir:

Nos tendres parents.

Nous dédions également ce travail à ceux qui nous ont permis d'accéder à ce cher succès:

Nos professeurs à qui, nous exprimons nos sincères reconnaissances et considérations.

Nous dédions, enfin, ce grand labeur scientifique, à ceux qui nous ont côtoyées durant le cycle universitaire:

Nos chers amis.



Remerciements

*Nous avons envie d'adresser nos sincères remerciements à ceux
qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.*

*Nous tenons tout particulièrement à remercier monsieur
l'encadreur **Dr.Hadj Ammar Tedjani**, qui nous a
soutenues et encouragées et avec qui, nous
avons établi une relation de confiance.*

*D'autre part, Nous adressons nos saluts de reconnaissance à tous
les docteurs qui nous ont enseignées et formées notamment les
professeurs:*

***Niss Lamine, Messai Aoun Med Salah, Said Amer Meziene et
Azeb Ahmed Abdel Aziz.***

*C'est grâce à Dieu que nous sommes arrivées à réaliser ce
modeste travail.*

*Pour en terminer, Dieu a dit dans le coran : "Certes, si vous
êtes reconnaissants, je vous ajouterai; certes, si vous êtes
ingrats, en verité, Mon tourment sera sévères".
verset 07 de la sourate de Brahim.*

*Quant à nous, nous sommes reconnaissantes et nous
louons notre Seigneur.*

« Merci à Dieu! »

Table des matières

Introduction	v
Notations générales	ix
1 Préliminaires	1
1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact	1
1.1.1 Cadre physique	1
1.1.2 Modèle mathématique	3
1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique	4
1.1.4 Conditions aux limites	6
1.1.5 Loi de contact avec frottement	7
1.1.6 Loi de contact avec frottement et adhésion	9
1.2 Rappels d'analyse	11
1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert	11
1.2.2 Espaces de Sobolev	12
1.2.3 Espaces fonctionnels	14
1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	17
1.2.5 Lemme de Gronwall	21
2 Problème de Contact avec	
adhésion et frottement en électro- viscoélasticité avec mémoire longue	
et endommagement	23
2.1 Formulation du problème	23
2.2 Formulation variationnelle	29
2.3 Existence et unicité de la solution	36
Conclusion générale	50

Bibliographie

51

Introduction générale

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continus, ils existent des situations dans lesquelles un corps déformable est en contact avec d'autre corps ou bien avec une fondation rigide ou déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. Les problèmes de contact mécanique se rencontrent principalement dans des domaines aussi variés que l'aéronautique, la mécanique automobile, le génie civil, les sciences du bois, la médecine, la production de l'énergie (assemblage des structures, fissuration dans les joints soudés) et les systèmes de transmissions. Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportements. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables ou entre un corps et une base rigide, déformable. Par conséquent, une Théorie Mathématique générale de la Mécanique du contact (MTCM) est actuellement émergée. Elle est concernée par les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes ; voir par exemple [30, 37].

La modélisation des problèmes de contact entre deux corps déformables avec une base dépend essentiellement de propriétés mécaniques du matériau considéré, ainsi que des conditions aux limites de contact.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il influence directement sur la vie usuelle de la structure ou la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant

en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [18]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [11]. Des modèles généraux récents dans [16, 17, 19, 26, 32] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction ζ ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\zeta = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque $\zeta = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \zeta < 1$, il a un d'endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes en thermo-mécanique de contact avec endommagement ont été étudiés dans [2, 5, 6, 25, 27, 28, 40].

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actionneurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectriques pour lesquelles les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "les matériaux électro-viscoélastiques". Des modèles généraux pour des matériaux électro-élastiques ayant un effet piézoélectriques peuvent être trouvés dans [4, 28, 44, 24]. Un problème de contact avec "Slip-dependent" pour le matériaux électro-élastiques a été étudié dans [41].

Actuellement, un intérêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoélectriques voir par exemple [24]. Cependant, il n'existe virtuellement pas de résultats mathématiques à propos des problèmes de contact pour de tels matériaux et on a besoin de développer la Théorie Mathématique du Contact Mécanique (MTCM) pour inclure le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques.

Les processus d'adhésion sont importants en industrie lorsque des parties, souvent non métalliques, sont collées ensemble. Pour cette raison, le contact adhésif entre les corps, lorsqu'une colle est ajoutée pour empêcher les surfaces d'un mouvement relatif, a récemment reçu, de plus en plus, une grande attention dans la littérature. Des modèles généraux avec adhésion peuvent être trouvés dans [13, 14, 31, 34]. Des résultats

sur l'analyse mathématique de plusieurs problèmes de contact avec adhésion ; citons par exemple [9, 37, 39, 42]. Récemment, les matériaux composites ont atteint le sommet, puisqu'ils sont très solides et très légers, et par conséquent une importance considérable en aviation et en industrie automobile. Cependant, les matériaux composites peuvent subir, sous des contraintes, une délamination dans laquelle des plusieurs couches se décolent et se déplacent. Un nombre de publications récentes traite des tels modèles, voir par exemple [8, 9, 12, 13, 31, 33] et les références comprises. L'idée est d'introduire une variable de surface interne, le champ d'adhésion $\beta \in [0, 1]$ qui décrit la densité fractionnelle des adhésifs actifs sur la surface de contact relativement les uns par rapport aux autres. Pour modéliser le processus lorsque le collage n'est pas permanent et un décollage peut avoir lieu, nous avons besoin de décrire l'adhésion et le contact ensemble. En un point de la surface de contact adhésif, lorsque $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs ; lorsque $\beta = 0$, tous les adhésifs sont inactifs, sévères et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et seulement une fraction β des adhésifs est active.

Le mémoire comporte deux chapitres et est structuré de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique de problème à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions d'un problème de contact avec adhésion et frottement en électro-viscoélasticité avec mémoire longue et endommagement. Nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution en utilisant des techniques de point fixe et lemme de Gronwall.

Notations générales

\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels,
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i \psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante $x : \partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application $\psi : \nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
$\text{Div} \psi$	Divergence de l'application, $\psi : \text{Div} \psi = (\partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi)$,
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X,
$\ \cdot \ _X$	la norme de X,
p.p.	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de \mathbb{R}^d , parfois domaine L'hertzien,
$\bar{\Omega}^\ell$	l'adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	La frontière de $\Omega^\ell : \Gamma^\ell = \partial \Omega^\ell$,
Γ_i^ℓ	Les parties de frontière $\Gamma^\ell, (i = 1, 2, 3)$,
$mes \Gamma_i^\ell$	Mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
ν^ℓ	la normale unitaire sortante à Γ^ℓ ,
$\nu_\nu^\ell, \nu_\tau^\ell$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel ν_ν^ℓ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot \ _{L^2(\Omega^\ell)}$	La norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell \ _{L^2(\Omega^\ell)} = (\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que, $\exists c > 0 : u^\ell < c$, p.p., sur Ω^ℓ ,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$H^1(\Omega^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	L'espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^d$,

H'_{Γ^ℓ}	l'espace dual de H_{Γ^ℓ} .
H^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^d$,
H_1^ℓ	l'espace $H^1(\Omega^\ell)^d$,
\mathcal{H}^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^{d \times d}$,
\mathcal{H}_1^ℓ	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H} \text{ tel que } \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$,
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles,
	Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par
$C(0, T; H)$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	La norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	La norme de $W^{k,p}(0, T; H)$,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	le composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ ,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
β	Valeur d'adhésions sur la surface de contact Γ_3 ,
D^ℓ	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u^\ell)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique des deux problèmes à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et un modèle mathématique de problème utilisé dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons la formulation mathématique pour le problème de contact avec adhésion et frottement entre deux corps électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement.

1.1.1 Cadre physique

Nous considérons deux corps matériels déformables qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$), avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$, $mes(\Gamma_a^\ell) > 0$ et $\Gamma_3^\ell \subseteq \Gamma_b^\ell$. On note par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Le corps est encastré

sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et dans Ω^ℓ agissent des forces volumiques de densité f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0^ℓ . On suppose que f_2^ℓ et f_0^ℓ varient très lentement par rapport au temps. Le corps est soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^ℓ , agissent sur la partie Γ_b^ℓ . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec une fondation sur la partie Γ_3 .

Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), " \cdot " et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & \|\mathbf{v}^\ell\| &= (\mathbf{v}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell &= \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell, & \|\boldsymbol{\tau}^\ell\| &= (\boldsymbol{\tau}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$, nous notons par v_ν^ℓ et \mathbf{v}_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu^\ell = \mathbf{v}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \mathbf{v}_\tau^\ell = \mathbf{v}^\ell - v_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}^\ell(x, t)$ le champ des déplacements et par $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}^\ell$ et $t \in (0, T)$.

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ nous dénotons par σ_ν^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell$ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = (\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell - \sigma_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \mathbf{v}^\ell = \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell + \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell \cdot \mathbf{v}_\tau^\ell, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans la formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

1.1.2 Modèle mathématique

Notons que le point au-dessus d'une fonction représente la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2}.$$

où \dot{u}^ℓ désigne le champ des vitesses et \ddot{u}^ℓ désigne le champ des accélérations.

Nous notons par \dot{u}_ν^ℓ et \dot{u}_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle du vecteur de vitesse \dot{u}^ℓ à la frontière tels que

$$\begin{cases} \dot{u}_\nu^\ell = \dot{u}^\ell \cdot \nu^\ell, \\ \dot{u}_\tau^\ell = \dot{u}^\ell - \dot{u}_\nu^\ell \cdot \nu^\ell. \end{cases} \quad (1.4)$$

Les fonctions inconnues du problème sont les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, $\ell = 1, 2$. Notons la densité de la masse par $\rho^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques par $f_0^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy :

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (1.5)$$

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell$ peut être négligé (processus quasi statiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient :

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (1.6)$$

L'équation équivaut à de relations scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit par à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes \mathbf{u}_i^ℓ du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacement électrique, les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques :

$$\text{div} \mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (1.7)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\operatorname{div} \mathbf{D}^\ell = \mathbf{D}_{i,i}^\ell$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ .

1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique

Nous considérons deux corps piézoélectriques qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière et de Lipschitz Γ^ℓ subdivisée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$ d'une part et de deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , telles que $\operatorname{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, $\operatorname{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, et $\Gamma_3^\ell \subset \Gamma_b^\ell$. Soit $T > 0$ nous étudions l'évolution du corps due à l'application de force de volume et de tractions de surfaces dans l'intervalle de temps $[0, T]$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$ et $t \in [0, T]$

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ . Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D^\ell = (D_i^\ell)$ ainsi que le champ électrique $E^\ell = -\nabla\varphi^\ell$. Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériau : matériaux électro-élastiques.

Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \\ \mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell, \end{cases} \quad (1.8)$$

où $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur d'élasticité non linéaire, $\mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$ où $\nabla\varphi^\ell = (\varphi^\ell, i)$ représente le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell = e_{ijk}^\ell$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $\mathcal{B}^\ell = \mathcal{B}_{ij}^\ell$ est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^\ell)^*$ où $(e_{ijk}^\ell)^* = e_{kij}^\ell$, dénote le transposé du tenseur \mathcal{E}^ℓ tel que :

$$\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{v}^\ell, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathbb{S}^d, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d. \quad (1.9)$$

Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques.

Un matériau est dit électro-viscoélastique s'il possède une loi de comportement de la forme

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell). \end{cases} \quad (1.10)$$

Remarquons que lorsque $\mathcal{A}^\ell \equiv 0$, la loi (1.10) devient une loi de comportement électro-élastique de la forme (1.8).

Un exemple de la loi électro-viscoélastique non linéaire est le suivant

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \frac{1}{\alpha} (\varepsilon - P_{K^\ell} \varepsilon) - (\mathcal{E}^\ell)^* E(\varphi^\ell), \quad (1.11)$$

où \mathcal{A}^ℓ est un tenseur d'ordre quatre. Ses composantes a_{ijkl}^ℓ s'appellent "coefficients de viscosité", $K^\ell \subset \mathbb{S}^d$ est un convexe fermé non vide et $P_{K^\ell} : \mathbb{S}^d \rightarrow K^\ell$ est l'opérateur de projection de \mathbb{S}^d sur K^ℓ . L'opérateur d'élasticité est donné par

$$\mathcal{G}^\ell(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha} (\varepsilon - P_{K^\ell} \varepsilon)$$

et \mathcal{E}^ℓ est un tenseur d'ordre trois. Ses composantes e_{ijk}^ℓ s'appellent "coefficients piézo-électriques".

Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement.

Une loi de comportement d'un matériau électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement peut être écrite sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla\varphi^\ell + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s)), \zeta^\ell(s)) ds, \quad (1.12)$$

où les opérateurs \mathcal{A}^ℓ et \mathcal{G}^ℓ sont des tenseurs d'ordre quatre et non linéaires, leurs composantes a_{ijkl}^ℓ et g_{ijkl}^ℓ s'appellent coefficients de viscosité et élasticité respectivement

et \mathcal{F}^ℓ représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoélastique du matériau, et où ζ^ℓ est une variable interne d'état définie dans $\Omega^\ell \times (0, T)$, avec $0 \leq \zeta^\ell \leq 1$. L'évolution du champ d'endommagement utilisée au deuxième chapitre est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation

$$\dot{\zeta}^\ell - \kappa^\ell \Delta \zeta^\ell + \partial \Psi_{K^\ell}(\zeta^\ell) \ni \phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell),$$

où κ^ℓ est une constante positive, ϕ^ℓ est la fonction source de l'endommagement, $\partial \Psi_{K^\ell}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice Ψ_{K^ℓ} et K^ℓ est l'ensemble des endommagements admissibles défini par

$$K^\ell = \{\zeta \in H^1(\Omega^\ell); 0 \leq \zeta \leq 1, \quad p.p. \text{ dans } \Omega^\ell\}, \quad (1.13)$$

Nous utilisons la loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement dans le chapitre 2 de ce mémoire.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3^ℓ , c'est l'objet des conditions de contact et des lois de frottement que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

1.1.4 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ .

La condition à la limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times (0, T)$, le champ des déplacements \mathbf{u}^ℓ est par conséquent nul :

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T). \quad (1.14)$$

La condition à la limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times (0, T)$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell$ satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T). \quad (1.15)$$

Les conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations :

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (1.16)$$

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T). \quad (1.17)$$

Conditions continues aux limites de contact.

On définit le déplacement normal par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2,$$

et le déplacement tangent par

$$[\mathbf{u}_\tau] = \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2.$$

La continuité des contraintes sur l'interfaces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.18)$$

1.1.5 Loi de contact avec frottement

Par un condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par une loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell$ et le déplacement tangentiel \mathbf{u}_τ^ℓ ou la vitesse tangentielle $\dot{\mathbf{u}}_\tau^\ell$. Notons ici que $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell$ s'appelle aussi force de frottement.

Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur $\Gamma_3 \times (0, T)$.

Contact avec compliance normale.

Dans ce cas, les corps est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g^\ell), \end{cases} \quad (1.19)$$

où $[u_\nu]$ est le déplacement normal, g^ℓ représente l'interstice entre les corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g^\ell$. Précisons que dans les chapitres 2 du mémoire nous considérons le cas où le corps repose sur la fondation, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g^\ell = 0$. Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.20)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.21)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.19) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans ce mémoire.

Loi de frottement de type Coulomb.

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau], \end{cases} \quad (1.22)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. C'est une version quasistatique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottant de problème étudié dans le chapitre 2 du mémoire.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.22), par la

condition de compliance normale (1.19), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p_\nu([u_\nu] - g^\ell), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu p_\nu([u_\nu] - g^\ell) \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu p_\nu([u_\nu] - g^\ell) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda[\dot{\mathbf{u}}_\tau]. \end{cases} \quad (1.23)$$

Dans le chapitre 2 nous utilisons la loi (1.23) avec le cas particulier g^ℓ , i.e. lorsque l'interstice est nul, ce choix ne représente guère une restriction du point de vue mécanique, mais il est imposé pour raison de simplification des calculs.

Une version quasistatique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau([u_\nu] - g^\ell), \\ [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g^\ell) \frac{[\dot{\mathbf{u}}_\tau]}{\|[\dot{\mathbf{u}}_\tau]\|}, \end{cases} \quad (1.24)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.24), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau([u_\nu] - g^\ell)$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers.

1.1.6 Loi de contact avec frottement et adhésion

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoie par exemple [13]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.25)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

est l'opérateur de troncature donné par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.25) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface.

Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.25) a été déjà utilisée dans [12, 42].

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.25) devient :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.27)$$

qui représente la condition de compliance normale.

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle satisfait la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_\tau] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \end{array} \right. \quad (1.28)$$

où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement, supposé être positif.

$\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est l'opérateur de troncature défini par

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases} \quad (1.29)$$

Notons que les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.28) ont été considérées dans [31] dans le cas particulier $\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = [\mathbf{u}_\tau]$ et $R_\nu([u_\nu]) = -[u_\nu]$, pour L très grand.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\beta} = - \left(\beta (\gamma_\nu (R_\nu([u_\nu]))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([u_\tau])\|^2) - \epsilon_a \right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.30)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.31)$$

Où γ_ν, γ_τ et ϵ_a sont coefficients d'adhérence positifs, et $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, le déplacement tangent relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et β_0 l'adhésion initiale, tel que :

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (1.32)$$

Sous les conditions (1.30)-(1.32), on a la remarque suivante :

Remarque 1.1.1 : *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$, donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.*

Pour plus de détails concernant la modélisation du contact adhésif, nous référons aux livres [37, 42].

1.2 Rappels d'analyse

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (1.33)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.34)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (1.33). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\| v \|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 1.2.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\| \phi \|_{H'} = \| f \|_H.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

1.2.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d \right\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$C^1(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.2.2 (Rellich)

$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte.

Théorème 1.2.3 (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.2.1 L'espaces $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représenté l'espaces de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définir pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.2.2 On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compacte.

Définition 1.2.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha}u \right\},$$

Remarque 1.2.3 Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^{\alpha}u$ et v_{α} .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}u \|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}u \|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 1.2.4 Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\| \cdot \|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [7].

1.2.3 Espaces fonctionnels

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques \mathbf{u}^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}^\ell$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H^\ell = \left\{ \mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) \mid u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \right\} = (L^2(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \left\{ \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) \mid \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \right\} = (L_s^2(\Omega^\ell))^{d \times d}, \\ H_1^\ell = \left\{ \mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) \mid u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \right\} = (H^1(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \left\{ \boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}^\ell \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \in H^\ell \right\}. \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell v_i^\ell dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell dx, \\ (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H_1^\ell} = (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \operatorname{Div} \boldsymbol{\tau}^\ell)_{H^\ell}, \end{array} \right. \quad (1.36)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ et $\operatorname{Div} : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H^\ell$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\nabla \mathbf{u}^\ell = (u_{i,j}^\ell), \quad \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell), \quad \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell).$$

Les normes sur les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont notées par $\|\cdot\|_{H^\ell}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$, $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ^ℓ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}^\ell$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation \mathbf{v}^ℓ pour désigner la trace $\gamma \mathbf{v}^\ell$ de \mathbf{v}^ℓ sur Γ^ℓ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1^\ell \rightarrow L^2(\Gamma^\ell)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective.

Désignons par H'_{Γ^ℓ} le dual de H_{Γ^ℓ} , et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ} . Pour tout $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ tel que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (1.37)$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (1.38)$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell, \quad (1.39)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1^ℓ

$$\mathbf{V}^\ell = \{\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell \mid \mathbf{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell\}. \quad (1.40)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur \mathbf{V}^ℓ , alors, il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que

$$\|\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \|\mathbf{v}^\ell\|_{H_1^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.41)$$

Nous considérons sur l'espace \mathbf{V}^ℓ , le produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{\mathbf{V}^\ell} = (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \quad (1.42)$$

et soit $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\|\mathbf{v}^\ell\|_{\mathbf{V}^\ell} = \|\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.43)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur \mathbf{V}^ℓ et ainsi $(\mathbf{V}^\ell, \|\cdot\|_{\mathbf{V}^\ell})$ est un espace de Hilbert. De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (1.39) et (1.40), il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\|\mathbf{v}^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}^\ell\|_{\mathbf{V}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.44)$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Z} = \{\beta \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3)); 0 \leq \beta(t) \leq 1 \forall t \in [0, T], \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (1.45)$$

On introduit également les espaces suivants :

$$E_0^\ell = L^2(\Omega^\ell), \quad E_1^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad \mathbf{W}^\ell = \{\boldsymbol{\xi}^\ell \in E_1^\ell \mid \boldsymbol{\xi}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\},$$

$$\mathcal{W}^\ell = \{\mathbf{D}^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), D_{i,i}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\},$$

où $\text{div} \mathbf{D}^\ell = (D_{i,i}^\ell)$. Ces espaces \mathbf{W}^ℓ et \mathcal{W}^ℓ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\boldsymbol{\varphi}^\ell, \boldsymbol{\xi}^\ell)_{\mathbf{W}^\ell} = (\nabla \boldsymbol{\varphi}^\ell, \nabla \boldsymbol{\xi}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{div} \mathbf{D}^\ell, \text{div} \mathbf{E}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad (1.46)$$

soient $\|\cdot\|_{W^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\ell}$ les normes associées; c'est-à-dire

$$\|\xi^\ell\|_{W^\ell} = \|\nabla\xi^\ell\|_{H^\ell}, \quad \|\mathbf{D}^\ell\|_{\mathcal{W}^\ell}^2 = \|\mathbf{D}^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{D}^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2. \quad (1.47)$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c_F > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\|\nabla\xi^\ell\|_{W^\ell} \geq c_F \|\xi^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (1.48)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée dans [29]. Pour des détails sur les résultats de ce paragraphe nous renvoyons par exemple aux références [35, 36].

Sur l'espace W nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\varphi^\ell, \xi^\ell)_{W^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \nabla\varphi^\ell \cdot \nabla\xi^\ell dx, \quad (1.49)$$

Il s'ensuit de (1.48) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont des normes équivalentes sur W^ℓ et donc $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{c}_0^ℓ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_a^ℓ et Γ_3 , telle que

$$\|\xi^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0^\ell \|\xi^\ell\|_{W^\ell}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (1.50)$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits :

$$V = V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \quad E_0 = E_0^1 \times E_0^2,$$

$$E_1 = E_1^1 \times E_1^2, \quad W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

les espaces V, E_1, W et \mathcal{W} sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_{E_1}, (\cdot, \cdot)_W$ et $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$. Les normes associées seront désignées par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivement.

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel, nous utilisons la classique notation pour les espaces $L^p(0, T; X), W^{k,p}(0, T; X)$, où $1 \leq p \leq \infty, k \geq 1$. Nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes :

$$\|f\|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{f}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Définition 1.2.2 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude de problème mécanique.

I-Opérateur fortement monotone

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs frottements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associé $\|\cdot\|_X$.

Théorème 1.2.5 (*Théorème de point fixe de Banach*)

Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 1.2.6 Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Définition 1.2.3 Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.2.4 Une forme bilinéaire $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Proposition 1.2.1 Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder.

Théorème 1.2.7 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive.

Soit $l : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait :

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in X. \quad (1.51)$$

Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous ensemble de l'espace X .

Définition 1.2.5 On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par

$$\Psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Définition 1.2.6 Soit une fonction $j : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u), \forall v \in K\}. \quad (1.52)$$

Le crochet (\cdot, \cdot) désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial \Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \Psi_K = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0, \forall v \in K\}. \quad (1.53)$$

Inéquations quasi-variationnelles elliptiques d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans lesquelles la fonctionnelle non différentiable dépend de la solution elle-même. Ces dernières sont appelées. Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour ce type de problèmes.

Pour cela, nous considérons un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de la norme associée $\|\cdot\|_H$ et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et $f \in X$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasivariationnelle suivante.

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.54)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A est fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_A > 0 \text{ tel que} \\ \|Au_1 - Au_2\|_X \leq L_A \|u_1 - u_2\|_X, \quad \forall u_1, u_2 \in X, \\ (b) \text{ Il existe } m_A > 0 \text{ tel que} \\ (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m_A \|u_1 - u_2\|_X^2, \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right. \quad (1.55)$$

et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } j(u, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X \\ (b) \text{ Il existe } m_j > 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \leq m_j \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X \end{array} \right. \quad (1.56)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (1.54) est donnée par le résultat suivant

Théorème 1.2.8 *Supposons que les hypothèses (1.55) et (1.56) sont satisfaites. Alors, si $m_j < m_A$, pour tout $f \in X$, il existe une solution unique $u \in X$ au problème (1.54).*

Une démonstration du Théorème se trouve par exemple dans [38] p.83.

Dans la troisième chapitre du mémoire, nous utiliserons un résultat abstrait sur les inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant.

Trouver $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que

$$\begin{aligned} & (Au(t), v - \dot{u}(t))_X + (Bu(t), v - \dot{u}(t))_X + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t))_X \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$u(0) = u_0. \quad (1.58)$$

La différence entre le problème (1.54) et le problème (1.57)–(1.58) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps, la dérivée \dot{u} apparaît dans la formulation du problème et par conséquent, une condition initiale, est (1.58), rajoutée.

Pour étudier le problème (1.57)–(1.58), en plus des hypothèses (1.55) et (1.56), nous avons besoin des hypothèses suivantes.

L'opérateur non linéaire $B : X \rightarrow X$ est de lipschitz, c'est-à-dire

$$\exists L_B > 0 \text{ tel que } \|Bu_1 - Bu_2\|_X \leq L_B \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X. \quad (1.59)$$

Aussi, nous supposons que

$$f \in C(0, T; X), \quad (1.60)$$

$$u_0 \in X. \quad (1.61)$$

Dans l'étude du problème (1.57)–(1.58), nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.2.9 [22] *Soient (1.55), (1.56) et (1.58)–(1.59) satisfaites. Alors*

1. *Il existe une unique solution $u \in C^1(0, T; X)$ au problème (1.57)–(1.58).*
2. *Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (1.57)–(1.58) correspondant aux données f_1, f_2 alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_X \leq c(\|f_1(t) - f_2(t)\|_X + \|u_1(t) - u_2(t)\|_X), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.62)$$

Ce résultat d'existence, d'unicité et de régularité a été prouvé dans [22] et peut être aussi trouvé dans [23] p.232–236.

Équations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux résultats sur les équations d'évolution et un résultat sur les inéquations variationnelles d'évolution.

II- Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2.10 (Cauchy-Lipschitz) : [43] *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés*

suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \| F(t, x) - F(t, y) \|_X \leq L_F \| x - y \|_X \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in (0, T), \\ (b) \text{ Il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad p.p. t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

Pour des détails sur ce théorème on peut renvoyer le lecteur par exemple à [43] p.60.

Définition 1.2.7 *S'il est l'inclusion de $(X, \| \cdot \|_X)$ dans $(Y, \| \cdot \|_Y)$ est continue et X est dense dans Y , le triplet*

$$X \subset Y \subset X'$$

s'appelle le triplet de Gelfand, où X' l'espace dual de X .

Inéquation variationnelle d'évolution

Théorème 1.2.11 [37] *Soit $X \subset Y = Y' \subset X'$ un triplet de Gelfand, F est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de X , et soit $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique et continue qui satisfait*

$$\text{il existe } \alpha > 0 \text{ et } c_0 \quad a(v, v) + c_0 \|v\|_Y^2 \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X. \quad (1.63)$$

Alors, pour tout $u_0 \in F$ et $f \in L^2(0, T; Y)$, il existe une unique fonction $u \in H^1(0, T; Y) \cap L^2(0, T; X)$ qui satisfait $u(0) = u_0$, $u(t) \in F$ pour tout $t \in [0, T]$, et

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{X' \times X} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_Y \quad v \in F \text{ p.p. } t \in (0, T). \quad (1.64)$$

Pour la démonstration de cet théorème on peut regarder dans [37].

1.2.5 Lemme de Gronwall

Lemme 1.2.1 *Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$. est une fonction telle que*

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s)ds \leq e^{at} \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

pour le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.2.1 Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire 1.2.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante.

On suppose deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. En appliquant corollaire 1.2.1 donne immédiatement la nullité de ϕ .

Chapitre 2

Problème de Contact avec adhésion et frottement en électro-viscoélasticité avec mémoire longue et endommagement

2.1 Formulation du problème

Dans cette section, nous considérons le problème quasistatique, pour une loi de comportement électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement, sous les conditions aux limites de contact avec frottement et adhésion entre deux corps déformables.

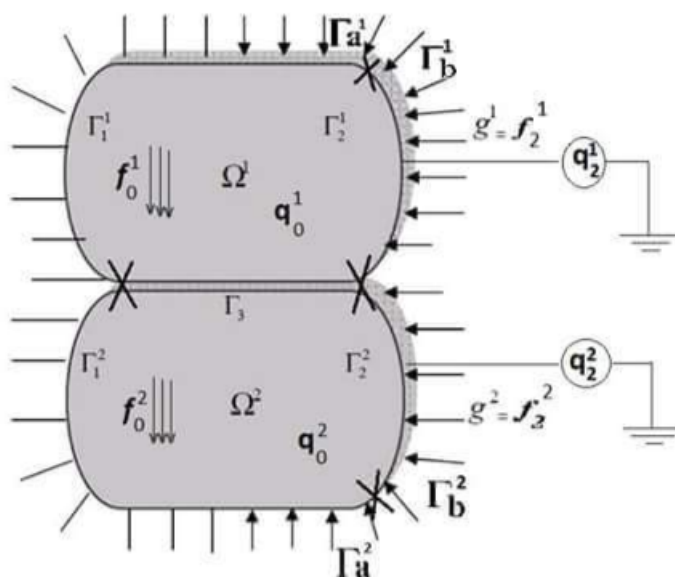


Fig.1 : contact entre deux corps électro-viscoélastiques.

Dans la suite nous désignerons par Ω^1 et Ω^2 les domaines qu'occupent les deux corps électro-viscoélastique dans \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), on suppose que la frontière de chacun des domaines Ω^ℓ est constituée de trois parties disjointes $\Omega^\ell = \Gamma^\ell = \Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3^\ell$, on suppose que les parties $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$, sont mesurables au sens de Lebesgue, d'une part, et en deux parties mesurable Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , telles que $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$ et $mes(\Gamma_a^\ell) > 0$. On suppose que les champs des déplacements s'annuls sur Γ_1^ℓ , que des tractions surfasique f_2^ℓ s'appliquent sur $\Gamma_2^\ell \times (0, T)$, que des forces volumiques f_0^ℓ agissent dans $\Omega^\ell \times (0, T)$, des charges électriques de densité volumiques q_0^ℓ dans $\Omega^\ell \times (0, T)$ et des charges électriques de densité surfacique q_2^ℓ sur $\Gamma_b^\ell \times (0, T)$. Nous noterons par Γ_3^ℓ l'interface de contact du corps Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$), on a : $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$, noté par Γ_3 . Alors le modèle classique pour ce processus est le suivant.

Problème \mathcal{P} . Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, les champs d'endommagements $\zeta^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s)), \zeta^\ell(s)) ds, \quad (2.1)$$

$$\text{dans } \Omega^\ell \times (0, T),$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$\dot{\zeta}^\ell - \kappa^\ell \Delta \zeta^\ell + \partial \Psi_{K^\ell}(\zeta^\ell) \ni \phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell), \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.4)$$

$$\text{div} \mathbf{D}^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu]) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]) \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_\tau] = 0 \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.9)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu(R_\nu([u_\nu])))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.10)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \zeta^\ell}{\partial \boldsymbol{\nu}^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \quad \zeta^\ell(0) = \zeta_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (2.14)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.15)$$

D'abord, les équations (2.1) et (2.2) représentent la loi constitutive électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement, l'évolution d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (2.3). Les équations (2.4) et (2.5) sont les équations d'équilibre écrites pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, respectivement. De plus, les conditions (2.6) et (2.7) représentent les conditions aux limites classiques de déplacement-traction, respectivement. L'équation (2.8) représente la condition de compliance normale avec adhésion sur la surface de contact Γ_3 où γ_ν est le coefficient d'adhésion. Et les conditions (2.9) sont les conditions de frottement et d'adhésion, où les opérateurs de troncature sont donnés par (1.26) et (1.29). Ensuite, l'équation (2.10) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution du champ d'adhésion et il était déjà utilisé, pour plus de détails. Ici, outre γ_τ et ϵ_a . (2.11) et (2.12) représentent les conditions aux limites électriques. La relation (2.13) représente une condition aux limites de Neumann homogène où $\frac{\partial \zeta^\ell}{\partial \boldsymbol{\nu}^\ell}$ est la dérivée normale de ζ^ℓ . (2.14) représente le champ de déplacement initial et le champ d'endommagement initial. Enfin, (2.15) représente la condition initiale dans laquelle β_0 est le champ d'adhésion donné.

On considère maintenant les hypothèses suivantes :

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que :} \\ \quad \|\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2)\| \leq L_{\mathcal{A}^\ell} \|\xi_1 - \xi_2\|, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} \|\xi_1 - \xi_2\|^2, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \forall \xi \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, 0) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ tel que :} \\ \quad \|\mathcal{G}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{G}^\ell(x, \xi_2)\| \leq L_{\mathcal{G}^\ell} \|\xi_1 - \xi_2\| \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}^\ell(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell, \forall \xi \in \mathbb{S}^d. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}^\ell(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

La fonction de relaxation $\mathcal{F}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad \|\mathcal{F}^\ell(x, t, \xi_1, d_1) - \mathcal{F}^\ell(x, t, \xi_2, d_2)\| \leq L_{\mathcal{F}^\ell} (\|\xi_1 - \xi_2\| + |d_1 - d_2|), \\ \quad \forall t \in (0, T), \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}^\ell(x, t, \xi, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell, \forall t \in (0, T), \xi \in \mathbb{S}^d, d \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}^\ell(x, t, \xi, d) \text{ est continue dans } (0, T), \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^d, d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}^\ell(x, t, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}^\ell, \forall t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (2.18)$$

La fonction source d'endommagement $\phi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\phi^\ell} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |\phi^\ell(x, \eta_1, \xi_1, \alpha_1) - \phi^\ell(x, \eta_2, \xi_2, \alpha_2)| \leq L_{\phi^\ell} (\|\eta_1 - \eta_2\| + \|\xi_1 - \xi_2\| + |\alpha_1 - \alpha_2|), \\ \quad \forall \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ et } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \phi^\ell(x, \eta, \xi, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \forall \eta, \xi \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \phi^\ell(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell), \\ (d) \phi^\ell(x, \eta, \xi, \alpha) \text{ est bornée } \forall \eta, \xi \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Rappelons aussi que l'opérateur transposé $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est donné par $(\mathcal{E}^\ell)^* = e_{ijk}^{\ell,*}$ où $e_{ijk}^{\ell,*} = e_{kij}^\ell$ et l'égalité suivante est satisfaite :

$$\mathcal{E}^\ell \sigma \cdot v = \sigma \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* v \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

Le tenseur de permittivité électrique $\mathcal{B}^\ell = (b_{ij}^\ell) : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{B}^\ell(x, \mathbf{E}) = (b_{ij}^\ell(x) E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) b_{ij}^\ell = b_{ji}^\ell, b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ (c) \text{ Il existe } m_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ tel que } \mathcal{B}^\ell \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq m_{\mathcal{B}^\ell} \|\mathbf{E}\|^2, \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c) \text{ l'application } x \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (d) p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

On suppose que les forces volumiques f_0^ℓ et les tractions surfaciques f_2^ℓ , et les charges électriques volumique q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont les régularités

$$f_0^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad f_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \quad (2.23)$$

$$q_0^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)). \quad (2.24)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ϵ_a satisfont les conditions

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.25)$$

La diffusion de la microfissure de coefficients est vérifie

$$\kappa^\ell > 0. \quad (2.26)$$

Tandis que le coefficient de frottement μ vérifie

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.27)$$

Le champ initial d'adhésion satisfait

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (2.28)$$

et le champ initial de déplacement satisfait

$$\mathbf{u}_0^\ell \in V^\ell. \quad (2.29)$$

Finalement, le champ initial d'endommagement satisfait

$$\zeta_0^\ell \in K^\ell. \quad (2.30)$$

Où, K^ℓ est l'ensemble des fonctions d'endommagements admissibles définis dans (1.2.5).

Nous énonçons maintenant quelques définitions qu'on utilise dans la suite de ce chapitre.

En utilisant le théorème de représentation de Riesz. On définit la fonction $f = (f^1, f^2) : [0, T] \rightarrow V$ par :

$$(f(t), \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.31)$$

et la fonction $q = (q^1, q^2) : [0, T] \rightarrow W$ par :

$$(q(t), \zeta)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \zeta^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \zeta^\ell da, \quad \forall \zeta \in W. \quad (2.32)$$

Les conditions (2.23) et (2.24) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (2.33)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : E_1 \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(\zeta, \xi) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell \cdot \nabla \xi^\ell dx. \quad (2.34)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suit $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])[v_\nu] + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \cdot [\mathbf{v}_\tau]) da. \quad (2.35)$$

La fonctionnelle de compliance normale $j_{vc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{vc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu])[v_\nu] da, \quad (2.36)$$

et, la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{v}_\tau\| da. \quad (2.37)$$

La condition (2.22) entraîne que les intégrales dans (2.36) et (2.37) sont bien définies.

2.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green on voit directement que si \mathbf{u} , φ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.4), (2.6), (2.8) et (2.9) avec (2.35), (2.36) et (2.37) pour tout $t \in (0, T)$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t))_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t))) dx + \int_{\Omega^\ell} Div \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1 (\varepsilon(\mathbf{v}^1) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^1(t))) dx + \int_{\Omega^1} Div \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) dx &= \int_{\Gamma_1^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) da + \\ &\int_{\Gamma_2^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) da + \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^1 \in V^1. \end{aligned} \quad (2.38)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2 (\varepsilon(\mathbf{v}^2) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^2(t))) dx + \int_{\Omega^2} Div \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) dx = \int_{\Gamma_1^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) da +$$

$$\int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) da + \int_{\Gamma_3^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^2 \in \mathbf{V}^2, \quad (2.39)$$

à addition (2.38) et (2.39)

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t))) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \end{aligned}$$

d'après (1.40), (2.4), et (2.6)-(2.7) on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t))) dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \end{aligned}$$

d'après (2.31)

$$(f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{\mathbf{V}} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da.$$

En suite :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{\mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da = ? :$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) da \\
 &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^1 (\mathbf{v}_\nu^1 - \dot{\mathbf{u}}_\nu^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 (\mathbf{v}_\nu^2 - \dot{\mathbf{u}}_\nu^2(t)) da \\
 &+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 (\mathbf{v}_\tau^1 - \dot{\mathbf{u}}_\tau^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 (\mathbf{v}_\tau^2 - \dot{\mathbf{u}}_\tau^2(t)) da \\
 &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu ([v_\nu - \dot{u}_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da \\
 &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - \dot{u}_\nu(t)]) da \\
 &+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da,
 \end{aligned}$$

alors :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da = \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - \dot{u}_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da. \quad (2.40)$$

Nous supposons que $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$,

où $\Gamma_3^+ = \{x \in \Gamma_3 / \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu])\}$

et $\Gamma_3^- = \{x \in \Gamma_3 / \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu])\}$.

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da = \int_{\Gamma_3^+} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da + \int_{\Gamma_3^-} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da.$$

Maintenant, en utilisant (2.9).

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])) ([\mathbf{v}_\tau]) da &\geq - \int_{\Gamma_3^+} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \|[\mathbf{v}_\tau]\| da \\
 &\geq - \int_{\Gamma_3^+} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|[\mathbf{v}_\tau]\| - \|[\dot{\mathbf{u}}_\tau]\|) da, \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])) ([\mathbf{v}_\tau]) da &\geq - \int_{\Gamma_3^-} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \|[\mathbf{v}_\tau]\| da \\
 &\geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|[\mathbf{v}_\tau]\| da, \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])) ([\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da &\geq -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \|[\dot{\mathbf{u}}_\tau]\|^2 da \\
 &\geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|[\dot{\mathbf{u}}_\tau]\| da. \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

Par substitution (2.42) de (2.43)

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{v}_\tau\| da + \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\| da. \quad (2.44)$$

nous utilisons (2.41) et le égalité (2.44) pour trouver

$$\int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|) da. \quad (2.45)$$

Maintenant, nous utilisons (2.40) et (2.45) pour trouver

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &\geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{\mathbf{V}} - \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - \dot{u}_\nu(t)]) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - \dot{u}_\nu(t)]) da - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|) da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) ([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da. \end{aligned}$$

D'après (2.35)–(2.37), on a

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &+ j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j_{\nu c}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ &+ j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

et de (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &+ \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s)), \zeta^\ell(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ &+ j_{\nu c}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \quad p.p. t \in (0, T), \quad \zeta^\ell(t) \in K^\ell.$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (2.5), (2.11) et la définition (2.32) on a :

$$(\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \mathbf{D}^\ell, \phi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell, \quad (2.48)$$

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} Div \mathbf{D}^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.49)$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla \phi^1 dx + \int_{\Omega^1} \text{Div} \mathbf{D}^1 \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_a^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \phi^1 da + \int_{\Gamma_b^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \phi^1 da, \quad \forall \phi^1 \in H_1^1. \quad (2.50)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla \phi^2 dx + \int_{\Omega^2} \text{Div} \mathbf{D}^2 \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_a^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \phi^2 da + \int_{\Gamma_b^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \phi^2 da, \quad \forall \phi^2 \in H_1^2. \quad (2.51)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (2.11) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da = 0,$$

à addition (2.50) et (2.51) on a :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \mathbf{D}^\ell \cdot \phi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da.$$

On a d'après (2.5) et (2.12) :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \\ \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da &= 0. \end{aligned}$$

On a d'après (2.32) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da = (q(t), \phi)_W.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \phi)_W = 0.$$

De (2.2), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \quad (2.52)$$

Enfin, soit $\zeta^\ell(t) \in K^\ell$ et pour tout $t \in (0, T)$. De la définition (1.2.3) de $\partial \Psi_{K^\ell}(\zeta^\ell)$ et de (2.3), on obtient

$$\left(\phi^\ell (\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \zeta^\ell(t)) - \dot{\zeta}^\ell(t) + \kappa^\ell \Delta \zeta^\ell(t), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \leq 0, \quad \forall \xi^\ell \in K^\ell.$$

donc

$$\begin{aligned} & \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \zeta^\ell(t)), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \\ & \leq \left(\dot{\zeta}^\ell(t), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - \kappa^\ell \left(\Delta \zeta^\ell(t), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et (2.13)

$$\left(\Delta \zeta^\ell(t), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} = - \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell(t) \cdot \nabla (\xi^\ell - \zeta^\ell(t)) dx.$$

En suite

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\zeta}^\ell(t), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell(t) \cdot \nabla (\xi^\ell - \zeta^\ell(t)) dx \\ & \geq \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \zeta^\ell(t)), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\zeta}^\ell(t), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell(t) \cdot \nabla (\xi^\ell - \zeta^\ell(t)) dx \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \zeta^\ell(t)), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \quad \forall \xi^\ell \in K^\ell, \end{aligned}$$

D'après (2.34), on trouve

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\zeta}^\ell(t), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\zeta(t), \xi - \zeta(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \zeta^\ell(t)), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \quad \forall \xi^\ell \in K^\ell. \quad (2.53) \end{aligned}$$

De (2.1), (2.2), (2.46), (2.53), (2.52), (2.10), (2.14) et (2.15), on obtient la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} .

Problème \mathcal{PV} . Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, les potentiels électriques $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{W}$, les champs d'endommagements $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) : [0, T] \rightarrow E_1$, le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D} = (\mathbf{D}^1, \mathbf{D}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$, tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s)), \zeta^\ell(s)) ds, \quad (2.54)$$

$$\text{dans } \Omega^\ell \times (0, T),$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad p.p. t \in (0, T),$$

$$\begin{aligned} & \zeta(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\zeta}^\ell(t), \xi^\ell - \zeta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\zeta(t), \xi - \zeta(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \zeta^\ell(t)), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\forall \xi \in K, \quad p.p. t \in (0, T)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_{\mathbf{W}}, \quad (2.58)$$

$$\forall \phi \in \mathbf{W}, \quad p.p. t \in (0, T),$$

$$\dot{\beta} = - (\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu(t)])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau(t)])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad p.p. (0, T), \quad (2.59)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad (2.60)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (2.61)$$

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} , j_{vc} et j_{fr} qui seront utilisées dans les paragraphes suivantes. Ci-dessous dans cette section, β, β_1, β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}^\ell$ et \mathbf{v}^ℓ représentent des éléments de \mathbf{V}^ℓ , et C est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_3, \gamma_\tau, \gamma_\nu, p_\nu, \mathcal{A}^\ell, \mathcal{G}^\ell$, et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite aux fonctions diverses sur $x^\ell \in \Omega^\ell \cup \Gamma_3$.

D'abord nous faisons remarquer que les fonctionnelles j_{ad} et j_{vc} sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad j_{vc}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{vc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (2.62)$$

En utilisant (2.36), on obtient

$$j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) = - \int_{\Gamma_3} (p_\nu([\mathbf{u}_{1\nu}]) - p_\nu([\mathbf{u}_{2\nu}])([\mathbf{v}_{1\nu}] - [\mathbf{v}_{2\nu}])) da,$$

et d'après (2.22) (b), on a

$$j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq 0, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}. \quad (2.63)$$

Maintenant, nous utilisons (2.37) pour trouver

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq \mu \int_{\Gamma_3} |p_\nu([\mathbf{u}_{1\nu}]) - p_\nu([\mathbf{u}_{2\nu}])| \|[\mathbf{v}_{1\nu}] - [\mathbf{v}_{2\nu}]\|,$$

D'après l'hypothèse (2.22) (a), on trouve

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\Gamma_3)}$$

Gardant en tête (1.44), nous obtenons

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq L_\nu c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V,$$

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V. \quad (2.64)$$

Nous énonçons maintenant notre résultat principal concernant l'unique solvabilité du Problème \mathcal{PV} dont la démonstration sera détaillée dans la section suivante :

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel \mathcal{PV} .

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (2.16), (2.28), (2.29)–(2.30). le problème variationnel \mathcal{PV} . admet une solution unique $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \zeta, \beta, \mathbf{D}\}$ ayant la régularité suivante :*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad (2.65)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (2.66)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (2.67)$$

$$\zeta \in H^1(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1), \quad (2.68)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{D} \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (2.70)$$

Un quadruplet $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \zeta, \beta, \mathbf{D}\}$ qui satisfait (2.54), (2.60)–(2.61) est appelé solution faible pour le problème \mathcal{P} . Nous concluons que, dans les hypothèses (2.16)–(2.30), le problème mécanique (2.54)–(2.61) a une solution faible unique qui satisfait (2.65)–(2.70). La preuve de théorème (2.3.1) sera réalisée en plusieurs étapes et est basé sur les équations d'évolution de la théorie avec des opérateurs monotones, un argument de point

fixe et une existence classique et résultat d'unicité pour les inégalités paraboliques cette fin.

La démonstration du théorème (2.3.1) sera fournie dans cette section suivante.

Démonstration du Théorème 2.3.1

Soit $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in C(0, T; V)$ sera proposée.

Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}V_\eta^u$. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_\eta = (\mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{u}_\eta^2) : [0, T] \rightarrow V$ tels que

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}_\eta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}_\eta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{\nu c}(\mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_\eta(t), \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)) + (\eta(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_V \\ & \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in (0, T), \quad \zeta(t) \in K, \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0. \quad (2.72)$$

Dans l'étude du problème variationnel $\mathcal{P}V_\eta^u$, nous avons le résultat suivant .

Lemme 2.3.1 1. *Il existe une solution unique $\mathbf{u}_\eta \in C^1(0, T; V)$ au problème (2.71) et (2.72).*

2. *Si \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , sont deux solutions du problème (2.71) et (2.72) correspondant aux données $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; V)$, alors il existe $c > 0$ telle que*

$$\|\dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)\|_V \leq c (\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V + \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.73)$$

Preuve. Nous allons appliquer le Théorème 1.2.9 dans le cas de l'espace de Hilbert $X = V$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $\|\cdot\|_V$, définies par (1.42) et (1.43) dans le deuxième chapitre de la première partie.

Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir les opérateurs $A : V \rightarrow V$, $B : V \rightarrow V$ par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad (2.74)$$

$$(B\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad (2.75)$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, et la fonction $\mathbf{f}_\eta : [0, T] \rightarrow V$, $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathbf{f}_\eta(t) = \mathbf{f}(t) - \boldsymbol{\eta}(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.76)$$

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = j_{\nu c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.77)$$

En utilisant (2.16)(a)

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_{\mathbf{V}} &= (A\mathbf{u}_1, \mathbf{v})_{\mathbf{V}} - (A\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \\ &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell) \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} L_{\mathcal{A}^\ell} \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{\mathbf{V}^\ell} \|\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} dx \\ &\leq \max(L_{\mathcal{A}^1}, L_{\mathcal{A}^2}) \int_{\Omega} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} dx \\ &\leq L_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned}$$

On prend $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ donc

$$(A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{\mathbf{V}} \leq L_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}}^2$$

alors

$$\|A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}} \leq L_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}}.$$

En applique (2.16) (b) :

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{\mathbf{V}} &= (A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_{\mathbf{V}} - (A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{\mathbf{V}} - (A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)_{\mathbf{V}} + (A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)_{\mathbf{V}} \\ &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell)) (\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell)) dx \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} m_{\mathcal{A}^\ell} \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{\mathbf{V}^\ell}^2 dx \\ &\geq \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}) \int_{\Omega} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}}^2 dx \\ &\geq m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}}^2. \end{aligned}$$

En utilisant (2.17)

$$\begin{aligned}
 (B\mathbf{u}_1 - B\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V &= (B\mathbf{u}_1, \mathbf{v})_V - (B\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V \\
 &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell) \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx \\
 &\leq \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \|\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \|\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} dx \\
 &\leq \max(L_{\mathcal{G}^1}, L_{\mathcal{G}^2}) \int_{\Omega} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V dx \\
 &\leq L_{\mathcal{G}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V.
 \end{aligned}$$

On prend $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ donc

$$(B\mathbf{u}_1 - B\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \leq L_{\mathcal{G}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2$$

alors

$$\|B\mathbf{u}_1 - B\mathbf{u}_2\|_V \leq L_{\mathcal{G}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V.$$

Puisque les opérateurs A et B satisfont les conditions (1.55) et (1.59), respectivement.

Nous utilisons (2.36) et (2.37) pour voir que la fonctionnelle j définie dans (2.77) satisfait la condition (1.56)(a). Moyennant (2.22) et (2.27) encore une fois, nous utilisons (2.63), (2.64) et (2.77), nous trouvons l'inégalité suivante

$$j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq L_{\nu} c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V,$$

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V. \quad (2.78)$$

ce qui montre que la fonctionnelle j vérifie la condition (1.56)(b) sur $X = V$. De plus, en utilisant (2.33) et prenant en considération que $\eta \in C(0, T; V)$, nous concluons de (2.76) que $f_\eta \in C(0, T; V)$, i.e., f_η satisfait (1.60). Finalement, notons que (2.29) montre que la condition (1.61) est satisfaite aussi.

En utilisant maintenant (2.74)–(2.77) nous remarquons que le Lemme 2.3.1 est une conséquence directe du Théorème 1.2.9, ce qui achève la preuve. ■

Dans la deuxième étape, nous utilisons la solution $\mathbf{u}_\eta \in C(0, T; V)$ obtenue dans le Lemme 2.3.1 pour construire le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}V_\eta^\varphi$ Trouver le potentiel électrique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\eta^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \quad (2.79)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.2 *Le problème $\mathcal{P}V_\eta^\varphi$ possède une solution unique qui satisfait la régularité (2.67).*

Preuve. Soit $b(\cdot, \cdot) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par

$$b(\varphi, \phi) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \varphi, \phi \in W. \quad (2.80)$$

Nous utilisons (1.48), (1.49), (2.21) et (2.80) pour déduire que est continue, symétrique et coercive. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de Riesz pour définir la fonction $q_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(q_\eta(t), \phi)_W = \sum_{\ell=1}^2 (q^\ell(t), \phi^\ell)_{W^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T).$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram on obtient l'existence et l'unicité $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$b(\varphi_\eta(t), \phi) = (q_\eta(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W. \quad (2.81)$$

Nous concluons que φ_η est une solution du Problème $\mathcal{P}V_\eta^\varphi$. Pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, en utilisant des arguments basés sur (2.79) nous trouvons

$$\| \varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2) \|_W \leq C (\| \mathbf{u}_\eta(t_1) - \mathbf{u}_\eta(t_2) \|_V + \| q(t_1) - q(t_2) \|_W), \quad (2.82)$$

Comme $\mathbf{u}_\eta \in C^1(0, T; V)$ et $q \in C(0, T; W)$, nous déduisons de l'inégalité (2.82) que $\varphi_\eta \in C(0, T; W)$. ■

Dans la troisième étape, nous utilisons la solution \mathbf{u}_η obtenue dans le lemme 2.3.2 et nous considérons le problème suivant.

Problème $\mathcal{P}V_\eta^\beta$. Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta \in [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = - (\beta_\eta(t) (\gamma_\nu (R_\nu([u_{\eta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau \| \mathbf{R}_\tau([u_{\eta\tau}(t)]) \|^2 - \varepsilon_a)_+ , p.p. t \in (0, T), \quad (2.83)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (2.84)$$

On a le résultat suivant.

Lemme 2.3.3 *Le problème $\mathcal{P}V_\eta^\beta$ admet une solution unique β_η qui satisfait*

$$\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$$

Preuve. Pour la simplicité, nous supprimons la dépendance de diverses fonctions sur Γ_3 , et notée que les égalités et inégalités ci-dessous sont valables p.p. sur Γ_3 . On considère la fonction de trace $F_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ définie par

$$F_\eta(t, \beta) = - \left(\beta [\gamma_\nu(R_\nu([u_{\eta\nu}(t)]))]^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{\eta\tau}(t)])\|^2 - \varepsilon_a \right)_+,$$

pour $t \in [0, T]$ et $\beta_1, \beta_2 \in L^2(\Gamma_3)$. d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et \mathbf{R}_τ nous avons

$$\begin{aligned} \|F_\eta(t, \beta_1) - F_\eta(t, \beta_2)\| &\leq \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} L^2 \|\gamma_\nu + \gamma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq C \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

et d'autre par

$$\begin{aligned} \|F_\eta(t, \beta)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq \|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)} L^2 \|\gamma_\nu + \gamma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\varepsilon_a\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Donc nous impliquons que F_η est Lipschitz continue par rapport au deuxième argument, et cela uniformément dans le temps. D'ailleurs, pour n'importe quel $\beta \in L^2(\Gamma_3)$, la fonction de trace $t \rightarrow F_\eta(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Ainsi, en utilisant le Théorème 1.2.10, nous obtenons qu'il existe une fonction unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui satisfait (2.83) et (2.84). Aussi, d'après les arguments utilisés dans la Remarque 1.1.1 et (2.28) nous déduisons que $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Par conséquent, de la définition de \mathcal{Z} nous montrons que $\beta_\eta \in \mathcal{Z}$, ce qui donne la preuve du Lemme 2.3.3. ■

Dans la quatrième étape, soit $\theta \in C(0, T; E_0)$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}V_\theta^\zeta$. Trouver le champ endommagement $\zeta_\theta = (\zeta_\theta^1, \zeta_\theta^2) : [0, T] \rightarrow E$ tel que $\zeta_\theta(t) \in K$ et

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (\zeta_\theta^\ell(t), \xi^\ell - \zeta_\theta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\zeta_\theta(t), \xi - \zeta_\theta(t)) \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 (\theta^\ell(t), \xi^\ell - \zeta_\theta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi \in K, \quad p.p. t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.85)$$

où $K = K^1 \times K^2$.

Dans l'étude du problème de $\mathcal{P}V_\theta^\zeta$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.4 *Le problème $\mathcal{PV}_\theta^\zeta$ admet une solution unique ζ_θ telle que*

$$\zeta_\theta \in \mathbf{H}^1(0, T; E_0) \cap \mathbf{L}^2(0, T; E_1).$$

Preuve. L'application d'inclusion de $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ dans $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ est continue et à image dense. Notant par E_1' l'espace dual de E_1 et identifiant le dual de E_1 avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 = E_0' \subset E_1'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{E_1' \times E_1}$ pour désigner le produit de dualité entre E_1' et E_1 , nous avons

$$(\zeta, \xi)_{E_1' \times E_1} = (\zeta, \xi)_{E_0} \quad \forall \zeta \in E_0, \xi \in E_1,$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans E_1 . Ainsi, le champ d'endommagement initial $\zeta_0 \in K$. Maintenant, en utilisant la définition (2.34) de la forme bilinéaire ζ , pour tout $\phi, \xi \in E_1$, on a

$$a(\phi, \xi) = a(\xi, \phi),$$

et

$$\begin{aligned} |a(\phi, \xi)| &\leq 3k \|\nabla \phi\|_{\mathbf{H}} \|\nabla \xi\|_{\mathbf{H}} \\ &\leq c \|\phi\|_{\mathbf{H}^1} \|\xi\|_{\mathbf{H}^1} \end{aligned}$$

donc, a est continue et symétrique. Ainsi, pour tout $\phi \in E_1$, nous avons

$$a(\phi, \phi) = k \|\nabla \phi\|_{\mathbf{H}}^2,$$

alors

$$a(\phi, \phi) + (k+1) \|\phi\|_{E_0}^2 \geq k (\|\nabla \phi\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\phi\|_{E_0}^2)$$

et d'où

$$a(\phi, \phi) + c_0 \|\phi\|_{E_0}^2 \geq \alpha \|\phi\|_{E_1}^2 \quad c_0 = k+1 \text{ et } \alpha = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème 1.2.11 sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du lemme 2.3.4. ■

Enfin, à la suite de ces résultats et d'utiliser les propriétés de l'opérateur \mathcal{F}^ℓ l'opérateur \mathcal{E}^ℓ , la fonction j_{ad} et la fonction ϕ^ℓ , pour $t \in (0, T)$, nous considérons l'opérateur

$$\mathbf{\Lambda}(\eta, \theta)(t) = (\mathbf{\Lambda}^1(\eta, \theta)(t), \mathbf{\Lambda}^2(\eta, \theta)(t)) \in \mathbf{V} \times E_0, \quad (2.86)$$

définis par les égalités

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{\Lambda}^1(\eta, \theta)(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \\
 &= \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(s)), \zeta_\theta^\ell(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\
 &+ \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\eta^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_\eta(t), \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.87)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{\Lambda}^2(\eta, \theta)(t) = (\phi^1(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}^1(t), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^1(t)), \zeta_\theta^1(t)), \phi^2(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}^2(t), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^2(t)), \zeta_\theta^2(t))). \quad (2.88)$$

Pour tout $(\eta, \theta) \in C(0, T; \mathbf{V} \times E_0)$, \mathbf{u}_η , φ_η , β_η et ζ_θ représentent le champ des déplacements, le champ potentiel électrique, le champ d'adhésion et le champ d'endommagement obtenus dans les lemmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4 respectivement, et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}^\ell$ défini par

$$\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}^\ell(t) = \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\eta^\ell + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(s)), \zeta_\theta^\ell(s)) ds, \text{ dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (2.89)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.5 *Pour $(\eta, \theta) \in C(0, T; \mathbf{V} \times E_0)$ l'opérateur $\mathbf{\Lambda}(\eta, \theta) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V} \times E_0$ admet un unique point fixe noté $(\eta^*, \theta^*) \in C(0, T; \mathbf{V} \times E_0)$ tel que $\mathbf{\Lambda}(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$.*

Preuve. Nous montrons que pour un nombre entier positif m , la puissance m ième de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$, notée $\mathbf{\Lambda}^m$, est une contraction dans $C(0, T; \mathbf{V} \times E_0)$. Soient $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in C(0, T; \mathbf{V} \times E_0)$ et par simplicité, nous utilisons les notation $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i, \dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \dot{\mathbf{u}}_i, \varphi_{\eta_i} = \varphi_i, \beta_{\eta_i} = \beta_i, \zeta_{\theta_i} = \zeta_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$ pour $i=1,2$.

En utilisant (2.35), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{\Lambda}^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \mathbf{\Lambda}^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \\
 & \leq \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_2^\ell(t)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \\
 & + \sum_{\ell=1}^2 \int_0^t \|\mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell(s)), \zeta_1^\ell(s)) - \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell(s)), \zeta_2^\ell(s))\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 ds \\
 & + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \|\beta_1^2(t) \mathbf{R}_\nu([u_{1\nu}]) - \beta_2^2(t) \mathbf{R}_\nu([u_{2\nu}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\
 & + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \|\beta_1^2(t) \mathbf{R}_\tau([u_{1\tau}(t)]) - \beta_2^2(t) \mathbf{R}_\tau([u_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.18), (2.20),

$$\begin{aligned}
 & \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathbb{V}}^2 \\
 & \leq \sum_{\ell=1}^2 L_{\mathcal{F}^\ell} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1^\ell(s) - \mathbf{u}_2^\ell(s)\|_{\mathbb{V}^\ell}^2 ds + \int_0^t \|\zeta_1^\ell(s) - \zeta_2^\ell(s)\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2 ds \right) \\
 & + \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^*\|_{L^\infty(\Omega^\ell)}^2 \|\nabla \varphi_1^\ell(t) - \nabla \varphi^\ell(t)\|_{H^\ell}^2 \\
 & + \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \|\beta_1^2(t) R_\nu([\mathbf{u}_{1\nu}]) - \beta_2^2(t) R_\nu([\mathbf{u}_{2\nu}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\
 & + \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \|\beta_1^2(t) \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{1\tau}(t)]) - \beta_2^2(t) \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2.
 \end{aligned}$$

et en utilisant la définition de R_ν et \mathbf{R}_τ on a

$$\begin{aligned}
 & \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathbb{V}}^2 \\
 & \leq \max(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}) \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \right. \\
 & \quad \left. + \|(\mathcal{E})^*\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + c \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

On prend $C = \max(\max(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}), \|(\mathcal{E})^*\|_{L^\infty(\Omega)}^2, c)$

ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathbb{V}}^2 \\
 & \leq C \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \right. \\
 & \quad \left. + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Nous rappelons que $u_{\eta\nu}^\ell, \mathbf{u}_{\eta\tau}^\ell$ désignent les composantes normale et tangentielle de la fonction \mathbf{u}_η^ℓ respectivement.

Par un argument similaire, de (2.88), (2.89) et (2.19) il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 & \|\Lambda^2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{E_0}^2 \\
 & \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbb{V}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{E_0}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

Alors, depuis (2.90) et (2.91), on a

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{\Lambda}(\eta_1, \theta_1)(t) - \mathbf{\Lambda}(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathbb{V} \times E_0}^2 \\
 & \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbb{V}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{E_0}^2 \right. \\
 & \left. + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

depuis

$$\mathbf{u}_i^\ell(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{u}}_i^\ell(s) ds + \mathbf{u}_0^\ell(t), \quad \forall t \in [0, T], \ell = 1, 2,$$

Nous avons

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbb{V}} \leq \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_{\mathbb{V}} ds$$

et en utilisant l'inégalité dans (2.73)

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbb{V}} \leq C \left(\int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_{\mathbb{V}} ds + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbb{V}} ds \right). \tag{2.93}$$

Maintenant, d'après l'inégalité de Gronwall, il s'ensuit que

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbb{V}} \leq C \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_{\mathbb{V}} ds \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.94}$$

D'autre part, le problème de Cauchy (2.83)–(2.84) nous pouvons écrire

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\beta_i(s)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{i\nu}(s)]))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([u_{i\tau}(s)])\|^2) - \varepsilon_a)_+ ds$$

et puis

$$\begin{aligned}
 & \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 & \leq C \int_0^t \|\beta_1(s)(R_\nu([u_{1\nu}(s)]))^2 - \beta_2(s)(R_\nu([u_{2\nu}(s)]))^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\
 & \quad + C \int_0^t \|\beta_1(s)\|\mathbf{R}_\tau([u_{1\tau}(s)])\|^2 - \beta_2(s)\|\mathbf{R}_\tau([u_{2\tau}(s)])\|^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.
 \end{aligned}$$

Utilisant la définition de \mathbf{R}_ν et \mathbf{R}_τ et en écrivant $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 & \leq C \left(\int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right).
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

Maintenant, d'après l'inégalité de Gronwall, il s'ensuit que

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds.$$

et en utilisant la relation (1.44) on obtient

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds. \quad (2.96)$$

Nous utilisons (2.79), (1.48), (2.20) et (2.21) pour trouver

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq C \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbb{V}}^2. \quad (2.97)$$

De (2.85), nous déduisons que

$$(\dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_2, \zeta_1 - \zeta_2)_{E_0} + a(\zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 - \zeta_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \zeta_1 - \zeta_2)_{E_0}, \quad p.p. t \in (0, T).$$

En intégrant l'inégalité précédente avec les conditions initiales

$$\zeta_1(0) = \zeta_2(0) = \zeta_0$$

et en utilisant l'inégalité

$$a(\zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 - \zeta_2) \geq 0$$

on obtient

$$\frac{1}{2} \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \zeta_1(s) - \zeta_2(s))_{E_0} ds,$$

ce qui implique que

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{E_0}^2 ds.$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{E_0}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.98)$$

Nous combinons (2.94), (2.96), (2.97) et (2.98) dans (2.92) et les estimations pour obtenir

$$\|\mathbf{\Lambda}(\eta_1, \theta_1)(t) - \mathbf{\Lambda}(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathbb{V} \times E_0}^2 \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathbb{V} \times E_0}^2 ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, on obtient

$$\|\mathbf{\Lambda}^m(\eta_1, \theta_1) - \mathbf{\Lambda}^m(\eta_2, \theta_2)\|_{C(0, T; \mathbb{V} \times E_0)}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{C(0, T; \mathbb{V} \times E_0)}^2 ds.$$

Ainsi, pour m assez grand, l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^m$ est une contraction sur l'espace de Banach $C(0, T; \mathbb{V} \times E_0)$, et ainsi de $\mathbf{\Lambda}$ a un unique point fixe. ■

Passons maintenant à la démonstration du théorème 2.3.1

Démonstration du Théorème 2.3.1

Existence. Soit $(\eta^*, \theta^*) \in C(0, T; V \times E_0)$ est un point fixe de $\Lambda(\cdot, \cdot)$, et soit \mathbf{u}_{η^*} , φ_{η^*} , ζ_{θ^*} , β_{η^*} les solutions des problèmes $\mathcal{P}V_{\eta^*}^u$, $\mathcal{P}V_{\eta^*}^\varphi$, $\mathcal{P}V_{\theta^*}^\zeta$, $\mathcal{P}V_{\eta^*}^\beta$, respectivement. Nous utilisons les notations suivantes :

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{\eta^*}, \varphi_* = \varphi_{\eta^*}, \zeta_* = \zeta_{\theta^*}, \beta_* = \beta_{\eta^*}, \quad (2.99)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_*^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(s)), \zeta_*^\ell(s)) ds, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{D}_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_*^\ell. \quad (2.101)$$

Nous montrons que le quadruplet $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \zeta_*, \beta_*, \mathbf{D}_*)$ satisfaisant (2.54)–(2.61) et la régularité (2.65)–(2.70) En effet, nous écrivons (2.71) pour $\eta = \eta^*$ et en utilisant (2.99), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{\nu c}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \dot{\mathbf{u}}_*(t)) + (\eta^*(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t))_{\mathcal{V}} \\ & \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t))_{\mathcal{V}}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad t \in [0, T], \quad \zeta(t) \in K. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Nous combinons les égalités $\Lambda^1(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$ et $\Lambda^2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$ avec (2.87) et (2.88) pour obtenir

$$\begin{aligned} (\eta^*(t), \mathbf{v})_{\mathcal{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(s)), \zeta_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad p.p. \quad t \in (0, T),$$

$$\theta_*^\ell(t) = \phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}_*^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \zeta_*^\ell(t)), \quad p.p. \quad t \in (0, T), \quad \ell = 1, 2. \quad (2.104)$$

De (2.102) et (2.103), on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(s)), \zeta_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & + j_{ad}(\beta_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)) + j_{\nu c}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) \\
 & - j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \dot{\mathbf{u}}_*(t)) + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t))_V, \forall \mathbf{v} \in V, \quad p.p. t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

Ainsi, de (2.104) et (2.85), $\zeta_*(t) \in K$ on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\zeta}_*^\ell(t), \xi^\ell - \zeta_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\zeta_*(t), \xi - \zeta_*(t)) \\
 & \geq \sum_{\ell=1}^2 (\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}_*^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \zeta_*^\ell(t)), \xi^\ell - \zeta_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)},
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

pour tout $\xi \in K$, $p.p. t \in (0, T)$. Nous écrivons (2.79) pour $\eta = \eta^*$ et en employant (2.99), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_*^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \tag{2.107}$$

Aussi, en utilisant \mathbf{u}_{η^*} dans (2.83) et (2.99), on obtient

$$\dot{\beta}_*(t) = - (\beta_*(t)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{*\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([u_{*\tau}(t)])\|^2) - \varepsilon_a)_+, \quad p.p. t \in (0, T). \tag{2.108}$$

Nous concluons par (2.99), (2.100), (2.101), (2.105), (2.106), (2.107) et (2.108) que $\{\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \zeta_*, \beta_*, \mathbf{D}_*\}$ est une solution du problème (2.54)–(2.60)–(2.61). Et d'après les lemmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4 on a les régularités (2.65), (2.67)–(2.69). Puisque \mathbf{u}_* , φ_* , et ζ_* satisfait (2.65), (2.67), (2.68) on a

$$\boldsymbol{\sigma}_* \in C(0, T; \mathcal{H}). \tag{2.109}$$

Pour $\ell = 1, 2$, on choisit $v = \dot{\mathbf{u}} \pm \phi$, avec $\phi = (\phi^1, \phi^2)$, $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$, on obtient

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}_*^\ell(t) = -f_0^\ell(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2, \tag{2.110}$$

La régularité (2.66) suit les formes (2.23), (2.109) et (2.110).

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, d'après (2.20), (2.21), (1.48) et (2.101), nous déduisons que

$$\|\mathbf{D}_*(t_1) - \mathbf{D}_*(t_2)\|_H \leq C (\|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)\|_W + \|\mathbf{u}_*(t_1) - \mathbf{u}_*(t_2)\|_V).$$

En rappelant les régularités pour \mathbf{u}_* et φ_* dans (2.65) et (2.67), on a

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; H). \quad (2.111)$$

En prenant $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ où $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$ dans (2.107) et de (2.32) il vient

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_*^\ell(t) = q_0^\ell(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2. \quad (2.112)$$

De (2.24), (2.70), (2.111) et (2.112) on tire

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

■

Enfin, nous concluons que $\{\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \zeta_*, \beta_*, \mathbf{D}_*\}$ est une solution faible du problème $\mathcal{P}V$ ayant la régularité (2.65)–(2.70), en ce qui termine la preuve de la partie d'existence du théorème 2.3.1.

Unicité. La solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$ qui est défini par (2.87)–(2.88). ■

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié théoriquement un problème de contact avec adhésion et frottement entre deux corps électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. On a montré l'existence et l'unicité de la solution faible de problème précédent par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, équation différentielle, le lemme de Gronwall et point fixe.

Enfin, ce problème peut être approché numériquement en utilisant les méthodes itératives des éléments finis et des différences finies.

Bibliographie

- [1] A. Aissaoui, *Analyse Variationnelle de quelques problèmes aux limites de Contact avec adhésion et endommagement*. Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2014).
- [2] A. Azeb Ahmed, S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic thermo-elasto-viscoplastic contact problem* *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2013, No. 71,1-17; December 2013.
- [3] A. Azeb Ahmed, *Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [4] R.C. Batra, J.S. Yang, *Saint Venant' principle in linear piezoelectricity*, *Journal of Elasticity*, 38(1995), 209-218.
- [5] E. Bonetti, G. Bonfanti, *Existence and Uniqueness of the Solution to 3D Thermo-viscoelastic System*, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2003, No . 50, pp. 1-15.
- [6] S. Boutechebak, A. Azeb Ahmed, *Analysis of a dynamic frictional contact Problem for thermo-elasto-viscoplastic materials with damage*, *Gen. Math. Notes*, Vol. 19, No. 1, No-vember 2013, pp.60-77.
- [7] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.
- [8] O. Chau. J.R. Fernondez, M. Shillor, M.Sofonea. *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, *J. Comput. Appl. Math*, 159, pp. 431-465, 2003.
- [9] L. Chouchane, *Etude variationnelle de quelques problèmes en elasto-visco-plasticité*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2008).
- [10] N. Chougui, *Analyse Mathématique de Quelques Problèmes de Contact en Electro-élasticité et en Electro-viscoélasticité*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).

-
- [11] G. Duvant, J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Numerische Mathematik 90 (2002), 689-719.
- [12] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J.Mécanique Théorique et Appliquée, 6, pp. 383-407, 1987.
- [13] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, 295, pp. 913-916, 1982.
- [14] M. Frémond, *Contact with adhesion. Dans Topics in nonsmooth mechanics (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G. Strang)*, Birkhauser Verlag, Basel (1988), 177-221.
- [15] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [16] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nuel. Eng. Des. 156, pp. 323-335, 1995.
- [17] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, Int. J. Solids Structures, 33 (8), 1083-1103. (1996).
- [18] M. Frémond, K.L. Kuttle, B. Nedjar, M.Shillor ; *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl., 8(2) , pp. 541-570, 1998.
- [19] P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Masson et Cie, Paris, (1973).
- [20] T. Hadj Ammar, *Etude Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [21] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, *Frictional contact problem for electro-viscoelastic materials with long-term memory, damage, and adhesion*, Electronic Journal of Differential Equations, 222 (2014), 01-21.
- [22] W. Han, M. Sofonea, *Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems*, SIAM Journal of Numerical Analysis 38 (2000), 556-579.
- [23] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society, Providence, RI- Intl Press, Sommerville, MA, 2002.
- [24] Z. Lerguet, *Analyse de quelque problèmes de contact avec frottement et adhésion*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif, (2008).

-
- [25] A. B Merouani, F. Messelmi, *Dynamic Evolution of Damage in Elastic- Thermo- Viscoplastic Materials*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010 (2010), No. 129, pp. 1-15.
- [26] F. Messelmi, B. Merouani, *Quasi-Static Evolution of Damage in Thermo- Viscoplastic Materials*, Analele Universităţii Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVII (2010), Issue No. 2, 133-148.
- [27] F. Messelmi, B. Merouani, M. Meflah, *Nonlinear Thermoelasticity Problem*, Analele Universităţii Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XV (2008), 207-217.
- [28] R.D Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures 4 (1968), 637-663.
- [29] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [30] J. Nečas, I. Hlavaček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amesterdam, (1981).
- [31] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocu, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 177, 1999, pp.383-399.
- [32] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Analysis of Quasistatic Viscoelastic Proplem with Friction and damage*, Adv. Math. Sci. App. 10, 2002, 173-189.
- [33] J. Rojek, J.J. Telega, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics I : General developments*, J. Theor . Appl. Mech. 39, 2001, pp. 655-677.
- [34] J. Rojek, J.J. Telega, S. Stupkiewicz, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics II : Numerical implmentation and application to implanted knee joints*, J. Theor. Appl. Mech. 39 (2001), 679-706.
- [35] M. Selmani, *A dynamic problem with adhesion and damage, electro-viscoelasticity with long-term memory*. Journal of inequalities in pure and applied mathematics (2009).
- [36] M. Selmani, T. Messaoudi, *A dynamic frictionless elastic-viscoelastic problem with normal damped response and damage*. Mediterr. J. Math. 9 (2012), 81-94.
- [37] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes Physic, 655, Springer, Berlin, (2004).

- [38] M. Sofonea, A.Matei, *Variational inequalities with applications*, A Study of anti-plane frictional contact problems, Springer, New York (à paraître).
- [39] L. Selmani, N. Bensebaa, *An Electro- viscoelastic Contact Problem with adhesion and Damage*, Rend. Sem. Mat.Univ.Pol. Torino- Vol. 66, 2 (2008).
- [40] M. Sofonea, *Functional Methods in Thermo- Elasto- Plasticity*, Ph. D. Thesis, Univ of Buccharest, (1988) (in Romanian).
- [41] M. Sofonea, El H. Essouf , *A Piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Modelling and Analysis 9, (2004), 229-242.
- [42] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman, Hall/CRC Press, New York, 2006.
- [43] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.
- [44] R. A. Toupin, A dynamical theory of elastic dielectrics. Int. J. Engrg. Sci. 1 (1963).

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude de problèmes en Mécanique de Contact avec frottement de Coulomb et l'adhésion pour des lois constitutives électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes étudiés. La mémoire est composée de deux parties. La première partie est consacrée à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans la mémoire. La deuxième partie est destinée à l'étude théorique des problèmes de contact avec adhésion et frottement en électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement.

Mots-Clés : électro-viscoélastiques, adhésion, frottement de Coulomb, endommagement, inéquation d'évolution, inéquation quasi variationnelle, solution faible, point fixe.

Abstract

The purpose of this work is the study of some problems in Contact Mechanics with Coulomb's friction and adhesion for electro-viscoelastic with long-term memory and damage constitutive laws. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solutions for the studied problems. The memory is structured into two parts. The first part is dedicated to recall different mechanical models of contact, as well as some necessary mathematical tools. The second part is destined to the theoretical study of frictional contact problem with adhesion in electro-viscoelastic with long-term memory and damage.

Key-words: electro-viscoelasticity, adhesion, Coulomb's friction, damage, evolutionary variational inequality, quasi-variational inequality, weak solution, fixed point.

ملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو دراسة مسألة تواصل باحتكاك كولومب والتلاصق في ميكانيك التماس لقوانين كهرولزوجة مرنة مع ذاكرة طويلة وإتلاف، فالنتائج المتحصل عليها تخص وجود وحدانية الحل للمسألة المدروسة. تتكون المذكرة من جزأين الجزء الأول مخصص للتذكير بمختلف النماذج الميكانيكية المدروسة وكذلك بعض الوسائل الرياضية الضرورية في هذه المذكرة. الجزء الثاني موجه لدراسة مسائل التماس مع الإلتصاق والإحتكاك الكهرولزوجة مرنة مع ذاكرة طويلة وإتلاف .

الكلمات المفتاحية: كهرولزوجة مرنة، إلتصاق، إحتكاك كولومب، إتلاف، متباينة شبه تغيرية، متباينة تطور، الحل الضعيف، نقطة ثابتة.