جامعة الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الفيزياء

محاضرات في ميكانيك النقطة المادية

لطلبة الشعب العلمية

للأستاذة : حنان الأرقط

جامعة الوادي

المحتويات

<u>الفصل الاول: الأشعة</u>

تمهيد:

دراسة الأشعة هي بوابة أساسية لفهم العديد من المفاهيم المتقدمة في الفيزياء والرياضيات والهندسة. تُعتبر الأشعة أداة رياضية قوية لتمثيل الكميات التي لها مقدار واتجاه، على عكس الكميات القياسية (العددية) التي يحددها المقدار فقط.

في هذا الفصل، سنتعلم كيف نميز بين الكميات القياسية والكميات الشعاعية. سنكتشف العمليات الأساسية على الأشعة مثل الجمع والطرح، وكيفية ضربها بعدد قياسي. كما ستتعرف على كيفية تحليل الشعاع إلى مركباته (الأفقية والعمودية)، وهو ما يسهل حل المسائل المعقدة.

يهدف هذا الفصل الى تزويد الطالب بما يحتاجه من القواعد الأساسية التي تدير وتتحكم في الأشعة وهذا مهم في الفيزياء لأننا نعبر عن المعاني الفيزيائية بأدوات رياضية ..

فهم المتجهات ليس مجرد حفظ قوانين، بل هو تطوير لغة جديدة للتعبير عن العالم من حولنا, من خلال دراسة هذا الفصل، ستكون قادرًا على وصف حركة الأجسام بدقة، وتحليل القوى المؤثرة على الأجسام، وفهم العديد من المبادئ الهندسية والفيزيائية .

1-المقادير الفيزيائية:نسمي المقادير الفيزيائية بطريقتين أساسيتين حسب خصائصها:

أ- المقداد السلمي: يعبر عن المقدار السلمي بقيمة عددية في الوحدة المناسبة.

امثلة: الحجم- الكتلة – درجة الحرارة – الشحنة – الطاقة ....

ب- المقدار الشعاعي: يستلزم تحديد اتجاهه،جهته ونقطة تأثيره زيادة على قيمته العددية تسمى هذه المقادير بالمتجهات أو الأشعة.

امثلة: الانتقال- السرعة – القوة – الحقل الكهربائي................

2- الاشعة

أ- **تعريف الاشعة:** الشعاع هو مقدار فيزيائي – رياضي يتعين بعددين في حين يتعين المقدار السلمي بعدد واحد ويرمز له بالرمز: $\vec{B}, \vec{V}, \vec{A}$

ب- خصائص الشعاع : له أربعة مميزات

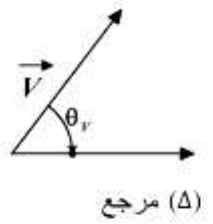
1- الطويلة (الشدة): هي طول الشعاع أي القيمة العددية(المقدار) وتمثل قيمة فيزيائية ويرمز لها بالرمز $\text{V} = |\vec{\text{V}}| = \|V\|$

2- الإتجاه : يحدد المسار الذي يسلكه الشعاع ويتحدد اتجاهه بزاوية θ_v بالنسبة لمحور محدد مسبقا وتسمى عمدته.

3- نقطة التأثير:وهي النقطة التي ينطلق منها الشعاع، وتُستخدم لتحديد موقعه في الفضاء.

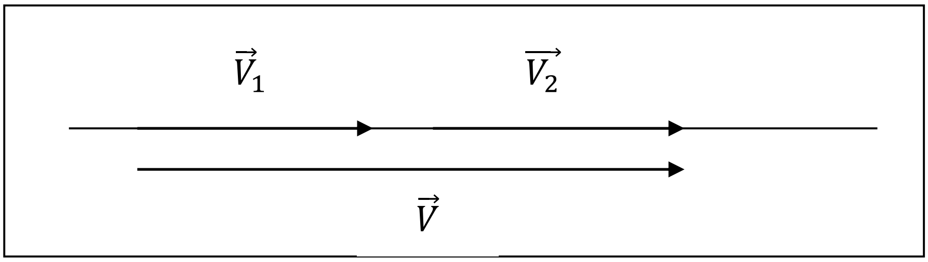
4- الحامل: هو الخط المستقيم الذي يحتوي على الشعاع.

فيكتب الشعاع$\vec{V}$هندسيا كالتالي:



$$\vec{V} = (|\vec{\text{V}}|, \theta_\text{v}) = (\text{V}, \theta_\text{v})$$

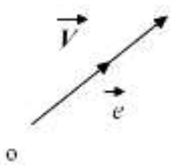
مثال : سيارة تسير من النقطة A إلى النقطة B بسرعة 10 m/s مثل شعاع السرعة على الشكل مع تحديد الخصائص.



ج-شعاع الوحدة:

هو ذلك الشعاع الذي طويلته تساوي وحدة الاطوال اي$|e| = 1$ ويكتب هندسيا$\overrightarrow{e_v}(1, \theta_v)$

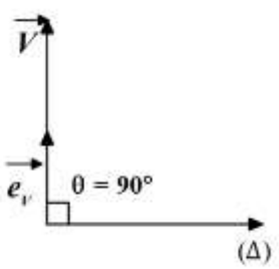
ويسمح لك التعامل مع الاتجاه بشكل منفصل عن المقدار مما يبسط العديد من الحسابات.



كما انه يمكن تعريف شعاع وحدة لكل شعاع $\vec{V}$ حيث يكتب:$\overleftarrow{V} = |V|\vec{e_v} = V\vec{e}$

مثال:علم الشعاع $\vec{V}(3, 90^0)$.

على تخطيط حيث يظهر فيه شعاع وحدته.



$$\vec{V} = 3\overrightarrow{e_y}, |V| = 3$$
$$\frac{\vec{V}}{V} = \overrightarrow{e_y} \Rightarrow |\overrightarrow{e_V}| = 1$$

هو كذلك شعاع الوحدة وفق الشعاع $\overrightarrow{e_V}$ ؛ $\vec{V}$

د- خواص الأشعة :

1-نقول عن الشعاعين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ انهما متساويين اذا تساوت عمدتيهما و طويلتهما في آن واحد بالنسبة لنفس المرجع.

$$\left|\left|\vec{V_1}\right|\right| = \left|\left|\vec{V_2}\right|\right|, \theta_{V_1} = \theta_{V_2}$$

2-نقول عن شعاعين انهما متوازيين اذا تساوت عمدتيهما واختلفت طويلتيهما اي :

$$\theta_{V_1} = \theta_{V_2}, |V_1| \neq |V_2|$$
$$\overrightarrow{V_1} = \alpha\overrightarrow{V_2}, |V_1| \neq \alpha|V_2|$$

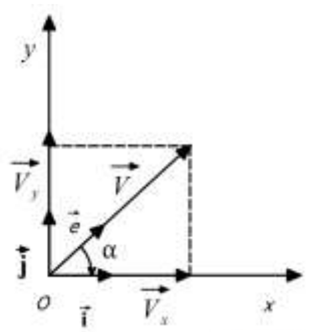
ه-تمثيل شعاع في معلم :

المعلم هو نظام مرجعي يتكون من نقطة أصل (مبدأ) ومحاور إحداثيات يسمح لنا بتحديد موضع إي نقطة في الفضاء بإعطاء إحداثيات ومنها نستطيع كتابة مركبات الشعاع.

المعالم نوعان :

-المعلم في المستوي : في المعلم $R(O,\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}})$ (معلم متعامد ومتجانس)

حيث:



$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y}$$
$$V_x = V\cos\ \alpha$$
$$V_y = V\sin\ \alpha$$

بتحديد شعاعي الوحدة $\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}$ في اتجاه كل من المحورين (Ox) و (Oy).

$$\vec{V_x} = V_x\vec{\imath}$$

$$\vec{V_y} = V_y\vec{\jmath}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath}$$

$$\vec{V} = \mathrm{V}\cos\alpha\vec{\imath} + \mathrm{V}\sin\alpha\vec{\jmath}$$

$$\vec{V} = V(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath})$$

وفي الاخير وبما ان: $\vec{V} = V\vec{e}$ فإن $\vec{\mathbf{e}} = \cos\ \alpha\vec{\mathbf{i}} + \sin\ \alpha\vec{\mathbf{j}}$

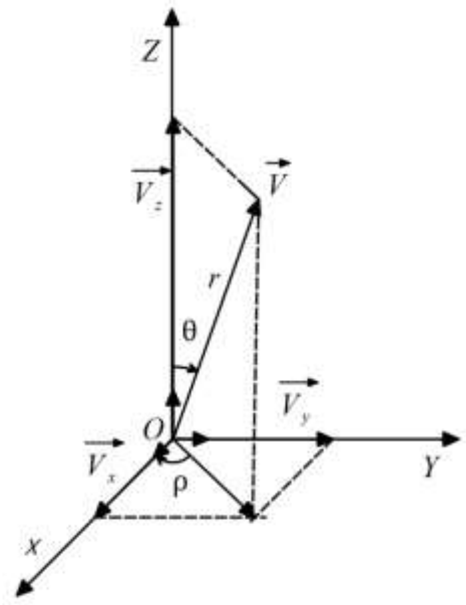
أما طويلة الشعاع $\vec{V}$ فهي: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

ويمكن استعمال رموز أخرى مثل: $V = \sqrt{x^2 + y^2}$

المعلم في الفضاء: في المعلم $R(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ (معلم متعامد ومتجانس)

نلاحظ انه: $\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z}$

يمكن التحقق هندسيا من ان:



$$\cos\theta = \frac{V_z}{r} \Rightarrow V_z = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \rho = r\ sin\theta$$

$$\cos\varphi = \frac{V_x}{\rho} \Rightarrow V_x = \rho\ \cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{V_y}{\rho} \Rightarrow V_y = \rho\ \sin\varphi$$

$$V_x = r\ \sin\theta\cos\varphi$$

$$V_y = r\ \sin\theta\cos\varphi$$

$$V_z = r\ cos\theta$$

أما طويلة الشعاع فهي: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

أو بالإحداثيات الكارتيزية : $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

مثال: اوجد المسافة الفاصلة بين النقط $A(10,)$ و $B(10,6,8)$ الممثلتين في معلم متعامدومتجانس $R(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

الحل:

المسافة المطلوب حسابها هي $\vec{D} = \overrightarrow{AB}$

$$\vec{D} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{J} + (z_2 - z_1)\vec{K}$$

$$\vec{D} = 10\vec{J} + \overrightarrow{4K}$$

$$|D| = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 10.77$$

مثال: اوجد محصلة الاشعة التالية:

$\vec{V}_1 = 4\vec{\imath} - 3\,\vec{\jmath}$

$\vec{V}_2 = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

$\vec{V}_3 = 2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$

$\vec{V}_4 = 7\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}$

$\vec{V}_5 = 9\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5 \Rightarrow \;\; \vec{V} = 7\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} \Rightarrow |V| = 23.60u$

لإيجاد منحى او حامل الشعاع $\vec{V}$ بحسب الزاوية α :

$$V_x = V\cos\alpha$$

$$V_y = V\sin\alpha$$

$$tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = -\frac{14}{19} \approx 0.737$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = 36.38°$$

وهي تمثل الزاوية التي يضعها $\vec{V}$ مع المحور (Ox).

3- العمليات على الاشعة:

تتمثل العمليات الأساسية على الاشعة في: الجمع، الجداء السلمي والجداء الشعاعي وتجرى العمليات بطريقتين هندسيا وتحليليا (حسابيا).

تعتمد الطريقة الهندسية على القياس المباشر بالأدوات المناسبة والطريقة التحليلية على تحليل الأشعة.

1-جمع الاشعة:

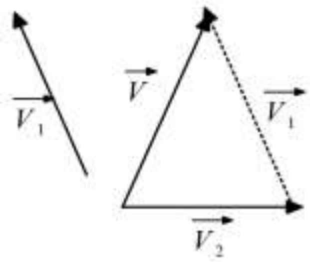
أ-جمع شعاعين: ليكن الشعاعان $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ وليكونا من جنس واحد اي لهما نفس الوحدة نشكل منهما شعاعا ثالثا$\vec{V}\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

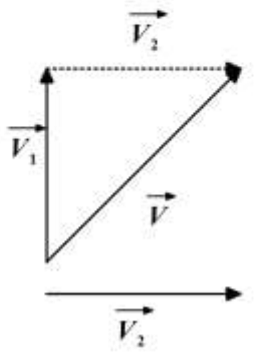
- طريقة المثلث :

نحصل على الشعاع $\vec{V}$هندسيا بنقل الشعاع $\vec{V_1}$ موازيا لنفسه حتى يلتقي ذيله برأس الشعاع فالشعاع$\vec{V_2}$

هو الشعاع الذي ذيله ذيل الشعاع $\vec{V_2}$ ورأسه رأس الشعاع $\vec{V_1}$ او بالعكس اي ان عملية جمع الاشعة عملية تبديلية.

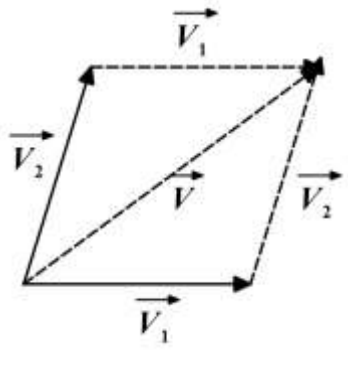
$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{V_1} + \vec{V_2}\\ &= \vec{V_2} + \vec{V_1}\end{aligned}$$





-طريقة متوازي الأضلاع:

نرسم الشعاعين المنطلقين من نفس النقطة، ثم نكمل الشكل الى متوازي أضلاع ، تمثل المحصلة الشعاع الناتج عن القطر المنطلق من نفس نقطة التأثير.



نحصل على شدة شعاع بواسطة العلاقة التالية والتي تسمى بقانون جيوب التمام والتي سنبرهن عنها لاحقا.

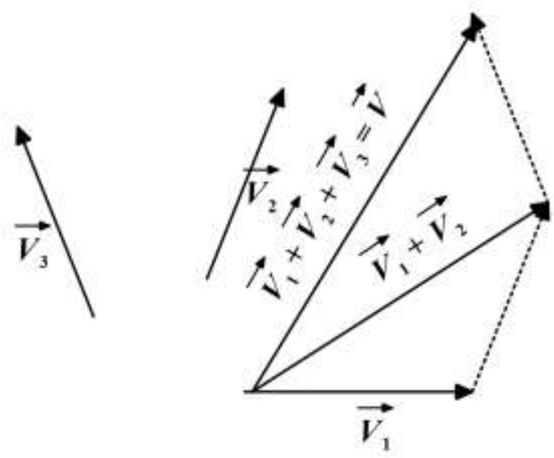
$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\left(\vec{V_1},\vec{V_2}\right)}(\Delta)$$

ب- جمع ثلاثة اشعة:

لنعتبر ثلاثة اشعة من جنس واحد:$\overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_1}$ فمحصلتهما هي شعاع رابع $\overrightarrow{V'}$ يكتب على الصورة التالية:

$$\overrightarrow{V'} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$$

تجرى عملية جمع هذه الأشعة هندسيا على النحو الذي أجرينا به جمع شعاعين، فنجمع أولا شعاعين منهما ثم نجمع الناتج مع الشعاع الباقي ويمكن تعميم هذه الطريقة لجمع عدد من الأشعة مهما بلغ عددها.

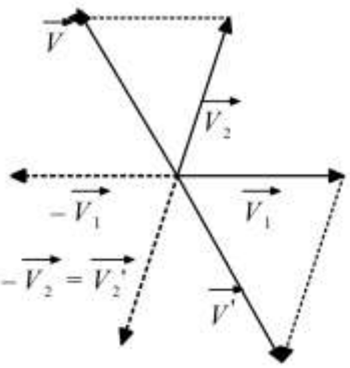


ج- الطرح بين الأشعة:

إن عملية طرح شعاع من شعاع تعود الى جمع شعاعين، فمحصلة طرح شعاع $\overrightarrow{V_1}$ من الشعاع $\overrightarrow{V_2}$ هو$\overrightarrow{V'}$ نكتبه على الصورة التالية:

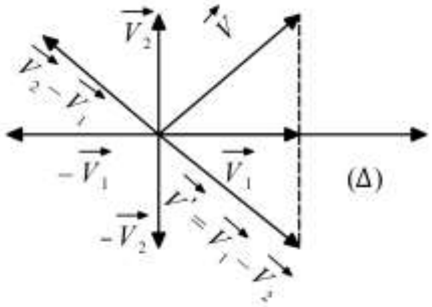
$$\overrightarrow{V'} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} + \left(-\overrightarrow{V_2}\right) = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2'}, \overrightarrow{V_2'} = -\overrightarrow{V_2}$$

عملية طرح الأشعة ليست تبديليه وهذا ما نلاحظه على الشكل:



(Δ)

مثال: ليكن لدينا محورا مرجعيا(Δ)،قم بتعيين الشعاعين $\overrightarrow{V_1}(3,0°)$ و$\overrightarrow{V_2}(2,90°)$هندسيا ثم مثل محصلة جمع وطرح الشعاعين وطرح الشعاعين$\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$

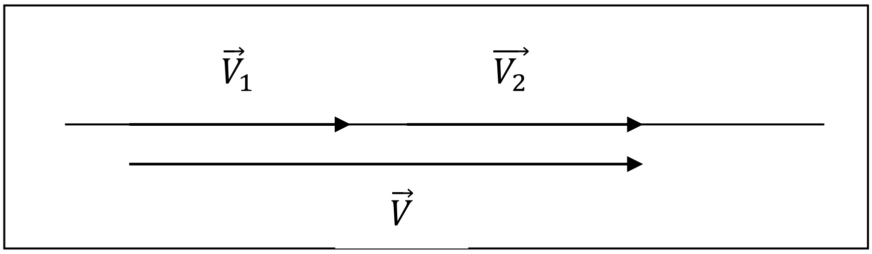


- طويلة الشعاع في هذه الحالة تكتب كالتالي:

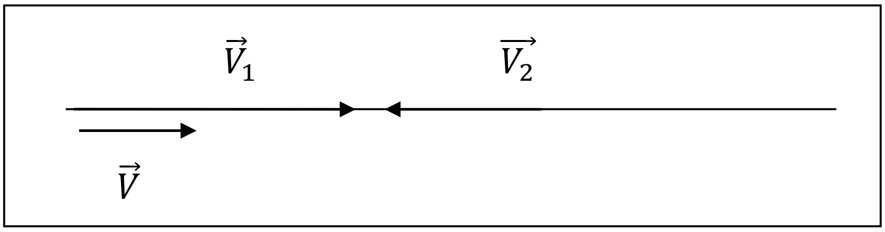
$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{V'}\right| &= \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - V_1 V_2 \cos\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)}\\ &= \sqrt{9 + 4 - 12\cos(90)}\\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

ملاحظة: في بعض الحالات يمكن إيجاد محصلة جمع شعاعين بالنظر فقط إلى وضعية الشعاعين :

1-الشعاعان على نفس الحامل وفي نفس الاتجاه ، تكون المحصلة لهما على نفس الحامل وفي نفس الاتجاه وطول المحصلة هو مجموع الطويلتين.



2-الشعاعان على نفس الحامل لكن في اتجاهين متعاكسين، تكون المحصلة لهما على نفس الحامل وفي اتجاه الشعاع الأطول وطول المحصلة هو الفرق بين الطويلتين.



3-إذا كان شعاعان متساويان فإن المحصلة تكون شعاع منعدم.

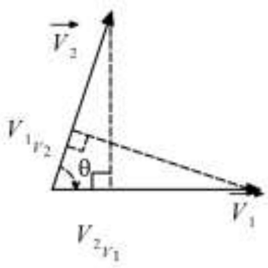
2-الجداء السلمي:

أ-تعريف: نسمي الجداء السلمي لشعاعين$\overrightarrow{V_1}$و $\overrightarrow{V_2}$ العدد الحقيقي $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}$ بحيث:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_1 \cos\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$$
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_1 \cos\left(\theta_{V_1 V_2}\right)$$

حيث:

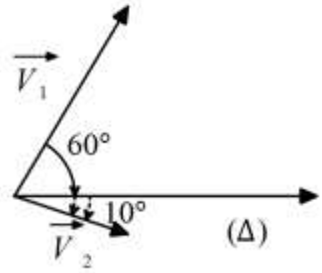
$\theta_{V_1V_2}$: تمثل اصغر زاوية محصورة بين الشعاعين $\overrightarrow{V_1}$و $\overrightarrow{V_2}$كما يمكن كتابة الجداء السلمي على احد الصور المكافئة التالية: $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = V_{1_{V_2}} \cdot ||V_2|| = ||V_1|| \cdot V_{2_{V_1}}$



حيث: نسمي $V_{1_{V_2}} = V_1\cos\ \theta_{V_1V_2}$ مسقط $\vec{V}_2$ على $\vec{V}_1$

ونسمي: $\vec{V}_2\vec{V}_1$ $\vec{V}_2 = V_2\cos\ \theta_{V_1V_2}$ مسقط $\vec{V}_1$ على $\vec{V}_2$

مثال: عين الجداء السلمي للشعاعين $\vec{V_1}(5.60°)$ و $\vec{V_2}(3.-10°)$ ومسقط كلامنهما على الاخر.



$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1V_1\cos\left(\theta_{V_1V_2}\right) = 5\cdot 3\cdot\cos(70)$$
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 5.13$$
$$V_{1_{V_2}} = 5\cos(70) = 1.71$$
$$V_{2_{V_1}} = 3\cos(70) = 1.02$$

حالات خاصة: اذا كان: $\vec{V_1} = \vec{0}$ و $\vec{V_2} = \vec{0}$ فإن $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = 0$

اذا كان $\vec{V_1} \neq \vec{0}$ و $\vec{V_2} \neq \vec{0}$ فإن:

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow \left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = \frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$$
$$\vec{V}_1 || \vec{V}_2 \Rightarrow \left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = 0, \cos\ 0 = 1$$
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1V_2$$

لنبرهن الان على المعادلة (Δ) كما وعدنا

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2, \vec{V}^2 = \left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right)^2$$
$$\vec{V}^2 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + 2\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$
$$\vec{V}_1^2 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = V_1^2$$
$$\vec{V}_2^2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = V_2^2$$
$$\vec{V}^2 = V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$$
$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)}$$

ب-خواص الجداء السلمي:

ليكنثلاثة أشعة غير معدومة

أ- تبديلي: $\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{V_2}\cdot\overrightarrow{V_1}$

ب- توزيعي:

$$\vec{V}_1\cdot\left(\vec{V}_2+\vec{V}_3\right)=\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2+\vec{V}_1\cdot\vec{V}_3$$
$$\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)\cdot\vec{V}_3=\vec{V}_1\cdot\vec{V}_3+\vec{V}_2\cdot\vec{V}_3$$

ج-

$$\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2=0\Rightarrow\vec{V}_1\perp\vec{V}_2$$

د- يعبر الجداء$\left(\vec{V}\cdot\vec{e}_V\right)$عن مسقط (مركبة) الشعاع على المحور $\vec{V}$ حيث(Δ) : هو شعاع توجيهه$\vec{e}_V$

ج-العبارة التحليلية للجداء السلمي: $V_\Delta=\vec{V}\cdot\vec{e}_V=|V|\cos\,\theta_{\Delta V}$

ليكن$\vec{V}_1$و $\vec{V}_2$شعاعين في المستوي حيث: $\vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ و $\vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$

$$\vec{V}_1\cdot\vec{V}_1=(x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath})\cdot(x_2\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath})$$
$$=x_1x_2\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+x_1y_2\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+y_1x_2\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+y_1y_2\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}$$

$$\vec{\imath}\perp\vec{\imath}\Rightarrow\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}=0$$
$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=i^2=j^2=1$$

$$\vec{V}_1\cdot\vec{V}_1=x_1x_2+y_1y_2$$

$$\vec{V}_1\cdot\vec{V}_1=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

أما في الفضاء: $\vec{V}_1\cdot\vec{V}_1=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

مثال: أحسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{V}_1$و$\vec{V}_2$

$\vec{V}_1 = 3\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$

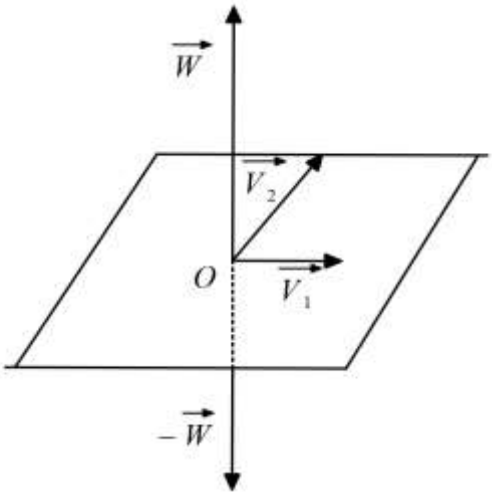
$\vec{V}_2 = -\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$

$\cos\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = \dfrac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|V_1| \cdot |V_1|}$

3- الجداء لشعاعي:

أ-تعريف: نسمي الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{V}_1$و $\vec{V}_2$بالشعاع$\vec{W}$العمودي على المستوي المكون لهما في ان واحد

$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}$



علما ان اتجاه الشعاع $\vec{W}$يحدد بقاعدة اليد اليمنى او قاعدة اللولب وشدته تحسب بالقانون:

$$W = |\overrightarrow{W}| = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = V_1 \cdot V_2 \sin\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$$

-خواص الجداء الشعاعي:

أ-ليس تبديلي (تبديلي مضاد): $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} \neq \overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_1} = -\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_1}$

ب--توزيعي:

$$\overrightarrow{V_1} \times \left(\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_3}$$
$$\left(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\right) \times \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}$$

ج-الجداء الشعاعي لشعاعين متوازيين معدوم

فاذا كانت $\theta_{V_1V_2} = 0$ فإن: $|\overrightarrow{W}| = V_1 V_2 \sin\,\theta_{V_1V_2} = 0$

$$\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V_1}||\overrightarrow{V_2}$$

ج-الصورة التحليلية للجداء الشعاعي:

ليكن$\overrightarrow{V_1}$ و$\overrightarrow{V_{21}}$شعاعان نرفق لهما $\vec{C}$ بواسطة الجداء الشعاعي:

$$\vec{C} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \left(x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}\right) \times \left(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}\right)$$

ويتم حساب الجداء الشعاعي كالتالي:

$$\vec{C} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$
$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{\imath} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{\jmath} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

وبالتالي: فان الطويلة تحسب بالعبارة التالية:

$$\vec{C} = \sqrt{\left((y_1z_2 - z_1y_2)\right)^2 + \left((x_1z_2 - z_1x_2)\right)^2 + \left((x_1y_2 - y_1x_2)\right)^2} = V_1V_2\sin\,\theta_{V_1V_2}$$

مثال: احسب الشعاع$\vec{C}$جداء الشعاعين$(2.1; -1)\overrightarrow{V_1}$و $(1.0; -2)\overrightarrow{V_1}$ثم استنتج الزاوية بينهما؟ θ

الحل

$$\vec{C} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$\vec{C} = (1 \times (-2) - 0 \times (-1))\vec{\mathbf{i}} - (2 \times (-2) - 1 \times (-1))\vec{\mathbf{j}} + (2 \times 0 - 1 \times 1)\vec{\mathbf{k}}$$
$$\vec{C} = -2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} - \mathrm{k}$$
$$|C| = \sqrt{14} = 3.74u$$
$$|C| = |V_1||V_2|\sin\,\theta_{V_1V_2} = \sqrt{6}\cdot\sqrt{5}\sin\,\theta_{V_1V_2}$$

$$\Rightarrow \sin\,\theta_{V_1V_2} = \frac{C}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3.74}{\sqrt{30}} = 0.683$$

$$\theta_{V_1V_2} = 43.06^\circ$$

4- تحليل الاشعة:ان اجراء العمليات على الاشعة بالطريقة الحسابية (التحليلية) امر ممكن وهو الاكثر دقة وتداولا من الطريقة الهندسية.

سنعرض فيما يلي كيفية تحليل الاشعة على أساس وإجراء العمليات على الاشعة بالطريقة التحليلية.

لقد رأينا فيما سبق ان جمع عدد ما من الاشعة ينتج عنه شعاع واحد ولهذا يمكن ان تجرى الطريقة العكسية وهي ان نحلل شعاعا على عدة اشعة اخرى محددة مسبقا كالاتي:

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3 + \cdots \ldots \ldots \ldots$$

-اذا وجهنا المحورين الغير متوازيين Δ_x و Δ_y بالشعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$ يصبح :

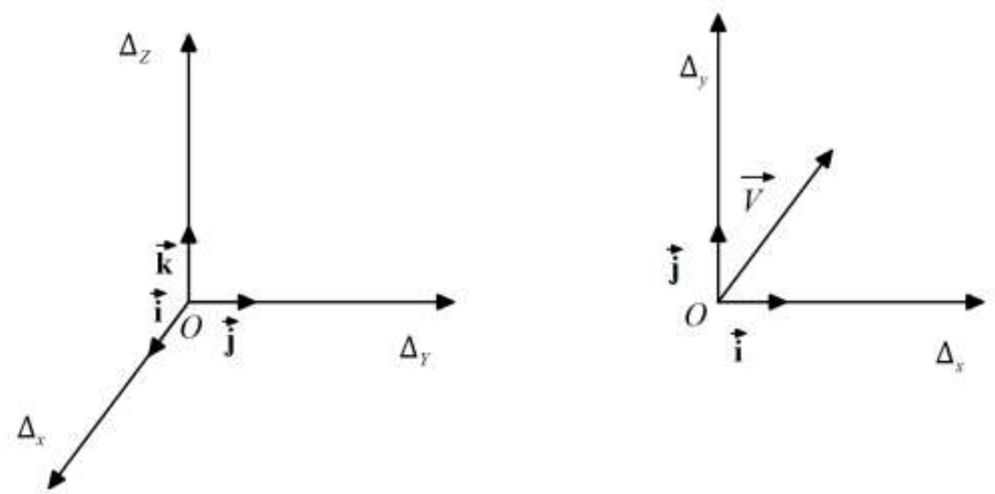
$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 = C_x\vec{\imath} + C_y\vec{\jmath}$$

وهو ما يسمى بمعلم المستوي وهو جملة مرجعية تحلل على اساسها الاشعة.

-إذا وجهنا المحاور الغير متوازية Δ_x , Δ_y و Δ_z الأشعة $\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}$ فانه يمكن كتابة $\vec{C}$ على الشكل:

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3 = C_x\vec{\imath} + C_y\vec{\jmath}C_z\vec{k}$$

وهو يسمى بالمعلم الفضائي الذي يعتبر المعلم المستوي حالة خاصة منه.



وينتج عن الجداء السلمي للشعاع $\vec{C}$وأشعة الوحدة$\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$العلاقات التالية:

$$\vec{C} \cdot \vec{\imath} = C_x + C_y\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + C_z\vec{\imath} \cdot \vec{k}$$
$$\vec{C} \cdot \vec{\jmath} = C_x\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} + C_y + C_z\vec{\jmath} \cdot \vec{k}$$
$$\vec{C} \cdot \vec{k} = C_x\vec{k} \cdot \vec{\imath} + C_y\vec{k} \cdot \vec{\jmath} + C_z$$

حيث وضعنا: $\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 1$

ونسمي C_z, C_y, C_x مركبات الشعاع $\vec{C}$ على المحاور $\Delta_z\Delta_y, \Delta_x$

وبما ان مركبات الشعاع $\vec{C}$تتعلق بالزوايا المحصورة بين كل محورين فانه يختار عادة المحاور متعامدة فيصبح: $\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0$

ومنه:

$$\vec{C} \cdot \vec{\imath} = C_x$$
$$\vec{C} \cdot \vec{\jmath} = C_y$$
$$\vec{C} \cdot \vec{k} = C_z$$

لهذا السبب نصطلح على ان نحلل الاشعة على جملة محاور متعامدة ومتجانسة وطردية مباشرة نعبر رياضيا عن هذه الخصائص كما يلي:

التعامد: $\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0$

طردية الاساس: $\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}}$

خاصية تجانس الاساس: $\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 1$

نرمز للأساس الثنائي البعد: ب$\{\vec{e}\}_2 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$

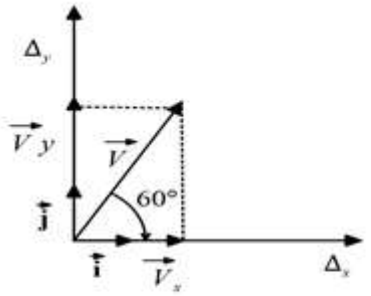
والثلاثي البعد ب$\{\vec{e}\}_3 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$

فعلى الاساس التحليلي يمكن تمثيل الشعاع $\vec{A}$بصورة مختلفة:

$$\vec{A}\begin{pmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{pmatrix}, \vec{A}(A_x, A_y, A_z), \vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$$

مثال ليكن$\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$معلم تعامد ومتجانس

جد مركبات الشعاع $\vec{V}(3, 60^0)$ ثم اكتب الشعاع $\vec{V}$ بالصيغ التحليلية المختلفة.



$$\vec{V}=\vec{V}_x+\vec{V}_y=|V_x|\vec{\imath}+|V_y|\vec{\jmath}$$

$$|V_x|=|V|\cos\ \theta=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$|V_y|=|V|\sin\ \theta=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{V}=\frac{3}{2}\vec{\mathbf{i}}+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{V}\begin{pmatrix}\frac{\frac{3}{2}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\vec{V}\left(\frac{3}{2},3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

5- الصورة التحليلية لعمليات الاشعة:

أ-الصورة التحليلية للجمع: ليكن $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شعاعان نرفق لهما الشعاع $\vec{V}$ بواسطة عملية الجمع كالاتي:

$$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2=V_x\vec{\imath}+V_y\vec{\jmath}+V_z\vec{k}$$
$$==\left(V_{1x}\vec{\imath}+V_{1y}\vec{\jmath}+V_{1z}\vec{k}\right)+\left(V_{2x}\vec{\imath}+V_{2y}\vec{\jmath}+V_{2z}\vec{k}\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$V_x=V_{1x}+V_{2x}$$

$$V_y=V_{1y}+V_{2y}$$

$$V_z=V_{1z}+V_{2z}$$

-مثال: قم بجمع ثم طرح الشعاعان $\overrightarrow{V_1}(1,0,4)$ $\overrightarrow{V_2}(-3,2,1)$تحليليا واكتبها على الصيغ التحليلية الممكنة؟.

الحل:

$$\vec{V_1} = \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{V_2} = -3\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$$
$$\cdot \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$$
$$\vec{V}\begin{pmatrix}-2\\+2\\+5\end{pmatrix}, \vec{V}(-2,2,+5)$$

$$\vec{V'} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}3\vec{k}$$

5- الجداء الثلاثي: هو عملية رياضيةتستخدم في حساب الأشعة، وتشير إلى حاصل ضرب ثلاثة أشعة بطريقة معينة وهناك نوعان رئيسيان:

أ-الجداء الثلاثي السلمي(الجداء المختلط):

الجداء الثلاثي السلمي هو جداء سلمي للشعاعين $\overrightarrow{V_1}$و$\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}$كالاتي:

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}\right) = x_1 \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}\right) + y_1 \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}\right) + z_1 \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$
$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

ويكون الناتج عددا (كمية قياسية)وليست شعاعا وهو يمثل حجم متوازي الأضلاع الذي تحدده الأشعة الثلاثة .

خاصية مهمة: يمكن اثبات ان:

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_3} \cdot \left(\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}\right) = \overrightarrow{V_2} \cdot \left(\overrightarrow{V_3} \times \overrightarrow{V_1}\right)$$

اي ان مواضع الاشعة تتغير ولكن لاتتغير معها قيمة الجداء الثلاثي السلمي وتستعمل هذه الخاصية بكثرة

ب- الجداء الثلاثي الشعاعي:

ان الجداء الثلاثي الشعاعي ما هو الا جداء شعاعي $\overrightarrow{V_1}$ و$\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}$

$$\overrightarrow{V_1}\cdot\left(\overrightarrow{V_2}\times\overrightarrow{V_3}\right)=\overrightarrow{V_1}\times\overrightarrow{V'},\overrightarrow{V'}=\overrightarrow{V_2}\times\overrightarrow{V_3}$$
$$=\left(y_1V_z'-V_y'z_1\right)\vec{\imath}-\left(x_1V_z'-V_x'z_1\right)\vec{\jmath}+\left(x_1V_y'-V_x'y_1\right)\vec{k}$$

ويكون الناتج عبارة عن شعاع.

-خصائص:

1- يمكن تحليل الجداء الشعاعي الثلاثي كالتالي:

$$\overrightarrow{V_1}\times\left(\overrightarrow{V_2}\times\overrightarrow{V_3}\right)=\left(\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_3}\right)\cdot\overrightarrow{V_2}-\left(\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2}\right)\cdot\overrightarrow{V_3}$$

هذه الصيغة مهمة جدا في الفيزياء والهندسة.

2-حاصل الجداء الثلاثي الشعاعي هو شعاع في مستوي $\overrightarrow{V_2}$و$\overrightarrow{V_3}$

6-بعض الاشعة المتداولة:

انه من المفيد التعبير عن بعض الاشعة: كشعاع الموضع، الانتقال والتغير والتدرج ... وذلك لكثرة تداولها واهميتها.

1-شعاع الموضع:هو أداة أساسية في الفيزياء تستخدم لتعيين موقع نقطة في الفضاء بالنسبة لنقطة ثابتة مرجعية (المبدأ)، يمكن تخيله كسهم يبدأ من نقطة الاصل او المبدأ وينتهي عند موقع الجسم في لحظة زمنية معينة

ليكن لدينا جسما متحركا في الفضاء نمثله بنقطة مادية $M(x,y,z)$ بالنسبة لمعلم فضائي ونعرف شعاع موضعه في كل لحظة كالتالي:

$$\overrightarrow{OM}=x(t)\vec{\imath}+y(t)\vec{\jmath}+z(t)\vec{k}$$

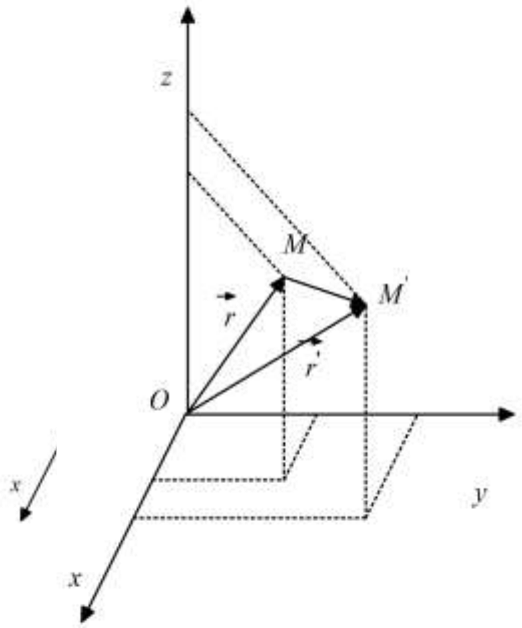
2-شعاع الانتقال :هو شعاع يصف التغير في الموضع بين نقطنين مختلقتين في الزمن إذ انه لايتعلق بالمسار الذي سلكه الجسم ، بل يتعلق فقط بين نقطتي البداية والنهاية

واذا كان الجسم في اللحظة t عند (x,y,z) M وانتقل حتى صار في اللحظةt

حيث (x',y',z')'Mيصبح لدينا:عند النقطة

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{r'} - \vec{r}$$

وهو شعاع الانتقال في المدة($\Delta t = t' - t$)



3-مؤثر التدرج:يُطبَّق التدرج على دالة سلمية وينتج عنه حقل شعاعي، يعبّر التدرج عن اتجاه أكبر معدل زيادة لقيمة الدالة عند نقطة معينة، وهذا يعني أنه يحدد الاتجاه الذي تتزايد فيه قيمة الدالة بأقصى سرعة.

رياضيًا، يُمثَّل التدرج بعملية التفاضل التي يُرمز لها بمؤثر نابلا∇ مطبقًا على الدالة، بحيث يكون التدرج متجهاً مكونًا من المشتقات الجزئية للدالة على المتغيرات المختلفة.

ان مؤثر التدرج له اهمية بالغة فمن المعلوم ان التفاضل التام لدالة ذات عدة متغيرات يكتب ب:

حيث :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \overrightarrow{dr} \cdot \vec{\nabla} f(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{dr} = d\vec{\imath} + d\vec{\jmath} + d\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\mathrm{gradf}} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

وهي تمثل عبارة مؤثر التدرج .

مثال : أحسب تدرج الدالة

$$f(x, y, z) = 4xy^2z^2$$

الحل: $\vec{\nabla}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=4y^2z^2\vec{i}+8xyz^2\vec{j}+8xy^2z\vec{k}$

4-التباعد :

يُطبق على حقل شعاعي وينتج دالة سلمية. يقيس مقدار "تدفق" الحقل الخارج من نقطة أو مدى وجود مصدر أو مصرف عند تلك النقطة. يكون التباعد صفراً في حالة الحقول الشعاعية الملفوفة التي لا تمتلك مصادر أو مصارف.

$$div\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

مثال : أحسب تباعد الدالة الشعاعية التالية :

$$\vec{A}=4xy\vec{i}+2yz^3\vec{j}+3xy^2\vec{k}$$

الحل

تباعد الدالة يحسب كالتالي :

$$div\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=4y+2z^3+0=4y+2z^3$$

5- الدوران :

يُطبق على حقل شعاعي وينتج حقلًا متجهًا يعبر عن قوة دوران الحقل أو كيفية التدوير حول نقطة معينة في الحقل، أي يصف مدى التدوير أو الالتفاف عند تلك النقطة.

دوران الحقل الشعاعي يكون كالتالي :

$$\overrightarrow{rot(\vec{A})}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

مثال : أحسب دوران الشعاع الآتي :

$$\vec{A}(x,y,z)=4xy\,\vec{i}-2y^2z\,\vec{j}+7xy^3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot(\vec{A})}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=(10xy^2-2y^2)\vec{i}+(7y^3-0)\vec{j}+(0-4x)\vec{k}$$
$$=(10xy^2-2y^2)\vec{i}+7y^3\vec{j}+-4x\vec{k}$$

هذه المؤثرات الثلاثة تُستخدم لتحليل الحقول الفيزيائية والرياضية، وخاصة في مجالات مثل الكهرومغناطيسية، ميكانيكا الموائع، والرياضيات التطبيقية.

الفصل الثاني: حركيات نقطة مادية

تمهيد:

تُعدّ حركيات النقطة المادية فرعًا أساسيًا من الميكانيكا الكلاسيكية يختص بوصف حركة الأجسام بعد اختزالها إلى نقطة مادية، من غير الخوض في القوى المحركة؛ أي دراسة هندسية لمسار الحركة وزمنها وأنماطها

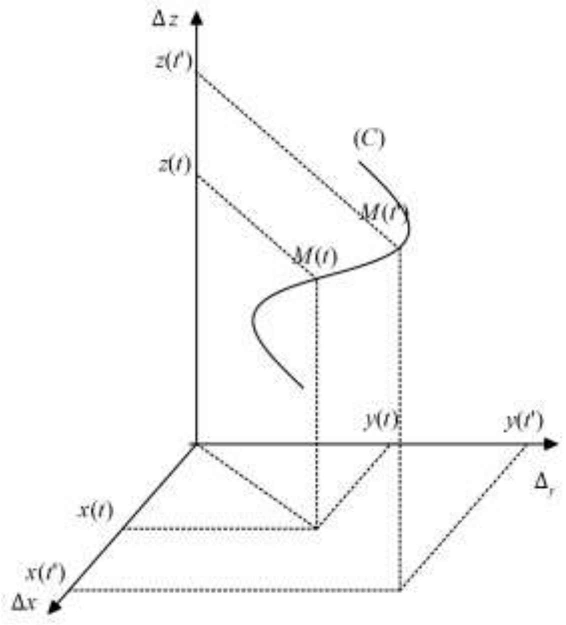
نشأ منذ القدم وتطوّر عبر جهود متراكمة لفهم الحركات وضبطها، حتى تبلور ما يُعرف بـ«المفهوم التقليدي للحركة»، وهو إطار منظم لقواعد ومفاهيم وعلاقات يرتكز على:

- اختيار جملة إسناد تُقاس بالنسبة إليها الحركة.
- اعتماد أدوات رياضية ذات دلالة فيزيائية واضحة.
- بيان الصلة بين الحركة ومسبباتها ضمن الصياغة الديناميكية

1- حركة نقطة مادية:

النقطة المادية هي عبارة عن جسم مادي يمكن اعتبار ابعاده معدومة نظريا ومهملة عمليا مقارنة بالمسافة المقطوعة فدراسة حركة جسم إنما تعود إلى دراسة حركة النقطة المادية.

1- انتقال نقطة مادية: لنعتبر نقطة ماديةMتتحرك في الفضاء وفق مسار C ونفرض انها كانت في النقطة$M(t)$ في اللحظة t وانتقلت الى النقطة $M(t')$عند اللحظةt'.



في اللحظتين t و t' شعاع موضعها هو:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM}(t') = \vec{r}(t') = x(t')\vec{i} + y(t')\vec{j} + z(t')\vec{k}$$

اذن يعرف شعاع انتقال النقطة M للحظتين t و t'

كالآتي:

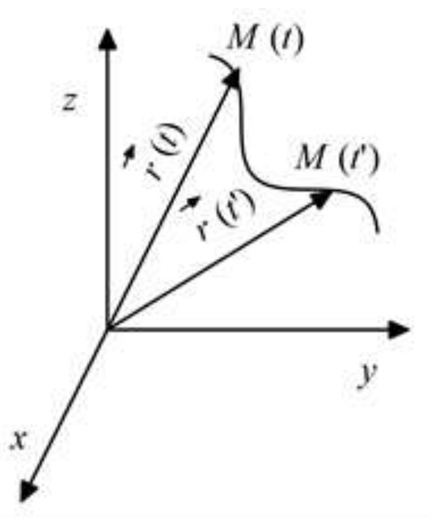
$$\overrightarrow{OM}(t') - \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) = (x(t') - x(t))\vec{\imath} + (y(t') - y(t))\vec{\jmath} + (z(t') - z(t))\vec{k}$$
$$= \Delta x(t',t)\vec{\imath} + \Delta y(t',t)\vec{\jmath} + \Delta z(t',t)\vec{k}$$

$\Delta x(t',t)$, $\Delta y(t',t)$ و $\Delta z(t',t)$ هي على الترتيب تمثل التغير للإحداثيات x, y و z خلال المدة $\Delta t = t' - t$.

2-شعاع السرعة: السرعة عبارة عن المسافة المقطوعة خلال وحدة الزمن ووحدتها هي m/s وهناك نوعان هما:

أ- السرعة المتوسطة للنقطة المادية: من الأدوات الرياضية التي تعبر عن الحركة، السرعة المتوسطة للنقطة المادية، فهي تبين التغير في موضع النقطة خلال الزمن أي تعبر عن مقدار التغير في شعاع الموضع خلال فترة زمنية معينة وهو المعنى الفيزيائي للسرعة وبذلك يمكن كتابتها كما يلي:

$$\vec{V}_M(t',t) = \frac{\overrightarrow{\Delta r}(t',t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t}$$



أما الصيغة التحليلية فتكتب بالشكل التالي: $\vec{V}_M(t',t) = V_{Mx}(t',t)\vec{\imath} + V_{My}(t',t)\vec{\jmath} + V_{Mz}(t',t)\vec{k}$

وتكتب مركباتها كالآتي:

$$V_{Mx}(t',t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$$
$$V_{My}(t',t) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t') - y(t)}{t' - t}$$
$$V_{Mz}(t',t) = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t') - z(t)}{t' - t}$$

خصائص السرعة المتوسطة:

1- ثبات السرعة المتوسطة خلال الفترة الزمنية

السرعة المتوسطة للجسم المتحرك تظل ثابتة خلال الفترة الزمنية المحددة التي نحسب فيها التغير، حيث لا تتغير سوى إذا كان هناك تغير في الحركة أو الاتجاه.

2- توازي السرعة المتوسطة مع شعاع الإزاحة

السرعة المتوسطة تكون دائمًا موازية لشعاع الإزاحة (أي تغير الموضع) بين النقطة الابتدائية والنقطة النهائية، ولا تتعلق بمسار الجسم أثناء الحركة.

3- سهولة قياسها في المختبر

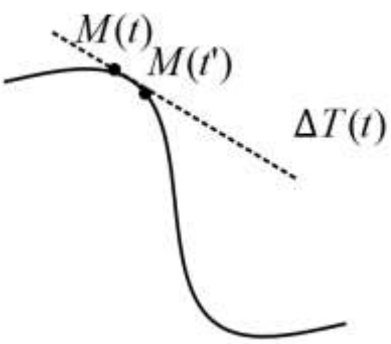
السرعة المتوسطة يمكن قياسها بشكل مباشر عمليًا في المختبرات عن طريق حساب المسافة الإجمالية المقطوعة مقسومة على الزمن الإجمالي.

ب- السرعة اللحظية:

من خلال صياغة السرعة المتوسطة، لاحظنا أنها لا تتعلق بمسار الجسم المتحرك ولا تعطينا معلومات تفصيلية عن طبيعة حركة الجسم المتحرك مع تغير شعاع الموضع خلال الزمن.

لذلك سنبحث عن سرعة الجسم المتحرك التي تتعلق بنقطة زمنية واحدة بدلاً من تعلقها بنقطتين ، وللحصول على ذلك نجعل $M(t')$ يقترب اقترابا مفرطا من مما يعني ان t' يؤول الى t .

ويؤول شعاع الانتقال عندئذ من المماس $\Delta T(t)$في اللحظة t فنتحصل على سرعة المتحرك في اللحظةt كالآتي : $(t \to t', \Delta t \to 0)$



$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}(t',t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)\vec{\imath} + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)\vec{\jmath} + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \right)\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

هذا التعريف يوضح كيف تمثل السرعة اللحظية المشتقة الأولى لشعاع الموضع بالنسبة للزمن، مما يعطي معلومات دقيقة عن سرعة واتجاه الحركة في أي لحظة زمنية محددة.

نتيجة:

- السرعة اللحظية هي السرعة الحقيقية للجسم في نقطة معينة من مساره، وهي تشير إلى مدى سرعة الجسم واتجاه حركته في تلك اللحظة بالذات.

-تكون السرعة اللحظية دائمًا موازية للمسار في تلك النقطة، بمعنى أنها تتجه بنفس اتجاه مماس المسار، مما يعني أن الجسم يتحرك في ذلك الاتجاه بشكل لحظي.

- علاقة السرعة اللحظية بمسار المتحرك:

العلاقة الرابطة بين السرعة اللحظية لمتحرك ومساره هي :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta l} \right)$$

Δl ز الى طول القوس الذي وتره شعاع الانتقال. اذن عندما يؤول $(\Delta t \to 0)$ فإن $M(t')$ تؤول الى ويؤول الطول $M(t)$ الى طول القوس $|\Delta \vec{r}|$ ويؤول اتجاه (Δl) الى نحوا اتجاه ماس للمسار $\Delta \vec{r}$

$\Delta \vec{T}(t)$ شعاع الانتقال كالتالي:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \|\overrightarrow{\Delta r}\| \cdot \vec{e}_T$$

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot \frac{\|\overrightarrow{\Delta r}\| \cdot \vec{e}_T}{\Delta l} \right) = \frac{dl}{dt} \vec{e}_T$$

$$\vec{V}(t) = V(t) \vec{e}_T$$

ومنه طويلة السرعة تساوي إلى مشتق طول القوس $V(t) = dl/dt \Rightarrow dl = V(t).dt$

فطول المسار الذي يقطعه المتحرك من لحظة t_0 الى لحظة t يكون: $l = \int_{t_0}^{t} V(t).dt$

مثال:أوجد المسار والسرعة اللحظية وطول المسار للمتحرك الذي شعاع موضعه: $\vec{r}(t) = 2t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath}$

مساره:

$$x(t)= 2t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{2}$$

$$y(t)= t^2 \Rightarrow\; y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$y= \frac{x^2}{4}$$

السرعة اللحظية و طول المسار:

$$\vec{V}(t)= \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{\imath} - 2t\vec{\jmath} :$$

$$|V|= \sqrt{4+4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$$

$$l(t)= \int 2\sqrt{1+t^2}dt$$

3-شعاع التسارع :

من الادوات الرياضية التي تحمل معاني فيزيائية تسارع المتحرك والذي هو مقياس لتغير شعاع السرعة اللحظية مع الزمن.

التسارع هو أداة رياضية تحمل معنى فيزيائيًا مهمًا، فهو مقياس لمعدل تغير شعاع السرعة اللحظية لجسم ما مع الزمن. يعني ذلك أنه يبيّن مدى سرعة تغير سرعة الجسم، سواء في مقداره أو اتجاهه أو كليهما، وذلك خلال فترة زمنية قصيرةوهونوعان :

أ-التسارع المتوسط:

التسارع المتوسط هو مقياس للتغير في سرعة الجسم خلال فترة زمنية محددة، يعبر عن مقدار التغير في شعاع السرعة اللحظية خلال الزمن، ويحسب بقسمة الفرق في السرعة على مقدار الزمن الذي حدث فيه هذا التغير.

ليكن (C) مسار نقطة مادية ما، فمعدل تغير سرعتها اللحظية هو: $\vec{a}_M(t',t) = \frac{\vec{V}(t')-\vec{V}(t')}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}(t',t)}{\Delta t}$

$\overrightarrow{a_M}(t',t)$ تمثل صيغة التسارع المتوسط.

ب- التسارع اللحظي:

نقوم باتباع خطوات مماثلة لتلك التي استخدمناها لتحويل السرعة المتوسطة إلى سرعة لحظية، وذلك لإيجاد معادلة التسارع اللحظي. فنبدأ بحساب التسارع المتوسط خلال فترة زمنية معينة، ثم نجعل هذه الفترة تقترب من الصفر لنحصل على التعبير الرياضي للتسارع اللحظي.

عبارة التسارع اللحظي هي:

$$\vec{a}(t)= \lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_M(t',t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}(t',t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{V}(t')-\vec{V}(t')}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{dV}}{dt}$$
$$\frac{\overrightarrow{dV}}{dt}= \frac{dV_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$
$$\vec{a}(t)= a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

مثال: عين تسارع النقطة المادية التي شعاع موضعها يعطي بالعلاقة:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^3\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\imath} + 3t^2\vec{\jmath}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{\overrightarrow{dV}}{dt} = 6t\vec{\jmath}$$

2- حركيات نقطة مادية بإحداثيات غير كارتيزية:

إن دراسة الحركات المختلفة يتطلب اختيار نوع مناسب من الاحداثيات لهذا سنعرض حركات نقطة مادية بإحداثيات مختلفة.

1-الاحداثيات القطبية:

في المعلم الكارتيزي يتعين موضع نقطة مادية $M(x,y)$ بالإحداثيتين الكارتزيتين x و y في حين انه يمكن اختيار إحداثيتين غير كارتزيتين بحيث تمثل الأولى بعد النقطة عن المبدأ وترمز لها بالرمز وتمثل الثانية الزاوية المحصورة بين Δx وشعاع موضعها ونرمز لها بالرمز r ان هذه الاحداثيات تسمى بالإحداثيات القطبية وتكتب: $M(r,\theta)$

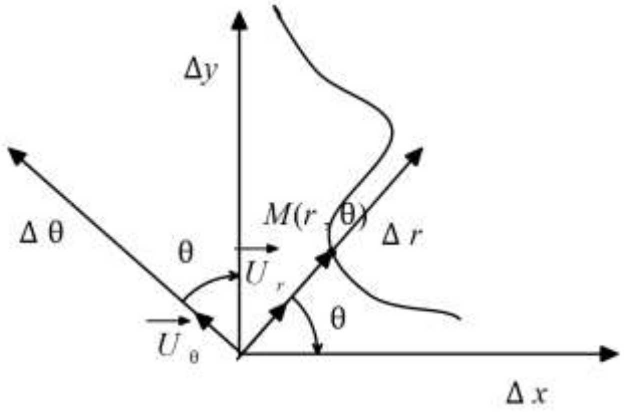
ان العلاقة بين الاحداثيات القطبية والكارتيزية تكون:

$$\vec{r}\cdot\vec{\imath} = x(r,\theta) = r\cos\,\theta$$
$$\vec{r}\cdot\vec{\jmath} = x(r,\theta) = r\sin\,\theta$$

أ-الاساس القطبي: كل جملة احداثيات نرفق لها اساسا، لذلك سنرفق الاحداثيات القطبية بالأساس القطبي المكون من المحور Δr المرافق للإحداثية r والحامل لشعاع م $(\ V)(3,60°)\ \rightarrow$ في كل لحظة والمحور $\Delta\theta$ المرافق للإحداثية θ والقائم على Δr حسب القاعدة المباشرة.

نرمز للأساس القطبي ب $(O,\vec{U}_r,\vec{U}_\theta)$ ونكتب شعاع موضع النقطة M على الصورة:: $\vec{r}(t) = r(t)\vec{U}_r$

إن الاساس القطبي يدور حول المحورΔzلذلك يتعلق شعاع توجيهي بالزمن، فيحلل على الأساس الكارتيزي كالاتي:



$$\vec{U}_r = \cos\ \theta(t)\vec{\imath} + \sin\ \theta(t)\vec{\jmath}$$
$$\vec{U}_\theta = -\sin\ \theta(t)\vec{\imath} + \cos\ \theta(t)\vec{\jmath}$$

يلاحظ أن:

$$\frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = -\sin\ \theta(t)\vec{\imath} + \cos\ \theta(t)\vec{\jmath} = \vec{U}_\theta$$
$$\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = \cos\ \theta(t)\vec{\imath} + \sin\ \theta(t)\vec{\jmath} = -\vec{U}_r$$

ب- سرعة نقطة مادية بالإحداثيات القطبية:

سرعة نقطة مادية بالإحداثيات القطبية تكتب كما يلي:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r(t)\overrightarrow{U_r}(t)\right) = \frac{dr(t)}{dt}\overrightarrow{U_r}(t) + r(t)\frac{d\overrightarrow{U_r}(t)}{dt}$$

لدينا$\vec{V}(t) = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta(t) = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta$

إذن$\frac{d\vec{U}_r(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\vec{U}_r(t)}{d\theta} = \dot{\theta}\vec{U}_\theta$

ومنه تعطى مركبات السرعة بالإحداثيات القطبية بالشكل التالي:$V_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}\ , V_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$

ج- تسارع نقطة مادية بالإحداثيات القطبية:

تسارع نقطة مادية بالإحداثيات القطبية يحسب كما يلي:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}\right)$$

$$= \ddot{r}\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}$$

$$= \ddot{r}\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{U_r}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{U}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{U}_\theta$$

$$= a_r\overrightarrow{U_r} + a_\theta\overrightarrow{U_\theta}$$

بالمطابقة نجد :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}2 = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

أما العلاقة بين الاحداثيات الكارتيزية و القطبية تكون على النحو التالي : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

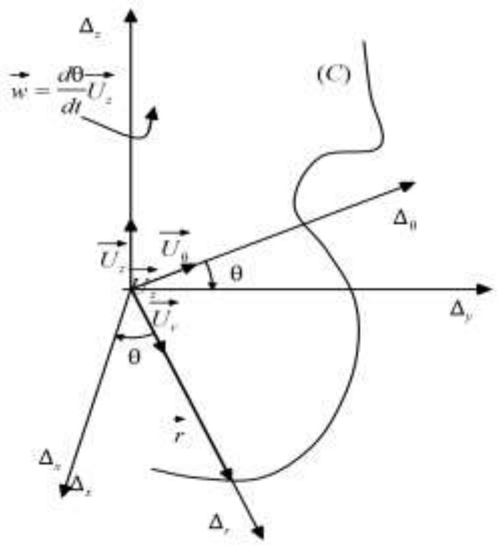
ان شعاع توجيه يمكن كتابته على الصورة: $\overrightarrow{U_\theta} = \overrightarrow{U_z} \times \overrightarrow{U_r}$

وبالتعويض في عبارة السرعة نجد:

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\theta}{dt}\left(\vec{U}_z \times \vec{U}_\theta\right)$$
$$= \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_z \times r\vec{U}_\theta$$
$$= \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + \vec{w} \times \vec{r}$$

حيث: $\vec{r} = r\vec{U}_\theta, \vec{w} = \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_z$

الشعاع $\vec{w}$هو السرعة الزاوية لدوران النقطة المادية M حول محور دورانهاΔ_Z ويرمز الشعاع الى السرعة الخطية المتعلقة بدوران محض.

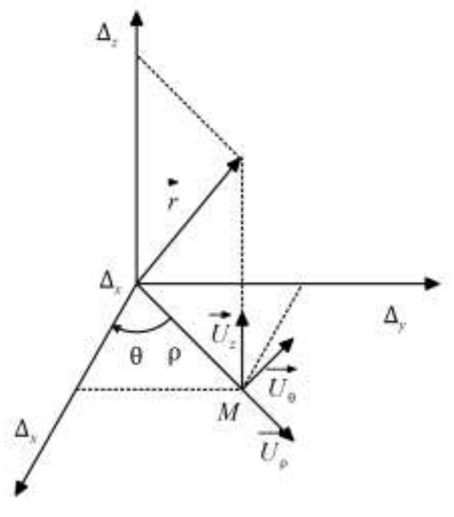


2- الاحداثيات الأسطوانية:

يمكن وصف موضع أي نقطة في الفضاء بثلاثة إحداثيات ديكارتية (z, y, x) ، أو باستخدام الإحداثيات الأسطوانية، حيث يتم تعينها بزوج قطبي (ρ, θ) يحدِّد موضع النقطة في المستوى القطبي، إضافةً إلى الإحداثي z الذي يعبِّر عن بُعدها العمودي عن هذا المستوى؛ فتُكتب الإحداثيات على الصورة $.M(\rho,\theta,z)$

أ-الاساس الاسطواني:

يشكل الأساس الأسطواني امتدادًا للأساس القطبي، حيث يتم إضافة محور كارتيزي ثالثΔ_Z عمودي على المستوى القطبي، فنحصل على الاساس الاسطواني الذي يرمز له بالرمز $\left(O,\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta,\vec{U}_z\right)$ ويمكن كتابة شعاع موضع النقطة $M(\rho,\theta,z)$ في الأساس الاسطواني بالصيغة التالية: $\overrightarrow{r(t)} = \rho(t)\overrightarrow{U_\rho} + z\overrightarrow{U_z}$



ب- سرعة النقطة المادية بالإحداثيات الاسطوانية:

تحسب سرعة نقطة مادية بالإحداثيات الاسطوانية كما يلي :

$$\vec{V}(t)=\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\rho\overrightarrow{U_\rho}+z\overrightarrow{U_z}\right)$$
$$=\rho\overrightarrow{U_\rho}+\rho\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}+\dot{z}\overrightarrow{U_z}$$
$$=V_\rho\overrightarrow{U_\rho}+V_\theta\overrightarrow{U_\theta}+V_z\overrightarrow{U_z}$$

حيث:

$$V_\rho=\dot{\rho}=\frac{d\rho}{dt},V_\theta=\rho\dot{\theta}=\rho\frac{d\theta}{dt},V_z=\dot{z}=\frac{dz}{dt}$$

3- تسارع نقطة مادية في الإحداثيات الاسطوانية:

يعبر عن تسارع نقطة مادية في الاحداثيات الاسطوانية كالتالي:

$$\vec{a}(t)=\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\overrightarrow{U\rho}+(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\overrightarrow{U\rho}+\ddot{z}\overrightarrow{Uz}$$
$$=a_\rho\overrightarrow{U\rho}+a_\theta\overrightarrow{U\theta}+a_z\overrightarrow{U\rho}$$

حيث: $a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}\ ,a_\theta=2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta},a_z=\ddot{z}$

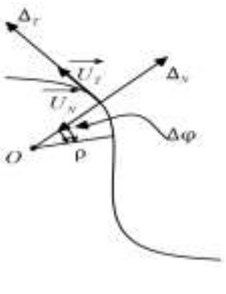
اما العلاقة بين الاحداثيات الكارتيزية والاسطوانية فهي كالتالي:

$$\begin{matrix} x=\rho\cos\ \theta \\ y=\rho\sin\ \theta \\ z=z \end{matrix}\left\{\rho=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\arctan\left(\frac{x}{\rho}\right)=\arctan\left(\frac{y}{\rho}\right)\right.$$

4-الاحداثيات المنحنية:

هي نظام إحداثيات يُستخدم لوصف حركة نقطة مادية بالاعتماد الكامل على مساره المنحني، دون الرجوع إلى نظام إحداثيات ثابت مثل النظام الديكارتي.

لنعتبر نقطة مادية تتحرك على مسارها (C) نعرف المحورين Δ_T و Δ_N المتعامدين اللذان يشكلان الأساس المرتبط بالمتحرك في كل لحظة.



- سرعتها تكتب على الصورة التالية: $\vec{V}(t)=|V|\overrightarrow{U_T}(t)=V(t)\overrightarrow{U_T}(t)$

$$V(t) = \frac{dl}{dt}$$

حيث:

l هو طول المسار وهو أحد الاحداثيات المنحنية (الإحداثي الأول)

- التسارع اللحظي بالإحداثيات المنحنية هو:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V\overrightarrow{U_T}(t)\right) = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{U_T} + V\frac{\overrightarrow{U_T}(t)}{dt}$$

لدينا:

$$\frac{\overrightarrow{dU_T}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{U_N}$$

ان القوس المقابل للزاوية $d\varphi$ هو عبارة عن قوس من دائرة نصف قطرها ρ ومركزها اللحظي $O(t)$
وعليه يكون طول القوس المقابل للزاوية $d\varphi$ هو $dl = \rho d\varphi$ كذلك نكتب: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dl}{dt} = \frac{V}{\rho}$

$$\vec{a}(t) = \frac{dV}{dt}\vec{U}_t + \frac{V^2}{\rho}\vec{U}_\theta$$

حيث:

a_T: التسارع المماسي ويعبر عن التغير في طويلة السرعة، إذا كان موجبًا تتزايد سرعة الجسيم، وإذا كان سالبًا، تتباطأ.

a_N: التسارع الناظمي ويعبر عن التغير في اتجاه السرعة وهو المسؤول عن انحناء المسار. يُعرف أيضًا بالتسارع المركزي، حيث ρ هو نصف قطر انحناء المسار عند تلك النقطة.

$\rho(t)$: هو نصف قطر الانحناء للمسار في اللحظة t وهو الاحداثي الثاني.

ومنه : $a_T = \frac{dV}{dt}, a_N = \frac{V^2}{\rho}$

ونكتب كذلك:
$$\vec{a}(t) = \overrightarrow{a_N} + \overrightarrow{a_T}$$
$$a^2 = a_N^2 + a_T^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

ونحصل على نصف قطر انحناء المسار ρ من خلال العبارة التالية: $\rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - {a_T}^2}}$

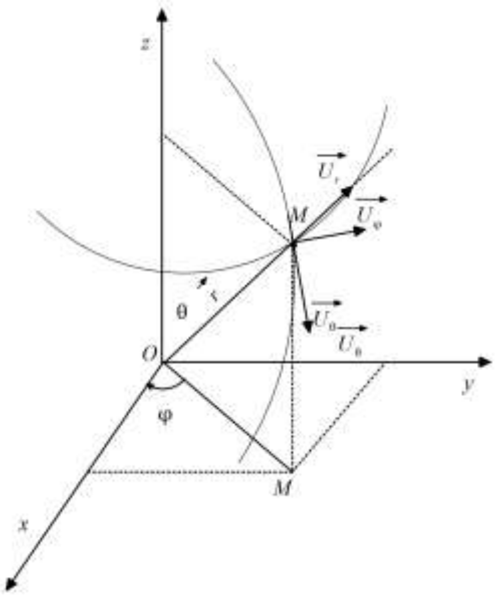
تكمن أهمية هذه الإحداثيات في أنها تقدم وصفًا فيزيائيًا مباشرًا للحركة، وتفصل بين التغيرات في مقدار السرعة والتغيرات في اتجاهها.

4-الاحداثيات الكروية:

تشكل الإحداثيات الكروية نظامًا إحداثيًا ثلاثي الأبعاد يستخدم لتمثيل النقاط في الفضاء. يُعد هذا النظام مثاليًا للأنظمة التي تتمتع بتماثل كروي، مثل المجالات الكهرومغناطيسية وحركة الكواكب....................

يمكن تحديد حركة نقطة مادية في الاحداثيات الكروية (r, θ, φ) بالشكل التالي:

$$r = r(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t)$$



حيث:

$\vec{r}(t)$: نصف القطر القطبي وهو عبارة عن طويلة شعاع الموضع.

$\theta(t)$: الزاوية القطبية المحصورة بين$\vec{r}$ وO_Z

$\varphi(t)$: الزاوية المحصورة بين O_x و (OM') حيث M' مسقط النقطةM في المستوي xOy وتسمى زاوية تمام العرض.

نعرف اشعة الوحدة المرفقة بالمعلم الكروي كما هو موضح في الرسم السابق حيث:

شعاع الوحدة$\vec{U}_r$ في اتجاه تزايد نصف القطر.

شعاع الوحدة مماسي$\vec{U}_\varphi$ للدائرة العرضية التي تشمل النقطة M.

شعاع الوحدة $\vec{U}_\theta$مماسي للدائرة الطولية التي تشمل النقطة M ونصف قطرهاr

تتعلق أشعة القاعدة الكروية بالزمن بالشكل الآتي:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{U_r}} = \mathbf{\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{U_\theta}} = \mathbf{\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\,\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{U_\varphi}} = -\mathbf{\sin}\,\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{\cos\varphi\,\vec{j}}$$

مشتقات أشعة الوحدة في القاعدة الكروية تعطى ب:

$$\dot{\overrightarrow{U_r}} = \dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{U_\varphi}$$

$$= -\dot{\theta}\overrightarrow{U_r} + \dot{\varphi}\,\cos\theta\,\overrightarrow{U_\varphi}$$

$$\dot{\overrightarrow{U_\varphi}} = -\dot{\varphi}\left(\sin\theta\,\overrightarrow{U_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{U_\theta}\right)$$

- **شعاع السرعة :** نشتق شعاع الموضع للحصول على عبارة السرعة كما يلي :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\overrightarrow{U_r}}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{U_\varphi}$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_\theta} + \overrightarrow{V_\varphi}$$

- **شعاع التسارع :** باشتقاق السرعة نجد التسارع $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\overrightarrow{U_\varphi}\right)}{dt}$

$$\vec{a} = a_r\overrightarrow{U_r} + a_\theta\overrightarrow{U_\theta} + a_\varphi\overrightarrow{U_\varphi}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta \\ a_\theta = 2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\varphi \\ a_\varphi = 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta \end{cases}$$

ملاحظة: كي نحصل على جميع نقاط الفضاء فإن: $0 \leq r \leq \infty , 0 \leq \varphi \leq 2\pi , 0 \leq 0 \leq \pi$

أما العلاقات بين الاحداثيات الكارتيزية والكروية هي:

$$x = r\cos\,\varphi \sin\,\theta$$
$$y = r\sin\,\varphi \sin\,\theta$$
$$z = r\cos\,\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

3-أنواع الحركات:

الحركة في الفيزياء هي انتقال الجسم من مكان إلى آخر، وتنقسم إلى عدة أنواع رئيسية بناءً على مسار الجسم وسرعته وتسارعه، وفيما يلي نبذة عن أهم أنواع الحركة:

1- **الحركة المنتظمة:** إذا كان تسارع جسم متحرك معدوم، فإن حركته تدعى بالحركة المنتظمة.

تسارعه في كل لحظة هو: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$

سرعته في كل لحظة هو: $\vec{r}(t) = \vec{V}(0)t + \vec{r}(0)$

موضعه في كل لحظة هو: ثابت $= \vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}(0)$

حيث ان: $\vec{V}(0)\vec{r}(0)$ هما على الترتيب موضع وسرعة المتحرك عند البداية ويكون مسار الحركة مستقيمًا، مما يعني أن معرفة الحالة الابتدائية تكفي لمعرفة الحالة في أي لحظة لاحقة.

2- **الحركة المتغيرة بانتظام:** اذا كان تسارع جسم ثابت مع الزمن فان حركته تدعى بالحركة المتغيرة بإنتظام.

تسارعه في كل لحظة هو: ثابت $= \vec{a}(t) = \frac{\overrightarrow{dV}}{dt} = \vec{a}(0)$

سرعته في كل لحظة هو: $\vec{V}(t) = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \vec{a}(0)t + \vec{V}(0)$

موضعه في كل لحظة هو: $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}(0)t^2 + \vec{V}(0)t + \vec{r}(0)$

حيث: $\vec{a}(0)$ و $\vec{V}(0)$ و $\vec{r}(0)$ هي على الترتيب تسارع وسرعة وموضع المتحرك عند لحظة البداية.

3- **القذائف:**

حركة القذيفة هي حركة جسم يُلقى في الهواء، ويتأثر فقط بقوة الجاذبية الأرضية، فإن الجسم في هذه الحالة يدعى قذيفة ،وتسارع الجسم يكتب كما يلي: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}(0) = \vec{g}$

4- الحركة الموارية:

اذا كان تسارع الجسم غير معدوم وغير ثابت تسمى هذه الحركة حركة موارية ويكون التسارع متغيرًا بدلالة الزمن أو الحالة.

$$\vec{a}(t) = \frac{\overrightarrow{dV}}{dt} = \vec{f}(t)$$
$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \int \vec{f}(t')dt' + \vec{V}(0)$$

5- الحركة الدائرية:

الحركة الدائرية هي حركة جسم على مسار دائري حول محور دوران ثابت وبنصف قطر ثابت،

اذا كان مسار نقطة مادية $M(r,\theta)$ دائري فان حركتها توصف بالدائرية $\|\vec{r}(t)\| = R =$ ثابت

فيصبح شعاع موضعها: $\vec{r}(t) = R\vec{U}_r(t)$

سرعتها تكتب كما يلي :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta(t)$$
$$\vec{V}(t) = R\frac{d\theta}{dt}\left(\vec{U}_z \times \vec{U}_r\right) = \vec{w} \times \vec{r}$$

والتسارع اللحظي هو:

$$\vec{a}(t) = \frac{\overrightarrow{dV}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta\right) = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{U}_\theta - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{U}_r$$
$$= a_r\vec{U}_r + a_\theta\vec{U}_\theta$$

$$\vec{a}(t)=\frac{\overrightarrow{dV}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta}\right)=R\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{U_\theta}-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{U_r}$$
$$=a_r\vec{U}_r+a_\theta\vec{U}_\theta$$
$$\begin{cases}-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-Rw^2=-\frac{(Rw)^2}{R}=-\frac{V^2}{R}\\ R\frac{d^2\theta}{dt^2}=R\frac{dw}{dt}=R\alpha=\frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{dV}{dt}\end{cases}$$

نحصل عندئذ عن العلاقات بين مركبتي التسارع والسرعتان الخطية والزاوية $(V=Rw)$

$$\vec{a}(t)=\frac{\overrightarrow{dV}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta}\right)=R\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{U_\theta}-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{U_r}$$
$$=a_r\vec{U}_r+a_\theta\vec{U}_\theta$$
$$\begin{cases}-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-Rw^2=-\frac{(Rw)^2}{R}=-\frac{V^2}{R}\\ R\frac{d^2\theta}{dt^2}=R\frac{dw}{dt}=R\alpha=\frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{dV}{dt}\end{cases}$$

من انواع الحركة الدائرية نذكر:

1- الحركة الدائرية المنتظمة:

تكون حركة نقطة مادية دائرية منتظمة إذا كان مسارها دائري وتسارعها الزاوي معدوم. $\alpha(t)=\frac{dw}{dt}=0$

وسرعتها الزاوية هي: $w(t)=\frac{d\theta}{dt}=w(t_0)=$ ثابت

وعمدتها: $\theta(t)=w(t_0)t+\theta(t_0)$

حيث ان: $w(t_0)$ و $\theta(t_0)$ هما على الترتيب السرعة الزاوية والزاوية الابتدائية.

نتائج:

التسارع مركزي (متجه نحو المركز) وطورة ثابت

$$l=\int_0^T V(t)dt=\int_0^{2\pi}R\frac{d\theta}{dt}dt=\int_0^{2\pi}Rd\theta$$

$$=R2\pi=\mathrm{RwT}$$

$$\Rightarrow w=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{w}$$

2-الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام:

إذا كان مسارها دائري وتسارعها الزاوي ثابت فان حركتها توصف بالدائرية المتغيرة بإنتظام.

$$\alpha(t) = \frac{dw}{dt} = \alpha(t_0) = \text{ثابت}$$

وسرعتها الزاوية هي: $w(t) = \frac{d\theta}{dt} = \alpha(t_0)t + w(t_0)$

وعمدتها: $\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha(t_0)t^2 + w(t_0)t + \theta(t_0)$

حيث: $t(\mathrm{t}_0)$ و $w(\mathrm{t}_0)$ و $0(\mathrm{t}_0)$ هي على الترتيب التسارع والسرعة الزاوية والعمدة عند بداية الحركة.

6- الحركة النسبية :

تعتمد دراسة حركة أي نقطة مادية على الإطار المرجعي الذي نختاره.على سبيل المثال، تخيّل أن شخصًا يرمي قذيفة من طائرة تتحرك أفقيًا بسرعة ثابتة. بالنسبة لشخص داخل الطائرة، ستبدو القذيفة وكأنها تسقط في خط مستقيم نحو الأسفل . أما بالنسبة لشخص يقف على الأرض، فإن مسار القذيفة سيأخذ شكلًا منحنيًا (قطع مكافئ) .

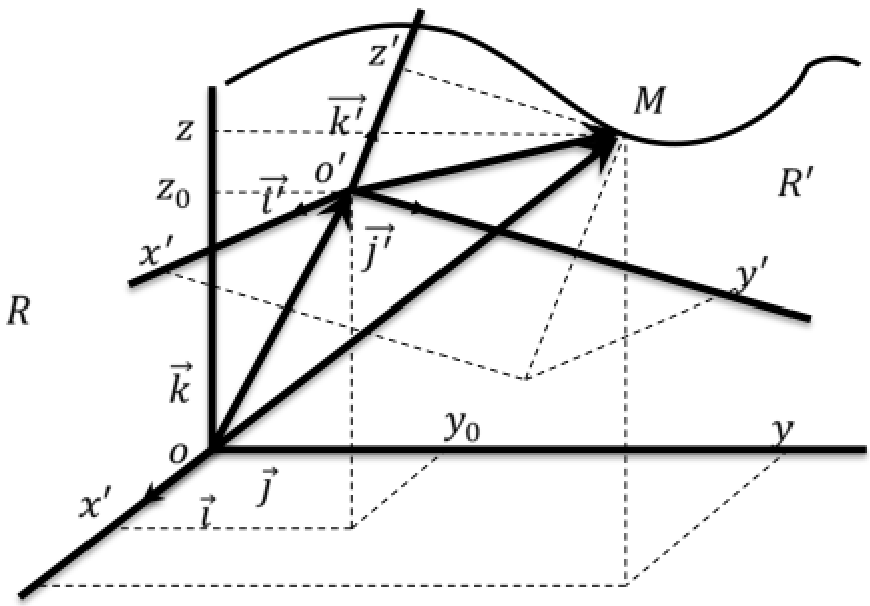
الحركة النسبية هي مفهوم فيزيائي أساسي يصف حركة جسم ما بالنسبة لمرجع آخر،ببساطة لا يمكن وصف حركة جسم بشكل مطلق، بل يجب دائمًا تحديد نقطة مرجعية أو نظام مرجعي يتم قياس الحركة بالنسبة له.

أمثلة:

- سيارتان متجاورتان: عندما تتحرك سيارتان متجاورتان بنفس السرعة وفي نفس الاتجاه على الطريق السريع، يبدو كل سائق للآخر وكأنهما ساكنان. أما إذا تحركت السيارتان في اتجاهين متعاكسين، فإن كل سائق يرى السيارة الأخرى وكأنها تتحرك بسرعة هائلة
- راكب في حافلة: شخص يجلس في مقعده داخل حافلة متحركة يعتبر في حالة سكون بالنسبة للحافلة ولبقية الركاب، لكنه في نفس الوقت يتحرك بسرعة الحافلة نفسها بالنسبة للمراقبين خارجها.

الحقيقة وراء اختلاف مشاهدات المراقبين تكمن في اختلاف أحوال حركتهم فجعلت مشاهداتهم مختلفة، لهذا نعرف عن ذلك بأن الحركة نسبية.

لتحديد موضع نقطة مادية M نعتبر مراقبين او معلمين أحدهما ساكن ويسمى المعلم المطلق و نرمز له بالرمز R والثاني متحرك بالنسبة له ويسمى المعلم النسبي ونرمز له بالرمز 'R ، كلاهما يشاهدان حركة Mكما هو موضح بالرسم :



حركة M هي حركة مطلقة في المعلم R وحركتها نسبية في المعلم 'R اما حركة 'R بالنسبة ل R فهي حركة مكتسبة.

- **شعاع الموضع :**

موضع M في المعلم المطلق $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

موضع M في المعلم النسبي $R'(O',\overrightarrow{\imath'},\overrightarrow{\jmath'},\overrightarrow{k'})$: $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'}$

موضع O' في المعلم المطلق $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: $\overrightarrow{OO'} = x_{O'}\vec{\imath} + y_{O'}\vec{\jmath} + z_{O'}\vec{k}$

بإستخدام علاقة شال وفق الشكل السابق يمكن كتابة شعاع موضع M في R بدلالة موضعها في 'R وموضع المبدأ O' كما يلي :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = x_{O'}\vec{\imath} + y_{O'}\vec{\jmath} + z_{O'}\vec{k} + x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'} \ldots\ldots\ldots *$$

وتعرف بالعلاقة بين موضعي النقطة المادية عند مراقبين (R) و (R') وموضع أحدهما بالنسبة للآخر .

1- العلاقة بين سرعتي النقطة المادية وسرعة مراقبيها :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\left(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}\right)}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{V}_M(t)|_R=\vec{V}_{O'}(t)|_R+\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

الجدير بالملاحظة أن مركبات الشعاع $\overrightarrow{O'M}$وأشعة محاور الأساس (R') تتعلق بالزمن لذلك يمكن كتابة :

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(x'\overrightarrow{\iota'}+y'\overrightarrow{\jmath'}+z'\overrightarrow{k'}\right)$$

$$=\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\iota'}+\frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'}+\frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}+\left(x'\frac{d\overrightarrow{\iota'}}{dt}+y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt}+z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$$

إن القوس الأول إنما هو مشتق $\overrightarrow{O'M}$ بالنسبة للمراقب المتحرك (R') وهو سرعة النقطة M التي يشاهدها المراقب (R')ورمزها $\vec{V}_M(t)|_{R'}$ ، أما القوس الثاني ففيه مشتقات أشعة الوحدة التي تكتب كالتالي :

$$\frac{d\overrightarrow{\iota'}}{dt}=\vec{w}\wedge\overrightarrow{\iota'},\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt}=\vec{w}\wedge\overrightarrow{\jmath'},\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}=\vec{w}\wedge\overrightarrow{k'}$$

$\vec{w}$ هي سرعة زاوية دوران الأساس (R') حول محور (Δ)يمر بمبدئه ويوازي $\vec{w}$ إذن يكون :

$$x'\frac{d\overrightarrow{\iota'}}{dt}+y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt}+z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}=x'\left(\vec{w}\wedge\overrightarrow{\iota'}\right)+y'\left(\vec{w}\wedge\overrightarrow{\jmath'}\right)+z'\left(\vec{w}\wedge\overrightarrow{k'}\right)$$

$$=\vec{w}\wedge\left(x'\overrightarrow{i'}+y'\overrightarrow{j'}+z'\overrightarrow{k'}\right)=\vec{w}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

ومنه :

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}=\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{R'}}+\vec{w}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{V}_M(t)|_R=\vec{V}_{O'}(t)|_R+\left.\overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\right|_{\mathrm{R'}}+\vec{w}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

حيث :

$\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{O'M}$: السرعة الخطية الناتجة عن دوران النقطة M حول محور الدوران (Δ).

$\overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R'}}$: سرعة النقطة M عند المراقب (R')وتلقب بالسرعة النسبية $\overrightarrow{\mathrm{V}_r}(t)$.

$\vec{V}_{O'}(t)|_R$: سرعة المراقب المتحرك (R') عند (R) يعني سرعة النقطة O' عند المراقب (R) وتسمى بسرعة الجر $\overrightarrow{\mathrm{V}_e}(t)$.

$\overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R}}$: سرعة النقطة M عند المراقب الساكن (R) وتلقب بالسرعة المطلقة $\overrightarrow{\mathrm{V}_a}(t)$.

$$\overrightarrow{\mathrm{V}_a}(t) = \overrightarrow{\mathrm{V}_e}(t) + \overrightarrow{\mathrm{V}_r}(t) + \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

-حالة خاصة :إذا كان المعلم المرتبط بالمراقب (R') لا يدور فإن $w = 0$ أي :

$$\overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R}} = \vec{V}_{O'}(t)|_R + \overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R'}}$$

الملاحظ هنا أن العلاقة بين مشتق شعاع كيفي $\vec{A}$ في المعلمين (R) و (R') تعطى كالآتي :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{R'}} + \overrightarrow{w} \wedge \vec{\mathrm{A}}$$

2- العلاقة بين تسارعي النقطة المادية وتسارع المراقبين :

تعطى تسارعات نقطة مادية M التي يشاهدها مراقبين احدهما ساكن (R) و الآخر متحرك (R') كالآتي :

$$\overrightarrow{\mathrm{a_M}}(t)|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R}}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{R}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{O'}(t)|_R + \overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R'}} + +\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\Big|_R$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}_{O'}(t)|_R}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R'}}}{dt}\right|_R + \frac{d\overrightarrow{w}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{w} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R$$

$$= \vec{a}_{O'}(t)|_R + \frac{d\overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R'}}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{w}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R'}} +$$

$$\vec{w} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}\big|_{\mathrm{R'}}}{dt} + \vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$+\overrightarrow{\mathrm{a_M}}(t)|_{\mathrm{R}} = \vec{a}_{O'}(t)|_R + \vec{a}_M(t)|_{R'} + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + 2\vec{w} \wedge \overrightarrow{\mathrm{V_M}}(t)\big|_{\mathrm{R'}}$$

$$\vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

وتسمى العلاقة بين التسارعات كما يراها (R) و (R').

كما يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$\overrightarrow{\mathrm{a_a}}(t) = \vec{a}_{O'}(t)|_R + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \overrightarrow{\mathrm{a_r}}(t) + 2\vec{w} \wedge \overrightarrow{\mathrm{V_r}}(t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{a_a}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{a_e}}(t) + \overrightarrow{\mathrm{a_r}}(t) + \overrightarrow{\mathrm{a_c}}(t)$$

حيث :

$\overrightarrow{\mathrm{a_a}}(t)$ **:** تسارع النقطة M عند (R) ويسمى التسارع المطلق.

$\overrightarrow{\mathrm{a}_r}(t)$ **:**تسارع النقطةM عند (R')ويسمى التسارع النسبي .

$\overrightarrow{\mathrm{a}_e}(t)$ **:**تسارع الجر.

$$\overrightarrow{\mathrm{a}_e}(t) = \vec{a}_{O'}(t)|_R + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{a}_c}(t)$ **:**تسارع كوريوليس

$$\overrightarrow{\mathrm{a}_c}(t) = 2\vec{w} \wedge \overrightarrow{\mathrm{V_r}}(t)$$

العلاقة بين سرعات وتسارع نقطة مادية متحركة عندما يشاهدها مراقبين من معلمين مختلفين احدهما ساكن(R)والأخر متحرك (R').

تعتبر هذه التصنيفات بعض من أنواع الحركات الموجودة فهي تساعد على فهم طبيعة حركة الأجسام بناءً على تسارعها وسلوكها خلال الزمن.

الفصل الثالث:تحريك نقطة مادية

تمهيد:

رأينا فيما تقدم حركة نقطة مادية من خلال تعريف سرعتها وتسارعها، بالإضافة دراستهابإحداثيات مختلفة،ثم كيفية نسبتها إلى معالم مختلفة والعلاقة بينها في مختلف هذه المعالم ، لكننا لم نهتم أبداً بأسباب تلك الحركة. فما الذي يجعل النقطة المادية تتحرك؟ وكيف نستنتج القوانين التي تصف هذه الحركة؟ سنجيب على هذه الأسئلة في هذا الفصل.

1- مفاهيم أساسية :

أ- مبدأ العطالة:

يعد مبدأ العطالة أول أسس دراسة تحريك جسم او مجموعة اجسام و نص المبدأ كالتالي: إذا كان جسم مادي غير خاضع لأية قوة خارجية فإنه سيحافظ على حالته الحركية ؛ أي أنه سيبقى إما في حالة سكون، أو في حالة حركة مستقيمة منتظمة (بسرعة ثابتة)

نظرًا لأن مفهوم الحركة هو مفهوم نسبي، يصبح من الضروري تحديد إطار مرجعي (معلم) تُنسب إليه الحركة. ولذلك يجب أن تُوصف الحركة الحرة للجسم (التي لا تتأثر بقوى) بالنسبة إلى معلم خاص يسمى

المعلم العطالي (معلم غاليلي).

ب- تعريف المعلم العطالي : هو الإطار المرجعي الذي يكون فيه الجسم الحر في حالة سكون أو يتحرك بسرعة ثابتة (حركة مستقيمة منتظمة). يُسمى هذا المعلم أحيانًا بـ "الحر" لأنه لا يتسارع أو يدور بالنسبة لمعلم مثالي في حالة سكون..

ج-كمية الحركة: هي مقدارا فيزيائيا له أهمية كبرى لأنه يربط بين عنصرين أساسيين للحركة وهما: الكتلة mوالسرعة $\vec{V}$ حيث يعرف بالعلاقة التالية:$\vec{P} = m\vec{V}$

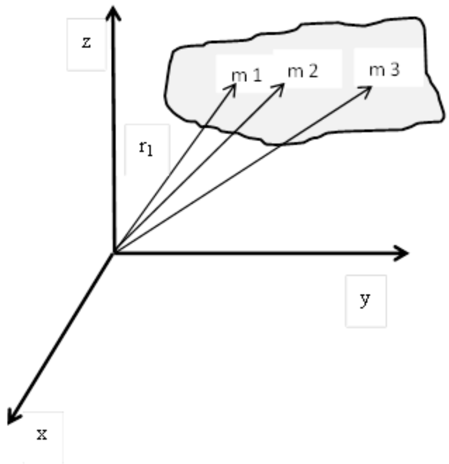
$\vec{P}$: كمية الحركة وهو مقدار شعاعي له نفس اتجاه $\vec{V}$ اي اتجاه الحركة ووحدته هي:$\mathrm{Kg}\,\frac{m}{s}$

ويسمى ايضا بالدفع الخطي.

د- عزل جسم: يقال ان جسما معزولا إذا لم يتبادل اي كمية فيزيائية مع غيره اي ان الكميات الفيزيائية لا تتبدل في الزمان مادام الجسم معزولا.

ه- عزل جملة أجسام: يقال ان جملة أجسام معزولة إذا لم تتبادل اي كمية فيزيائية مع جمل غيرها في الزمن.

لنعتبر جملة اجسام كتلها$m_1, m_2, m_3, \dots\dots\dots, m_\alpha, \dots\dots\dots, m_n$ ومواضعها وسرعاتها بالنسبة لمعلم عطالي على الترتيب هي : $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots\dots\dots, \vec{r}_\alpha, \dots\dots\dots, \vec{r}_n)$و$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots\dots\dots, \vec{V}_\alpha, \dots\dots\dots \vec{V}_n)$



حسب نص مبدأ العطالة فإن الدفع الخطي لجملة أجسام معزولة ثابت أي :

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_1(t) + \vec{P}_2(t) + \vec{P}_3(t) + \cdots \dots \dots + \vec{P}_\alpha(t) + \cdots \dots \dots + \vec{P}_n(t) = \underset{\text{ثابت}}{\overleftarrow{u}}$$

ويمكن عندئذ صياغة مبدأ العطالة كالاتي:" الدفع الخطي الكلي لجملة اجسام معزولة محفوظة".

مبدأ العطالة لجملة مكونة من جسم: إذا كان لدينا جسما معزولا كتلتهm وموضعه وسرعته بالنسبة لمعلم عطالي$\vec{r}(t)$

و$\vec{V}$فحسب مبدا العطالة فان دفعة الخطي ثابت

$$\vec{P}(t) = m\vec{V}(t) = cte$$

$$\vec{V}(t) = (cte) \div m$$

وهذا يعني انه إذا كان الجسم معزولا ساكنا فانه يظل ساكنا وان كان متحركا بسرعة فانه يظل متحركا بها.

2- قوانين نيوتن للحركة:

تُمثِّل قوانين نيوتن للحركة الأساس الذي تقوم عليه دراسة الميكانيك الكلاسيكي،وضعت لوصف العلاقة بين القوى المؤثرة على جسم وحركته.تتكون هذه القوانين من ثلاثة مبادئ أساسية:

1- **قانون نيوتن الأول**: ينص هذا القانون على '' يبقي كل جسم على حالته من حيث السكون أو الحركة بسرعة منتظمة ما لم تؤثر عليه قوه خارجية تغير من حالته السكونية أو الحركية''.

عندئذ حسب مبدأ العطالة فإن الدفع الخطي الكلي لجملة أجسام معزولة محفوظ أي :

$$\sum_i \vec{P}_i = \sum_i m\vec{v}_i = Cte$$

2- قانون نيوتن الثاني(المبدأ الأساسي للتحريك):

ينص هذا القانون على "إذا أثرت قوة (أو محصلة قوى) في جسم، بحيث تعطيه حركة انتقالية، فإن مقدار التسارع الذي يكتسبه الجسم يتناسب طردياً مع القوة المؤثرة ويكون في اتجاهها وثابت التناسب هو كتلة الجسم"و صيغته الرياضية كالتالي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\overrightarrow{a}$$

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \mathrm{m}\vec{a}$$

هذه العلاقة معروفة باسم القانون الاساسي للتحريك وهي تعبر عن معدلتغير الدفع الخطي في الزمان للجسم من (α) اجسام معزولة متعلقة بالقوى التي يتلقاها من غيره وهيإيضا علاقة تحريكية لأنها علاقة تربط بين حركية جسم والتأثير الذي يتلقاه والزمن الذي يحدث فيه التأثير.

3- قانون نيوتن الثالث (مبدأ الفعل ورد الفعل):

ينص القانون على "لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار ومعاكس له في الاتجاه"، وتؤثر هاتان القوتان على جسمين مختلفين أي : $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$

3-القوى :

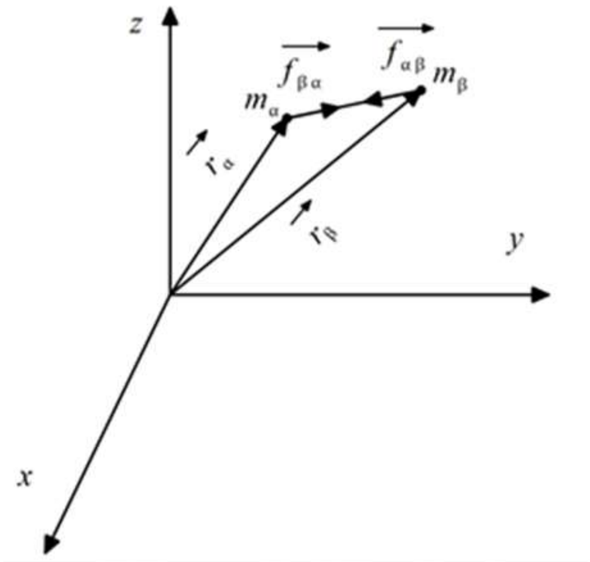
القوة هي مقدار شعاعي إذا أثر في جملة تحركت هذه الأخيرة أو تشوهت وهي نوعان :

أ- **قوى بعدية (قوى أساسية):** لقد استطاع الإنسانأن يصنف ويميز القوى الفاعلة في الطبيعة إلىأربع قوى ناتجة عن تأثير الجمل فيما بينها ومنها :

1- **القوة الكتلية:** القوة الكتليةأو قوة التجاذب الكتلي منشأها الكتل فهي قوة تولدها كتلة وتؤثر بها على كتلة اخرى.

فقد عينت تجريبيا في القرن السادس عشر وصيغها الشعاعية هي:$\approx 10^{-10}$

$$\overrightarrow{f_{\alpha\beta}} = Gm_\alpha m_\beta \frac{\overrightarrow{r_\beta} - \overrightarrow{r_\alpha}}{\left|\overrightarrow{r_\beta} - \overrightarrow{r_\alpha}\right|^3}$$



حيث: $G = 6.67 \times 10^{-11} SI$

2- القوة الكهربائية:القوة الكهربائية منشأها الشحنات الكهربائية وقد عينت تجريبيا في القرن السادس عشر وصيغها الشعاعية هي:

$$\overrightarrow{f_{\alpha\beta}} = Kq_1 q_2 \frac{\overrightarrow{r_\beta} - \overrightarrow{r_\alpha}}{\left|\overrightarrow{r_\beta} - \overrightarrow{r_\alpha}\right|^3}$$

3- القوة النووية:القوة النووية هي قوة تجاب وتتنافر منشؤها الاجسام النووية المسمات الكواركات وتتعلق بالبعد بينهما اما صيغتها فلم تحدد تجريبيا الى يومنا هذا ولكن تقدر تقديرا.

4-القوة المغناطيسية: منشاؤها حركة الشحنات الكهربائية وقد بنيت التجربة انه إذا تحركت الشحنة q بالسرعة $\vec{V}$ ي الحقل المغناطيسي ف $\vec{B}$ تلقى منه قوة تسمى قوة لورنتر صيغتها هي:

$$\vec{f} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

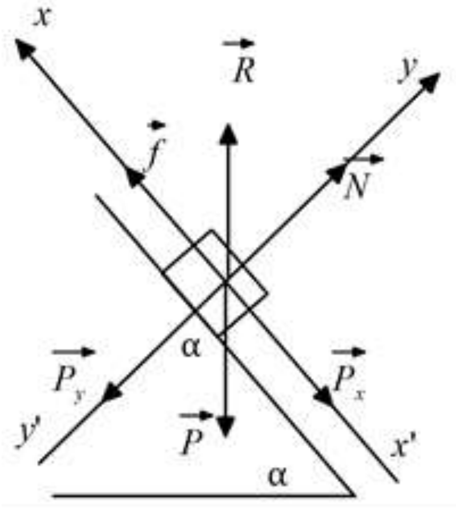
ان هذه القوى هي القوى الفاعلة في الطبيعة،والحقيقية أن الأنسان لا يعرف غيرها وسائر القوى الأخرى هي تركيبة من القوى الحقيقية.

ب- القوى المقدرة (قوى تلامسية): وهي قوى ناتجة عن تلامس جملتين لبعضهما ، حيث المسافة بينهما صغيرة جدأ مثل : قوى التماسك ، الروابط الكيميائية وقوى الاحتكاك......

ان القوى المقدرة ليست حقيقية ولكنها مركبة من القوى الأساسية بطريقة معقدة، ولهذا لانعرف صيغتها إلا بصورة تقديرية نعتمد فيها على التجربة والتقديرات النظرية ،كمثال علي القوى التلامسيةسنقوم بدراسة قوى الاحتكاك بين سطحين و علاقتهما بطبيعة سطوح التلامس:

أ-الاحتكاك: لدراسة الاحتكاك المسؤول عن الروابط بين الاجسام المتلامسة، نحقق التركيب التجريبي التالي:

نضع صندوق من الحديد على لوحة خشبية ثم نزيد من الزاويةαالتي يضعها مستوي اللوحة مع الافق فنلاحظ ان الصندوق يبقى ساكنا مادام القيم التي تأخذها الزاوية $\alpha_\circ$أصغر من قيمة حديةαالموافقة لبداية الحركة (الانزلاق) اي أن:



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$$

(xx')

$$f_s - P\sin\,\alpha = 0 \Rightarrow f_s = P\sin\,\alpha$$

(yy')

$$N - P\cos\,\alpha = 0 \Rightarrow N = P\cos\,\alpha$$

يمكن الان تعريف معامل الاحتكاك السكوني بأنه النسبية بين المركبتين f_sوN وهو يمثل المقدار الذي يميز الاحتكاك بين السطحين (طبيعة السطحين) مع العلم انه لا يتعلق إلا بطبيعة السطحين.

$$\mu_s = \frac{f_s}{N} = \frac{P\sin\,\alpha}{P\cos\,\alpha} \Rightarrow \mu_s = \tan\,\alpha$$

حيث: μ_s :معامل الاحتكاك السكوني.

نتابع الزيادة في ميلان اللوح حتى نصل الى زاوية α تزيد بكمية صغيرة عن $\alpha_\circ$فنلاحظ ان الصندوق بدأ في الحركة

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}$$

(xx')

$$f_c - P\sin\ \alpha = -ma \Rightarrow f_c = P\sin\ \alpha - ma$$

$(\ yy'\ )$

$$N - P\cos\ \alpha = 0 \Rightarrow N = P\cos\ \alpha$$

$$\mu_c = \frac{f_c}{N} = \frac{P\sin\ \alpha - ma}{P\cos\ \alpha} \Rightarrow \mu_c = \tan\ \alpha - \frac{a}{g\cos\ \alpha}$$

بينت التجارب أن: μ_cاقل منμ_s

مستقل عن السرعة بصورة محسوسة فهو ثابت خلال الحركة.

ب- مقاومة الموائع: ان التجارب بنيت ان هناك قوى تطبقها الموائع ومن بينها الهواء على الاجسام المتحركة بداخلها وذلك من اجل السرعة المختلفة حيث ان:$\vec{f} = -K\eta\vec{v}$

K: ثابت يتعلق بهندسة الجسم.

η: معامل اللزوجة ويتعلق بالوسط.

$\vec{v}$: تمثل سرعة الجسم.

ج- القوى المرنة: نعتبر انه لدينا نابض ثابت مرونتهk مثبت من أحد طرفيه وهو في حالة راحة نقوم بعملية سحب لهذا النابض من طرفه الاخر اذن حسب قانون نيوتن الثالث (لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار ومعاكس له في الاتجاه) سيكون النابض رد فعل والمتمثل هنا في قوة الارجاع $\vec{F}$ التي تناسب طرديا مع الاستطالة وبعكس الاتجاه:

$$\vec{F} = -\kappa\overrightarrow{OM}$$

4- العزم الحركي :

أ- **عزم القوة :** هي كمية فيزيائية تعبر عن مقدرة القوة على إحداث حركة دورانية للجسم حول محور الدوران .

مثال :القوة المبذولة لفتح الباب.......

إذا أردت جعل الجسم يدور فأنت تستخدم عزم القوة لانه مسبب للدوران.

-عزم القوة (بالنسبة لنقطة O):

عزم القوة $\vec{F}$ المطبقة على M بالنسبة الى النقطة O يكون معرف كالتالي :

$$\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$$

$$\|\vec{\tau}_O(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\vec{F}\| \, sin\alpha = d\|\vec{F}\|$$

$\vec{\tau}_O(\vec{F})$يمثل عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للنقطة O

ب- العزم الحركي :

العزم الحركي وسيلة فعّالة تدعم المبدأ الأساسي للتحريك وتمكّن من اشتقاق معادلة الحركة، خصوصًا لحركة نقطة مادية حول محورما.

العزم الحركي لنقطة مادية كتلتها m وكمية حركتها $\vec{P}$ بالنسبة لنقطة O هو

$$\overrightarrow{L_{M/O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \times \vec{P}$$

ج- نظرية العزم الحركي :

في نقطة ثابتة O المشتقة بالنسبة للزمن للعزم الحركي لنقطة مادية يساوي عزم القوة المطبقة عليه في هذه النقطة أي :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{OM} \times \vec{P})}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \times \vec{P} + \overrightarrow{OM} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \overrightarrow{OM} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \vec{\tau}_O(\vec{F})$$

الفصل الرابع : العمل والطاقة

تمهيد:

يهدف هذا الفصل إلى استكشاف العلاقات الأساسية بين الأشغال المبذولة بواسطة القوى الخارجية على جسم أو جملة ميكانيكية والطاقة المخزنة فيهما. تكمن أهمية هذه الدراسة في كون الطاقة مفهومًا محوريًا يتخلل جميع الظواهر الفيزيائية، كما أنها توفر أدوات تحليلية مبسطة لفهم حركة الأجسام والتحكم فيها بطرق بسيطةوالتنبؤ بسلوكها الديناميكي.

1- عمل القوة :

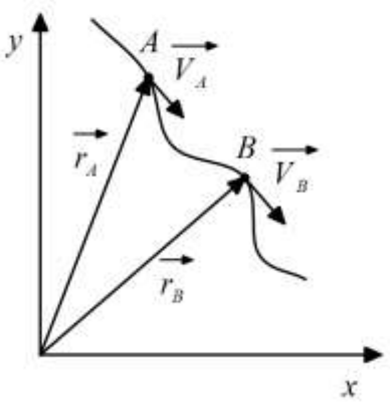
لنفترض نقطة مادية M تتحرك على مسار ما (C) ، وذلك تحت تأثير قوة متغيرة $\vec{F}$ وبإنتقال عنصري $d\vec{r}$ من نقطة ماA إلى نقطة أخرى Bفإن عمل القوة التي يتلقاها الجسم تكون كالتالي :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B |\vec{F}|.|d\vec{r}|\cos\theta$$

- عندما تكون القوة $\vec{F}$ عمودية على مسار الحركة في كل لحظة ، فإن $\vec{F}.d\vec{r} = 0$وعندئذ عمل القوة يساوي صفر.
- عندما يكون $W_{A\to B} > 0$ فإننا نقول عنه إنه عمل محرك ، في هذه الحالة القوة تسعى الى زيادة سرعة الجسم المتحرك .
- عندما يكون $W_{A\to B} < 0$ فإننا نقول عنه إنه عمل مقاوم ، في هذه الحالة القوة تعيق الحركة وتسعى الى خفض سرعة الجسم المتحرك .

1- نظرية الطاقة الحركية :

يمكن ايجاد العلاقة بين الطاقة الحركية لجسم وعمل القوى الخارجية التي يتلقاها من غيره بالاعتماد على التعريف الأساسي لعمل القوة، وذلك على النحو التالي:



$$dw = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt}\cdot\overrightarrow{dr}, \overrightarrow{dV} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \Rightarrow \overrightarrow{dr} = \vec{V}\cdot dt$$

$$dw = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{V}\cdot dt = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\frac{mV}{m}\cdot dt = \frac{1}{m}\vec{p}d\vec{p}$$

$$w_{A\to B} = \int_A^B \frac{1}{m}\vec{p}d\vec{p} = \frac{1}{2m}[\vec{p}^2]_A^B$$

$$w_{A\to B} = \frac{1}{2m}(\vec{p}_B^2 - \vec{p}_A^2) = \frac{1}{2}m\vec{V}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{V}_A^2 = E_{cB} - E_{cA}$$

$$w_{A\to B} = E_{cB} - E_{cA} = \Delta E_c$$

$$w_{A\to B} = \Delta E_c$$

حيث: E_c هي الطاقة الحركية للجسم: $E_c = \frac{1}{2}mV^2$ $w_{A\to B} = \Delta E_c$

تمثل هذه العلاقة بقانون نظرية الطاقة الحركية ونصها "تغير الطاقة الحركية لجسم أثناء انتقاله من نقطة A إلى نقطة B من مساره يساوي عمل محصلة القوى التي يتلقاها من غيره خلال ذلك".

2- الطاقة الكامنة لجسم:

نعرض في هذه الفقرة الطاقة الكامنة التي تتعلق بصنف محدد من القوى ألا وهي القوى المشتقة من كمون (القوى المحافظة): $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$

تعريف1: نقول عن قوة انها محافظة او قوة مشتقة من كمون اذا كان عملها مستقلا عن المسلك المتبع مهما كان الانتقالالمحتمل بين نقطة الانطلاق ونقطة الوصول، اذا كان المسار (C) مغلقا فان:

$$\forall c: w = \oint_{c'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow w = 0$$

تعريف2: ان القوى المحافظة يمكن التحقق منها بالعلاقة: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

أمثلة :

القوى المحافظة : مثل قوة الثقل ، قوة إرجاع النابض ، قوة الجاذبية ......

القوى الغير محافظة : مثل قوى الاحتكاك ، قوى الشد ......وهي القوى التي تقاوم حركة الجسم وتؤدي إلى تبديد طاقته على شكل حرارة.

اذا تلقى جسم قوة محافظة $\vec{F}$ فإنها تبذل عملا لتحريكه مقدار $d\vec{r}$.

$$dw = \overrightarrow{dr} \cdot \vec{F} = -d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}E_p = -dE_p$$

وتغير طاقة كمونه عندما ينتقل من نقطة A الى النقطة B هي:

$$w_{A\to B} = \int_A^B dr \cdot \vec{F} = -\int_A^B dE_p = -\left(\left(E_p\right)_B - \left(E_p\right)_A\right) = \left(E_p\right)_A - \left(E_p\right)_B$$

أي أن عمل القوى المحافظة يساوي تناقص الطاقة الكامنة

ونحصل على طاقة كمون الجسم لما يصير في نقطة A: $E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2$

ونص القانون: "الطاقة الكامنة عند النقطة A تساوي تجول القوة المحافظة من تلك النقطة إلى نقطة B زائد طاقة كمونه عند B.

تسمى E_{pe} بمرجع طاقات الكمون، وهي اختيارية وعلى العموم تختار هذه الطاقة معدومة عند اللانهاية.

2- أشكال الطاقات الكامنة:

لا تقتصرعلى نوع واحد، بل تتنوع وتوجد عدة أشكال منها مع بقاء المفهوم العام ثابتًا، وهذه الأشكال هي:

أ- **الطاقة الكامنة الثقالية:** عندما نقوم برفع جسم ما من سطح الأرض إلى ارتفاع معين فإنه يستدعي منا أن نبذل عملا ضد الجاذبية الأرضية، والجسم يبدأ في تخزين العمل المبذول على هيئة طاقة كامنة.

هذا الشكل من أشكال الطاقة مرتبط بحقل الجاذبية الأرضية وتدعى هذه الطاقة بالطاقة الكامنة الثقالية.

كما تتعلق هذه الطاقة بالارتفاع عن سطح الأرض والجسم يكتسب هذه الطاقة عندما يزداد ارتفاعه عن سطح الأرض وعندما نترك الجسم يسقط لحاله فإن الطاقة الكامنة المخزنة فيه تتحول بشكل تدريجي إلى طاقة حركية وينتج عن ذلك زيادة سرعة الجسم مع انخفاض الارتفاع.

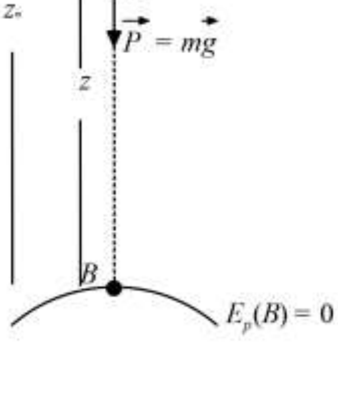
عبارة الطاقة الكامنة الثقالية لجسم صلب كتلته m هي: $E_{pe} = mg\ z$

ويختار مرجع الطاقة الكامنة الثقالية في الحالة العامة على مستوى سطح الأرض إي عند الارتفاع $z = 0$

ب- **الطاقة الكامنة المرونية :**

ليكن لدينا نابض في وضع الراحة، حيث تم تثبيت أحد طرفيه بينما الطرف الآخر حر للتحرك. نفترض أن كتلة النابض مهملة وأنه يمكنه التحرك أفقيًا على سطح أملس خالٍ من الاحتكاك. عندما يصطدم جسم صلب كتلته m وسرعته $\vec{V}$ بمحور النابض عند نهايته الحرة، تبدأ سرعة الجسم في الانخفاض نتيجة لتكثف حلقات النابض بفعل مرونته. أثناء ذلك، يتم تخزين طاقة في النابض على شكل طاقة كامنة مرونية، والتي تنعكس لاحقًا بدفع النابض للجسم الصلب. هذه الطاقة تسمى الطاقة الكامنة المرونية للنابض، ويُعبر عنها بالصيغة: $E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2$

مثال: يبين الشكل جسما كتلته m يسقط سقوطا حرا على سطح الأرض وابتداء الحركة من السكون وعلى العلو z_0



- عين طاقة كمونه عندما يكون على علو z فوق سطح الأرض
- عين طاقة حركته بدلالة z و z_0.
- عين مجموع الطاقتين ماذا تستنتج.

الحل

$\vec{P}$القوة التي تتلقاها الكتلة m من الأرض هي ثقلها$\vec{F} = -mg\mathbf{\vec{k}}$

هي قوة محافظة لأنها تحقق العلاقة التالية:$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

طاقة كمون الجسم عندما يكون في النقطة A:

$$E_{p_A} = \int \overrightarrow{dr} \cdot \vec{F} + E_{p_B} = E_p(z)$$
$$= -\int_z^0 \overrightarrow{dz} \cdot \mathrm{mg}\vec{k} + 0 = +\mathrm{mg}z$$
$$E_{p_A} = E_p(z) = \mathrm{mg}z$$

واعتمادا على القانون الأساسي للتحريك فإن سرعة الجسم هي:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$$

$$z - z_0 = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0)$$

فطاقة حركة الجسم الساقط بدلالة z و z_0

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m2g(z_0 - z) = \mathrm{mg}(z_0 - z)$$
$$E_p = \mathrm{mg}z$$
$$E_c + E_p = \mathrm{mg}z + \mathrm{mg}(z_0 - z) = \mathrm{mg}_0$$

نستنتج ان الطاقة الكلية ثابتة لا تتعلق بموضع الجسم z بالنسبة $|\vec{r} - \vec{r'}|$ لسطح الارض.

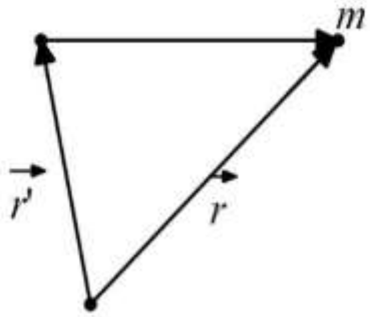
مثال: إذا كانت طاقة كمون الكتلة m عندما تكون على بعد من الكتلة M هي:

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{GmM}{|r - \overrightarrow{r'}|}$$

حيث: G ثابت، عين القوة المحافظة التي تتلقاها الكتلة m منالكتلة M؟

الحل:

لدينا$M\vec{r}-\overrightarrow{r'}$



$$\vec{F}=-\vec{\nabla}E_p(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}E_p=\vec{\nabla}(-\overrightarrow{GmM})=-GmM\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\right)=-\frac{1}{\left(\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|\right)^2}\overrightarrow{e_r}=-\frac{\vec{r}-\overrightarrow{r'}}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|^3}$$

3- **الطاقة الميكانيكية الكلية:** ان القوى التي يتلقاها جسم من غيره هي على العموم صنفان قوة تشتق من طاقة كمون $\vec{F}$ وقوة مبددة (إحتكاك) $\overrightarrow{f'}$ حيث: $\vec{F}$ قوة محافظة يكون لدينا:

$$\vec{f}=\vec{F}+\overrightarrow{f'}$$

وإذا عوضنا القوة $\vec{f}$ في قانون نظرية طاقة الحركة نجد:

$$\Delta E_c=\int\vec{f}\cdot d\vec{r}=\int\left(\vec{F}+\overrightarrow{f'}\right)\cdot d\vec{r}=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int\overrightarrow{f'}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int\left(-\vec{\nabla}E_p\right)\cdot\overrightarrow{dr}+\int\overrightarrow{f'}\cdot\overrightarrow{dr}$$

$$\Delta E_c+\int\vec{\nabla}E_p\cdot\overrightarrow{dr}=\int\overrightarrow{f'}\cdot d\vec{r}$$

$$E_{cB}-E_{cA}+E_{pB}-E_{pA}=\int\overrightarrow{f'}\cdot\overrightarrow{dr}$$

$$\left(E_{cB}+E_{pB}\right)-\left(E_{cA}+E_{pA}\right)=\int\overrightarrow{f'}\cdot d\vec{r}$$

$$E_B-E_A=\int\overrightarrow{f'}\cdot\overrightarrow{dr}\quad\ldots\ldots\ldots.(\Delta)$$

الكمية$E_B=E_{c_B}+E_{p_B}$هي مجموع طاقة حركية وطاقة كامنة للجسم عند ما يكون في النقطة B من مساره ،فنسميها الطاقة الكلية للجسم او طاقته الميكانيكية عند النقطة B من مساره.

ومن ثم فإن تغير الطاقة الميكانيكية لنقطة مادية، بين نقطتين، يساوي مجموع أعمال القوى الغير محافظة فقط (نظرية الطاقة الميكانيكية الكلية).

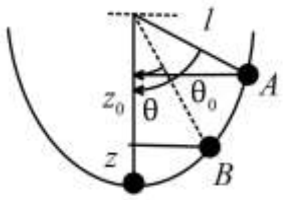
وعندما يكون عمل القوى الغير محاقظة معدوما $W(\vec{f'}) = 0$ (القوى الغير محافظةغير موجودة أو عمودية على مسار المتحرك مثلا) ، نحصل على $\Delta E_m = 0$ أي $E_m = Cte$ أي ان الطاقة الميكانيكة محفوظة عندما يكون عمل القوى الغير محفوظة يساوي صفرا.

مثال:إذاأهمل احتكاك النواس البسيط مع الهواء.

فاثبت ان طاقته الكلية محفوظة؟

-استنتج سرعة الجسم بدلالة الزاوية؟

الحل



$$E_A = E_{c_A} + E_{p_A} = \mathrm{mgz_0}$$
$$E_B = E_{c_B} + E_{p_B} = \frac{1}{2}mv^2 + \mathrm{mgz}$$
$$E_A = E_B \Rightarrow \mathrm{mgz_0} = \frac{1}{2}mv^2 + \mathrm{mg}z$$

-القوة المؤثرة على جسم النواس هي توتر الخيط $\vec{T}$ وثقله$\vec{P}$

إن عمل توتر الخيط معدوم لتعامده على مسار الجسم في كل لحظة لذلك عمل قوى الاحتكاك معدومة.

$$E_B - E_A = \int \vec{f'} \cdot \vec{dr} = 0$$
$$E_B = E_A$$
$$\mathrm{mg_0} = \frac{1}{2}mv^2 + \mathrm{mg}z$$
$$\cos\ \theta = \frac{l-z}{l} \Rightarrow l - z = l\cos\ \theta$$
$$z = l(1-\cos\ \theta)$$
$$z_0 = l(1-\cos\ \theta_0)$$
$$v = \sqrt{2g(z_0 - z)} = \sqrt{2g(\cos\ \theta - \cos\ \theta_0)}$$

4- العمل والطاقة الكلية لجملة اجسام:

لنعتبر اجسام كتلتها$(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \dots, \vec{m}_\alpha \dots\dots\dots\dots, \vec{m}_\beta, \dots)$ ومواضعها وسرعتها بالنسبة لمعلم عطالي هي على الترتيب:$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_\alpha \dots\dots \vec{r}_\beta, \dots)$و

$$(\ldots\ldots,\vec{v}_\beta,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\vec{v}_\alpha,\ldots\ldots,\vec{v}_3,\vec{v}_2,\vec{v}_1)$$

الطاقة الحركية لجسم من هذه الجملة يكتب:

$$(E_{c\alpha})_B-(E_{c\alpha})_B=\int_A^B dr_\alpha\cdot\vec{f}_\alpha$$

تعبر العلاقة عن تغير طاقة حركة الجسمα من جملة الاجسام عندما تتنقل من الحالة A الى الحالة B الجدير بالملاحظة ان القوى التي يتلقها الجسم α من غيره نوعان:

1- قوى داخلية ناجمة عن تأثير عناصر الجملة عليه

2- قوى خارجية ناجمة عن تأثير غير عناصر الجملة عليه كتأثير الارض والحقول الكهربائية والمغناطيسية..........

لذلك نفصل القوة التي يتلقاها الجسم α الى قوى داخلية $\overrightarrow{f_\alpha^i}$ وقوى خارجية $\overrightarrow{f_\alpha^e}$:

$$\overrightarrow{f_\alpha}=\overrightarrow{f_\alpha}+\overrightarrow{f_\alpha}e$$

تتميز القوى الداخلية لجملة اجسام بكونها قوى أساسية وهي تشتق من طاقات الكمون اي

$$\overrightarrow{f_\alpha^{\mathrm{i}}}=-\overrightarrow{\nabla_\alpha}E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{i}}(\overrightarrow{r_\alpha})$$

$$E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{i}}(\overrightarrow{r_\alpha})=\sum_{(\beta\neq\alpha)=1}^{n}E_p(\overrightarrow{r_{\alpha\beta}})$$

حيث: $\overrightarrow{r_{\alpha\beta}}=\overrightarrow{r_\alpha}-\overrightarrow{r_\beta}$ و $E_p(\overrightarrow{r_\alpha})$الجسم α في حقل الجسم β (يصح ان يقال عنها طاقة كمون الجسمين αو β).

تغير طاقة حركة جملة الأجسام

$$\sum_\alpha(\mathrm{E}_{c\alpha})_\mathrm{B}-\sum_\alpha(\mathrm{E}_{c\alpha})_\mathrm{A}=\sum_{\alpha=1}^{\beta}\int_\mathrm{A}^\mathrm{B}\overrightarrow{\mathrm{dr}}_\alpha\cdot\overrightarrow{f_\alpha}=\mathrm{w}^\mathrm{i}+\mathrm{w}^\mathrm{e}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\int_A^B\left(-\vec{\nabla}_\alpha E_p(\overrightarrow{r_\alpha})\right)+\overrightarrow{f_\alpha^{\mathrm{e}}})\overrightarrow{dr_\alpha}$$

$$= -\sum_\alpha \int_A^B dE_p(\vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha \int_A^B \overrightarrow{f_\alpha^e} \cdot \overrightarrow{dr_\alpha}$$

$$\sum_\alpha \left(E_{c\alpha} + E_p(\overrightarrow{r_\alpha})\right)_B - \sum_\alpha \left(E_{c\alpha} - E_p(\overrightarrow{r_\alpha})\right)_A = \sum_\alpha \int_A^B \overrightarrow{f_\alpha^e} \cdot \overrightarrow{dr_\alpha}$$

$$\sum_\alpha \left(E_{c\alpha} + E_p(\vec{r}_\alpha)\right)_B - \sum_\alpha \left(E_{c\alpha} - E_p(\vec{r}_\alpha)\right)_A = w^e$$

$$E_B^i - E_A^i = w^e \qquad (\Delta)$$

حيثE_Aو E_B هما على التوالي الطاقة الكلية الداخلية لجملة الأجسام في الحالتين Aو B حيث:

$$E = \sum_\alpha E_{c\alpha} + \sum_\alpha E_p(\overrightarrow{r_\alpha})$$

تعبر العلاقة (Δ) عن قانون الطاقة الكلية الداخلية لجملة أجسام وتنص على أن " تغير الطاقة الكلية الداخلية لجملة أجسام يساوي أعمال القوى الخارجية ".