



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Quelques inégalités usuelles appliquées en
théorie des opérateurs et applications**

Présenté par: Guemoula Asma
Lebbihi Bechira

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Beloul Said	MCA	Président	Univ. El Oued
Mansour Abdelouahab	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
Guesba Messaoud	MCB	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Remerciements

*Nous remercions **Allah** qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.*

*Nous tenons à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation de mathématique, en particulier, notre encadreur pédagogique "**Mr Mansour Abdelouahab**".*

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

*nous remercions également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2017/2018 à l'université de **Chahid Hama Lakhdar El-Oued**.*

Enfin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

Notations générales

H	Espace de Hilbert.
$\langle ., . \rangle$	Le produit scalaire .
$\ T\ $	la norme de l'opérateur T .
$N(T)$	Le noyau de l'opérateur T .
$R(T)$	L'image de l'opérateur T .
$W(T)$	L'image numérique de T .
$r(T)$	Rayon spectral de T .
$w(T)$	Rayon numérique de T .
T^*	L'opérateur adjoint d'un opérateur T .
$T^{\frac{1}{2}}$	La racine carrée d'un opérateur positif T .
$ T $	Le module d'un opérateur T .
T^{-1}	L'inverse d'un opérateur T .
$\sigma(T)$	Le spectre de T .
$\rho(T)$	La resolvante de T .
$P_\sigma(T)$	Le spectre ponctuel de T .
$C_\sigma(T)$	Le spectre continu de T .
$R_\sigma(T)$	Le spectre résiduel de T .
$A_\sigma(T)$	Le spectre approximatif de T .

Table des matières

Introduction générale	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espace de Hilbert	3
1.2 Opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert	6
1.2.1 Norme d'un opérateur linéaire et borné	6
1.2.2 Opérateur adjoint	7
1.3 Puissance et racine carré d'un opérateur	9
1.3.1 Puissance d'un opérateur	9
1.3.2 Racine carré d'un opérateur positif	9
1.4 Quelques classes d'opérateurs	9
1.5 Décomposition des opérateurs	12
1.5.1 La décomposition polaire	12
1.5.2 La décomposition cartésienne	13
1.6 Spectre d'un opérateur	13
1.7 Image et rayon numérique d'un opérateur	16
1.7.1 Image numérique	16
1.7.2 Rayon numérique	17
1.7.3 Relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur	18
1.7.4 Quelques propriétés des opérateurs auto-adjoints et normaux	19
1.7.5 Image numérique et similarité	21
2 Quelques inégalités d'opérateurs	22

2.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz	22
2.1.1	Inégalité de Schwarz mixte pondérée et inégalité de Schwarz généralisée	23
2.2	Inégalité de Young et Inégalité de Hölder	25
2.2.1	Inégalité de Young	25
2.2.2	Inégalité de Hölder-McCarthy	27
2.2.3	Equivalence entre inégalités de Yong et Hölder-McCarthy	28
2.3	Inégalité de Lowner-Heinz et inégalité de Furuta	29
2.4	Quelques résultats sur les inclusions	31
2.5	Inégalités d'opérateurs associés avec inégalité de Kantorovich et inégalité de Holder-McCarthy	34
2.6	Inégalité de Selberg	41
3	Les inégalités de rayons numériques des opérateurs	45
3.1	Quelques résultats	45
3.2	Résultats pour deux opérateurs	52
4	Inégalités de type Jensen et de type Hermite-Hadamard	56
4.1	Inégalités de type Jensen	56
4.1.1	Inégalités de type Jensen pour les fonctions des opérateurs auto-adjoints	57
4.1.2	Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes	58
4.1.3	Inégalité de Jensen pour les fonctions deux fois différentiables	59
4.2	Les inégalités de type Hermite-Hadamard	60
4.2.1	Cas scalaire	60
4.2.2	Quelques inégalités pour les fonctions convexes	61
4.2.3	Inégalité de type Hermite-Hadamard pour les fonctions d'opérateurs convexes	64
	Bibliographie	69

Introduction générale

La théorie des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert ou Banach joue un rôle primordial dans les mathématiques contemporaines avec de nombreuses applications pour les équations aux dérivées partielles, dans la théorie des approximations, la théorie de l'optimisation, théorie de control et l'analyse numérique. L'objectif de notre travail est de présenter quelques résultats récents concernant les différents types d'inégalités pour les fonctions continues des opérateurs bornés sur des espaces de Hilbert.

Les travaux de recherche dans le domaine des inégalités entre opérateurs ont augmenté de façon exponentielle au cours de les dernières décennies.

Plusieurs des mathématiciens ont appliqué les inégalités usuelles dans le domaine de la théorie des opérateurs, en 1821 le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) a fondu l'inégalité de Cauchy Schwarz, plus tard en 1859 Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889) a prouvé l'inégalité pour des sommes infinies[1], en 2007 M.Elhadad et F.Kittaneh [17] ont donné plusieurs inégalités sur les puissances du rayon numérique et la norme usuelle des opérateurs d'un espace de Hilbert, en 2014 M.Sattari, M.Sal Moslehian et T.Yamazaki ont généralisé plusieurs inégalités sur le produit de deux opérateurs sur un espace de Hilbert[31].

Dans toute notre étude, H signifiera un espace de Hilbert complexe, et $B(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaire et bornée définie sur H .

Dans **le premier chapitre** nous rappelons quelques notions et difinitions de base sur la théorie des espaces de Hilbert et des opérateurs linéaires et bornés, et quelque définitions et proprioriétés d'image et rayon numérique et la relation entre eux.

Dans **le deuxieme chapitre** nous donnons quelque inégalités d'opérateurs linéaires et

bornés : inégalité de Cauchy-Schwarz, Yong et Holder , Lowner-Heinz et Furuta .

Dans **le troisième chapitre** nous donnons plusieurs inégalités sur les rayons numériques.

Et **le dernier chapitre** est consacré à l'étude des inégalités de type Jensen et de type Hermite-Hadamard.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. S'il existe un nombre complexe $\langle x, y \rangle$ pour chaque paire de vecteurs $x, y \in X$ satisfaisant :

(I_1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout x dans X et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(I_2) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ pour tous x et y dans X .

(I_3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ pour tous x, y et z dans X .

(I_4) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ pour tous x et y dans X et pour tout nombre complexe λ .

Alors $\langle x, y \rangle$ est appelé le produit scalaire de x et y .

Un espace vectoriel complexe X ayant le produit scalaire est dit espace muni du produit scalaire, ou un espace pre-hilbertien.

Définition 1.1.2. Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. S'il existe un nombre réel $\|x\|$ pour tout vecteur $x \in X$ satisfaisant :

(N_1) $\|x\| \geq 0$ pour tout x dans X , et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$. (**Strictement positive**)

(N₂) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous x et y dans X . (**Inégalité triangulaire**)

(N₃) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout x dans X et pour tout nombre complexe λ . (**Stricte-ment homogène**)

Alors $\|x\|$ est dit norme de x .

Un espace vectoriel complexe muni d'une norme est dit espace normé.

Il s'avère facilement qu'un espace normé est un espace métrique car $d(x, y) = \|x - y\|$ satisfait les conditions (N₁), (N₂) et (N₃).

Théorème 1.1.1. [5] (**Loi du parallélogramme**)

Dans un espace X muni de produit scalaire on a :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

pour tous x, y dans X , quand $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 1.1.2. [5] (**Identité de polarisation**)

Dans un espace X muni d'un produit scalaire on a :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \{ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 \},$$

pour tous x et y dans X , et i l'imaginaire tel que $i^2 = -1$.

Théorème 1.1.3. [8] Un espace muni d'un produit scalaire est un espace normé.

Définition 1.1.3. Une suite $\{x_n\}$ dans un espace normé est dit **converge fortement** vers un vecteur x dans X si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, et on note par $x_n \xrightarrow{s} x$.

Une suite $\{x_n\}$ dans un espace normé est dit **suite de Cauchy**, si $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$ et $n \rightarrow +\infty$.

Un espace normé X est dit **complet** si toute suite de Cauchy a une limite dans X , i.e. si $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$ et $n \rightarrow +\infty$.

Une suite $\{x_n\}$ dans un espace muni de produit scalaire X **converge faiblement** vers un vecteur x dans X , si $\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in X$, quand $n \rightarrow +\infty$ et on note par $x_n \xrightarrow{w} x$.

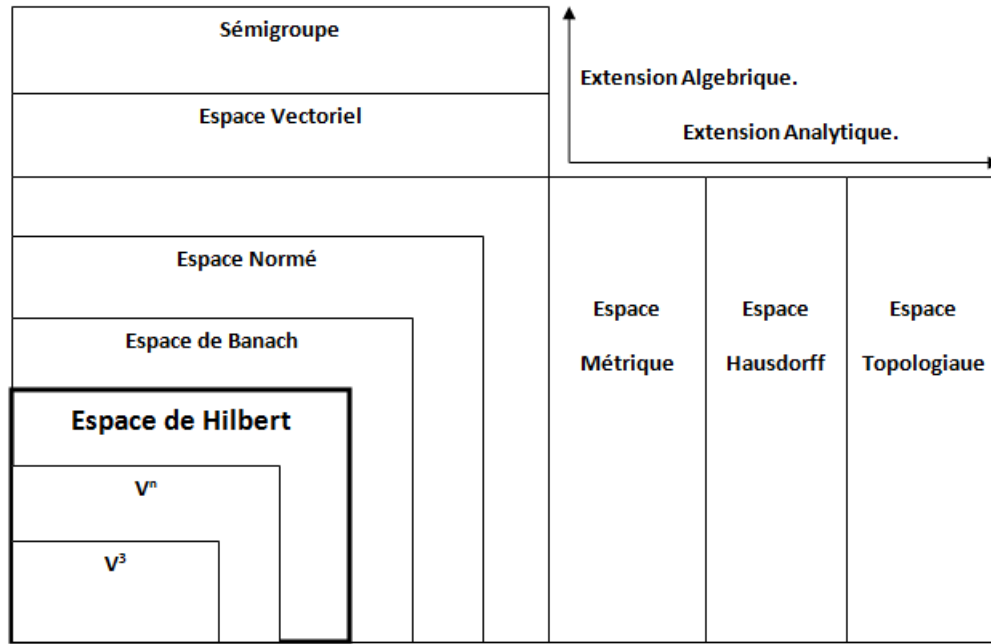
Nous remarquons que $\{x_n \xrightarrow{s} x\} \Rightarrow \{x_n \xrightarrow{w} x\}$ par inégalité de Schwarz et la limite de la convergence fortement et aussi la limite de la convergence faible.

Définition 1.1.4. *Un espace complet muni d'un produit scalaire est dit **espace de Hilbert**.*

Définition 1.1.5. *Un espace normé et complet est dit **espace de Banach**.*

Inclusions entre espaces

Ce diagramme présente les inclusions entre les espaces fonctionnels



Définition 1.1.6. *Soit X un espace normé sur le corps $\mathbb{C}$. Si l'application f de X vers $\mathbb{C}$ satisfait : $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, pour tous $x, y \in X$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

Alors f est dite fonction linéaire de X dans $\mathbb{C}$, et $\|f\|$ la norme de f est définie par

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}.$$

Théorème 1.1.4. [8] (**Théorème de représentation de Riesz**)

Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$. Pour un y fixé dans H , on définit $f(x)$ par

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tout } x \in H \quad (1.1)$$

On a f est une fonction linéaire et bornée de H dans $\mathbb{C}$ telle que $\|f\| = \|y\|$. Inversement, pour une fonction linéaire et bornée f de H dans $\mathbb{C}$, il existe un unique $y \in H$ satisfaisant (1.1).

1.2 Opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert

1.2.1 Norme d'un opérateur linéaire et borné

Définition 1.2.1. Une application T d'un espace de Hilbert H vers H est dit opérateur linéaire si T satisfait :

- (i) $T(x + y) = Tx + Ty$ pour tous $x, y \in H$. (additive)
- (ii) $T(\alpha x) = \alpha Tx$ pour tout $x \in H$ et tout nombre complexe α . (homogène)

L'opérateur identité I est défini par $Ix = x$ pour tout $x \in H$.

L'opérateur zero 0 est défini par $0x = 0$ pour tout $x \in H$.

Définition 1.2.2. Un opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert H est dit **borné**, s'il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in H$.

$\|T\|$ la norme d'opérateur T est définie par

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in H\},$$

Notation. On note par $B(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert H .

Théorème 1.2.1. [16] Pour tout opérateur linéaire et borné T , on a :

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}$$

Théorème 1.2.2. [16] Pour tout opérateur linéaire et borné T sur un espace de Hilbert H , les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) T est borné.
- (ii) T est continu sur l'espace H .
- (iii) T est continu en x_0 dans H .

Théorème 1.2.3. [16] Soient S et T deux opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert H , on a les propriétés suivantes :

- (i) $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
- (ii) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.
- (iii) $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

Théorème 1.2.4. [5] Soit T un opérateur sur l'espace de Hilbert H sur le corps $\mathbb{C}$, on a :

- (i) $T = 0$.
- (ii) $\langle Tx, x \rangle = 0$ pour tout $x \in H$.
- (iii) $\langle Tx, y \rangle = 0$ pour tous $x, y \in H$.

1.2.2 Opérateur adjoint

Définition 1.2.3. Soit T un opérateur, pour un y fixé dans H , on considère une fonction f définie par $f(x) = \langle Tx, y \rangle$ sur H , selon le théorème de représentation de Riesz 1.1.4, il existe $u \in H$ unique tel que $f(x) = \langle Tx, y \rangle = \langle x, u \rangle$ pour tout $x \in H$, par conséquent, nous pouvons définir T^* l'opérateur adjoint de T , par $\langle Tx, y \rangle = \langle x, u \rangle = \langle x, T^*y \rangle$, pour $x, y \in H$.

Théorème 1.2.5. [16] Soit T un opérateur défini sur un espace de Hilbert H . On a T^* est aussi défini sur H , et les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) $\|T^*\| = \|T\|$.
- (ii) $(T + S)^* = T^* + S^*$.
- (iii) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
- (iv) $(T^*)^* = T$.
- (v) $(ST)^* = T^* S^*$.
- (vi) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, si T est inversible.

Preuve. On démontre seulement (i) et (ii) :

(i) Si $y_1, y_2 \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}
 \langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\
 &= \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle Tx, y_2 \rangle \\
 &= \langle x, \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2 \rangle
 \end{aligned}$$

il s'ensuit que $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2$.

Alors T^* est linéaire .

Maintenant nous montrons que T^* est borné.

On pose $x = T^*y$. On a

$$\begin{aligned}\|T^*y\|^2 &= \langle T^*y, T^*y \rangle = \langle TT^*y, y \rangle \\ &\leq \|TT^*y\| \|y\| \leq \|T\| \|T^*y\| \|y\|\end{aligned}$$

Alors, $\|T^*y\| \leq \|T\| \|y\|$ pour tout $y \in H$, donc T^* est borné et $\|T^*\| \leq \|T\|$, $(T^*)^*$ est l' aussi et $\|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$.

D'autre part, pour tous $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}\langle y, (T^*)^*x \rangle &= \langle T^*y, x \rangle = \overline{\langle x, T^*y \rangle} = \overline{\langle Tx, y \rangle} \\ &= \langle y, Tx \rangle,\end{aligned}$$

il s'ensuit que $(T^*)^* = T$, donc (iv) est vérifiée, et

$$\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\| \leq \|T\|.$$

Alors $\|T\| = \|T^*\|$, donc on a (i).

(vi) Soit T inversible, son inverse T^{-1} , on a

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

on passe à l'adjoint $(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^* = I$

D'après (v) $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^*T^* = I$.

Alors $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Corollaire 1.2.1. *Soit T un opérateur dans $B(H)$, on a*

- (i) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.
- (ii) $T^*T = 0$ si et seulement si $T = 0$.

Preuve.

(i) D'après $\|T^*\| = \|T\|$ ((i) du théorème (1.2.5)) :

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2,$$

alors $\|T^*T\| \|T\|^2$. Inversement, on a

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2,$$

donc $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Alors $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

En remplaçant T par T^* on obtient $\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|TT^*\|$.

(ii) évident par (i).

1.3 Puissance et racine carré d'un opérateur

1.3.1 Puissance d'un opérateur

Définition 1.3.1. Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H , où

$$T^n x = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_n x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } T^0 = I (\text{opérateur identité}),$$

T^n est dit **l'opérateur puissance de T** .

Proposition 1.3.1. Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H , alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1.3.2 Racine carré d'un opérateur positif

Théorème 1.3.1. [20] Pour tout opérateur positif A , il existe un opérateur positif S tel que $S^2 = A$.

Définition 1.3.2. L'opérateur S défini dans le théorème 1.3.1 est dit **racine carré de A** et est noté par $S = A^{\frac{1}{2}}$.

1.4 Quelques classes d'opérateurs

Définition 1.4.1. Soit T un opérateur dans $B(H)$, T est dit :

1. **Opérateur Auto-adjoint** si $T^* = T$.
2. **opérateur Normal** si $T^*T = TT^*$.
3. **Opérateur Quasinormal** si $T(T^*T) = (T^*T)T$.
4. **Projection** si $T^2 = T$.
5. **Projection orthogonale** si $T^2 = T = T^*$.

6. **Opérateur Unitaire** si $T^*T = TT^* = I$.
7. **Opérateur Isométrique** si $T^*T = I$.
8. **Opérateur Positif** (noté par $T \geq 0$) si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, pour tout $x \in H$.
9. **Opérateur Hyponormal** si $T^*T \geq TT^*$.
10. **Opérateur Isométrique Partiel** si $T = TT^*T$.
11. **Opérateur Paranormal** si $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ pour tout vecteur unité $x \in H$.
12. **Opérateur Sous-normal** si T a une extension normale.
13. **Opérateur Anti-hermetien** si $T^* = -T$.
14. **Opérateur Compact** si $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$, pour toute suite orthonormée $\{x_n\}$ de H .
15. **Opérateur k -quasihyponormal** si $T^*(T^*T)^kT \geq T^*(TT^*)^kT$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
16. **Opérateur p -hyponormal** si $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$.
17. **Opérateur log-hyponormal** si $\log T^*T \geq \log TT^*$.
18. **Opérateur de classe A** si $|T^2| \geq |T|^2$.
19. **Opérateur de classe $A(k)$** si $(T^*|T^{2k}|T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
20. **Opérateur absolument- k -paranormal** si $\||T|^kTx\| \geq \|Tx\|^{k+1}$ pour tout vecteur unité $x \in H$, $k \in \mathbb{N}$.
21. **Opérateur k -hyponormal** si $(T^*T)^k \geq (TT^*)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition 1.4.2. $R(T)$, l'image de T , est définie par :

$$R(T) = \{Tx; x \in H\},$$

et $N(T)$ le noyau de T , est défini par :

$$N(T) = \{x \in H; Tx = 0\}.$$

Définition 1.4.3. Un opérateur $T \in B(H)$ est dit :

De rang fini n si $R(T)$ est de dimension fini n .

Dominant si $R(T - \lambda) \subseteq R(T - \lambda)^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

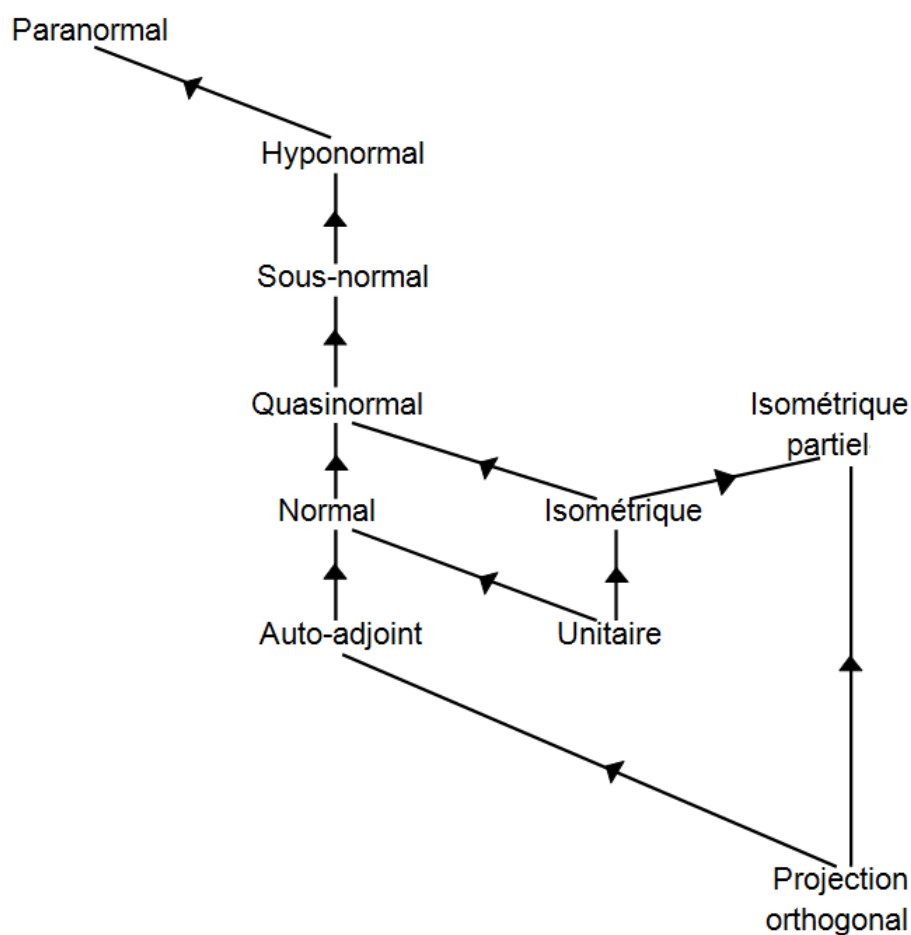
Définition 1.4.4. Pour deux opérateurs A et B . Soit $[A, B]$ le commutateur de A et B défini par, $[A, B] = AB - BA$.

Un opérateur T est dit **binormal** si $[T^*T, TT^*] = 0$.

Définition 1.4.5. Un opérateur U est dit **symétrique** si $U^*U = UU^* = U^2 = I$, ce qui est équivalent à $\{U^* = U \text{ et } U \text{ est unitaire}\}$.

Définition 1.4.6. Un opérateur T est dit **nilpotent** si $T^2 = 0$. Plus généralement, T est dit **n -nilpotent** pour tout entier positif $n \geq 2$ si $T^n = 0$.

Inclusion des classes d'opérateur



1.5 Décomposition des opérateurs

1.5.1 La décomposition polaire

Définition 1.5.1. Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H , alors il existe un opérateur isométrique partiel U tel que : $T = U |T|$.

où $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, avec $N(U) = N(|T|)$, $T = U |T|$ est dit **la décomposition polaire** de T , et si la condition $N(U) = N(|T|)$ n'est pas nécessairement satisfaite, $T = U |T|$ est dit seulement **une décomposition** de T .

Théorème 1.5.1. [20] Soit $T = U |T|$ la décomposition polaire d'un opérateur T dans un espace de Hilbert H . Alors on a

- (i) $N(|T|) = N(T)$.
- (ii) $|T^*|^q = U |T^*|^q U^*$ pour tout entier positif q .

Preuve.

- (i) $|T|x = 0 \iff |T|^2 x = 0$ or $\langle |T|^2 x, x \rangle = \| |T|x \|^2 = 0$
 $\iff T^*Tx = 0 \iff Tx = 0$ or $\langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2 = 0$.
- (ii) Nous rappelons la relation (*) suivante :

$$N(S^q) = N(S) \quad (*)$$

pour tout opérateur S et pour tout entier positif q .

Or (*) satisfait pour $|T|$ et U^*U est le projection initial, on a $\overline{R(|T|^q)} = \overline{R(|T|)}$, donc $U^*U |T|^q = |T|^q$. Et on a

$$|T^*|^2 = TT^* = U |T| |T| U^* = U |T| U^* U |T| U^* = (U |T| U^*)^2,$$

il s'ensuit que $f_n(|T^*|^2) = f_n((U |T| U^*)^2) = U f_n(|T|^2) U^*$ or $U^*U |T| = |T|$ pour tout polynome $f_n(t)$. On prend la suite $\{f_n(t)\}$ qui converge vers $t^{\frac{1}{2}}$, alors $|T^*| = U |T| U^*$ est satisfaite or la racine carré $S^{\frac{1}{2}}$ d'un opérateur positif S est approximée uniformément par polynome de S comme on le voit et $U |T| U^*$ est positif.

Par induction, $|T^*|^{\frac{n}{m}} = U |T|^{\frac{n}{m}} U^*$ satisfait pour tout nombre naturel m et n .

Maintenant, soit $\frac{n}{m} \rightarrow q$, alors $|T^*|^q = U |T|^q U^*$ or $U^*U |T|^q = |T|^q$ pour tout nombre positif q , donc on a (ii).

1.5.2 La décomposition cartésienne

Théorème 1.5.2. [5] (*forme cartésienne*)

Soit T un opérateur sur l'espace de Hilbert H , il existe deux opérateurs auto-adjoints A et B tels que $T = A + iB$ nécessairement $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ et $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$.

1.6 Spectre d'un opérateur

Définition 1.6.1. Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H , on dit que T est un **opérateur inversible** s'il existe un opérateur S tel que $ST = TS = I$, où I est l'opérateur identité. On écrit $S = T^{-1}$ et T^{-1} est **l'inverse** de T .

Théorème 1.6.1. [16] Si T est un opérateur et c un nombre positif tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout vecteur $x \in H$, alors $R(T)$ l'image de T est fermée.

Preuve. Supposons $y_n = Tx_n$ pour $n = 1, 2, \dots$ et $y_n \rightarrow y_0$. Or

$$\|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq c\|x_n - x_m\|$$

et $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy, $\{x_n\}$ est aussi une suite de Cauchy, il existe $x_0 \in H$ tel que $x_n \rightarrow x_0$ car H est un espace de Hilbert. Maintenant

$$\begin{aligned} \|y_0 - Tx_0\| &\leq \|y_0 - Tx_n\| + \|Tx_n - Tx_0\| \\ &\leq \|y_0 - y_n\| + \|T\|\|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

et $y_0 = Tx_0 \in R(T)$, alors $R(T)$ est fermée.

Théorème 1.6.2. [20] Un opérateur T dans un espace de Hilbert H est inversible si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Il existe un nombre positif c tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$, pour tout $x \in H$.
- (ii) $R(T)$, l'image de T est dense dans H , alors $\overline{R(T)} = H$.

Preuve. Si T est inversible et si $y \in H$, il existe $x \in H$ tel que $x = T^{-1}y$ et $Tx = y$. $R(T)$ est non seulement dense dans H , mais coïncide aussi avec H lui-même, ce qui nous donne (ii).

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|.$$

Soit $c = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, alors on a (i).

On suppose que (i) et (ii) sont satisfaites. Alors $R(T) = H$ est satisfaite, car $\overline{R(T)} = R(T)$ (d'après le théorème 1.6.1) et $\overline{R(T)} = H$ (d'après (ii)).

Si $Tx_1 = Tx_2$, alors

$$0 = \|Tx_1 - Tx_2\| \geq c\|x_1 - x_2\|,$$

donc $x_1 = x_2$ ce qui implique : tout vecteur y n'a pas seulement la forme Tx pour $x \in H$, mais aussi il y a exactement un x et une transformation unique S sur H définie par $Sy = x$. Or S est linéaire, $\|y\| = \|Tx\| \geq c\|x\| = c\|Sy\|$, donc S est un opérateur tel que $\|S\| \leq \frac{1}{c}$ et $ST = TS = I$, et par conséquent S est l'inverse de T .

Corollaire 1.6.1. *Si $T \geq cI$ pour $c > 0$, alors T est inversible.*

Preuve. Comme $\|Tx\|\|x\| \geq \langle Tx, x \rangle \geq c\|x\|^2$ par l'inégalité de Schwarz, on a $\|Tx\| \geq c\|x\|$. Soit y orthogonal à $R(T)$, $0 = \langle y, Tx \rangle = \langle Ty, x \rangle$ pour tout x , alors $Ty = 0$, pour que $y = 0$, alors $0 = \langle Ty, y \rangle \geq c\|y\|^2$, i.e., $\overline{R(T)} = H$. D'où T est inversible par le théorème 1.6.2.

Définition 1.6.2. $\sigma(T)$ le spectre de l'opérateur T est défini par :

$$(d_1) \quad \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas inversible}\}.$$

L'ensemble $\rho(T)$ est défini par :

$$\rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T)$$

et $\rho(T)$ est dit **la resolvente** de T .

$$(d_2) \quad P_\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{il existe } x \neq 0 \text{ telle que } Tx = \lambda x\}, \quad P_\sigma \text{ est dit } \mathbf{spectre \textit{ponctuel}} \text{ de } T.$$

$$(d_3) \quad C_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda)^{-1} \text{ est non borné et } \overline{R(T - \lambda)} = H\}, \quad C_\sigma(T) \text{ est dit } \mathbf{spectre \textit{continu}} \text{ de } T.$$

(d₄) $R_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda)^{-1} \text{ existe et } \overline{R(T - \lambda)} \subsetneq H\}$, $R_\sigma(T)$ est dit **spectre résiduel** de T .

(d₅) $A_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{il existe une suite des vecteurs unitaires } \{x_n\} \text{ telle que } \|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty\}$, $A_\sigma(T)$ est dit **spectre approximatif** de T .

Dans le diagramme en ordre suivant on clarifie la relation entre les différents types de spectres.

(a) $(T - \lambda)^{-1}$ n'existe pas $\Leftrightarrow \lambda \in P_\sigma$

$$(b) \ (T - \lambda)^{-1} \text{ existe } \begin{cases} (b_1)(T - \lambda)^{-1} \text{ est borné } \begin{cases} (b_{11})\overline{R(T - \lambda)} = H \Leftrightarrow \lambda \in \rho(T) \\ (b_{12})\overline{R(T - \lambda)} \subsetneq H \Leftrightarrow \lambda \in R_\sigma(T) \end{cases} \\ (b_2)(T - \lambda)^{-1} \text{ est non borné } \begin{cases} (b_{21})\overline{R(T - \lambda)} = H \Leftrightarrow \lambda \in C_\sigma(T) \\ (b_{22})\overline{R(T - \lambda)} \subsetneq H \Leftrightarrow \lambda \in R_\sigma(T) \end{cases} \end{cases}$$

Proposition 1.6.1. $\sigma(T) = P_\sigma \cup C_\sigma(T) \cup R_\sigma(T)$ tel que P_σ , $C_\sigma(T)$ et $R_\sigma(T)$ sont des parties disjointes de $\sigma(T)$.

Théorème 1.6.3. [20] Pour les opérateurs A et B , on a $\sigma(AB) - \{0\} = \sigma(BA) - \{0\}$.

Théorème 1.6.4. [20] Soit $\sigma(T)$ le spectre d'un opérateur T , et soit $P(t)$ un polynome à coefficients complexes. Alors

$$P(\sigma(T)) = \sigma(P(T)).$$

Théorème 1.6.5. [20] Soit $\sigma(T)$ le spectre d'un opérateur inversible T , alors

$$\sigma(T^{-1}) = \{\sigma(T)\}^{-1} = \left\{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

Théorème 1.6.6. [20] Soit $\sigma(T)$ le spectre d'un opérateur T , alors

$$\sigma(T^*) = \{\sigma(T)\}^* = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

1.7 Image et rayon numérique d'un opérateur

1.7.1 Image numérique

Définition 1.7.1. Soit T un opérateur dans $B(H)$, l'image numérique de T est l'ensemble $W(T)$ des nombres complexes défini par

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Proposition 1.7.1. Soient T et S deux opérateurs dans $B(H)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a les propriétés suivantes :

- (i) $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$.
- (ii) $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$.
- (iii) $W(T^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\}$, où T^* est l'adjoint de T .
- (iv) $W(U^*TU) = W(T)$, où U est un opérateur unitaire.

On démontre seulement les propriétés (i), (iii) et (iv).

Preuve.

(i) Soit $T \in B(H)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} W(\alpha I + \beta T) &= \{\langle (\alpha I + \beta T)x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle \alpha Ix + \beta Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle \alpha Ix, x \rangle + \langle \beta Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle \alpha Ix, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} + \{\langle \beta Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \alpha W(I) + \beta W(T). \end{aligned}$$

(iii) Soit $T \in B(H)$

$$\begin{aligned} W(T^*) &= \{\langle T^*x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle x, Tx \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\overline{\langle Tx, x \rangle} : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\}. \end{aligned}$$

(iv) Soit $T \in B(H)$ et U un opérateur unitaire

$$\begin{aligned}
 W(U^*TU) &= \{\langle U^*TUx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &= \{\langle TUx, Ux \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &= \{\langle Tx, U^*Ux \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &= \{\langle Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &= W(T).
 \end{aligned}$$

1.7.2 Rayon numérique

Définition 1.7.2. Soit T un opérateur défini sur H , $W(T)$ son image numérique. Le rayon numérique $w(T)$ d'opérateur T est donné par :

$$w(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}.$$

Théorème 1.7.1. [20] $w(\cdot)$ est une norme dans $B(H)$ pour tout opérateur linéaire borné $T : H \longrightarrow H$, i.e

- (i) $w(T) \geq 0$ pour tout $T \in B(H)$ et $w(T) = 0$ si et seulement si $T = 0$.
- (ii) $w(\lambda T) = |\lambda|w(T)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $T \in B(H)$.
- (ii) $w(T + V) \leq w(T) + w(V)$ pour tout $T, V \in B(H)$.

Définition 1.7.3. Le rayon spectral de T est défini par

$$r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Théorème 1.7.2. [16] Soit $T \in B(H)$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et égale à $r(T)$.

Remarque 1.7.1. Soit $T \in B(H)$ et T^* l'opérateur adjoint de T , alors

- 1) $r(T^*) = r(T)$.
- 2) $r(T^n) = r(T)^n$.

Théorème 1.7.3. [25] Le rayon numérique et la norme d'opérateur sont deux normes équivalentes. Où

$$w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T).$$

Preuve. Soit $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle Tx, x \rangle \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\|,$$

d'où $w(T) \leq \|T\|$. D'après l'identité de polarisation, on obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle Tx, y \rangle| &\leq |\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle + i\langle T(x+iy), x+iy \rangle - \langle T(x-iy), x-iy \rangle| \\ &\leq w(T)[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2] \\ &\leq 4w(T)[\|x\|^2 + \|y\|^2]. \end{aligned}$$

En prenant $\|x\| = \|y\| = 1$, on trouve

$$4|\langle Tx, y \rangle| \leq 8w(T),$$

Ce qui implique que $\|T\| \leq 2w(T)$.

1.7.3 Relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur

Théorème 1.7.4. [20] *On a toujours $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$, où $\overline{W(T)}$ dénote la fermeture de l'image numérique de l'opérateur T .*

Preuve. Soit $\lambda \in A_\sigma(T)$ (le spectre approché de T) et soit (x_n) une suite de vecteurs unitaires telle que $\|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\langle (T - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0.$$

Donc $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$ et par suite $\lambda \in \overline{W(T)}$, on a alors

$$A_\sigma(T) \subset \overline{W(T)}.$$

Ainsi, d'après la proposition 1.7.1, on a $\partial\sigma(T) \subset A_\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$. De la convexité de $\overline{W(T)}$, il s'ensuit que $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.

En général, pour S et T dans $B(H)$, l'ensemble $\sigma(T + S)$ n'a aucun lien avec $\sigma(T)$ et $\sigma(S)$.

Mais d'après [20] on a

$$\sigma(T + S) \subset \overline{W(T + S)} \subset \overline{W(T)} + \overline{W(S)}.$$

Exemple 1.7.1. Soit $H = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, et T un opérateur représenté par la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $X = (x_1, x_2)$. On a

$$\begin{aligned} \langle TX, X \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

Alors

$$W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Et on a

$$\det(T - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0.$$

Donc $\sigma(T) = \{0\}$.

Théorème 1.7.5. [20] Soit $\overline{W(T)} = [m, M]$, alors $m, M \in \sigma(T)$.

Preuve. On a $m \in \overline{W(T)}$, alors il existe une suite de vecteurs unitaires $\{x_n\}$ tel que : $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow m$ donc

$$\|\langle (T - mI)x_n, x_n \rangle\| = \left\| (T - m)^{\frac{1}{2}} x_n \right\|^2 \rightarrow 0,$$

alors $\|(T - m)x_n\| \rightarrow 0$ et donc $m \in A_\sigma(T) \subset \sigma(T)$.

1.7.4 Quelques propriétés des opérateurs auto-adjoints et normaux

Théorème 1.7.6. T est un opérateur auto-adjoint si et seulement si $W(T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Preuve. Si T est auto-adjoint, alors pour tout $x \in H$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}.$$

On a donc $W(T) \subset \mathbb{R}$.

Inversement, si $W(T) \subset \mathbb{R}$, alors $\langle Tx, x \rangle$ est un réel pour tout $x \in H$, on a

$$\langle Tx, x \rangle - \langle x, Tx \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (T - T^*)x, x \rangle = 0.$$

Donc

$$(T - T^*) = 0 \Leftrightarrow T = T^*.$$

Alors T est auto-adjoint.

Théorème 1.7.7. Soit $T \in B(H)$ avec T est auto-adjoint alors $\|T\| = r(T) = w(T)$.

Preuve. On a

$$r(T) \leq w(T) \leq \|T\|.$$

On va montrer que $r(T) = \|T\|$, comme T est un opérateur auto-adjoint nous avons la propriété suivante

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Alors

$$\|T^2\| = \|TT^*\| = \sup_{\|x\|=1} \langle T^*Tx, x \rangle \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, Tx \rangle = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2.$$

Comme n'importe quelle puissance entière de T est encore auto-adjoint, on peut étendre ce résultat à T^4 :

$$\|T^4\| = \|(T^2)^2\| = (\|T^2\|)^2 = \|T\|^4.$$

Et par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}.$$

Donc, en utilisant la définition du rayon spectral :

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

Alors

$$\|T\| = r(T) = w(T).$$

C'est qu'il fallait démontrer.

Théorème 1.7.8. *Si T est un opérateur normal, alors $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n > 1$. De plus, $\|T\| = r(T) = w(T)$.*

Preuve. On a toujours

$$r(T) \leq w(T) \leq \|T\|,$$

pour tout $x \in H$, on a

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| = \|T^2x\| \|x\| \leq \|T^2\| \|x\|^2.$$

(Car pour un opérateur normal, on a toujours $\|Tx\| = \|T^*x\|$).

Il découle donc que $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$. Comme l'inégalité $\|T^n\| = \|T\|^n$ est toujours vraie, on a $\|T\|^2 = \|T^2\|$. De plus

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^n x, T^n x \rangle = \langle T^* T^n x, T^{n-1} x \rangle \leq \|T^* T^n x\| \|T^{n-1} x\| = \|T^{n+1} x\| \|T^{n-1} x\|, \quad \forall n \leq 2$$

Cette inégalité implique que

$$\|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\| \quad \forall n \leq 2$$

Fixons un entier $n \geq 2$ et supposons que $\|T\|^k \leq \|T^k\|$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Il suit que

$$\|T\|^{2n} \leq \|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\| \leq \|T^{n+1}\| \|T\|^{n-1},$$

d'où

$$\|T\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}\|.$$

On déduit par induction que $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ pour tout $n > 1$. Finalement, la formule du rayon spectral entraîne que $r(T) = \|T\|$, et on a donc $\|T\| = r(T) = w(T)$.

1.7.5 Image numérique et similarité

Théorème 1.7.9. *Si T et S sont deux opérateurs unitairement similaires alors $W(T) = W(S)$.*

Preuve. On a T, S deux opérateurs unitairement similaires alors il existe U unitaire (i.e : $U^{-1} = U^*$) tel que $T = U^* S U$, donc d'après la propriété de l'image numérique d'un opérateur

$$W(S) = W(U^* S U) = W(T).$$

Alors $W(S) = W(T)$.

Chapitre 2

Quelques inégalités d'opérateurs

Dans les dernières décennies, beaucoup de travaux de recherche sont réalisés pour objectif d'étendre ces inégalités aux inégalités entre opérateurs on leurs normes, ou leurs rayons spectraux ou numérique.

2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est la plus utile et importante dans les mathématiques.

Théorème 2.1.1. [16] (*L'inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Dans un espace X muni d'un produit scalaire, l'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{CS})$$

est satisfaite pour tous x et y dans X .

Preuve.

Si $y = 0$, alors $\langle x, y \rangle = 0$ et le résultat est trivial. Soit $y \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2 \quad (2.1)$$

On pose $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ dans (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

d'où on obtient (CS).

Remarque 2.1.1. Dans $\mathbb{R}^3$ on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, x, y sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.
On a égalité si x, y sont linéairement dépendants.

Quelques exemples pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz

(a) Dans $\mathbb{R}^n$ on a

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

x, y sont vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. $|x^T y| \leq \|x\| \|y\|$, x, y sont vecteurs dans $\mathbb{R}^n$,

$$x^T = [x_1 x_2 \dots x_n], \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

(b) $|x^T A y| \leq \sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y}$, x, y sont vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, A est définie positive, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(c) Dans $\mathbb{C}^n$ on a

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2},$$

x, y sont vecteurs dans $\mathbb{C}^n$.

(d) dans ℓ^2 on a

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^2}.$$

$x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots\}$, $\xi_j \in \mathbb{C}$, $\eta_j \in \mathbb{C}$, $\forall j \in \mathbb{P}$.

2.1.1 Inégalité de Schwarz mixte pondérée et inégalité de Schwarz généralisée

Théorème 2.1.2. [21] Soit T un opérateur dans un espace de Hilbert H

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle \langle |T^*|^{2(1-\alpha)} y, y \rangle \quad (2.3)$$

est satisfaite pour tous $x, y \in H$ et un nombre réel α avec $0 \leq \alpha \leq 1$. De plus

- (i) $0 < \alpha < 1$ l'inégalité (2.3) est satisfaite si et seulement si $|T|^{2\alpha}x$ et T^*y sont linéairement dépendants ou d'autre façon si et seulement si Tx et $|T^*|^{2(1-\alpha)}y$ sont linéairement dépendants.
- (ii) $\alpha = 1$ l'inégalité (2.3) est satisfaite si et seulement si Tx et y sont linéairement dépendants.
- (iii) $\alpha = 0$ l'inégalité (2.3) est satisfaite si et seulement si x et T^*y sont linéairement dépendants.

Dans le cas $\alpha = 1$ ou 0 , le résultat est évident, alors nous supposons $0 < \alpha < 1$.

Preuve de l'inégalité (2.3). Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T , où U est une isométrie partielle et $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ avec $N(U) = N(|T|)$ et $N(S)$.

Premièrement, nous rappelons la relation (2.4) (voir (ii) du théorème 1.5.1).

$$|T^*|^q = U|T|^q U^* \quad \text{pour tout nombre positif } q; \quad (2.4)$$

posons $\beta = 1 - \alpha$ par (2.4) on a

$$\begin{aligned} |\langle Tx, y \rangle|^2 &= |\langle U|T|x, y \rangle|^2 = |\langle |T|x, U^*y \rangle|^2 = |\langle |T|^\alpha x, |T|^\beta U^*y \rangle|^2 \\ &\leq \| |T|^\alpha x \|^2 \| |T|^\beta U^*y \|^2 \\ &= \langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle \langle U|T|^{2\beta} U^*y, y \rangle \\ &= \langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle \langle |T^*|^{2\beta} y, y \rangle. \end{aligned}$$

La preuve de l'inégalité (2.3) est achevée.

Vérification de l'inégalité (2.3) l'égalité est satisfaite si et seulement si $|T|^\alpha x$ et $|T|^\beta U^*y$ sont linéairement dépendants ou si et seulement si $|T|^\alpha x$ et $|T|^\beta U^*y$ sont linéairement dépendants par (*) du théorème 1.5.1 pour $|T|$ si et seulement si

$$|T|^{2\alpha} \quad \text{et} \quad |T^*|^{2\beta} \quad \text{sont linéairement dépendants,} \quad (2.5)$$

on a une égalité dans (2.3) si et seulement si $|T|^\alpha x$ et $|T|^\beta U^*y$ sont linéairement dépendants, ou si et seulement si $|A|x$ et $|A|^{2\beta} U^*y$ par (*) du théorème 1.5.1, pour $|T|$ équivalent $U|T|x$ et $U|T|^{2\beta} U^*y$ sont linéairement dépendants par (*) pour $|T|$ et $N(U) = N(|T|)$ si et seulement si

$$Tx \quad \text{et} \quad |T^*|^{2\beta} y \quad \text{sont linéairement dépendants,} \quad (2.6)$$

(2.5) et (2.6) sont équivalentes (d'après (2.4)). Par conséquent l'ingalité dans (2.3) est vérifiée si et seulement si (2.5) et (2.6) sont vérifiées.

Soit $\alpha = \frac{1}{2}$. Alors on a le résultat suivant :

Corollaire 2.1.1. *Soit T un opérateur dans un espace de Hilbert H ,*

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle |T| x, x \rangle \langle |T^*| y, y \rangle,$$

pour tous $x, y \in H$. L'égalité est satisfaite si et seulement si $|T| x$ et $|T^| y$ sont linéairement dependants, ou si et seulement si Tx et $|T^*| y$ sont linéairement dependants.*

Corollaire 2.1.2. *Soit T un opérateur dans l'espace $B(H)$,*

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle$$

pour tous $x, y \in H$. L'égalité est satisfaite si et seulement si Tx et Ty sont linéairement dependants.

2.2 Inégalité de Young et Inégalité de Hölder

2.2.1 Inégalité de Young

Théorème 2.2.1. [20] (*inégalité de Young*)

Soit A et B deux opérateurs positifs et inversibles définis sur un espace de Hilbert H . Alors on a l'inégalité suivante : pour $0 \leq \lambda \leq 1$

$$(1 - \lambda)A + \lambda B \geq A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\lambda}A^{\frac{1}{2}} \geq [(1 - \lambda)A^{-1} + \lambda B^{-1}]^{-1}. \quad (\text{Y})$$

Preuve. considérons $f(x) = \lambda x + 1 - \lambda - x^{\lambda}$ pour des nombres positifs x et $\lambda \in [0, 1]$, il se trouve que $f(x)$ est une fonction non négative et par le calcul fonctionnel des opérateurs positifs, on a pour un opérateur positif T et $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda T + 1 - \lambda \geq T^{\lambda} \geq (\lambda T^{-1} + 1 - \lambda)^{-1} \quad (2.7)$$

L'inégalité seconde decoule à partir du première en remplaçant T par T^{-1} et en prennant l'inverse de deux côtés.

Si on pose $T = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ dans (2.7) et composons par $A^{\frac{1}{2}}$ dans les deux côtés on obtient l'inégalité désirée.

Théorème 2.2.2. [20] *Soit T un opérateur positif et inversible dans un espace de Hilbert H . les assertions suivantes sont satisfaites :*

- (i) *si $1 \geq \lambda > 0$, alors $\lambda T + (1 - \lambda) \geq T^\lambda$.*
- (ii) *si $\lambda > 1$, alors $\lambda T + (1 - \lambda) \leq T^\lambda$.*
- (iii) *si $\lambda < 0$, alors $\lambda T + (1 - \lambda) \leq T^\lambda$.*

Où (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

Preuve. La preuve de (i) est déjà obtenu dans (2.7) et (ii) et (iii) sont obtenues facilement par la même méthode. Nous démontrons l'équivalence de (i), (ii) et (iii)

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Supposons $\lambda > 1$ l'assertion (i) est équivalent à

$$T^{\frac{1}{\lambda}} \leq \frac{1}{\lambda}T + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right),$$

d'où

$$\lambda T^{\frac{1}{\lambda}} \leq T + (\lambda - 1),$$

posons $S = T^{\frac{1}{\lambda}}$, on a

$$S^\lambda \geq \lambda S + (1 - \lambda).$$

Alors (i) implique (ii).

De la même manière (ii) implique (i)

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). En composant T^{-1} , alors (ii) est équivalent à

$$\lambda + (1 - \lambda)T^{-1} \leq T^{\lambda-1}, \text{ pour tout } \lambda > 1.$$

Soit $\mu = 1 - \lambda < 0$ et $S = T^{-1}$, on a $\mu S + (1 - \mu) \leq S^\mu$.

Alors (ii) implique (iii) et de même (iii) implique (ii).

Théorème 2.2.3. [20] *Soit A et B deux opérateurs positifs et inversibles dans $B(H)$, on a les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) *Si $1 \geq \lambda \geq 0$, alors $(1 - \lambda)A + \lambda B \geq A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\lambda A^{\frac{1}{2}}$.*
- (ii) *Si $\lambda > 1$, alors $(1 - \lambda)A + \lambda B \leq A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\lambda A^{\frac{1}{2}}$.*
- (iii) *Si $\lambda < 0$, alors $(1 - \lambda)A + \lambda B \leq A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\lambda A^{\frac{1}{2}}$.*

Preuve. Soit $T = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$, dans le théorème 2.2.3, en composant les deux côtés par $A^{\frac{1}{2}}$.

2.2.2 Inégalité de Hölder-McCarthy

Théorème 2.2.4. [20] (*inégalité de Hölder-McCarthy*)

Soit A un opérateur positif linéaire défini sur un espace de Hilbert H .

Alors on a les propriétés suivantes :

- (i) $\langle A^\lambda x, x \rangle \geq \langle Ax, x \rangle^\lambda$ pour tout $\lambda > 1$ et pour tout vecteur unitaire x .
- (ii) $\langle A^\lambda x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle^\lambda$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et pour tout vecteur unitaire x .
- (iii) Si A est inversible, alors $\langle A^\lambda x, x \rangle \geq \langle Ax, x \rangle^\lambda$ pour tout $\lambda < 0$ et pour tout vecteur unitaire x .

De plus (i), (ii) et (iii) sont équivalentes à (i'), (ii') et (iii') respectivement

- (i') $\langle A^\lambda x, x \rangle \geq \langle Ax, x \rangle^\lambda \|x\|^{2(1-\lambda)}$ pour tout $\lambda > 1$ et pour tout vecteur unitaire x .
- (ii') $\langle A^\lambda x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle^\lambda \|x\|^{2(1-\lambda)}$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et pour tout vecteur unitaire x .
- (iii') Si A est inversible, alors $\langle A^\lambda x, x \rangle \geq \langle Ax, x \rangle^\lambda \|x\|^{2(1-\lambda)}$ pour tout $\lambda < 0$ et pour tout vecteur unitaire x .

Preuve.

- (ii) Supposons que (ii) est satisfaite pour $\alpha, \beta \in [0, 1]$, alors on prouve seulement que (ii) est satisfaite pour $\frac{\alpha+\beta}{2} \in [0, 1]$, par la continuité d'un opérateur.

En effet pour tout vecteur unitaire x , on a :

$$\begin{aligned}
 |\langle A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} x, x \rangle|^2 &= |\langle A^{\frac{\alpha}{2}} x, A^{\frac{\beta}{2}} x \rangle|^2 \\
 &\leq \langle A^\alpha x, x \rangle \langle A^\beta x, x \rangle \quad (\text{par l'inégalité de Schwarz}) \\
 &\leq \langle Ax, x \rangle^\alpha \langle Ax, x \rangle^\beta \quad (\text{par l'hypothèse}) \\
 &\leq \langle Ax, x \rangle^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

Alors $\langle A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ est satisfaite pour $\frac{\alpha+\beta}{2} \in [0, 1]$.

- (i) soit $\lambda > 1$, on a $\frac{1}{\lambda} \in]0, 1]$, pour tout vecteur unitaire x

$$\langle Ax, x \rangle = \langle A^{\lambda \frac{1}{\lambda}} x, x \rangle \leq \langle A^\lambda x, x \rangle^{\frac{1}{\lambda}}, \quad (\text{d'après (ii)})$$

et par conséquent, $\langle A^\lambda x, x \rangle \geq \langle Ax, x \rangle^\lambda$ satisfait pour $\lambda > 1$.

- (iii) Si A^{-1} existe, alors pour tout vecteur unitaire x ,

$$1 = \|x\|^4 = |\langle A^{\frac{1}{2}} x, A^{-\frac{1}{2}} x \rangle|^2 \leq \|A^{\frac{1}{2}} x\|^2 \|A^{-\frac{1}{2}} x\|^2 = \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1} x, x \rangle$$

Alors on a

$$\langle A^{-1}x, x \rangle \geq \langle Ax, x \rangle^{-1} \quad \text{pour tout vecteur unitaire } x \quad (2.8)$$

(iii - a) Dans le cas $\lambda < -1$ pour tout vecteur unitaire x , on a

$$\begin{aligned} \langle A^\lambda x, x \rangle &= \langle A^{-|\lambda|} x, x \rangle \\ &\geq \langle A^{-1} x, x \rangle^{|\lambda|} \quad (\text{d'après (i) car } |\lambda| > 1) \\ &\geq \langle Ax, x \rangle^{-|\lambda|} \quad (\text{d'après (2.8)}) \\ &= \langle Ax, x \rangle^\lambda. \end{aligned}$$

(iii-b) Dans le cas $-1 \leq \lambda < 0$ pour tout vecteur unitaire x , on a

$$\begin{aligned} \langle A^\lambda x, x \rangle &= \langle A^{-|\lambda|} x, x \rangle \\ &\geq \langle A^{|\lambda|} x, x \rangle^{-1} \quad (\text{d'après (2.8)}) \\ &\geq \langle Ax, x \rangle^{-|\lambda|} \\ &= \langle Ax, x \rangle^\lambda. \end{aligned}$$

et la dernière inégalité suit par (ii) car $|\lambda| \in [0, 1]$.

Les équivalences (i) $\Leftrightarrow (i')$, (ii) $\Leftrightarrow (ii')$, (iii) $\Leftrightarrow (iii')$ sont évidentes.

2.2.3 Equivalence entre inégalités de Yong et Hölder-McCarthy

Pour A un opérateur linéaire et positif défini sur un espace de Hilbert H et $\lambda \in [0, 1]$ nous donnons une preuve élémentaire de l'équivalence de deux inégalités suivantes :

(i) L'inégalité de Hölder-McCarthy

$$\langle Ax, x \rangle^\lambda \geq \langle A^\lambda x, x \rangle \quad \text{pour tout vecteur unitaire } x \text{ dans } H \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}, A \in B(H).$$

(ii) l'inégalité Young

$$\lambda A + I - \lambda \geq A^\lambda \quad \lambda \in \mathbb{C}, A \in B(H).$$

Preuve. considérons $f(x) = \lambda x + 1 - \lambda - x^\lambda$ pour des nombres positifs x et $\lambda \in [0, 1]$ alors on peut voir facilement que f est une fonction convexe non négative avec la valeur minimale

$f(a)$, alors on a

$$\lambda a + 1 - \lambda \geq a^\lambda \quad \text{pour } a \text{ positif et } \lambda \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

(i) $\implies$ (ii) remplaçons a par $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ pour $\|x\| = 1$ et $\lambda \in [0, 1]$ dans (2.9), nous obtenons :

$$\lambda \langle Ax, x \rangle + 1 - \lambda \geq \langle Ax, x \rangle^\lambda \geq \langle A^\lambda x, x \rangle, \quad (\text{d'après (i)})$$

d'où (ii).

(ii) $\implies$ (i) on suppose que $\lambda \in [0, 1]$. Dans (ii) on remplace A par $k^{\frac{1}{\lambda}} A$, pour k un nombre positif, alors

$$\lambda k^{\frac{1}{\lambda}} \langle Ax, x \rangle + 1 - \lambda \geq k \langle A^\lambda x, x \rangle, \quad (2.10)$$

pour $\|x\| = 1$ (d'après (ii)).

Posons $k = \langle Ax, x \rangle^{-\lambda}$ dans (2.10), si $\langle Ax, x \rangle \neq 0$, alors

$$\lambda \langle Ax, x \rangle^{-1} \langle Ax, x \rangle + 1 - \lambda \geq \langle Ax, x \rangle^{-\lambda} \langle A^\lambda x, x \rangle,$$

i.e, $\langle Ax, x \rangle^\lambda \geq \langle A^\lambda x, x \rangle$ pour $\|x\| = 1$, et nous obtenons (i).

$\langle Ax, x \rangle = 0$, alors $A^{\frac{1}{2}}x = 0$, donc $A^\lambda x = 0$ pour $\lambda \in [0, 1]$ par induction et continuité de A nous obtenons (i).

2.3 Inégalité de Lowner-Heinz et inégalité de Furuta

Théorème 2.3.1. [22] (*Inégalité de Lowner-Heinz*)

Soit A un opérateur borné et linéaire sur un espace de Hilbert H .

Alors on a l'inégalité suivante :

$$A \geq B \geq 0 \quad \text{assure } A^\alpha \geq B^\alpha \quad \text{pour tout } \alpha \in [0, 1].$$

Preuve.

(i) Dans le cas $A \geq B > 0$. Soit $A^\alpha \geq B^\alpha$ et $A^\beta \geq B^\beta$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, alors on prouve seulement $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, par la continuité d'un opérateur.

$$\|A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}}\| = r(A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}})$$

(car $A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}}$ est positif)

$$= r\left(A^{\frac{(\alpha-\beta)}{4}} A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}} A^{\frac{(\beta-\alpha)}{4}}\right) \text{ (car } r(ST) = r(TS) \text{ par théorème 1.6.3).}$$

$$r\left(A^{\frac{-\beta}{2}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-\alpha}{2}}\right) \leq \|A^{\frac{-\beta}{2}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-\alpha}{2}}\| \leq \|A^{\frac{-\beta}{2}} B^{\frac{\beta}{2}}\| \|B^{\frac{\alpha}{2}} A^{\frac{-\alpha}{2}}\| \leq 1.$$

La dernière inégalité decoule par $A^\alpha \geq B^\alpha$ et $A^\beta \geq B^\beta$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, alors on a $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

(ii) dans le cas général $A \geq B \geq 0$ la condition $A \geq B \geq 0$ assure $A + \varepsilon I \geq B + \varepsilon I$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$ et $B_\varepsilon = B + \varepsilon I$ sont inversibles et $A_\varepsilon \geq B_\varepsilon > 0$, alors $A_\varepsilon^\alpha \geq B_\varepsilon^\alpha > 0$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$ par (i). Si $\varepsilon \rightarrow 0$ on obtient l'inégalité désirée comme un corollaire simple de l'inégalité Lowner-Heinz.

Corollaire 2.3.1. $A^\alpha \geq B^\alpha$ ne tient pas en général pour tout $\alpha > 0$ même si $A \geq B \geq 0$.

Preuve du corollaire 2.3.1

Ici nous donnons un contre exemple simple. Soient A et B définis par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors } A \geq B \geq 0 \text{ et } A \text{ peut-être décomposé comme suit :}$$

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

tel que t_1 et t_2 sont des valeurs propres de A ; $t_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{10}$ et $t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{10}$. $a = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $b = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$. On définit $F(\alpha)$ par :

$$F(\alpha) = A^\alpha - B^\alpha = \begin{pmatrix} a^2 t_1^\alpha + b^2 t_2^\alpha - 1 & -a b t_1^\alpha + a b t_2^\alpha \\ -a b t_1^\alpha + a b t_2^\alpha & b^2 t_1^\alpha + a^2 t_2^\alpha \end{pmatrix}.$$

on a seulement montrer que l'une ou l'autre des valeurs propres de $F(\alpha)$ est négative si $\alpha > 1$. posons $g(\alpha) =$ le determinant de $F(\alpha)$. Alors

$$g(\alpha) = (a^2 t_1^\alpha + b^2 t_2^\alpha - 1)(b^2 t_1^\alpha + a^2 t_2^\alpha) - (a b t_2^\alpha - a b t_1^\alpha)^2 = 1 - (b^2 t_1^\alpha + a^2 t_2^\alpha)$$

Si $\alpha > 1$, alors $g'(\alpha) = -(a^2 t_2^{2\alpha} - b^2) \log(t_2/t_2^\alpha) < -(a^2 t_2^2 - b^2) \log(t_2/t_2^\alpha)$ par $\alpha > 1$

$$= -(5 + 3\sqrt{5}) \log(t_2/10t_2^\alpha) < 0$$

par $t_2 > 1$ on obtient $g(1) = 0$ et $g'(\alpha) < 0$ si $\alpha > 1$, alors que $g(\alpha) < 0$ si $\alpha > 1$, c'est $F(\alpha) \not\geq 0$ si $\alpha > 1$, d'où $A^\alpha \not\geq B^\alpha$, si $\alpha > 1$.

Théorème 2.3.2. [20] (Inégalité de Furuta)

Soient A et B deux opérateurs dans $B(H)$. Si $A \geq B \geq 0$, alors pour tout $r \geq 0$ on a

$$(i) \quad (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}. \text{ et}$$

$$(ii) \quad (A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}.$$

pour tout $p \geq 0$ et $q \geq 1$ avec $(1+r)q \geq p+r$.

Lemme 2.3.1. Soit X un opérateur inversible positif et Y opérateur inversible, pour tout nombre réel λ

$$(YY^*)^\lambda = YX^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}Y^*YX^{\frac{1}{2}})^{\lambda-1}X^{\frac{1}{2}}Y^*.$$

Preuve de lemme 2.3.1. Soit $YX^{\frac{1}{2}} = UH$ la décomposition polaire de $YX^{\frac{1}{2}}$, alors que U est un opérateur unitaire et $H = |YX^{\frac{1}{2}}|$. Alors on a
 $(Y \times Y^*)^\lambda = (UH^2U^*)^\lambda = YX^{\frac{1}{2}}H^{-1}H^{2\lambda}H^{-1}X^{\frac{1}{2}}Y^* = YX^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}Y^*YX^{\frac{1}{2}})^{1-\lambda}X^{\frac{1}{2}}Y^*$

2.4 Quelques résultats sur les inclusions

Théorème 2.4.1. [19] Si A et B deux opérateurs tels que $A \geq B > 0$, alors $\log A \geq \log B$.

Preuve. Si $A \geq B > 0$, alors $A^\alpha \geq B^\alpha > 0$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$ par le théorème 2.3.1, alors $\frac{A^\alpha - I}{\alpha} \geq \frac{B^\alpha - I}{\alpha}$ donc nous avons le résultat souhaité en tendant $\alpha \rightarrow +0$.

Définition 2.4.1. Une fonction f est dite **opérateur monotone** si $f(A) \geq f(B)$ quand $A \geq B \geq 0$.

Remarque 2.4.1. L'ordre définit par $\log A \geq \log B$ est dit **ordre chaotique** cet ordre est plus faible que d'habitude $A \geq B > 0$ comme vu dans le théorème 2.4.1.

Théorème 2.4.2. [32] Soient A et B deux opérateurs inversibles positifs. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \log A \geq \log B.$$

$$(ii) \quad A^r \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \text{ pour tout } p \geq 0 \text{ et } r \geq 0.$$

Preuve. (i) $\implies$ (ii) Nous rappelons la formule :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (I + \frac{1}{n} \log X)^n = X \text{ pour tout } X > 0 \quad (2.11)$$

l'hypothèse $\log A \geq \log B$ assure $A_1 = I + \frac{\log A}{n} \geq I + \frac{\log B}{n} = B_1 \geq 0$ pour un nombre n suffisamment grand. Appliquons (ii) du théorème 2.3.2. à A_1 et B_1 on a

$$A_1^{nr} \geq (A_1^{\frac{nr}{2}} B_1^{np} A_1^{\frac{nr}{2}})^{\frac{nr}{np+nr}} \text{ pour tout } p \geq 0 \text{ et } r \geq 0, \quad (2.12)$$

or $q = \frac{np+nr}{nr}$ satisfait la condition du théorème 2.3.2. Quand $n \rightarrow +\infty$ (2.12) assure (ii) par (2.11).

(ii) $\implies$ (i). En prenons le logarithme de deux côtés de (ii), on a

$$r(p+r) \log A \geq r \log(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}) \quad \text{pour tout } p \geq 0 \quad \text{et } r \geq 0,$$

par théorème 2.4.1 et on obtient $\log A \geq \log B$ en tendant $r \rightarrow +0$.

Théorème 2.4.3. [32]

- (i) *Tout opérateur log-hyponormal est un opérateur de classe A.*
- (ii) *Tout opérateur de classe A est un opérateur paranormal.*

Preuve.

- (i) Supposons que T est un opérateur log-hyponormal. Alors T est inversible et on a

$$\log \|T\|^2 \geq \log \|T^*\|^2. \quad (2.13)$$

Nous obtenons (2.14) de théorème 2.4.2

$$\|T\|^{2p} \geq (\|T\|^p \|T^*\|^{2p} \|T\|^p)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout } p \geq 0. \quad (2.14)$$

On pose $p = 1$ dans (2.14), alors on a

$$\|T\|^2 \geq (\|T\| \|T^*\|^2 \|T\|)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Par lemme 2.3.1 et $\|T^*\|^2 = TT^*$ (2.15) équivalent à

$$\|T\|^2 \geq \|T\| T (T^* \|T\|^2 T)^{-\frac{1}{2}} T^* \|T\|,$$

c'est

$$(T^* \|T\|^2 T)^{\frac{1}{2}} \geq T^* T,$$

alors

$$\|T^2\| \geq \|T\|^2.$$

Et par conséquent T est un opérateur de classe A.

(ii) Supposons que T est un opérateur de classe A, c'est à dire

$$|T^2| \geq |T|^2, \quad (2.16)$$

alors pour tout vecteur unitaire $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|T^2x\|^2 &= \langle (T^2)^*x, x \rangle = \langle |T^2|^2 x, x \rangle \geq \langle |T^2| x, x \rangle^2 \text{ par (i) de théorème 2.3.1.} \\ &\geq \langle |T|^2 x, x \rangle^2 = \|Tx\|^4, \quad \text{par (2.16)} \end{aligned}$$

c'est $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ pour tout vecteur unitaire $x \in H$, alors T est un opérateur paranormal.

Théorème 2.4.4. [32] *Tout opérateur p -hyponormal inversible est un opérateur log-hyponormal.*

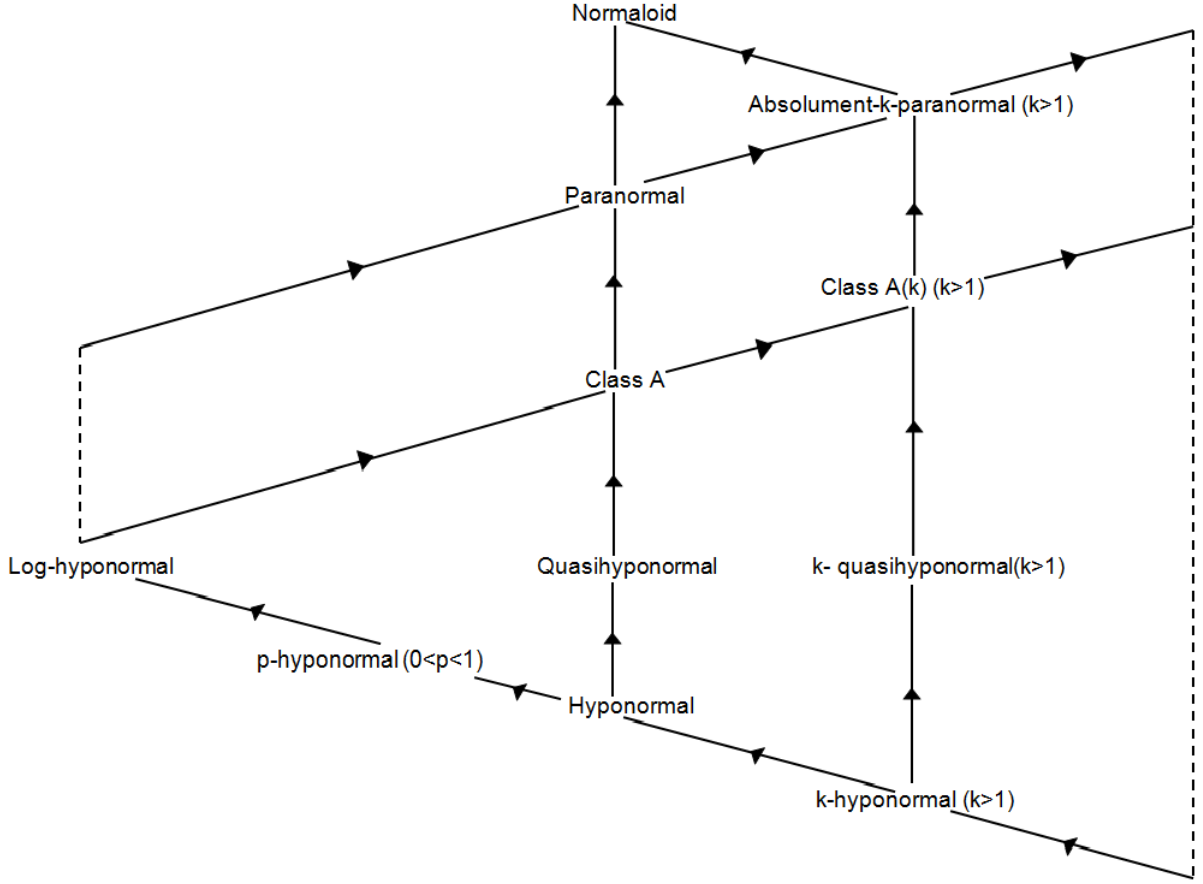
Théorème 2.4.5. [37]

- (i) *Tout opérateur log-hyponormal est un opérateur de classe $A(k)$ pour $k > 0$.*
- (ii) *Tout opérateur inversible de classe A est un opérateur de classe $A(k)$ pour $k \geq 1$.*
- (iii) *Tout opérateur paranormal est un opérateur absolu- k -paranormal pour $k \geq 1$.*
- (iv) *Pour tout $k > 0$, tout classe $A(k)$ est un opérateur absolu- k -paranormal.*

Proposition 2.4.1. *Pour tout $k > 0$, on a les assertions suivantes :*

- (i) *Tout opérateur k -quasihyponormal appartient à classe $A(k)$.*
- (ii) *Tout opérateur k -hyponormal appartient à classe $A(k)$.*

Diagramme des inclusion des classes



2.5 Inégalités d'opérateurs associés avec inégalité de Kantorovich et inégalité de Holder-McCarthy

Théorème 2.5.1. [38] (*Inégalité de Kantorovich*)

Soit A un opérateur positif sur un espace de Hilbert H tel que $M \geq A \geq m > 0$. On a les inégalités suivantes pour tout vecteur unitaire $x \in H$

- (i) $\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$.
- (ii) $\langle A^2x, x \rangle \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} \langle Ax, x \rangle^2$.

Preuve.

(i) D'après $M \geq A \geq m > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq (MI - A)A^{-1}(A - mI) \\ &= MI - A - mMA^{-1} + mI. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} m + M &\geq \langle Ax, x \rangle + mM \langle A^{-1}x, x \rangle \quad \text{pour tout vecteur unitaire } x \in H \\ &\geq 2\sqrt{mM} \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \end{aligned}$$

en simplifiant cette inégalité, on obtient (i)

(ii) On pose $x = \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}$ dans (i) on a

$$\left\langle A \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}, \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|} \right\rangle \left\langle A^{-1} \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}, \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|} \right\rangle \leq \frac{(m + M)^2}{4mM}.$$

Par simplification de cette inégalité avec $\|x\| = 1$, on obtient (ii).

Remarque 2.5.1. (i) Il est intéressant de souligner que la constante $\frac{(m+M)^2}{4mM}$ dans le théorème 2.5.1 peut être écrite comme suit $\frac{(m+M)^2}{4mM} = \left(\frac{\frac{m+M}{2}}{\sqrt{mM}}\right)^2$, le numérateur est la moyenne arithmétique et le dénominateur est la moyenne géométrique de m et M respectivement, cette constante $\frac{(m+M)^2}{4mM}$ est dite **la constante de Kantorovich**.

(ii) (i) $\Leftrightarrow$ (ii). (i) $\Rightarrow$ (ii) est démontré dans la preuve du théorème 2.5.1. On démontre que (ii) $\Rightarrow$ (i).

En effet on remplace seulement x par $\frac{A^{-\frac{1}{2}}x}{\|A^{-\frac{1}{2}}x\|}$ dans (ii).

(iii) $\langle A^2x, x \rangle \geq \langle Ax, x \rangle^2$ satisfait pour $\|x\| = 1$ par l'inégalité de Hölder-McCarthy et on remarque (ii) du théorème 2.5.1 est une inégalité complémentaire d'inégalité Hölder-McCarthy.

Théorème 2.5.2. [38] Soit A un opérateur positif sur un espace de Hilbert H satisfait $M \geq A \geq m > 0$. Soit $f(t)$ une fonction réelle convexe et continue sur $[m, M]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite pour tout vecteur unitaire x et pour tout nombre réel q cela dépend de (i) ou (ii)

$$\langle f(A)x, x \rangle \leq \frac{(mf(M) - Mf(m))}{(q-1)(M-m)} \left(\frac{(q-1)(f(M) - f(m))}{q(mf(M) - Mf(m))} \right)^q \langle Ax, x \rangle^q, \quad (2.17)$$

sous l'une des conditions suivantes (i) et (ii)

- (i) $f(M) > f(m)$, $\frac{f(M)}{M} > \frac{f(m)}{m}$ et $\frac{f(m)}{m}q \leq \frac{f(M)-f(m)}{M-m} \leq \frac{f(M)}{M}q$
sont satisfaites pour tout nombre réel $q > 1$,
- (ii) $f(M) < f(m)$, $\frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m}$ et $\frac{f(m)}{m}q \leq \frac{f(M)-f(m)}{M-m} \leq \frac{f(M)}{M}q$
sont satisfaites pour tout nombre réel $q < 0$.

Corollaire 2.5.1. Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H satisfaisant $M \geq A \geq m > 0$, alors l'inégalité suivante est satisfaite pour tout vecteur unitaire x et pour p et q des nombre réel cela dépend de (i) ou (ii)

$$\langle A^p x, x \rangle \leq \frac{(mM^p - Mm^p)}{(q-1)(M-m)} \left(\frac{(q-1)(M^p - m^p)}{q(mM^p - Mm^p)} \right)^q \langle Ax, x \rangle^q \quad (2.18)$$

sous l'une de deux conditions suivantes (i) et (ii) :

- (i) $m^{p-1}q \leq \frac{M^p - m^p}{M-m} \leq M^{p-1}q$ satisfaite pour tout nombre réel $p > 1$ $q > 1$,
- (ii) $m^{p-1}q \leq \frac{M^p - m^p}{M-m} \leq M^{p-1}q$ satisfaite pour tout nombre réel $p < 0$ $q < 0$.

Pour montrer le théorème 2.5.1, on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.5.1. Soit $h(t)$ une fonction définit par :

$$h(t) = \frac{1}{t^q} \left(k + \frac{K-k}{M-m}(t-m) \right). \quad (2.19)$$

sur $[m, M]$ ($M > m > 0$) pour tout nombre réel q tel que $q \neq 0, 1$ et pour tous nombres réels K, k .

Alors $h(t)$ a la limite superieur suivante sur $[m, M]$:

$$\frac{mK - Mk}{(q-1)(M-m)} \left(\frac{(q-1)(K-k)}{q(mK - Mk)} \right)^q, \quad (2.20)$$

où m, M, k, K et q dans (2.19) satisfont l'une de deux conditions suivantes (i) et (ii) :

- (i) $K > k$, $\frac{K}{M} > \frac{k}{m}$ et $\frac{k}{m}q \leq \frac{K-k}{M-m} \leq \frac{K}{M}q$ satisfaite pour tout nombre réel $q > 1$.
- (ii) $K < k$, $\frac{K}{M} < \frac{k}{m}$ et $\frac{k}{m}q \leq \frac{K-k}{M-m} \leq \frac{K}{M}q$ satisfaite pour tout nombre réel $q < 0$.

Preuve. Par un calcul différentiel, $h'(t_1) = 0$ où $t_1 = \frac{q}{q-1} \frac{(mK - Mk)}{K-k}$, et il se trouve que t_1 satisfait à la condition requise $t_1 \in [m, M]$. Aussi t_1 donne la limite superieur de $h(t)$ sur $[m, M]$ sous l'une des conditions (i) et (ii).

Preuve de Théorème 2.5.2 Soit $f(t)$ une fonction à valeurs réelles convexe et continue sur $[m, M]$, on a

$$f(t) \leq f(m) + \frac{f(M) - f(m)}{M-m}(t-m) \quad \text{pour tout } t \in [m, M] \quad (2.21)$$

En appliquant le calcul fonctionnel standard des opérateurs positifs à (2.20), $M \geq \langle Ax, x \rangle \geq m$, nous obtenons pour tout vecteur unitaire x

$$\langle f(A)x, x \rangle \leq f(m) + \frac{f(M) - f(m)}{M - m} (\langle Ax, x \rangle - m), \quad (2.22)$$

Multiplions par $\langle Ax, x \rangle^{-q}$ sur les deux côtés de (2.21), on a

$$\langle Ax, x \rangle^{-q} \langle f(A)x, x \rangle \leq h(t), \quad (2.23)$$

où $h(t) = \langle Ax, x \rangle^{-q} \left(f(m) + \frac{f(M) - f(m)}{M - m} (\langle Ax, x \rangle - m) \right)$.

Alors nous obtenons

$$\langle f(A)x, x \rangle \leq \left[\max_{m \leq t \leq M} h(t) \right] \langle Ax, x \rangle^q. \quad (2.24)$$

Preuve de corollaire 2.5.1 Posons $f(t) = t^p$ pour $p \notin [0, 1]$ dans théorème 2.5.2. Soit $f(t)$ une fonction à valeurs réelles convexe et continue sur $[m, M]$, $M^p > m^p$ et $M^{p-1} > m^{p-1}$ pour tout $p > 1$, c'est, $f(M) > f(m)$ et $\frac{f(M)}{M} > \frac{f(m)}{m}$ pour tout $p > 1$. Aussi $M^p < m^p$ et $M^{p-1} < m^{p-1}$ pour tout $p < 0$, c'est, $f(M) < f(m)$ et $\frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m}$ pour tout $p < 0$.

Corollaire 2.5.2. Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H satisfaisant $M \geq A \geq m > 0$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\langle \log(A)x, x \rangle \leq \frac{1}{M - m} \left(\frac{q - 1}{\log(\frac{M}{m})} \right)^{q-1} \left(\frac{\log(\frac{M}{m})}{q} \right)^q \langle Ax, x \rangle^q,$$

pour tout vecteur unitaire x et pour les nombres réels p et q selon la condition :

$$(i) \quad M^m > m^M \text{ et } m^{\frac{q}{m}} \leq \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{M-m}} \leq M^{\frac{q}{M}}$$

Preuve. On pose $f(t) = \log(t)$ dans le théorème 2.5.2, où $f(t)$ est une fonction des valeurs réelles continue et convexe sur $[m, M]$, $M > m$ et $M^m > m^M$, c'est $f(M) > f(m)$ et $\frac{f(M)}{M} > \frac{f(m)}{m}$.

Mais $f(M) < f(m)$ n'est pas vérifiée parceque $M > m$.

Exemple 2.5.1. dans cet exemple on a appliquée le théorème (Inégalité de Kantorovich)

Soit la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 1 \leq A \leq 2$$

— On vérifie que A une matrice positive :

$$\langle Ax, x \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1^2 + 2x_2^2 \geq 0$$

donc A est une matrice positive.

— On vérifie que $A - I \geq 0$ et $2I - A \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle (A - I)x, x \rangle &= \left\langle \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (2I - A)x, x \rangle &= \left\langle \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Alors $A - I \geq 0$ et $2I - A \geq 0$

Alors d'après le théorème (Inégalité de Kantorovich) on a

$A \geq 0$ et $0 < 1 \leq A \leq 2$ avec $\|x\| = 1$.

Alors

$$(i) \quad \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

— Calcul de (A^{-1}) :

$$(A^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\langle Ax, x \rangle = x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\begin{aligned} \langle A^{-1}x, x \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle &= (x_1^2 + 2x_2^2)(x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2) = x_1^4 + x_2^4 + (2 + \frac{1}{2})x_1^2x_2^2 \\ &= x_1^4x_2^4 + \frac{5}{4}x_1^2x_2^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

On prend $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$$

En substituant x dans (2.25) :

$$\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9} \times (\frac{20}{4} + \frac{10}{4}) = \frac{30}{36} < 1 \quad (2.26)$$

$$\frac{(m+M)^2}{4mM} = \frac{(1+2)^2}{4 \times 2 \times 1} = \frac{9}{8} > 1 \quad (2.27)$$

d'après les résultats (2.26) et (2.27) on a

$$\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

Donc la première inégalité de Kantorovich est vérifiée.

(ii) $\langle A^2x, x \rangle \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} \langle Ax, x \rangle^2$

— Calcul de A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

— Calcul du $\langle A^2x, x \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle A^2x, x \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1^2 + 4x_2^2 + 49x_3^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

— Maintenant nous calculons $\langle Ax, x \rangle^2$:

$$\langle Ax, x \rangle^2 = (x_1^2 + 2x_2^2)^2 = x_1^4 + 4x_2^4 + 4x_1^2x_2^2 \quad (2.29)$$

En substituant x dans (2.28) et (2.29)

$$\langle A^2x, x \rangle = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3 \quad (2.30)$$

$$\langle Ax, x \rangle^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{28}{7}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

— Calcul de la deuxième partie de l'inégalité (ii)

$$\frac{(m+M)^2}{4mM} \langle Ax, x \rangle^2 = \frac{9}{8} \times \frac{25}{9} = \frac{25}{8} = 3.125 \quad (2.31)$$

d'après (2.30) et (2.31) on a

$$\langle A^2x, x \rangle \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} \langle Ax, x \rangle^2.$$

Donc la deuxième inégalité est vérifiée.

Maintenant nous appliquons le théorème (2.5.2) sur cet exemple

On prend l'application $f(x) = x^2$ et $q = 2$, $2m \leq \frac{M^2-m^2}{M-m} \leq 2M$

$2 \leq 3 \leq 4$ (vérifiée)

$$\begin{aligned} \langle A^2x, x \rangle &\leq \frac{mM^2 - Mm^2}{(2-1)(M-m)} \left(\frac{(2-1)(M^2 - m^2)}{2(mM^2 - Mm^2)} \right)^2 \langle Ax, x \rangle^2 \\ &= \frac{mM(M-m)}{(M-m)} \times \frac{1}{4} \left(\frac{(M-m)(M+m)}{mM(M-m)} \right)^2 \langle Ax, x \rangle^2 \\ &= \frac{mM}{4} \frac{(M+m)^2}{mM^2} \langle Ax, x \rangle^2 \\ &= \frac{(m+M)^2}{4mM} \langle Ax, x \rangle^2 \\ &\implies \langle A^2x, x \rangle \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} \langle Ax, x \rangle^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Alors d'après (2.32) l'inégalité (ii) est vérifiée.

Théorème 2.5.3. [20]

Soit A un opérateur positif sur un espace de Hilbert H satisfait

$M \geq A \geq m \geq 0$. on a

- (i) Dans le cas $p > 1$: $\langle Ax, x \rangle^p \leq \langle A^p x, x \rangle \leq K_+(m, M, p) \langle Ax, x \rangle^p$,
 où $K_+(m, M, p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \frac{(M^p - m^p)^p}{(M-m)(mM^p - Mm^p)^{p-1}}$.
- (ii) Dans le cas $p < 0$: $\langle Ax, x \rangle^p \leq \langle A^p x, x \rangle \leq K_-(m, M) \langle Ax, x \rangle^p$,
 où $K_-(m, M, p) = \frac{(mM^p - Mm^p)}{(p-1)(M-m)} \left(\frac{(p-1)M^p - m^p}{p(mM^p - Mm^p)} \right)^p$.

pour tout vecteur unitaire x .

Preuve. Soit $f(t) = t^p$ une fonction convexe pour $p \notin [m, M]$, les assertions dans corollaire 2.5.1. vérifiées dans le cas $p \notin [m, M]$ et $q = p$, alors la seconde inégalité dans (i) et (ii) sont vérifiées par corollaire 2.5.1. La premières inégalités dans (i) et (ii) decoule par inégalité de Hölder McCarthy.

2.6 Inégalité de Selberg

Théorème 2.6.1. [20] (*Inégalité de Selberg*)

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ et x sont des nombres non nuls dans un espace de Hilbert H , alors

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\langle x, x_i \rangle|^2}{\sum_{j=1}^n |\langle x_i, x_j \rangle|} \leq \|x\|^2. \quad (S1)$$

L'égalité dans (S1) satisfaite si et seulement si $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ pour quelques scalaires $a_1, a_2, \dots, a_n$ tel que $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ ou $|a_i| = |a_j|$ avec $\langle a_i x_i, a_j x_j \rangle \geq 0$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \|a_i x_i\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \langle x, x_i \rangle + \sum_{i,j}^n a_i \bar{a}_j \langle x_i, x_j \rangle \\ &\leq \|x\|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \langle x, x_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n (|a_i|^2 + |a_j|^2) |\langle x_i, x_j \rangle| \\ &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \langle x, x_i \rangle + \sum_{i=1}^n \{|a_i|^2 \sum_{j=1}^n |\langle x_i, x_j \rangle|\}, \end{aligned}$$

on a l'inégalité souhaitée si $a_i = \frac{\langle x, x_i \rangle}{\sum_{j=1}^n |\langle x_i, x_j \rangle|}$

L'égalité dans (S1) est vérifiée si et seulement si (2.33) et (2.34) sont satisfaites :

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (2.33)$$

$$\sum_{i,j}^n a_i \bar{a}_j \langle x_i, x_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n (|a_i|^2 + |a_j|^2) |\langle x_i, x_j \rangle|. \quad (2.34)$$

La condition (2.34) est équivalent à (2.35) :

$$\sum_{i,j}^n 2\operatorname{Re}\{a_i \bar{a}_j \langle x_i, x_j \rangle\} = \sum_{i,j}^n (|a_i|^2 + |a_j|^2) |\langle x_i, x_j \rangle|. \quad (2.35)$$

D'autre part, l'inégalité (2.36) est toujours valide pour tous i et j ,

$$2\operatorname{Re}\{\langle a_i x_i, a_j x_j \rangle\} \leq |a_i| |a_j| |\langle x_i, x_j \rangle| \leq (|a_i|^2 + |a_j|^2) |\langle x_i, x_j \rangle|. \quad (2.36)$$

Alors (2.35) est équivalente à (2.37) et (2.38) pour i et j :

en comparant avec (2.36)

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \text{pour } i \neq j. \quad (2.37)$$

$$\langle a_i x_i, a_j x_j \rangle = |\langle a_i x_i, a_j x_j \rangle| \text{ et } |a_i| = |a_j|. \quad (2.38)$$

Remarque 2.6.1. Les conditions (C_1) et (C_2) de l'égalité dans le théorème 2.6.1, sont suffisantes :

$$(C_1) \quad x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \text{ pour quelques scalaires } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ tel que}$$

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \text{pour tout } i \neq j.$$

$$(C_2) \quad x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \text{ pour quelques scalaires } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ tel que } |a_i| \text{ est une constante pour tout } i \text{ et } \langle a_i x_i, a_j x_j \rangle \geq 0 \text{ pour tout } i, j.$$

On voit facilement que (C_1) et (C_2) ne sont pas toujours des conditions nécessaires pour l'égalité (S1) du théorème 2.6.1. Soit x_1, x_2 et x_3 tels que

$$x_1 = (1, 0, 0), \quad x_2 = (0, 1, 0), \quad \text{et} \quad x_3 = (1, 0, 1).$$

Posons $x = x_1 + 2x_2 + x_3$. Ce cas est ni (C_1) ni (C_2) .

Théorème 2.6.2. [20] *Pour tout opérateur T sur un espace de Hilbert H et vecteurs non nuls $x_1, x_2, \dots, x_n \notin N(T^*)$, on a*

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\langle Tx, x_i \rangle|^2}{\sum_{j=1}^n |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} x_i, x_j \rangle|} \leq \langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle \quad (S2)$$

est vérifiée pour tout $x \notin N(T)$ et pour tout nombre réel α avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Et de plus

- (i) $0 < \alpha < 1$. *L'égalité dans (S2) est vérifiée si et seulement si $Tx = \sum_{i=1}^n a_i |T^*|^{2(1-\alpha)} x_i$ (équivalent, $|T^*|^{2\alpha} x = \sum_{i=1}^n a_i T^* x_i$) pour quelques scalaires $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que pour $i \neq j$, $\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} x_i, x_i \rangle = 0$ ou $|a_i| = |a_j|$ avec $\langle a_i |T^*|^{2(1-\alpha)} x_i, x_i \rangle \geq 0$.*
- (ii) $\alpha = 1$. *L'égalité dans (S2) est vérifiée si et seulement si $Tx = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ pour quelques scalaires $a_1, a_2, \dots, a_n$ tel que pour $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ ou $|a_i| = |a_j|$ avec $\langle a_i x_i, a_j x_j \rangle \geq 0$.*
- (iii) $\alpha = 0$. *L'égalité dans (S2) est vérifiée si et seulement si $x = \sum_{i=1}^n a_i T^* x_i$ pour quelques scalaires $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que pour $i \neq j$, $\langle T^* x_i, T^* x_j \rangle = 0$ ou $|a_i| = |a_j|$ avec $\langle a_i T^* x_i, a_j T^* x_j \rangle \geq 0$.*

Preuve. Dans le cas $\alpha = 1$ ou 0 , le résultat est clair par le théorème 2.6.1, alors on considère seulement le cas $0 < \alpha < 1$. Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T , où U est une isométrie partielle et $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ avec $N(U) = N(|T|)$. pour démontrer le théorème 2.6.1, on pose les deux relations importantes

$$N(S^q) = N(S) \quad (\text{pour tout opérateur positif } S \text{ et pour tout nombre positif } q). \quad (2.39)$$

$$|T^*|^q = U|T|^q U^* \quad (\text{pour tout nombre positif } q). \quad (2.40)$$

(2.39) est évidente et (2.40) a été montré dans (ii) par théorème 1.5.1. Maintenant nous remplaçons x par $|T|^\alpha x$ et x_i par $|T|^\beta U^* x_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, où $\beta = 1 - \alpha$.

Mais

$$\langle |T|^\beta U^* x_i, |T|^\beta U^* x_j \rangle = \langle U|T|^{2\beta} U^* x_i, x_j \rangle = \langle |T^*|^{2\beta} x_i, x_j \rangle, \quad \text{par (2.40)}$$

et $x_1, x_2, \dots, x_n \notin N(|T^*|^\beta) = N(|T^*|) = N(T^*)$, par (2.39).

$$|T|^\alpha x = \sum_{i=1}^n a_i |T|^\beta U^* x_i \Leftrightarrow |T|^{2\alpha} x = \sum_{i=1}^n a_i |T| U^* x_i = \sum_{i=1}^n a_i T^* x_i, \quad (\text{d'après (2.39) pour } |T|)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 |T|^\alpha x = \sum_{i=1}^n a_i |T|^\beta U^* x_i &\Leftrightarrow |T|x = |T|^{\alpha+\beta} x = \sum_{i=1}^n a_i |T|^{2\beta} U^* x_i \quad (\text{d'après (2.81)} \quad \text{pour } |T|) \\
 &\Leftrightarrow U|T|x = \sum_{i=1}^n a_i U|T|^{2\beta} U^* x_i \quad (\text{car } N(U) = N(|T|)) \\
 &\Leftrightarrow Tx = \sum_{i=1}^n a_i |T|^{2\beta} x_i \quad (\text{d'après (2.40)}).
 \end{aligned}$$

Chapitre 3

Les inégalités de rayons numériques des opérateurs

Pour $T \in B(H)$, soit $w(T)$ et $\|T\|$ le rayon numérique et la norme usuelle de l'opérateur T respectivement. il est bien connu que $w(\cdot)$ définit une norme sur $B(H)$, qui est équivalente à la norme d'opérateurs usuelle $\|\cdot\|$.

En fait, pour chaque $T \in B(H)$,

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\|. \quad (3.1)$$

3.1 Quelques résultats

Théorème 3.1.1. [6] *Pour tout opérateur $T \in B(H)$ et un nombre naturel n on a*

$$w(T^n) \leq w^n(T). \quad (3.2)$$

De plus, nous donnons quelques inégalités récentes pour un opérateur.

Théorème 3.1.2. [26] *Pour tout opérateur $T \in B(H)$ on a le raffinement de la première inégalité suivante dans (3.1)*

$$w(T) \leq \frac{1}{2}(\|T\| + \|T^2\|^{\frac{1}{2}}) \quad (3.3)$$

Théorème 3.1.3. [17] *Soit $T \in B(H)$ auto-adjoint, et soit x un vecteur dans H . Alors*

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \langle |T|x, x \rangle.$$

Théorème 3.1.4. [17] Soit $T \in B(H)$, et $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors

$$|\langle Tx, x \rangle|^2 \leq \langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle \langle |T|^{2(1-\alpha)} y, y \rangle \quad \text{pour tous } x, y \in H.$$

Théorème 3.1.5. [27] Si $T \in B(H)$, alors

$$\frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\| \leq (w(T))^2 \leq \frac{1}{2} \|T^*T + TT^*\|. \quad (3.4)$$

Preuve. Soit $T = A + iB$ la décomposition cartésienne de T . Alors A et B sont auto-adjoint, et $T^*T + TT^* = 2(A^2 + B^2)$. Soit x un vecteur dans H . Alors, par la convexité de la fonction $f(t) = t^2$, on a

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x \rangle|^2 &= \langle Ax, x \rangle^2 + \langle Bx, x \rangle^2 \geq \frac{1}{2} (|\langle Ax, x \rangle| + |\langle Bx, x \rangle|)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} |\langle (A \pm B)x, x \rangle|^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (w(T))^2 &= \sup\{|\langle Tx, x \rangle|^2 : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &\geq \frac{1}{2} \sup\{|\langle (A \pm B)x, x \rangle|^2 : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \frac{1}{2} \|A \pm B\|^2 = \frac{1}{2} \|(A \pm B)^2\|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2(w(T))^2 &\geq \frac{1}{2} \|(A + B)^2\| + \frac{1}{2} \|(A - B)^2\| \\ &\geq \frac{1}{2} \|(A + B)^2 + (A - B)^2\| = \|A^2 + B^2\| = \frac{1}{2} \|T^*T + TT^*\|, \end{aligned}$$

et donc

$$(w(T))^2 \geq \frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\|,$$

ce qui prouve la première inégalité dans (3.4).

Pour prouver la seconde inégalité, pour tout vecteur unitaire $x \in H$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x \rangle|^2 &= \langle Ax, x \rangle^2 + \langle Bx, x \rangle^2 \\ &\leq \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 = \langle A^2x, x \rangle + \langle B^2x, x \rangle = \langle (A^2 + B^2)x, x \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
 (w(T))^2 &= \sup\{|\langle Tx, x \rangle|^2 : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &\leq \sup\{\langle (A^2 + B^2)x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &= \|A^2 + B^2\| = \frac{1}{2}\|T^*T + TT^*\|,
 \end{aligned}$$

qui prouve la seconde inégalité dans (3.4).

Nous avons la preuve de deux inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2}\|A^2 + B^2\| \leq w^2(T) \leq \|A^2 + B^2\|, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{4}\|(A+B)^2 + (A-B)^2\| \leq w^2(T) \leq \frac{1}{2}\|(A+B)^2 + (A-B)^2\| \quad (3.6)$$

Pour voir que les inégalités (3.4) améliorent les inégalités (3.1), considérons les inégalités

$$\frac{1}{4}\|T\|^2 \leq \frac{1}{4}\|T^*T + TT^*\| \leq (w(T))^2 \leq \frac{1}{2}\|T^*T + TT^*\| \leq \|T\|^2. \quad (3.7)$$

La première inégalité dans (3.7) est une conséquence immédiate de l'inégalité (33) dans [26], et la dernière découle par l'inégalité triangulaire et $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

Proposition 3.1.1. *Si $T \in B(H)$ tel que $T^2 = 0$, alors*

$$\|T\|^2 = \|T^*T + TT^*\| = \|T^*T - TT^*\|.$$

Preuve. Pour montrer le résultat souhaité, on considère les inégalités suivantes

$$\|T\|^2 - \|T^2\| \leq \|T^*T + TT^*\| \leq \|T\|^2 \leq \|T^*T - TT^*\| \leq \|T\|^2 - \|T^2\| \quad (3.8)$$

qui existe dans [25].

Proposition 3.1.2. *Si $T \in B(H)$ et tel que $\|T\|^2 = \|T^*T + TT^*\|$ ou bien*

*$\|T\|^2 = \|T^*T - TT^*\|$, alors T n'est pas inversible.*

Preuve. Si T est inversible, alors on a

$$\|T\|^2 + \|T^{-1}\|^{-2} \leq \|T^*T + TT^*\| \quad (3.9)$$

et

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \|T\|^2 + \|T^{-1}\|^{-2}, \quad (3.10)$$

à partir de laquelle le résultat souhaité.

Proposition 3.1.3. *Pour $T \in B(H)$, on a $\|T^*T + TT^*\| = 2\|T\|^2$ si et seulement si $\|T^2\| = \|T\|^2$.*

Preuve. Le résultat souhaité découle par les inégalités

$$2\|T^2\| \leq \|T^*T + TT^*\| \leq \|T^2\| + \|T\|^2 \leq 2\|T\|^2, \quad (3.11)$$

qui existe dans [25].

Lemme 3.1.1. *Pour $a, b \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, et $r \neq 0$, soit $M_r(a, b, \alpha) = (\alpha a^r + (1 - \alpha)b^r)^{1/r}$ et soit $M_0(a, b, \alpha) = a^\alpha b^{1-\alpha}$. Alors*

$$M_r(a, b, \alpha) \leq M_s(a, b, \alpha) \quad \text{pour } r \leq s.$$

Lemme 3.1.2. *Pour $a, b \geq 0$, et $r > 0$, soit $N_r(a, b) = (a^r + b^r)^{1/r}$. Alors*

$$N_s(a, b) \leq N_r(a, b) \quad \text{pour } s \geq r > 0.$$

Lemme 3.1.3. *Soit $T, S \in B(H)$ positifs. Alors*

$$\|(T + S)^r\| \leq \|T^r + S^r\| \quad \text{pour } 0 < r \leq 1.$$

Le premier résultat est une généralisation de la première inégalité dans (3.2).

Théorème 3.1.6. [17] *Soit $T \in B(H)$, $0 < \alpha < 1$, et $r \geq 1$. Alors*

$$w^r(T) \leq \frac{1}{2} \| |T|^{2\alpha r} + |T^*|^{2(1-\alpha)r} \|. \quad (3.12)$$

Preuve. Pour tout vecteur unitaire $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x \rangle| &\leq \langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle^{1/2} \langle |T^*|^{2(1-\alpha)} x, x \rangle^{1/2} \quad (\text{par théorème 3.1.4}) \\ &\leq \left(\frac{\langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle^r + \langle |T^*|^{2(1-\alpha)} x, x \rangle^r}{2} \right)^{1/r} \quad (\text{par lemme 3.1.1}) \\ &\leq \left(\frac{\langle |T|^{2\alpha r} x, x \rangle + \langle |T^*|^{2(1-\alpha)r} x, x \rangle}{2} \right)^{1/r} \quad (\text{par théorème 2.3.1}) \end{aligned}$$

Alors

$$|\langle Tx, x \rangle|^r \leq \frac{1}{2} \langle (|T|^{2\alpha r} + |T^*|^{2(1-\alpha)r}) x, x \rangle,$$

et donc

$$\begin{aligned}
 w^r(T) &= \sup\{|\langle Tx, x \rangle|^r : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &\leq \frac{1}{2} \sup\{\langle (|T|^{2\alpha r} + |T^*|^{2(1-\alpha)r})x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &= \frac{1}{2} \| |T|^{2\alpha r} + |T^*|^{2(1-\alpha)r} \|,
 \end{aligned}$$

Le second résultat est une généralisation de la seconde inégalité dans (3.4).

Théorème 3.1.7. [17] *Soit $T \in B(H)$, $0 < \alpha < 1$, et $r \geq 1$. Alors*

$$w^{2r}(T) \leq \| \alpha |T|^{2r} + (1 - \alpha) |T^*|^{2r} \|.$$

Preuve. Pour tout vecteur unitaire $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}
 |\langle Tx, x \rangle|^2 &\leq \langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle \langle |T^*|^{2(1-\alpha)} x, x \rangle \quad (\text{par théorème 3.1.4}) \\
 &\leq \langle |T|^2 x, x \rangle^\alpha \langle |T^*|^2 x, x \rangle^{(1-\alpha)} \quad (\text{par théorème 2.3.1}) \\
 &\leq (\alpha \langle |T|^2 x, x \rangle^r + (1 - \alpha) \langle |T^*|^2 x, x \rangle^r)^{1/r} \quad (\text{par lemme 3.1.1}) \\
 &\leq (\alpha \langle |T|^{2r} x, x \rangle + (1 - \alpha) \langle |T^*|^{2r} x, x \rangle)^{1/r} \quad (\text{par théorème 2.3.1}) \\
 &= \langle (\alpha |T|^{2r} + (1 - \alpha) |T^*|^{2r}) x, x \rangle^{1/r}
 \end{aligned}$$

Alors

$$|\langle Tx, x \rangle|^{2r} \leq \langle (\alpha |T|^{2r} + (1 - \alpha) |T^*|^{2r}) x, x \rangle,$$

et donc

$$\begin{aligned}
 w^{2r}(T) &= \sup\{|\langle Tx, x \rangle|^{2r} : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &\leq \sup\{\langle (\alpha |T|^{2r} + (1 - \alpha) |T^*|^{2r}) x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &= \| \alpha |T|^{2r} + (1 - \alpha) |T^*|^{2r} \|,
 \end{aligned}$$

Les deux résultats sont généralisations de la seconde inégalité dans (3.3).

Théorème 3.1.8. [17] *Soit $T \in B(H)$ avec la décomposition cartésienne $T = A + iB$, et soit $0 < r \leq 2$. Alors*

$$w^r(T) \leq \| |A|^r + |B|^r \|. \quad (3.13)$$

Preuve. Premièrement nous prouvons une inégalité plus forte que (3.13) pour le cas particulier $1 \leq r \leq 2$, pour tout vecteur unitaire $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}
 |\langle Tx, x \rangle| &= (\langle Ax, x \rangle^2 + \langle Bx, x \rangle^2)^{1/2} \\
 &\leq (|\langle Ax, x \rangle|^r + |\langle Bx, x \rangle|^r)^{1/r} \quad (\text{par lemme 3.1.2}) \\
 &\leq (\langle |A|x, x \rangle^r + \langle |B|x, x \rangle^r)^{1/r} \quad (\text{par théorème 3.1.3}) \\
 &\leq (\langle |A|^r x, x \rangle + \langle |B|^r x, x \rangle)^{1/r} \quad (\text{par théorème 2.3.1}) \\
 &= \langle (|A|^r + |B|^r)x, x \rangle^{1/r}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'inégalité plus forte

$$|\langle Tx, x \rangle|^r \leq \langle (|A|^r + |B|^r)x, x \rangle,$$

et donc

$$\begin{aligned}
 w^r(T) &= \sup\{|\langle Tx, x \rangle|^r : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &\leq \sup\{\langle (|A|^r + |B|^r)x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
 &= \||A|^r + |B|^r\|.
 \end{aligned}$$

Pour le cas général, où $0 < r \leq 2$, on a

$$\begin{aligned}
 w^r(T) &\leq \|A^2 + B^2\|^{r/2} \quad (\text{par la seconde inégalité dans (3.3)}) \\
 &= \|(A^2 + B^2)^{r/2}\| \\
 &\leq \||A|^r + |B|^r\| \quad (\text{par lemme 3.1.3})
 \end{aligned}$$

Théorème 3.1.9. [17] Soit $T \in B(H)$ avec la décomposition cartésienne $T = A + iB$, et soit $r \geq 2$. Alors

$$w^r(T) \leq 2^{r/2-1} \||A|^r + |B|^r\|.$$

Preuve. Pour tout vecteur unitaire $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{|\langle Tx, x \rangle|}{\sqrt{2}} &= \left(\frac{\langle Ax, x \rangle^2 + \langle Bx, x \rangle^2}{2} \right)^{1/2} \\
 &\leq \left(\frac{|\langle Ax, x \rangle|^r + |\langle Bx, x \rangle|^r}{2} \right)^{1/r} \quad (\text{par lemme 3.1.1}) \\
 &\leq 2^{-1/r} (\langle |A|x, x \rangle^r + \langle |B|x, x \rangle^r)^{1/r} \quad (\text{par théorème 3.1.3}) \\
 &\leq 2^{-1/r} (\langle |A|^r x, x \rangle + \langle |B|^r x, x \rangle)^{1/r} \quad (\text{par théorème 2.3.1}) \\
 &= 2^{-1/r} \langle (|A|^r + |B|^r)x, x \rangle^{1/r}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$|\langle Tx, x \rangle|^r \leq 2^{r/2-1} \langle (|A|^r + |B|^r)x, x \rangle$$

et donc

$$\begin{aligned} w^r(T) &= \sup\{|\langle Tx, x \rangle|^r : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &\leq 2^{r/2-1} \sup\{\langle (|A|^r + |B|^r)x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= 2^{r/2-1} \| |A|^r + |B|^r \|, \end{aligned}$$

Le résultat final dans cette section est une généralisation des inégalités dans (3.6).

Théorème 3.1.10. [17] *Soit $T \in B(H)$ avec la décomposition cartésienne $T = A + iB$, et soit $r \geq 2$. Alors*

$$2^{-r/2-1} \| |A + B|^r + |A - B|^r \| \leq w^r(T) \leq \frac{1}{2} \| |A + B|^r + |A - B|^r \|. \quad (3.14)$$

Preuve. Comme dans la preuve de la première inégalité dans (3.7) d'après le théorème 3.1.5, on a

$$w^2(T) \geq \frac{1}{2} \| (A \pm B)^2 \|^2.$$

Alors,

$$w^r(T) \geq 2^{-r/2} \| (A \pm B)^2 \|^{r/2} = 2^{-r/2} \| |A \pm B|^r \|,$$

et donc

$$\begin{aligned} 2w^r(T) &\geq 2^{-r/2} (\| |A + B|^r \| + \| |A - B|^r \|) \\ &\geq 2^{-r/2} \| |A + B|^r + |A - B|^r \| \quad (\text{par l'inégalité triangulaire}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$w^r(T) \geq 2^{-r/2-1} \| |A + B|^r + |A - B|^r \|,$$

ce qui prouve la première inégalité dans (3.14). Démontrons la seconde inégalité dans (3.14), soit $x \in H$ un vecteur unitaire. Alors

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x \rangle|^r &= (\langle Ax, x \rangle^2 + \langle Bx, x \rangle^2)^{r/2} \\ &= 2^{-r/2} (\langle (A + B)x, x \rangle^2 + \langle (A - B)x, x \rangle^2)^{r/2} \\ &\leq 2^{-r/2} 2^{r/2-1} (|\langle (A + B)x, x \rangle|^r + |\langle (A - B)x, x \rangle|^r) \end{aligned}$$

(Par la convexité de la fonction $f(t) = t^{r/2}$ sur $[0, \infty)$)

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}(\langle |A + B|x, x \rangle^r + \langle |A - B|x, x \rangle^r) \quad (\text{par théorème (3.1.3)}) \\
&\leq \frac{1}{2}(\langle |A + B|^r x, x \rangle + \langle |A - B|^r x, x \rangle) \quad (\text{par théorème 2.3.1}) \\
&= \frac{1}{2}\langle (|A + B|^r + |A - B|^r)x, x \rangle.
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
w^r(T) &= \sup\{|\langle Tx, x \rangle|^r : x \in H, \|x\| = 1\} \\
&\leq \frac{1}{2} \sup\{\langle (|A + B|^r + |A - B|^r)x, x \rangle^r : x \in H, \|x\| = 1\} \\
&= \frac{1}{2} \| |A + B|^r + |A - B|^r \|,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la seconde inégalité dans (3.14), et la preuve est achevée.

3.2 Résultats pour deux opérateurs

Théorème 3.2.1. [23] *Si T, S sont deux opérateurs linéaires et bornés sur l'espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, alors*

$$w(TS) \leq 4w(T)w(S). \quad (3.15)$$

Dans le cas $TS = ST$,

$$w(TS) \leq 2w(T)w(S). \quad (3.16)$$

Théorème 3.2.2. [23] *Si T est un opérateur isométrique qui commute avec autre opérateur S , alors*

$$w(TS) \leq w(S). \quad (3.17)$$

On dit que T et S sont double commutes si $TS = ST$ et $TS^* = S^*T$.

Le résultat suivant est vérifié

Théorème 3.2.3. [23] *Si les opérateurs T et S sont double commutes, alors*

$$w(TS) \leq w(T)\|S\|. \quad (3.18)$$

Corollaire 3.2.1. *Soit T un opérateur normal commute avec S , alors*

$$w(TS) \leq w(T)w(S).$$

Un problème lié à l'inégalité (3.18) est de trouver la meilleure constante c pour laquelle l'inégalité $w(TS) \leq cw(T)\|S\|$ soit vérifiée pour les opérateurs T et S dans $B(H)$.

Théorème 3.2.4. [18] *Pour tout $T, S \in B(H)$ on a*

$$w(TS + ST) \leq 2\sqrt{2}w(T)\|S\|. \quad (3.19)$$

Le résultat suivant est valable pour plusieurs opérateurs :

Théorème 3.2.5. [27] *Si $A, B, C, D, S, T \in B(H)$, alors*

$$\begin{aligned} w(ATB + CSD) & \quad (3.20) \\ & \leq \frac{1}{2} \|A|T^*|^{2(1-\alpha)}A^* + B^*|T|^{2\alpha}B + C|S^*|^{2(1-\alpha)}C^* + D^*|S|^{2\alpha}D\| \end{aligned}$$

pour tout α avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

Preuve. Par le théorème 3.1.4 et d'après l'inégalité de la moyenne arithmétique-géométrique, pour tout $x \in H$ on a

$$\begin{aligned} & |\langle (ATB + CSD)x, x \rangle| \\ & \leq |\langle ATBx, x \rangle| + |\langle CSDx, x \rangle| = |\langle TBx, A^*x \rangle| + |\langle SDx, C^*x \rangle| \\ & \leq \langle |T|^{2\alpha}Bx, Bx \rangle^{1/2} \langle |T^*|^{2(1-\alpha)}A^*x, A^*x \rangle^{1/2} \\ & + \langle |S|^{2\alpha}Dx, Dx \rangle^{1/2} \langle |S^*|^{2(1-\alpha)}C^*x, C^*x \rangle^{1/2} \\ & \leq \frac{1}{2} (\langle |T|^{2\alpha}Bx, Bx \rangle \langle |T^*|^{2(1-\alpha)}A^*x, A^*x \rangle \\ & + \langle |S|^{2\alpha}Dx, Dx \rangle \langle |S^*|^{2(1-\alpha)}C^*x, C^*x \rangle) \\ & = \frac{1}{2} \langle (A|T^*|^{2(1-\alpha)}A^* + B^*|T|^{2\alpha}B + D^*|S|^{2\alpha}D + C|S^*|^{2(1-\alpha)}C^*)x, x \rangle \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} w(ATB + CSD) & = \sup\{|\langle (ATB + CSD)x, x \rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \\ & \leq \frac{1}{2} \sup\{\langle (A|T^*|^{2(1-\alpha)}A^* + B^*|T|^{2\alpha}B + D^*|S|^{2\alpha}D + C|S^*|^{2(1-\alpha)}C^*)x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ & = \frac{1}{2} \|A|T^*|^{2(1-\alpha)}A^* + B^*|T|^{2\alpha}B + C|S^*|^{2(1-\alpha)}C^* + D^*|S|^{2\alpha}D\| \end{aligned}$$

L'inégalité (3.20) donne plusieurs inégalités sur le rayon numérique comme cas particuliers.

Remarque 3.2.1. Soient $T = I$ (l'opérateur identité) et $S = 0$ dans le théorème 3.2.5, nous obtenons l'inégalité

$$w(TS) \leq \frac{1}{2} \|TT^* + S^*S\|. \quad (3.21)$$

De plus, on a l'inégalité associée

$$w(TS) \leq \frac{1}{2} \|T^*T + SS^*\|. \quad (3.22)$$

En effet, (3.22) découle par la seconde inégalité dans (3.1) et l'inégalité de moyenne arithmétique-géométrique pour la norme d'opérateurs usuelle, qui dit que si $T, S \in B(H)$, alors

$$\|TS\| \leq \frac{1}{2} \|T^*T + SS^*\|.$$

Quand T ou S ne soit pas normal, les inégalités (3.21) et (3.22) ne sont pas équivalentes.

Remarque 3.2.2. Soient $T = S = I, C = B$, et $D = \pm A$ dans le théorème 3.2.5, on obtient l'inégalité

$$w(TS \pm ST) \leq \frac{1}{2} \|T^*T + TT^* + S^*S + SS^*\|,$$

qui fournit une estimation du rayon numérique de la commutateur $TS - ST$.

Théorème 3.2.6. [17] Soit $T, S \in B(H)$, $0 < \alpha < 1$, et $r \geq 1$. Alors

$$\|T + S\|^r \leq 2^{r-2} (\| |T|^{2\alpha} + |S|^{2\alpha} \| + \| |T^*|^{2(1-\alpha)} + |S^*|^{2(1-\alpha)} \|). \quad (3.23)$$

Preuve. Pour tous vecteurs unitaires $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned} |\langle (T + S)x, y \rangle| &\leq |\langle Tx, y \rangle + \langle Sx, y \rangle| \quad (\text{par l'inégalité triangulaire}) \\ &\leq \langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle^{1/2} \langle |T^*|^{2(1-\alpha)} y, y \rangle^{1/2} + \langle |S|^{2\alpha} x, x \rangle^{1/2} \langle |S^*|^{2(1-\alpha)} y, y \rangle^{1/2} \\ &\quad (\text{par théorème 3.2.4}) \\ &\leq \left(\frac{\langle |T|^{2\alpha} x, x \rangle^r + \langle |T^*|^{2(1-\alpha)} y, y \rangle^r}{2} \right)^{1/r} + \left(\frac{\langle |S|^{2\alpha} x, x \rangle^r + \langle |S^*|^{2(1-\alpha)} y, y \rangle^r}{2} \right)^{1/r} \\ &\quad (\text{par lemme 3.1.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\frac{\langle |T|^{2\alpha r} x, x \rangle + \langle |T^*|^{2(1-\alpha)r} y, y \rangle}{2} \right)^{1/r} + \left(\frac{\langle |S|^{2\alpha r} x, x \rangle + \langle |S^*|^{2(1-\alpha)r} y, y \rangle}{2} \right)^{1/r} \quad (\text{par théorème 2.3.1}) \\
 &\leq 2^{1-1/r} \left(\frac{\langle |T|^{2\alpha r} x, x \rangle + \langle |T^*|^{2(1-\alpha)r} y, y \rangle + \langle |S|^{2\alpha r} x, x \rangle + \langle |S^*|^{2(1-\alpha)r} y, y \rangle}{2} \right)^{1/r} \\
 &\quad (\text{par la convexité de la fonction } f(t) = t^{1/r} \text{ sur } [0, \infty)).
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 &|\langle (T + S)x, x \rangle|^r \\
 &\leq 2^{r-2} (\langle |T|^{2\alpha r} + |S|^{2\alpha r} x, x \rangle + \langle |T^*|^{2(1-\alpha)r} + |S^*|^{2(1-\alpha)r} y, y \rangle)
 \end{aligned}$$

Maintenant l'inégalité (3.23) découle par le fait que pour tout $T \in B(H)$,

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : x, y \in H, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Soit $x = y$ dans la preuve du théorème 3.2.6, on peut facilement démontrer que

$$w^r(T + S) \leq 2^{r-2} \| |T|^{2\alpha r} + |S|^{2\alpha r} + |T^*|^{2(1-\alpha)r} + |S^*|^{2(1-\alpha)r} \|. \quad (3.24)$$

En particulier, si $T = S$, alors l'inégalité (3.24) réduit à l'inégalité (3.12). Un cas particulier important du théorème 3.2.6 affirme que A et B sont normaux, $\alpha = 1/2$, et $r \geq 1$

$$\|T + S\|^r \leq 2^{r-1} (\|T\|^r + \|S\|^r).$$

Chapitre 4

Inégalités de type Jensen et de type Hermite-Hadamard

Il a d'abord découvert par ch.Hermite dans 1881 .mais ce résultat n'a été nulle part mentionné dans la littérature mathématique et n'était pas largement connu comme résultat d'Hermite. L'inégalité est maintenant communément appelée l'inégalité Hermite-Hadamard

4.1 Inégalités de type Jensen

Définition 4.1.1. *Une fonction f à valeurs réelles et continue sur un intervalle I est appelée un opérateur convexe si*

$$f((1 - \lambda)A + \lambda B) \leq (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B).$$

On appelle f est un opérateur concave si

$$f((1 - \lambda)A + \lambda B) \geq (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B).$$

pour chaque opérateur A et B dans un espace de Hilbert dont les spectres sont contenus dans I et pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Remarquons qu'une fonction f est un opérateur concave si $-f$ est un opérateur convexe.

Lemme 4.1.1. [14] *Soit A et B deux opérateurs définis sur un espace de Hilbert H , si*

$$A \leq B$$

alors

$$\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle.$$

4.1.1 Inégalités de type Jensen pour les fonctions des opérateurs auto-adjoints

Théorème 4.1.1. [14] Soit A un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert et on suppose que $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ pour quelques scalaires m, M avec $m < M$. Si f est une fonction convexe sur $[m, M]$, alors

$$f(\langle Ax, x \rangle) \leq \langle f(A)x, x \rangle \quad (MP)$$

pour tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$.

Théorème 4.1.2. [14] Soient A_j des opérateurs auto-adjoints avec $\sigma(A_j) \subseteq [m, M], j \in \{1, \dots, n\}$ pour quelques scalaires $m < M$ et $x_j \in H, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$. Si f est une fonction convexe sur $[m, M]$, alors

$$f\left(\sum_{j=1}^n \langle A_j x_j, x_j \rangle\right) \leq \sum_{j=1}^n \langle f(A_j)x_j, x_j \rangle. \quad (4.1)$$

Théorème 4.1.3. [12] Soient A_j des opérateurs auto-adjoints avec $\sigma(A_j) \subseteq [m, M], j \in \{1, \dots, n\}$ pour quelques scalaires $m < M$ et $x_j \in H, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$. Si f est une fonction convexe continue définie sur $[m, M]$, alors

$$\sum_{j=1}^n \langle f(A_j)x_j, x_j \rangle \leq \frac{1}{M-m} \left[f(M) \sum_{j=1}^n \langle (A_j - mI)x_j, x_j \rangle + f(m) \sum_{j=1}^n \langle (MI - A_j)x_j, x_j \rangle \right] \quad (4.2)$$

Théorème 4.1.4. [12] Soient A_j des opérateurs auto-adjoints avec $\sigma(A_j) \subseteq [m, M], j \in \{1, \dots, n\}$ pour quelques scalaires $m < M$ et $x_j \in H, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$. Si f est une fonction convexe strictement deux fois différentiable sur $[m, M]$, alors pour tout nombre réel positif α on a

$$\sum_{j=1}^n \langle f(A_j)x_j, x_j \rangle \leq \alpha \left(\sum_{j=1}^n \langle A_j x_j, x_j \rangle \right) + \beta, \quad (4.3)$$

où

$$\beta = \mu_f t_0 + \nu_f - \alpha f(t_0),$$

$$\mu_f = \frac{f(M) - f(m)}{M - m}, \nu_f = \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m}$$

$$t_0 = \begin{cases} f'^{-1}(\frac{\mu_f}{\alpha}) & \text{si } m < f'^{-1}(\frac{\mu_f}{\alpha}) < M \\ M & \text{si } M \leq f'^{-1}(\frac{\mu_f}{\alpha}) \\ m & \text{si } f'^{-1}(\frac{\mu_f}{\alpha}) \leq m. \end{cases}$$

Théorème 4.1.5. [14] Soient H et K des espaces de Hilbert. Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle J . Soient A et A_j des opérateurs auto-adjoints et C un opérateur sur H avec les spectres contenus dans J , pour tout $j = 1, 2, \dots, k$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est un opérateur convexe sur J ;
- (ii) $f(C^*AC) \leq C^*f(A)C$ pour tout opérateur auto-adjoint $A : H \longrightarrow H$ et isométrie $C : K \longrightarrow H$;
- (iii) $f(C^*AC) \leq C^*f(A)C$ pour tout opérateur auto-adjoint $A : H \longrightarrow H$ et isométrie $C : H \longrightarrow H$;
- (iv) $f(\sum_{j=1}^k C_j^* A_j C_j) \leq \sum_{j=1}^k C_j^* f(A_j) C_j$ pour les opérateurs auto-adjoints $A_j : H \longrightarrow H$ et opérateurs linéaires bornés $C_j : K \longrightarrow H$, avec $\sum_{j=1}^k C_j^* C_j = 1_K (j = 1, \dots, k)$;
- (v) $f(\sum_{j=1}^k C_j^* A_j C_j) \leq \sum_{j=1}^k C_j^* f(A_j) C_j$ pour tous opérateurs auto-adjoints $A_j : H \longrightarrow H$ et opérateurs linéaires bornés $C_j : H \longrightarrow H$, avec $\sum_{j=1}^k C_j^* C_j = 1_H (j = 1, \dots, k)$;
- (vi) $f(\sum_{j=1}^k P_j A_j P_j) \leq \sum_{j=1}^k P_j f(A_j) P_j$ pour les opérateurs auto-adjoints $A_j : H \longrightarrow H$ et projections $P_j : H \longrightarrow H$, avec $\sum_{j=1}^k P_j^* = 1_H (j = 1, \dots, k)$.

4.1.2 Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes

Théorème 4.1.6. [12] Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ (l'intérieur de I), dont la dérivée f' est continue sur $\overset{\circ}{I}$. Si A est un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert H avec $\sigma(A) \subseteq [m, M] \subset \overset{\circ}{I}$, alors

$$0 \leq \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \leq \langle f'(A)Ax, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle \quad (4.4)$$

pour tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$.

Preuve. f est convexe et différentiable, on a

$$f(t) - f(s) \leq f'(t)(t - s)$$

pour tous $t, s \in [m, M]$.

Maintenant, si nous avons choisi dans cette inégalité $s = \langle Ax, x \rangle \in [m, M]$ pour tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$.

Or $\sigma(A) \subseteq [m, M]$, alors on a

$$f(t) - f(\langle Ax, x \rangle) \leq f'(t)(t - \langle Ax, x \rangle) \quad (4.5)$$

pour tout $t \in [m, M]$ et tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$

si nous fixons $x \in H$ avec $\|x\| = 1$ dans (4.5) et appliquons le lemme 4.1.1, alors on a

$$\langle [f(A) - f(\langle Ax, x \rangle)1_H]x, x \rangle \leq \langle f'(A)(A - \langle Ax, x \rangle)1_H x, x \rangle$$

pour tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$, ce qui est clairement équivalente à l'inégalité souhaitée (4.4)

Exemple 4.1.1. Si A est un opérateur défini positif sur l'espace de Hilbert H , et $f(t) = \log t$ une fonction convexe. Alors on a l'inégalité suivante :

$$0 \leq \ln(\langle Ax, x \rangle) - \langle \ln(A)x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle - 1 \quad (4.6)$$

pour tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$

4.1.3 Inégalité de Jensen pour les fonctions deux fois différentiables

Théorème 4.1.7. [12] Soit A un opérateur défini positif sur un espace de Hilbert H et $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ pour quelques scalaires m, M avec $0 < m < M$. Si f est une fonction deux fois différentiable sur (m, M) et pour $p \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ on a pour $\gamma \leq \Gamma$:

$$\gamma \leq \frac{t^{2-p}}{p(p-1)} f''(t) \leq \Gamma \quad \text{pour tout } t \in (m, M), \quad (4.7)$$

alors

$$\begin{aligned}\gamma(\langle A^p x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle^p) &\leq \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \\ &\leq \Gamma(\langle A^p x, x \rangle \langle Ax, x \rangle^p)\end{aligned}\quad (4.8)$$

pour tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$.

Si

$$\delta \leq \frac{t^{2-p}}{p(p-1)} f''(t) \leq \Delta \quad \text{pour tout } t \in (m, M) \quad (4.9)$$

et pour quelque $\delta < \Delta$ où $p \in (0, 1)$, alors

$$\begin{aligned}\delta(\langle Ax, x \rangle^p - \langle A^p x, x \rangle) &\leq \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \\ &\leq \Delta(\langle Ax, x \rangle^p - \langle A^p x, x \rangle)\end{aligned}\quad (4.10)$$

pour tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$.

Preuve. Considérons la fonction $g_{\gamma,p} : (m, M) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g_{\gamma,p}(t) = f(t) - \gamma t^p$ telle que $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. La fonction $g_{\gamma,p}$ est différentiable deux fois

$$g''_{\gamma,p} = f''(t) - \gamma p(p-1)t^{p-2}$$

pour tout $t \in (m, M)$ et par (4.7) on en déduit que $g_{\gamma,p}$ est convexe sur (m, M) .

Maintenant, appliquons l'inégalité de Mond-Pecaric (MP) pour $g_{\gamma,p}$ on a

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle (f(A) - \gamma A^p)x, x \rangle - [f(\langle Ax, x \rangle) - \gamma \langle Ax, x \rangle^p] \\ &= \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) - \gamma[\langle A^p x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle^p]\end{aligned}$$

qui est équivalent avec la première inégalité (4.8).

4.2 Les inégalités de type Hermite-Hadamard

4.2.1 Cas scalaire

Théorème 4.2.1. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur l'intervalle I , alors pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$ on a la double inégalité suivante

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (\text{HH})$$

Preuve. Premièrement nous rappelons qu'une fonction f convexe est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$, et admet les dérivés droite et gauche $f^+(x), f^-(x)$ pour tout $x \in (a, b)$.

Si $f(x_0)$ est différentiable dans x_0 , on a $r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, sinon, il est évident que, $r(x) = f(x_0) + C(x - x_0)$ pour tout $C \in [f^-(x_0), f^+(x_0)]$.

Maintenant, soit $r(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + C\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$, $x_0 = \frac{a+b}{2} \in (a, b)$, alors on a $r(x) \leq f(x)$.

Dans l'autre côté, par définition de la convexité, on a

$$S(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \text{ alors on a } f(x) \leq S(x).$$

D'où

$$r(x) \leq f(x) \leq S(x)$$

En intégrant les deux inégalités entre a et b

$$\int_a^b r(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b S(x)dx$$

d'une part on a

$$\begin{aligned} \int_a^b r(x)dx &= \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + C\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right] dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + C \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \end{aligned}$$

et d'autre part on a

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x)dx &= \int_a^b f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)dx \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f(a)+f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a)dx \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \end{aligned}$$

Alors

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

4.2.2 Quelques inégalités pour les fonctions convexes

Théorème 4.2.2. [13] Soit A un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert H et $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ pour des scalaires m, M avec $m < M$. Si f est une fonction convexe sur $[m, M]$, alors

$$\begin{aligned}
 \frac{f(m) + f(M)}{2} &\geq \left\langle \frac{f(A) + f((m+M)1_H - A)}{2} x, x \right\rangle \\
 &\geq \frac{f(\langle Ax, x \rangle) + f(m+M - \langle Ax, x \rangle)}{2} \\
 &\geq f\left(\frac{m+M}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

pour tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$.

Preuve. D'après la convexité de f sur $[m, M]$, alors pour tout $u \in [m, M]$ on a l'inégalité :

$$\frac{M-u}{M-m}f(m) + \frac{u-m}{M-m}f(M) \geq f\left(\frac{M-u}{M-m}m + \frac{u-m}{M-m}M\right) = f(u) \tag{4.12}$$

et

$$\frac{M-u}{M-m}f(M) + \frac{u-m}{M-m}f(m) \geq f\left(\frac{M-u}{M-m}M + \frac{u-m}{M-m}m\right) = f(M+m-u) \tag{4.13}$$

Si nous sommons les deux inégalités (4.12) et (4.13) on obtient

$$f(m) + f(M) \geq f(u) + f(M+m-u) \tag{4.14}$$

pour tout $u \in [m, M]$, qui n'est autre que l'inégalité (4.11).

Par l'inégalité de Mond-Pecaric avec le $u = \langle Ax, x \rangle$. on a

$$\langle f((m+M)1_H - A)x, x \rangle \geq f(m+M - \langle Ax, x \rangle).$$

Au même temps avec l'inégalité (4.14) on obtient la deuxième inégalité dans (4.11).

La troisième partie découle par la convexité de f , et la preuve est complète.

Remarque 4.2.1. De plus, si $x \in H$ avec $\|x\| = 1$ et $\langle Ax, x \rangle \neq \frac{m+M}{2}$, alors on a aussi

$$\begin{aligned}
 &\frac{f(\langle Ax, x \rangle) + f(m+M - \langle Ax, x \rangle)}{2} \\
 &\geq \frac{2}{\frac{m+M}{2} - \langle Ax, x \rangle} \int_{\langle Ax, x \rangle}^{m+M - \langle Ax, x \rangle} f(u) du \geq f\left(\frac{m+M}{2}\right) .
 \end{aligned}$$

Remarque 4.2.2. Par l'inégalité (4.11) on a l'inégalité suivante

$$\left[\frac{f(m) + f(M)}{2} \right] 1_H \geq \frac{f(A) + f((m+M)1_H - A)}{2} \geq f\left(\frac{m+M}{2}\right) 1_H,$$

où f est une fonction convexe sur $[m, M]$ et A est un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert H avec $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ pour les scalaires m, M avec $m < M$.

Théorème 4.2.3. [13] Soient A et B des opérateurs auto-adjoints sur l'espace de Hilbert H . Supposons que les spectres de A et B sont dans l'intervalle $[m, M]$ pour des scalaires m, M avec $m < M$. Si f est une fonction convexe sur $[m, M]$, alors

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\langle Ax, x \rangle + \langle By, y \rangle}{2}\right) &\leq \int_0^1 f((1-t)\langle Ax, x \rangle + t\langle By, y \rangle) dt \\ &\leq \left\langle \left[\int_0^1 f((1-t)A + t\langle By, y \rangle 1_H) dt \right] x, x \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}[\langle f(A)x, x \rangle + f(\langle By, y \rangle)] \\ &\leq \frac{1}{2}[\langle f(A)x, x \rangle + \langle f(B)y, y \rangle] \end{aligned} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\langle Ax, x \rangle + \langle By, y \rangle}{2}\right) &\leq \left\langle f\left(\frac{A + \langle By, y \rangle 1_H}{2}\right) x, x \right\rangle \\ &\leq \left\langle \left[\int_0^1 f((1-t)A + t\langle By, y \rangle 1_H) dt \right] x, x \right\rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

pour tous $x, y \in H$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$.

Remarque 4.2.3. Il est important de remarquer que, pour les inégalités (4.15) et (4.16) on a pour toute fonction convexe $f : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ les résultats suivants :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A + \langle By, y \rangle 1_H}{2}\right) &\leq \int_0^1 f((1-t)A + t\langle By, y \rangle 1_H) dt \\ &\leq \frac{1}{2}[f(A) + f(\langle By, y \rangle) 1_H] \end{aligned} \quad (4.17)$$

pour tout $y \in H$ avec $\|y\| = 1$ et pour les opérateurs A et B auto-adjoints avec spectres dans $[m, M]$.

En particulier, on a pour (4.17)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A + \langle Ay, y \rangle 1_H}{2}\right) &\leq \int_0^1 f((1-t)A + t\langle Ay, y \rangle 1_H) dt \\ &\leq \frac{1}{2}[f(A) + f(\langle Ay, y \rangle) 1_H] \end{aligned}$$

pour tout $y \in H$ avec $\|y\| = 1$ et

$$f\left(\frac{A + s1_H}{2}\right) \leq \int_0^1 f((1-t)A + ts1_H)dt \leq \frac{1}{2}[f(A) + f(s)1_H]$$

pour tout $s \in [m, M]$.

Corollaire 4.2.1. *Soit A un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert H et on suppose que $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ pour quelques scalaires m, M avec $m < M$. Si f est une fonction convexe sur $[m, M]$, alors*

$$\begin{aligned} f(\langle Ax, x \rangle) &\leq \left\langle f\left(\frac{A + \langle Ax, x \rangle 1_H}{2}\right) x, x \right\rangle \\ &\leq \left\langle \left[\int_0^1 f((1-t)A + t\langle Ax, x \rangle 1_H) dt \right] x, x \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}[\langle f(A)x, x \rangle + f(\langle Ax, x \rangle)] \leq \langle f(A)x, x \rangle. \end{aligned}$$

4.2.3 Inégalité de type Hermite-Hadamard pour les fonctions d'opérateurs convexes

L'inégalité suivante est satisfaite pour toute fonction convexe f définie sur $\mathbb{R}$

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (4.18)$$

soit X est un espace vectoriel, $x, y \in X, x \neq y$. On définit le segment

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}$$

Remarque 4.2.4. *Nous considérons la fonction $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction associée*

$$g_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g_{x,y}(t) := f[(1-t)x + ty], t \in [0, 1].$$

f est convexe sur $[x, y]$ si et seulement si $g_{x,y}$ est convexe sur $[0, 1]$.

Pour toute fonction convexe définie sur un segment $[x, y] \subset X$, on a l'inégalité intégrale de Hermite-Hadamard

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \int_0^1 f[(1-t)x + ty]dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad (4.19)$$

qui est une dérivée de l'inégalité classique de Hermite-Hadamard (4.18) pour la fonction convexe $g_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Or $f(x) = \|x\|^p$ ($x \in X$ et $1 \leq p < \infty$) est une fonction convexe, en appliquant (4.19) pour cette fonction f on obtient :

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \leq \int_0^1 \|(1-t)x + ty\|^p dt \leq \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}, \quad (4.20)$$

pour tous $x, y \in X$.

Théorème 4.2.4. [14] *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'opérateurs convexe sur l'intervalle I , alors pour les opérateurs auto-adjoints A et B avec spectres dans I , on a l'inégalité :*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A+B}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right) + f\left(\frac{A+3B}{4}\right) \right] \\ &\leq \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{f(A) + f(B)}{2} \right] \\ &\leq \frac{f(A) + f(B)}{2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Preuve. Tout d'abord, on peut remarquer que l'intégrale $\int_0^1 f((1-t)A + tB) dt$ existe pour les opérateurs auto-adjoints A et B avec spectres dans I car f est continue.

Nous donnons ici deux preuves, la première utilise seulement la définition d'une fonction d'opérateurs convexes et la deuxième utilise l'inégalité classique de Hermite-Hadamard pour les fonctions à valeurs réelles.

1. Par la définition de fonctions d'opérateurs convexes on a la double inégalité :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{C+D}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} [f((1-t)C + tD) + f((1-t)D + tC)] + \\ &\leq \frac{1}{2} [f(C) + f(D)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tous opérateurs auto-adjoints C et D avec les spectres dans I .
en intégrant l'inégalité (4.22) sur $[0, 1]$ en tenant compte du fait que

$$\int_0^1 f((1-t)C + tD) dt = \int_0^1 f((1-t)D + tC) dt$$

alors nous obtenons l'inégalité de Hermite-Hadamard pour les fonctions d'opérateurs convexes

$$f\left(\frac{C+D}{2}\right) \leq \int_0^1 f((1-t)C + tD)dt \leq \frac{1}{2}[f(C) + f(D)] \quad (\text{HHO})$$

cette inégalité est satisfaite pour tous opérateurs auto-adjoints C et D avec des spectres dans I .

Maintenant, en utilisant le changement de variables $u = 2t$ on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f((1-t)A + tB)dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f\left((1-u)A + u\frac{A+B}{2}\right) du$$

et par le changement de variables $u = 2t - 1$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f((1-t)A + tB)dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f\left((1-u)\frac{A+B}{2} + uB\right) du.$$

En utilisant l'inégalité de Hermite-Hadamard (HHO) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3A+B}{4}\right) &\leq \int_0^1 f\left((1-u)A + u\frac{A+B}{2}\right) du \\ &\leq \frac{1}{2} \left[f(A) + f\left(\frac{A+B}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A+3B}{4}\right) &\leq \int_0^1 f\left((1-u)\frac{A+B}{2} + uB\right) du \\ &\leq \frac{1}{2} \left[f(A) + f\left(\frac{A+B}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat souhaité (4.21)

2. Maintenant considérons $x \in H$, $\|x\| = 1$ et les opérateurs auto-adjoints A et B avec les spectres dans I . On définit la fonction à valeurs réelles $\varphi_{x,A,B} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f((1-t)A + tB)x, x \rangle.$$

Or f est un opérateur convexe, alors pour tous $t_1, t_2 \in [0, 1]$ et $\alpha, \beta \geq 0$ avec $\alpha + \beta = 1$ on a

$$\begin{aligned} \varphi_{x,A,B}(\alpha t_1 + \beta t_2) &= \langle f((1 - (\alpha t_1 + \beta t_2))A + (\alpha t_1 + \beta t_2)B)x, x \rangle \\ &= \langle f(\alpha[(1 - t_1) + t_1B] + \beta[(1 - t_2)A + t_2B])x, x \rangle \\ &\leq \alpha \langle f([(1 - t_1) + t_1B])x, x \rangle + \beta \langle f([(1 - t_2)A + t_2B])x, x \rangle \\ &= \alpha \varphi_{x,A,B}(t_1) + \beta \varphi_{x,A,B}(t_2) \end{aligned}$$

On montre que $\varphi_{x,A,B}$ est une fonction convexe dans $[0, 1]$.

Maintenant nous utilisons l'inégalité de Hermite-Hadamard pour les fonctions à valeurs réelles convexe

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(s)ds \leq \frac{g(a)+g(b)}{2}$$

pour obtenir

$$\varphi_{x,A,B}\left(\frac{1}{4}\right) \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \frac{\varphi_{x,A,B}(0) + \varphi_{x,A,B}(\frac{1}{2})}{2}$$

et

$$\varphi_{x,A,B}\left(\frac{3}{4}\right) \leq 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \frac{\varphi_{x,A,B}(\frac{1}{2}) + \varphi_{x,A,B}(1)}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\langle \left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right) + f\left(\frac{A+3B}{4}\right) \right] x, x \right\rangle \\ & \leq \int_0^1 \langle f((1-t)A + tB)x, x \rangle dt \\ & \leq \frac{1}{2} \left\langle \left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{f(A)+f(B)}{2} \right] x, x \right\rangle \end{aligned} \quad (4.23)$$

La continuité de la fonction f nous donne :

$$\int_0^1 \langle f((1-t)A + tB)x, x \rangle dt = \left\langle \int_0^1 f((1-t)A + tB)dt x, x \right\rangle$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$ et pour tous opérateurs auto-adjoints A et B avec les spectres dans I , nous déduisons de (4.23) le résultat souhaité (4.21)

Corollaire 4.2.2. *Avec les hypothèses dans le théorème 4.2.4 on a l'inégalité :*

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f((1-t)A + tB)dt - f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \\ & \leq \frac{f(A)+f(B)}{2} - \int_0^1 f((1-t)A + tB)dt \end{aligned} \quad (4.24)$$

Corollaire 4.2.3. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'opérateurs convexe dans un intervalle I . Alors pour tous A, B deux opérateurs auto-adjoints distincts avec les spectres dans I on a les bornes dans l'ordre des opérateurs suivants :*

$$\inf_{C \in [A, B]} \left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f\left(\frac{C+B}{2}\right) - f(C) \right] = f\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

et

$$\sup_{C \in [A, B]} \left[\frac{f(C) + f(D)}{2} - f\left(\frac{C + D}{2}\right) \right] = \frac{f(A) + f(B)}{2} - f\left(\frac{A + B}{2}\right)$$

Bibliographie

- [1] D. Aggarwal, M.Kunroo, Cauchy-Schwarz Inequality. Another Proof, Research and Reviews. Journal of Statistics and Mathematical Sciences, 2017, 47-49.
- [2] G. Allasia, C. Giordano, J. Peřcaritć, Hadamard-type inequalities for $(2r)$ -convex functions with applications, Atti Acad. Sci. Torino-Cl. Sc. Fis., 133 (1999), 1-14.
- [3] T. Ando, On some operator inequalities, Math. Ann., 279(1987), 157-159.
- [4] A. G. Azpeitia, Convex functions and the Hadamard inequality, Rev.-Colombiana-Mat., 28(1) (1994), 7-12.
- [5] S. K. Berberian, introduction to hilbert space, Chelsea publishing company, 1961.
- [6] C. A. Berger, A strange dilation theorem, Notices Amer. Math. Soc. 12 (1965), 590, Abstract 625-152.
- [7] G. Corach, H. Porta, L. Recht, An operator inequality, Linear Alg. and Its Appl., 142(1990), 153-158.
- [8] C. L. Devito, Functional analysis and linear operator theory, Addison-Wesley publishing company, 1990.
- [9] S. S. Dragomir, An inequality improving the second Hermite-Hadamard inequality for convex functions defined on linear spaces and applications for semi-inner products, J. Inequal. Pure Appl. Math. 3 (2002), No.3, Article 35.
- [10] S. S. Dragomir, Discrete Inequalities of the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Type, Nova Science Publishers, NY, 2004.
- [11] S.S. Dragomir, Some Jensen's type inequalities for twice diderentiable functions of selfadjoint operators in Hilbert spaces, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll., 11(e) (2008), Art. 13.

-
- [12] S. S. Dragomir, Some reverses of the Jensen inequality for functions of selfadjoint operators in Hilbert spaces, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll., 11(e) (2008), Art. 15.
 - [13] S. S. Dragomir, Hermite-Hadamard's type inequalities for convex functions of selfadjoint operators in Hilbert spaces, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll., 13(2010).
 - [14] S. S. Dragomir, Inequalities for Functions of Selfadjoint Operators on Hilbert Spaces, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll., 2011.
 - [15] B. P. Duggal, On p -hyponormal contraction, Proc. Amer. Math. Soc., 123(1995), 81-86.
 - [16] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operator, I, II and III, Interscience, New York, 1958, 1963 and 1971.
 - [17] M. El-Haddad, F. Kittaneh, Numerical radius inequalities for Hilbert space operators. II, Studia Math. 182 (2007), No. 2, 133-140.
 - [18] C. K. Fong, J. A. R. Holbrook, Unitarily invariant operators norms, Canad. J. Math. 35 (1983), 274-299.
 - [19] T. Furuta, On the class of paranormal operator, Proc. Japan Acad., 43(1967), 594-598.
 - [20] T. Furuta, Invitation to linear operators, Taylor and Fran. Loondon, (2001).
 - [21] P. R. Halmos, Hilbert Space Problem Book, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.
 - [22] F. Hansen, An operator inequality, Math. Ann., 246(1980), 249-250.
 - [23] J. A. R. Holbrook, Multiplicative properties of the numerical radius in operator theory, J. Reine Angew. Math. 237 (1969), 166-174.
 - [24] V. Istratescu, T. Saito, T. Yoshino, On a class of operators, Tohoku Math. J., 18(1966), 410-413.
 - [25] F. Kittaneh, Commutator inequalities associated with the polar decomposition, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 1279-1283.
 - [26] F. Kittaneh, A numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Frobenius companion matrix, Studia Math. 158 (2003), No. 1, 11-17.
 - [27] F. Kittaneh, Numerical radius inequalities for Hilbert space operators, Studia Math. 168 (2005), No. 1, 73-80.

- [28] A. Lupaş, A generalisation of Hadamard's inequality for convex functions, Univ. Beograd. Publ. Elek. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 544-576, (1976), 115-121.
- [29] M. S. Moslehian, M. Sattari, T. Yamazaki, Some generalized numerical radius inequalities for hilbert space operators, Math. FA, 2014, 1-12.
- [30] C. R. Putnam, An inequality for the area of hyponormal spectra, Math. Z., 116 (1970), 323-330.
- [31] M. S. Slater, A companion inequality to Jensen's inequality, J. Approx. Theory, 32(1981), 160-166.
- [32] K. Tanahashi, On log-hyponormal operator, Integral Equations and Operator Theory, 34(1999), 364-372.
- [33] A. Turnsek, Generalized Anderson's inequality, J. Math. Anal. Appl. 263(2001), 121-134.
- [34] M. Uchiyama, Some exponential operator inequalities, Math. Inequal. Appl., 2(1999), 469-471.
- [35] D. Wang, A convex operator function, Internat. J. Math. and math. Sci., 11(1988), 401-402.
- [36] T. Yamazaki, An extension of Specht's theorem via kantrovich inequality and related results, Math. Inequal. Appl., 3(2000), 89-96.
- [37] T. Yamazaki, On powers of class $A(k)$ operators including p -hyponormal and log-hyponormal operators, Math. Inequal. Appl., 3(2000), 97-104.
- [38] T. Yamazaki, M. Yanagida, Characterizations of chaotic order associated with kantrovich inequality, Scientiae Mathematicae, 2(1999), 37-50.

Résumé

Dans ce mémoire, nous sommes intéressé en particulier par quelques inégalités entre opérateurs linéaires et applications. On a présenté les notions préliminaires et les théorèmes fondamentaux sur lesquels basées ces inégalités.

On a étudié également les inégalités qui impliquent le rayon numérique d'un opérateur et les inégalités de type Jensen et Hermite-Hadamard.

Mots clés : inégalité, opérateur, rayon numérique, Jensen, Hermite-Hadamard

Summary

In this memory, we particulary interested in the somme inequalitys between linear operators and applications we started with some preliminary on linear bounded operarors and their properties, initial concepts and fondamental theore.

we have also studied the inequality that implies the numerecal radius of operators and the Jensen and Hermite-Hadamard type inequalitys

Keywords : Inequality , operator , numerecal radius , Jensen , Hermite-Hadamard

ملخص

هذه المذكرة تتعلق بالمتراجحات المتعلقة بالمؤثرات الخطية و بعض تطبيقاتها. نبدأ ببعض التمهيدات حول المؤثرات الخطية المحدودة و خصائصها، مفاهيم أساسية و نظريات رئيسية حول المؤثرات.

درسنا أهم متراجحات المؤثرات التي تشمل نصف القطر العددي و نوعي متراجحات جونسون و هرميت هادمار.

الكلمات المفتاحية : متراجحة، مؤثر، جونسون، هرميت هادمار، نصف القطر العددي.