

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche
scientifique

Centre universitaire d'El oued

Institut des sciences et de la Technologie

Présenté pour l'obtention du diplôme de:

Licence

Spécialité: génie mécanique

Option: énergétique

Thème

**Simulation numérique de l'écoulement
supersonique compressible pour un gaz parfait
dans une tuyère convergente-divergente
monodimensionnel**

Présenté par :

Mr. Madani Samir

proposé par :

Mr. Ghodbane Mokhtar

Année universitaire 2011-2012

*Je dédie ce modeste travail à mes
parents, ma femme, mes frères et mes
sœurs.*

*A toute personne que j'aime et je
respecte.*

REMERCIEMENTS

Ce projet a été réalisé en vue de l'obtention du diplôme de licence dans la spécialité énergétique au sein du centre universitaire d'el-Oued. je remercie en premier lieu « dieu » pour m'avoir donné la chance et la force d'arriver à ce niveau d'étude. je tiens à remercier mes très chers parents.

Je remercie ma femme pour son soutien et qui m'a toujours encouragé et m'a aidé le long de mes études.

Je remercie aussi Mr Ghodbane Mokhtar mon encadreur pour toutes ses connaissances précieuses qu'il m'a transmises. je tiens à remercier en particulier Mr Zemmar N pour toutes les informations.

Je remercie aussi :

Mr. Menacer Redha chef de classe génie mécanique

Mr. Menacer Nour eddine

Mr. Djoudi Tarek

Me Borkane H

Me Mahfoudi N

Mr. Gharbi M T

Je remercie enfin toutes les personnes, qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Résumé

La prédiction des valeurs de nombre de Mach, de vitesse, de pression, de densité et de température dans un écoulement de fluide est importante pour de nombreux systèmes industriels à savoir l'étude des performances des éoliennes, des aubages de turbomachines, des ailes d'avions et des hélices propulsives. Les variations aléatoires de ces valeurs sollicitent les structures et peuvent avoir une influence néfaste sur ces dernières, en particulier la fatigue du matériau utilisé. Il est donc important de connaître ces valeurs qui sont à l'origine de ces phénomènes. Les écoulements considérés sont souvent de nature complexe à cause de présence de ces phénomènes (la turbulence, les ondes de choc, phénomènes de décollement de couches limites...etc.).

Dans ce travail, on s'intéresse à la simulation numérique de l'écoulement supersonique compressible pour un gaz parfait dans une tuyère convergente-divergente monodimensionnelle pour étudier les causes du phénomène d'onde de choc droite.

La simulation numérique de l'écoulement est réalisée à l'aide du logiciel de calcul et programmation MATLAB à partir des équations de la dynamique des gaz.

Les résultats obtenus ont été satisfaisants, en les comparant avec les résultats qui ont été trouvés dans les références qui ont été utilisées dans ce travail.

المخلص:

إن تحديد قيم كل من عدد Mach, السرعة, الضغط, الكثافة و الحرارة على مستوى تدفق مانع هام جدا بالنسبة للعديد من الميادين الصناعية مثل دراسة الهوائيات, أجنحة الطائرات, الآلات العنفية و محركات الدفع. إن التغيرات العشوائية لهذه القيم تؤثر على الأنظمة, و من المحتمل أن يكون لها تأثير سلبي على هذه الأخيرة, خاصة تعب المواد المستعملة. إذن من الهام جدا دراسة هذه القيم التي هي مصدر بعض الظواهر. إن التدفق دائما لديه طبيعة معقدة وهذا راجعا لوجود هذه الظواهر في هذه الأنظمة (تدفق مضطرب, موجة اصطدام, الطبقة الحدية....الخ).

في هذا العمل نهتم بالدراسة الرقمية لتدفق فوق صوتي ضغوط لغاز مثالي في قناة متقاربة-متباعدة أحادية البعد لتحديد إحدى تلك الظواهر والعوامل المؤثرة فيها ألا وهي موجة الاصطدام. الدراسة الرقمية لهذا التدفق تمت عن طريق برنامج MATLAB الذي يأخذ بعين الاعتبار معادلات ديناميكا الغازات.

ونرى أن النتائج الرقمية المحصلة عليها كانت مرضية من حيث دقتها مقارنة لما هو موجود في المراجع المعتمدة في البحث.

SOMMAIRE

Introduction générale

Chapitre I : Etude Bibliographique

I.1.introduction.....	03
I.2.Classification des écoulements.....	03
I.2.1. critères géométriques et cinématiques.....	03
I.2.1.1.Ecoulements externes.....	03
I.2.1.2.Ecoulements internes en conduits.....	03
I.2.1.3.Ecoulements permanents (stationnaires) et non stationnaires.....	04
I.2.1.4.Ecoulements unidimensionnels et bidimensionnel.....	04
I.2.2. critères physiques.....	04
I.2.2.1. Ecoulements compressibles et incompressibles.....	04
I.2.2.2. Ecoulements laminaires.....	05
I.2.2.3. Ecoulements turbulents.....	05
I.2.2.4.. Ecoulements visqueux.....	05
I.2.2.5. Les régimes des écoulements par rapport au nombre de mach.....	05
I.2.2.5.1. Le nombre de Mach.....	05
I.2.2.5.2. Régime subsonique.....	06
I.2.2.5.3. Régime sonique.....	06
I.2.2.5.4. Régime transsonique.....	06
I.2.2.5.5. Régime supersonique.....	06
I.2.2.5.6.Régime hypersonique.....	07
I.2.2.6. Ecoulements isentropiques.....	07
I.3.Description des tuyères.....	08

I.3.1.Tuyère convergente.....	08
I.3.2.Tuyère divergente.....	08
I.3.3.Tuyère convergente-divergente.....	08
I.3.3.1.Historique d'une tuyère Laval.....	09
I.3.3.2.Le rôle de la tuyère Laval dans les moteurs	09
I.3.3.3.Utilisation de la tuyère de Laval	09
I.3.3.4.Différents types d'une tuyère Laval.....	10
I.3.3.4.1.Les tuyères propulsives.....	10
I.3.3.4.2.Tuyère à double galbe	10
I.3.3.4.3.Tuyère à divergent extensible.....	11
I.3.3.4.4.Tuyère à corps central.....	11
I.4.Les ondes de choc.....	12
I.4.1.Les ondes de choc droites.....	12
I.4.2.Les ondes de choc oblique.....	13
I.4.3.Les propriétés du gaz au travers l'onde de choc.....	13
I.5.Évolution de l'écoulement dans une tuyère.....	14

Chapitre II : Formulation Mathématique

II. Introduction.....	17
II.1. Généralité sur la mécanique des fluides.....	17
II.1.1.Conservation de la masse.....	17
II.1.2.le théorème des quantités de mouvement.....	19
II.1.3.Interprétation énergétique du théorème de Bernoulli.....	19
II.2.Ecoulement de gaz réel dans les conduits de section variable.....	20
II.2.1.Equations fondamentales.....	20
II.2.1.1. La conservation de la masse.....	20
II.2.1.2. La conservation de l'énergie.....	21
II.2.1.3. La conservation de la quantité de mouvement.....	21
II.2.1.4. Conservation de l'entropie.....	21
II.2.2.Effets des changements de section sur les caractéristiques de l'écoulement d'un gaz réel.....	21
II.3.Ecoulement isentropique unidimensionnel de gaz parfaits dans les conduits de section variable.....	23
II.3.1.principales notions et relations de base.....	24

II.3.2.L'évolution isentropique.....	25
II.3.3. Equations fondamentales d'une évolution isentropique.....	25
II.3.4. L'expression de la vitesse du son.....	26
II.3.5. Effets des changements de section sur les caractéristiques de l'écoulement d'un gaz parfait.....	26
II.3.5.1. Relation d'Hugoniot	26
II.3.5.2.Discussion de la relation d'Hugoniot.....	28
II.3.6. Les relations complémentaires (isentropiques).....	28
II.3.7. La relation de Saint-Venant.....	29
II.3.8. L'expression du débit massique	30
II.3.9. Les conditions critiques.....	30
II.3.10. L'expression de la section A/A_c	31
II.4.Ondes de choc dans les gaz parfaits.....	32
II.4.1.Equations fondamentales pour les ondes de choc droites.....	32
II.4.2.Estimation de l'épaisseur d'une onde de choc.....	34
II.4.3. Equations fondamentale pour les chocs obliques.....	35
Chapitre III Programmation et résolution du problème	
III.1.Introduction.....	38
III.2.Description de MATLAB.....	39
III.3. Hypothèses de travail.....	40
III.4. Détermination des propriétés de l'écoulement supersonique.....	40
III.4.1.Les caractéristiques de l'écoulement supersonique d'un gaz parfait en régime isentropique.....	41
III.4.1.1. Les relations utilisées.....	41
III.4.1.2. Nombre de Mach.....	41
III.4.1.3. Description des tables.....	43
III.4.1.4. Calcul les caractéristiques de l'écoulement supersonique gaz parfait en régime isentropique.....	44
III.4.2. Les caractéristiques de l'écoulement supersonique en amont et aval d'un choc.....	46
III.4.2.1. Les relations utilisées.....	46
III.4.2.2.Relation entre les rapports caractéristiques de l'onde droite.....	47
III.4.2.3. Nombre de Mach.....	48

III.4.2.4.Description des tables.....	50
III.4.2.5.Calcul les caractéristiques de l'écoulement en amont et aval d'un choc...	51
III.4.2.6. Utilisation des tables de l'onde de chocs droites pour le calcul de l'onde de choc oblique.....	53
III.4.3.Description du comportement d'une tuyère Convergente/Divergente.....	53
III.4.3.1.Les différents types écoulements possibles.....	53
III.4.3.2.Calcul de la position de l'onde du choc droite.....	54
III.4.3.3.Organigramme du Programme principal.....	56

CHAPITRE IV : Résultats et Discussions

IV.1.

Introduction.....	58
-------------------	----

IV.2. Discussions des résultats.....	58
--------------------------------------	----

IV.3.Etude de le comportement d'une tuyère Convergente/Divergente.....	59
--	----

IV.3.1.Etude de l'influence de la géométrie de la tuyère.....	59
---	----

IV.3.2.Influence du rapport de pression ambiante.....	68
---	----

IV.3.3.Influence de γ	75
------------------------------------	----

IV.3.4.Calcul de la position d'un choc dans une tuyère Laval.....	80
---	----

IV.3.5.Les iso-valeurs du nombre de Mach.....	81
---	----

CHAPITRE VI: vérification des résultats par fluent.

Conclusion générale.....	85
--------------------------	----

Introduction générale

Dans de nombreuses applications sont employés des dispositifs dont la fonction est de transformer de l'énergie cinétique en énergie interne ou vice-versa, sans échange de travail, tuyères propulsives de turboréacteurs ou de moteur-fusée, aubages distributeurs de turbines à gaz ou à vapeur, diffuseurs, aubages redresseurs de compresseurs.

Mais la vitesse de l'écoulement de fluide dans la tuyère joue un rôle très important dans la dynamique des gaz, soit l'écoulement est subsonique ou supersonique.

Les écoulements supersoniques sont présents dans de nombreuses applications aéronautiques, militaires mais aussi civiles. La plus emblématique reste sans doute aujourd'hui le Concorde qui, à Mach 2,2, voit l'ensemble de ses surfaces extérieures en prise avec un écoulement plus rapide que le son.

Les écoulements supersoniques sont également présents dans le secteur spatial. Le lanceur Ariane par exemple rencontre ce régime de vitesse en aérodynamique externe, à peine quelques dizaines de secondes après le décollage lorsque le lanceur, ayant atteint puis dépassé Mach 1, se trouve encore dans l'atmosphère. En aérodynamique interne également, la tuyère d'éjection des gaz de propulsion du moteur cryotechnique principal d'Ariane, Vulcain, est le siège d'un écoulement supersonique.

En effet, sous l'action de la forme de la tuyère, et après avoir subi une accélération l'amenant d'une vitesse subsonique à une vitesse supersonique, l'écoulement subit ensuite un ralentissement et redevient subsonique. Cette décompression s'effectue généralement de manière non isentropique, à travers un choc. Les ondes de choc ainsi générées interagissent alors avec les régions turbulentes de l'écoulement.

Notre travail étudie essentiellement un écoulement supersonique dans une tuyère convergente-divergente, il est réparti en quatre chapitre, le premier chapitre est consacrée à la présentation d'une revue bibliographique sur la mécanique des fluides et on détermine brièvement la classification des écoulements des fluides, avec une description de la tuyère convergente-divergente et un signale sur les différents types d'écoulements dans la tuyère.

Le second chapitre décrit la formulation mathématique du problème. Cette dernière est basée sur les lois classiques de la variation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie, et les équations fondamentales d'un gaz parfait.

Dans le troisième chapitre nous donnons une explication détaillée de la procédure numérique. Les travaux numériques sont réalisés, en utilisant un logiciel de calcul numérique MATLAB pour la simulation du processus d'écoulement.

Dans le quatrième chapitre nous présentons les résultats obtenus et les interprétations assignées à ces résultats dans le cas d'un écoulement supersonique unidimensionnel en variant les paramètres physiques et géométriques de la tuyère.

Ce document se termine par une conclusion générale qui reprend les objectifs du présent travail et les principaux résultats obtenus.

I.1.introduction:

La mécanique des fluides est l'étude des mouvements des [fluides](#), qu'ils soient [liquide](#) ou gaz. La résolution d'un problème de mécanique des fluides demande normalement de calculer diverses propriétés des fluides comme par exemple la [vitesse](#), la [pression](#), la [densité](#) et la [température](#) en tant que fonctions de l'espace et du temps

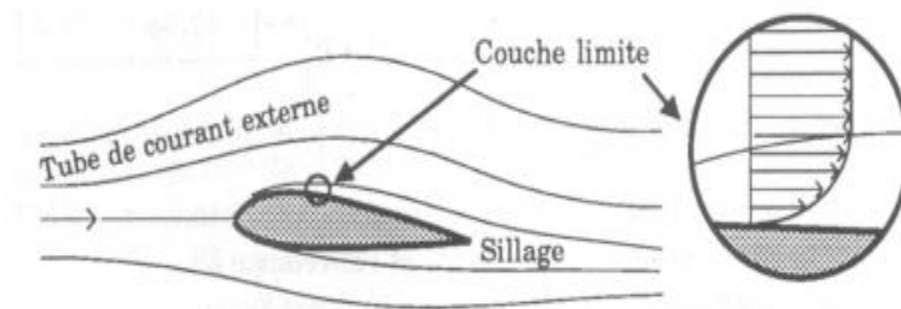
I. 2.Classification des écoulements:

Dans cette section, nous allons définir les différents types d'écoulements, pour les classer il faut adopter des critères qui sont de nature physique, géométrique et cinématique.

I.2.1. critères géométriques et cinématiques:

I.2.1.1.Ecoulements externes: [7]

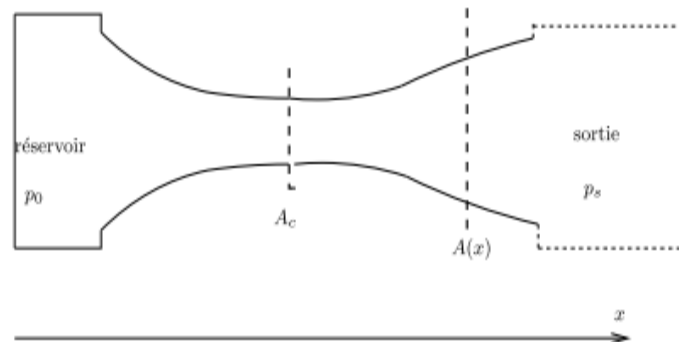
Dans les problèmes d'aérodynamique externe, on s'intéresse aux écoulements autour de profils, d'obstacles ou de corps comme illustré sur la figure (I.1). Les tubes de courant situés hors du sillage et à l'extérieur de la couche limite située dans le voisinage proche des parois ne subissent pas l'influence des effets de viscosité ou de conduction de chaleur.



Figure(I.1) : Ecoulement externe autour d'un profil

I.2.1.2.Ecoulements internes en conduits : [7]

Les écoulements internes se font à l'intérieure d'une conduite et sont limités par des parois fixes ou mobiles. Si le conduit n'est pas de grande longueur, le frottement pariétal est négligeable.



Figure(I.2) : Ecoulement interne en conduit

I.2.1.3.Ecoulements permanents (stationnaires) et non stationnaires:[3]

On dit que l'écoulement est stationnaire si la vitesse ne dépend pas explicitement du temps cela ne signifie pas que la particule n'est pas accélérée. Cela signifie simplement que les lignes de courants n'évoluent pas au cours du temps. Dans ce cas, toutes les dérivés partiels par rapport au temps s'annulent.

Un écoulement est dit non stationnaire si les variables dérivant le mouvement dépendent du temps.

I.2.1.4.Ecoulements unidimensionnels et bidimensionnel:

On dit qu'un écoulement est unidimensionnel si dans chaque section de l'écoulement, toutes les variables sont des constantes. En d'autres termes, dans un écoulement unidimensionnel, toutes les variables dépendent d'une coordonnée d'espace unique. Dans un écoulement bidimensionnel, toutes les variables dépendent de deux variables d'espace suivant les axes (x, y) .

I.2.2. critères physiques:

I.2.2.1. Ecoulements compressibles et incompressibles:

Un fluide est appelé compressible si les changements de la densité du fluide ont des effets significatifs sur l'ensemble de la solution. Dans le cas contraire, il s'agit d'un fluide incompressible et les changements de densité sont ignorés.

Afin de savoir si le fluide est compressible ou incompressible, on calcule le [nombre de Mach](#). Approximativement, les effets de la compression peuvent être ignorés pour les nombres de Mach en dessous de 0,3. Presque tous les problèmes impliquant des [liquides](#) se trouvent dans cette catégorie.

I.2.2.2. Ecoulements laminaires:

On dit qu'un écoulement est laminaire lorsque le mouvement des particules de fluide se fait de façon régulière et ordonnée. Dans le cas des tubes de section circulaire, il a été constaté que le régime de l'écoulement demeure linéaire tant que le nombre de Reynolds reste inférieure à 2300.

I.2.2.3. Ecoulements turbulents:

L'écoulement est turbulent lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide. L'étude analytique de l'écoulement s'avère beaucoup difficile. Le régime d'écoulement est considéré comme étant turbulent lorsque le nombre de Reynolds atteint ou dépasse 10 000.

I.2.2.4.. Ecoulements visqueux:

Les problèmes dus à la [viscosité](#) sont ceux dans lesquels les frottements du fluide ont des effets significatifs sur la solution. Dans le cas où les frottements peuvent être négligés, le fluide est appelé non-visqueux.

Le [nombre de Reynolds](#) peut être employé pour estimer quel type d'équation est appropriée pour résoudre un problème donné. Un nombre de Reynolds élevé indique que les forces d'[inertie](#) sont plus importantes que les forces de frottement. Cependant, même lorsque le nombre de Reynolds est élevé, certains problèmes nécessitent de prendre en compte les effets de la viscosité. En particulier, dans les problèmes où l'on calcule les forces exercées sur un corps (comme les [ailes](#) d'un avion), il faut prendre en compte la viscosité, un corps immergé dans un fluide non visqueux n'est soumis à aucune force.

I.2.2.5. Les régimes des écoulements par rapport au nombre de mach:

I.2.2.5.1. Le nombre de Mach:

Le nombre de Mach est un [nombre sans dimension](#), noté M , qui exprime le rapport de la [vitesse](#) locale d'un [fluide](#) sur la [vitesse du son](#) dans ce même fluide. Par extension, lorsqu'un objet solide est en mouvement par rapport à un fluide, on peut associer à cet objet un nombre de Mach en considérant la vitesse relative de l'écoulement autour de l'objet. On dit ainsi qu'un avion vole à Mach égale 1 si sa vitesse est égale à celle du son, à Mach 2 si sa vitesse correspond à deux fois la vitesse du son, et ainsi de suite. Il est nommé en l'honneur du [physicien](#) et [philosophe autrichien Ernst Mach](#).

I.2.2.5.2. Régime subsonique:

Un écoulement subsonique est symétriquement un écoulement de [fluide](#) dont la vitesse inférieure à la vitesse du son ($M < 1$). Par exemple les avions qui volent à faible vitesse du son dans l'air, créent des ondes de pression (ondes sonores) qui se déplacent à la vitesse du son et précèdent l'avion.

I.2.2.5.3. Régime sonique:

Un écoulement sonique est un écoulement de [fluide](#) dont la vitesse égale à la vitesse du son ($M = 1$).

I.2.2.5.4. Régime transsonique:

Les avions qui volent à une vitesse proche de celle du son (domaine transsonique, de Mach 0,8 à Mach 1,2) génèrent des ondes de pression (ondes sonores) qui s'accumulent sur le nez de l'appareil. En additionnant, ces ondes forment une barrière d'air comprimé appelée « mur du son » et l'avion devra procéder à une forte accélération pour le franchir. Le vol en régime transsonique s'accompagne de divers phénomènes indésirables, notamment l'augmentation de la traînée (résistance de l'air) et l'échauffement de la structure de l'appareil.

I.2.2.5.5. Régime supersonique:

Un écoulement supersonique est un [écoulement](#) de fluide dont la vitesse supérieure à la [vitesse du son](#). On utilise également le terme « bi-sonique » pour un véhicule dépassant deux fois la vitesse du son, et « tri-sonique » s'il dépasse trois fois la vitesse du son.

Lorsque la vitesse de l'avion dépasse celle du son (régime supersonique), le mur d'ondes de pression précédemment créé est en quelque sorte « crevé » cela libère toute la pression en un

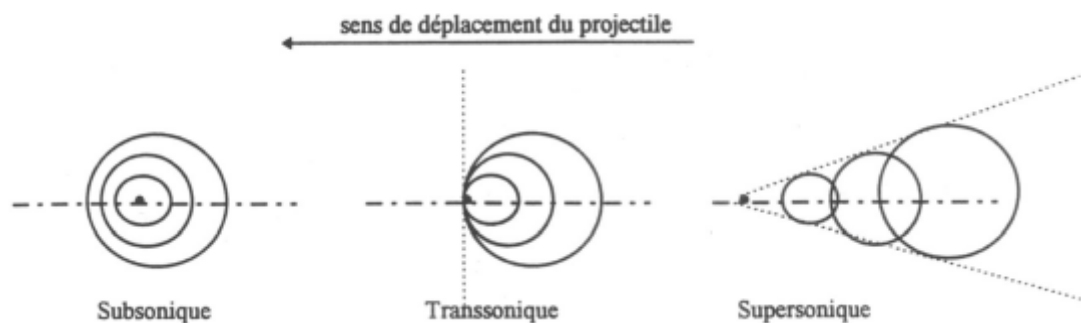
cône de choc qui s'échappe vers l'arrière de l'appareil. C'est cette libération subite de la pression des ondes qui provoque le « bang » supersonique.

I.2.2.5.6. Régime hypersonique: [8]

Le nombre de mach ($M > 5$) avec les ondes de choc très intenses et de très grandes températures près des parois, ce qui entraîne des réactions chimiques (dissociation des molécules).

Les considérations qui précèdent donnent une idée de l'importance du nombre de Mach mais la réalité est nettement plus compliquée. On distingue généralement les plages de vitesses suivantes :

- $M < 0,94$: on parle d'écoulement subsonique,
- $0,94 < M < 1,2$: on parle d'écoulement transsonique,
- $1,2 < M < 5$: on parle d'écoulement supersonique,
- $M > 5$: on parle d'écoulement hypersonique.



Figure(I.3) : régimes des écoulements

I.2.2.6. Écoulements isentropiques: [3]

L'écoulement est dit isentropique s'il est réversible et adiabatique.

I.2.2.6.1. Écoulement adiabatique: il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur ($Q = 0$). En effet, les échelles de temps des échanges thermiques sont beaucoup plus grandes que les échelles de temps des compressions.

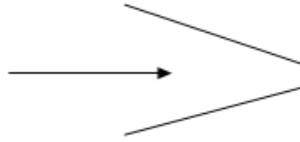
I.2.2.6.1.Ecoulement réversible: Un écoulement est réversible il n'y a pas d'onde de choc et si les forces de frottement sont négligeables.

I.3.Description des tuyères:

On peut classer les tuyères selon la variation de la section :

I.3.1.Tuyère convergente:

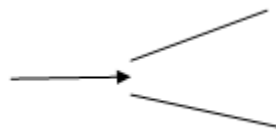
Une tuyère dont la section va en diminuant dans le sens de l'écoulement est appelée tuyère **convergente**



Figure(I.4): Tuyère convergente

I.3.2.Tuyère divergente:

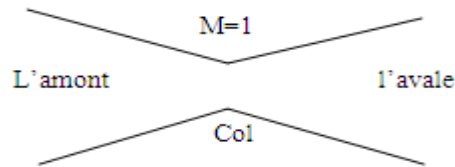
Une tuyère dont la section va en augmentant dans le sens de l'écoulement est appelée tuyère **divergente**



Figure(I.5): Tuyère divergente

I.3.3.Tuyère convergente-divergente:

Une tuyère composée dont la section diminue jusqu'à une valeur minimale puis augmente en suite est appelée tuyère **convergente-divergente** ou tuyère **Laval** et sa section minimale s'appelle le **Col**.



Figure(I.6): Tuyère convergente- divergente

I.3.3.1.Historique d'une tuyère Laval: [3]

Carl Gustaf Patrik de Laval (1845-1913)

Ingénieur et inventeur suédois qui a principalement travaillé à l'amélioration des machines à vapeur pour l'industrie laitière. 1866 Institut royal de technologie(KTH) diplômé en génie mécanique. 1872 Docteur en chimie de l'université d'Uppsala. 1887 Il construit une petite machine à vapeur. 1890 Il développe une tuyère avec ajutage permettant d'augmenter la vitesse de la vapeur entrant dans la turbine.

I.3.3.2.Le rôle de la tuyère Laval dans les moteurs : [3]

La tuyère est la partie où les gaz accélèrent et sortent du moteur. Sa forme caractéristique est due au besoin d'adapter la pression du flux de sortie à la pression ambiante, pour des raisons de stabilité de combustion et de poussée. Cependant, en gagnant de l'altitude, le diamètre de sortie devrait s'élargir, ce qui est difficile à faire avec une configuration classique. Pour contrer ce problème, un nouveau type de tuyère est développée, la tuyère à compensation d'altitude. Ce genre de tuyère a la particularité de laisser un large espace aux gaz, leur permettant de 'coller' aux changements de pression.

I.3.3.3.Utilisation de la tuyère de Laval : [3]

La tuyère de Laval est le cœur du dispositif CRESU (Cinétique de Réaction en Ecoulement Supersonique Uniforme) et pour les moteurs fusés et pour les cheminées de centrale nucléaire qui se terminent par l'amorce d'une partie divergente, lors de sa détente, contrairement au cas des jets libres, le gaz est guidé grâce à un convergent et un divergent (Figure I.7) ce qui permet d'obtenir un écoulement unidirectionnel et uniforme à la fois en vitesse, en densité, mais aussi en température puisque les collisions sont suffisamment nombreuses pour assurer l'équilibre thermodynamique.

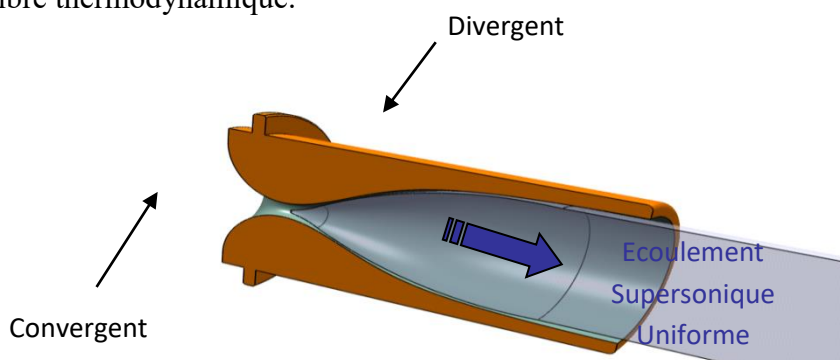


Figure (I.7) : La tuyère de Laval

I.3.3.4. Différents types d'une tuyère Laval:[3]

I.3.3.4.1. Les tuyères propulsives:

Ce type de tuyère Laval utilisée pour les moteurs fusés et les moteurs des avions pour Produire une force propulsive ou poussée.



Figure (I.8): tuyère propulsive

Les rôles des tuyères propulsives :

- Assurer le blocage sonique de l'écoulement.
- Eviter les régimes hors adaptation.
- Produire la détente optimale des gaz de combustion.
- Opérer la déviation du jet propulsif.

I.3.3.4.2. Tuyère à double galbe :

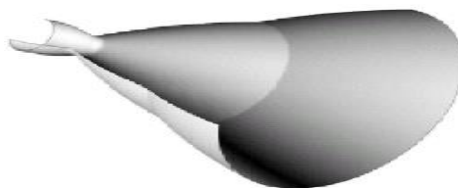


Figure (I.9) : Tuyère à double galbe

Avantages	Inconvénients
•Auto-adaptation de l'écoulement	•traînée d'aspiration supplémentaire à basse altitude
•décollement du jet à basse altitude	•charges latérales durant la transition entre les régimes.

I.3.3.4.3.Tuyère à divergent extensible :

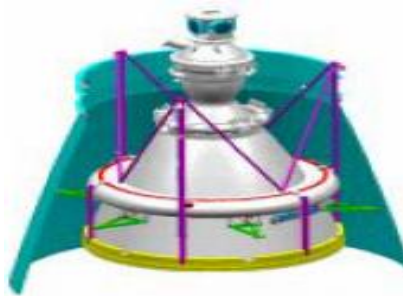


Figure (I.10): Tuyère à divergent extensible

Avantages	Inconvénients
•Encombrement réduit	•pièces mécaniques amovibles
•Performances augmentées (1er étage)	•phénomènes aérodynamiques à contrôler en cas de déploiement sur jet

I.3.3.4.4.Tuyère à corps central:



Figure (I.11): Tuyère à corps central

Avantages	Inconvénients
-----------	---------------

•auto-adaptation, pas de décollement	•refroidissement
•encombrement réduit	•Transition de régimes
performance accrue	

I.4.Les ondes de choc:

Le mouvement d'un gaz est essentiellement différent selon qu'il est subsonique ou supersonique en effet l'une des particularités les plus marquantes d'un écoulement supersonique est qu'il peut y existe des ondes de choc.

L'expérience a montré que lorsqu'un fluide s'écoule avec une vitesse supérieure à la vitesse du son, ou lorsque le mouvement relatif d'un mobile est supérieure à la vitesse du son, il peut exister dans le fluide des surfaces de discontinuité à la traversée desquelles il ya une brutale variation (et non une variation continue) pour les propriétés du fluide : vitesse, masse volumique, température, pression.....

Ces surfaces de discontinuité, sont appelées ondes de choc, mais ce sont en réalité des volumes de très faible épaisseur (environ 10^{-3} mm). Ces ondes de choc peuvent être fixes ou mobile.

I.4.1.Les ondes de choc droites: [1]

Une onde de choc droite est une onde de détonation accompagnant les explosions et le « bang » produit par des écoulements supersonique dans le divergent d'une tuyère, le rapport de la pression aval à la pression amont est de l'ordre cinq et la vitesse aval est environ trois fois plus faible que la vitesse amont. Ces variations de pression et de vitesse s'effectuent sur une distance de l'ordre de 2.10^{-4} mm. La figure (I.12) montre par exemple une onde de choc droite.

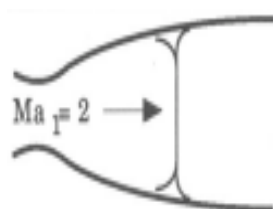
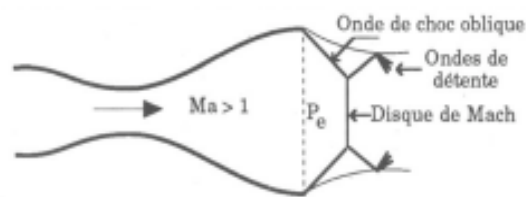


Figure (I.12): Une onde de choc droite dans un canal divergent.

I.4.2. Les ondes de choc oblique: [1]

Les ondes de choc se développent lorsqu'un écoulement supersonique décélère rapidement en réponse à une augmentation de la pression ou encore lorsque l'écoulement change de direction et que ce changement de direction s'accompagne d'une compression.



Figure(I.13): Une onde de choc oblique.

I.4.3. Les propriétés du gaz au travers l'onde de choc:

Nous allons résumer sur le tableau suivant les sens de variation des diverses propriétés du gaz au travers de l'onde de choc.

propriétés		variation au travers de l'onde de choc
Température	T	Augmente
Vitesse	V	Diminue
Pression	P	Augmente
Entropie	S	Augmente

Masse volumique	ρ	Augmente
Nombre de mach	M	Diminue

Tableau I.1: Les propriétés du gaz au travers de l'onde de choc

I.5.Évolution de l'écoulement dans une tuyère:[8]

Considérons une tuyère convergente-divergente ou **tuyère de Laval**, dont on fait varier la différence de pression entre l'entrée et la sortie.

Les différents fonctionnements d'une tuyère convergente-divergente peuvent être décrits par la théorie monodimensionnelle des gaz parfaits et non visqueux. Cette approche permet de comprendre la formation d'une onde de choc dans une tuyère.

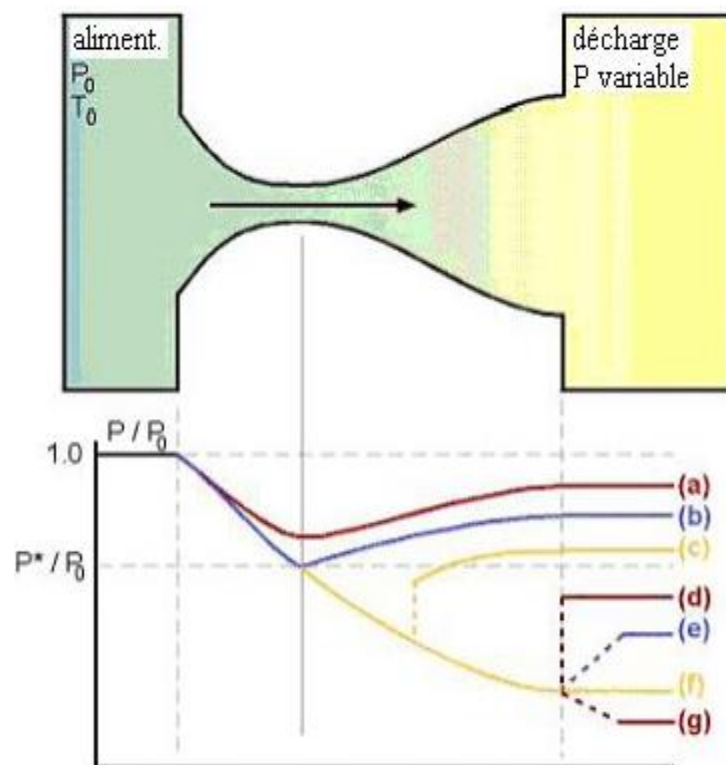


Figure (I.14): Principe de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente

On va diminuer la pression de sortie P_s et définir les différents types d'écoulements possibles comme suite :

I.5.1.Ecoulement subsonique tout au long de la tuyère:

Pour une pression $P_s = P_a$ l'écoulement accélère dans le convergent et décélère dans le divergent en restant subsonique dans toute la tuyère.

I.5.2.Ecoulement tout juste choqué:

Pour une pression $P_s = P_b$ l'écoulement accélère suffisamment dans le convergent pour atteindre $M=1$ au col de la tuyère de section A_c , puis redevient subsonique et décélère dans le divergent. On dit que la tuyère est bloquée ou amorcée lorsque $M=1$ au col. L'écoulement est dit « choqué ».

I.5.3.Ecoulement choqué dans la partie divergente:

Pour une pression $P_s = P_c$ l'écoulement accélère dans le convergent, atteint $M=1$ au col de la tuyère, devient supersonique et continue d'accélérer dans une partie de divergent puis redevient subsonique à travers une onde de choc droite et décélère en aval du choc.

I.5.4.Ecoulement choqué à la sortie de la tuyère :

Pour une pression $P_s = P_d$ l'écoulement accélère dans le convergent, atteint $M=1$ au col de la tuyère, accélère dans le divergent et reste supersonique jusqu'à sortie de la tuyère. Le choc droit est situé à la sortie de la tuyère et il se développe un jet subsonique en aval.

I.5.5.Ecoulement sur-détendu :

Pour $P_s = P_e$ il s'agit d'un jet sur-détendu où la pression extérieure est supérieure à la pression du jet. L'écoulement en sortie de tuyère est décéléré par des ondes de choc obliques. Si l'écoulement est décéléré jusqu'à une vitesse subsonique, ces ondes de choc peuvent se terminer par un choc droit dans l'axe du jet.

I.5.6.Ecoulement adapté:

Pour $P_s = P_f$ il s'agit d'un jet adapté où la pression de jet est égale à la pression extérieure. L'écoulement en sortie de tuyère n'est soumis à aucune variation de pression par rapport à l'extérieur et reste supersonique, la forme du jet est parallèle.

I.5.7.Ecoulement sous-détendu:

Pour $P_s = P_g$ il s'agit d'un jet sous-détendu où la pression du jet est supérieure à la pression extérieure. L'écoulement en sortie de tuyère est un jet supersonique divergent.

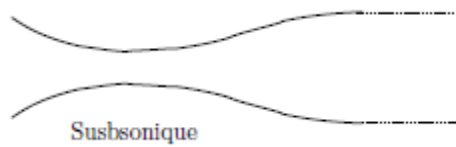


Figure (I.15): Ecoulement subsonique ($P_s = P_a$)

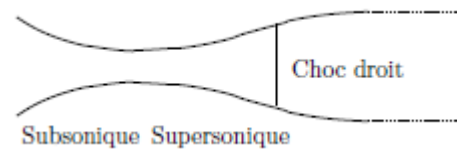


Figure (I.16): Ecoulement choqué dans la partie divergente ($P_s = P_c$)

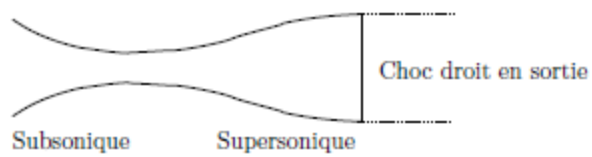


Figure (I.17): Ecoulement choqué à la sortie de la tuyère ($P_s = P_d$)

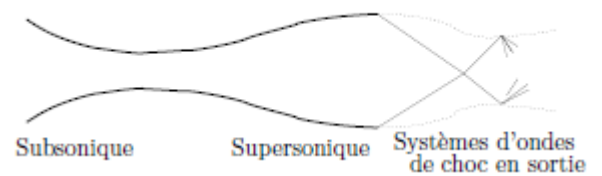


Figure (I.18): Ecoulement sur-détendu ($P_s = P_e$)

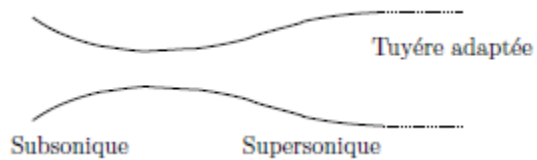


Figure (I.19): Ecoulement adapté ($P_s = P_f$)

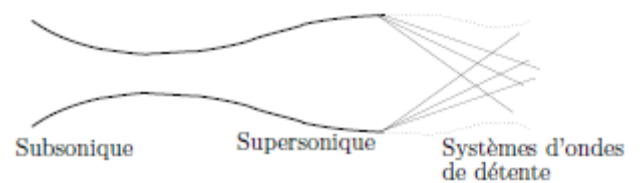


Figure (I.20): Ecoulement sous- détendu ($P_s = P_g$)

II. Introduction : [1]

Pour formuler un phénomène physique, on utilise souvent des équations mathématiques. Ces dernières représentent une modélisation de ce phénomène. Une formulation mathématique doit obligatoirement exprimer le comportement du phénomène dans l'espace et dans le temps.

Le présent chapitre traite la dynamique des gaz. Il s'agit d'une introduction à un domaine très vaste. Nous étudierons seulement des écoulements unidimensionnels et nous supposons l'absence d'échange de chaleur, de frottement aux parois, d'injection de masse ou de réaction chimique au sein du gaz en écoulement. L'analyse sera effectuée pour des écoulements permanents. Ce travail concerne la dynamique des écoulements isentropiques unidimensionnels stationnaires. Ces écoulements jouent un rôle important dans de nombreux problèmes technologiques et en particulier les écoulements de gaz dans les conduits sont très souvent adiabatiques (c'est-à-dire qu'ils s'effectuent sans échange de chaleur).

II.1. Généralité sur la mécanique des fluides :

En mécanique des fluides, on suppose que le fluide est un milieu continu, ce qui permet d'utiliser les lois classiques de conservation :

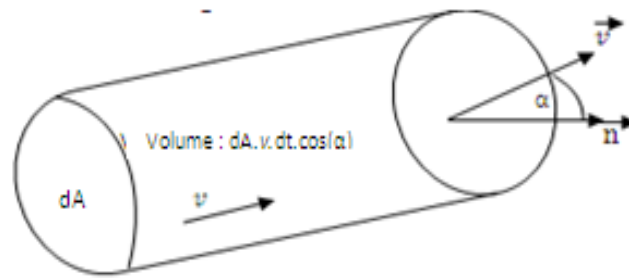
- * Conservation de masse
- * Conservation d'énergie
- * Conservation de la quantité de mouvement

II.1.1. Conservation de la masse:[10]

On cherche à exprimer la masse qui traverse une surface (A) lors d'un écoulement. Pour cela, imaginons un cylindre infiniment petit de base dA et de génératrice (vdt). Calculons la masse dm traversant cet élément de surface pendant la durée dt . Les particules situées dans le cylindre représenté sur la figure, traversent effectivement la section du cylindre pendant la durée dt .

On a donc :

$$dm = \rho dt dA \vec{v} \cdot \vec{n}$$



Figure(II.1): exprimer la masse qui traverse une surface

II.1.1.1.Débit massique ($\dot{m}$) : Le débit massique mesure la masse qui traverse la surface A par unité de temps (unité : kg.s^{-1}) :

$$\dot{m} = \iint_{(A)} \frac{dm}{dt} = \iint_{(A)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

Cette expression se simplifie encore si l'on suppose que l'écoulement est permanent , on a dans ce cas:

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (\text{II.1})$$

II.1.1.2.Débit volumique: le débit volumique Q_v mesure le volume de fluide qui traverse la surface A par unité de temps (unité : $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$) :

$$Q_v = \iint_{(A)} \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} = \iint_{(A)} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Cette expression se simplifie encore si l'on suppose que l'écoulement est permanent, on a dans ce cas:

$$Q_V = v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (\text{II.2})$$

II.1.1.3.Équation de continuité:

La masse se conservant, cela se traduit par une équation de conservation de la masse, dite aussi « équation de continuité ». Prenons un système ouvert de volume constant V , entouré par une surface fictive (A).

$$\text{div} (\rho \vec{v}) + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{II.3})$$

II.1.2.le théorème des quantités de mouvement:[1]

Considérons un volume de contrôle V . le principe fondamentale de la dynamique s'écrit pour ce volume:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \int_V \rho v dV \\ &= F_E \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où F_E désigne l'ensemble des forces extérieures qui s'appliquent sur le volume $V(t)$. Le théorème de transport appliqué au premier membre de l'expression précédent donne:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{d}{dt} \rho v dV + \int_A \rho v (v \cdot n) dA \\ &= F_E \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Si le fluide est dénué de viscosité, les forces F_E qui s'appliquent sur le volume V sont les forces de pression et les forces massique alors :

$$\int_V \frac{d}{dt} \rho v dV + \int_A \rho v (v \cdot n) dA = \int_V \rho f dV - \int_A (p \cdot n) dA$$

Si l'écoulement permanent et les forces massiques sont négligeable on obtient :

$$\int_A \rho v (v \cdot n) dA + \int_A (p \cdot n) dA = 0 \quad (\text{II.6})$$

II.1.3.Interprétation énergétique du théorème de Bernoulli:[3]

Le théorème de Bernoulli exprime tout simplement la conservation de l'énergie. Pour fixer les idées on donnera une interprétation énergétique du théorème de Bernoulli dans le cas où le fluide est plongé dans un champ de pesanteur.

Considérons, un tube de courant de section infinitésimal (c'est-à-dire une ligne de courant) et appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants voisins t et $t + dt$:

$$\begin{aligned} dEc \\ = \sum \delta W \end{aligned} \quad (\text{II. 7})$$

La variation d'énergie cinétique s'écrit:

$$\begin{aligned} Ec(t + dt) - Ec(t) \\ = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned} \quad (\text{II. 8})$$

L'énergie interne:

$$\delta h = \delta U + (p_1/\rho_1 - p_2/\rho_2) \quad (\text{II. 9})$$

U : L'énergie interne

L'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} dE_p \\ = -\rho g (z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (\text{II. 10})$$

La conservation d'énergie peut être exprimée en partant du premier principe de la thermodynamique écrit pour un système ouvert:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) dV = \delta \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \\ = q + w \end{aligned} \quad (\text{II. 11})$$

II.2.Écoulement de gaz réel dans les conduits de section variable:

II.2.1. Equations fondamentales : [1]

L'analyse qui va suivre se situe dans le cadre générale de l'approximation unidimensionnelle. Nous supposons que l'écoulement est stationnaire, qu'il n'y a pas d'apport

de chaleur ($\partial Q = 0$) Pas de travail ($\partial W = 0$), pas de force de frottement pariétal, les forces massiques est faible, pas d'obstacles au sein de l'écoulement. Nous supposons d'autre part que l'effet des forces de volume est négligeable, alors on a dans ces conditions :

II.2.1.1. La conservation de la masse:

S'exprime sous la forme:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho A v \\ &= cste \end{aligned} \quad (II.12)$$

Où :

$\dot{m}$: Débit massique en [kg/s]

ρ : masse volumique du fluide en [kg/m³]

v : vitesse d'écoulement du fluide en [m/s]

A : la section (m²)

II.2.1.2. La conservation de l'énergie:

On a l'expression (II.11):

$$\delta(h + v^2/2 + gz) = q + w$$

Si on a un écoulement qui s'effectue d'une façon adiabatique « q=0 ». Et s'il n'échange pas de travail avec l'extérieur « w=0 » et que l'on néglige la variation potentielle alors on aura l'expression suivante:

$$\begin{aligned} &\delta(h + v^2/2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (II.13)$$

Et par conséquent:

$$\begin{aligned} &h + v^2/2 \\ &= h_0 \end{aligned} \quad (II.14)$$

La constante désignée par h_0 est l'enthalpie d'arrêt, c'est-à-dire l'enthalpie du fluide ramené aux conditions d'arrêt ou l'état générateur du réservoir. Il est important de noter que l'enthalpie h ne peut jamais dépasser l'enthalpie d'arrêt h_0 .

La vitesse locale peut être déterminée à partir d'enthalpie et enthalpie d'arrêt suivant:

$$v = [2(h_0 - h)]^{1/2} \quad (\text{II.15})$$

II.2.1.3. La conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.16})$$

II.2.1.4. Conservation de l'entropie : (ou second principe de la thermodynamique):

$$s = \text{cste}$$

II.2.2. Effets des changements de section sur les caractéristiques de l'écoulement d'un gaz réel: [1]

Nous allons maintenant étudier les effets des changements de section sur les caractéristiques de l'écoulement. L'analyse peut être poursuivie sans préciser la forme de l'équation d'état du fluide. Nous partons de l'équation de continuité écrite sous forme différentielle:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (\text{II.17})$$

En écoulement incompressible, on a $d\rho = 0$ et la relation précédente indique que l'accroissement de vitesse est inversement proportionnel à la diminution de section. Lorsque l'écoulement est compressible, ce comportement est modifié. Nous faisons appel à l'équation de la conservation de la quantité de mouvement écrite sous forme différentielle pour déterminer $(d\rho/\rho)$ en fonction de (dv/v) . L'équation de la quantité de mouvement s'écrit:

$$v^2 \frac{dv}{v} + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Pour faire apparaître $(d\rho/\rho)$, notons que:

$$\begin{aligned} & \frac{dp}{\rho} \\ &= \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned} \quad (\text{II .19})$$

Nous avons déjà indiqué que cette dérivée partielle était égale au carré de la célérité sonore local:

$$\begin{aligned} & c^2 \\ &= \frac{dp}{d\rho} \end{aligned} \quad (\text{II .20})$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} & \frac{dp}{\rho} \\ &= c^2 \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned} \quad (\text{II .21})$$

Et en substituant cette relation dans l'équation de la quantité de mouvement, on obtient:

$$\begin{aligned} & v^2 \frac{dv}{v} + c^2 \frac{d\rho}{\rho} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II .22})$$

On peut maintenant introduire le nombre de mach local $M = v/c$ dans cette relation:

$$\begin{aligned} & \frac{d\rho}{\rho} \\ &= -M^2 \frac{dv}{v} \end{aligned} \quad (\text{II .23})$$

Cette expression met en évidence le rôle du nombre de mach dans l'étude des effets de compressibilité. Aux faibles nombres de mach, les variations relatives de densité sont petites par rapport aux variations relatives de la vitesse et elles peuvent être négligées dans le calcul de l'écoulement. Dans la plupart des applications, on peut considérer que $(\rho = \text{constante})$ lorsque le nombre de mach ne dépasse pas 0.2. Lorsque le nombre de mach prend des valeurs plus élevées, les variations de densité ne sont plus négligeables.

On peut maintenant substituer l'expression précédente dans l'équation de continuité pour obtenir une relation entre la vitesse et la section:

$$\frac{dv}{v} = \frac{-1}{1 - M^2} \frac{dA}{A} \quad (\text{II.24})$$

Il est aussi utile d'écrire une relation entre les changements de pression et de section. Pour cela, on peut reprendre l'équation de la quantité de mouvement sous forme (multipliant l'expression (II.18) par ρ/p) :

$$\frac{dp}{p} + \frac{\rho v^2}{p} \frac{dv}{v} = 0 \quad (\text{II.25})$$

Après les deux dernières expressions en déduire l'expression suivante:

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{1 - M^2} \left(\frac{\rho v^2}{p} \right) \frac{dA}{A} \quad (\text{II.26})$$

Les effets d'un changement de section sur la vitesse et la pression peuvent être décrits en distinguant trois cas :

Pour $M \approx 0$, une diminution de la section produit une augmentation proportionnelle de la vitesse. Cette situation est celle des écoulements incompressibles.

Pour $0 < M < 1$, c'est-à-dire aux vitesses d'écoulement subsoniques, le comportement est qualitativement le même, une diminution de section produit une augmentation de vitesse. La variation de vitesse est plus importante, la pression diminue avec la section dans ce cas.

Pour $M > 1$, c'est-à-dire aux vitesses supersonique, une augmentation de vitesse est produite par une augmentation de section.

L'écoulement devient sonique c'est-à-dire lorsque $M=1$. Considérons un conduit dans lequel la vitesse v augmente continument à partir d'une valeur très faible pour devenir supersonique. Nous savons que ce conduit doit converger dans la région subsonique et qu'il

doit diverger dans la région supersonique. Lorsque M atteint la valeur de 1, le conduit doit présenter un col.

II.3.Ecoulement isentropique unidimensionnel de gaz parfaits dans les conduits de section variable: [3]

Nous allons maintenant envisager le cas des écoulements isentropique de gaz parfait. Le comportement qualitatif mis en évidence pour des gaz réels évidemment inchangé, mais on peut en outre établir un système complet de relation algébriques pour la résolution du problème d'écoulement isentropique unidimensionnels.

II.3.1.principales notions et relations de base:

Le gaz parfait est une substance imaginaire qui obéit à la relation suivant:

$$pV = rT \quad (II .27)$$

Ou :

p : Pression du gaz (Pas)

V : volume spécifique (m^3/kg)

T : la température du gaz (K) *et* $r = R/M$

R : constante universelle des gaz parfait (J/mole.K)

M : masse molaire du gaz considère (g/mole)

Il existe d'autres écritures de la relation des gaz parfaits dont la plus utilisée en dynamique des gaz, c'est l'équation d'état des gaz parfaits:

$$p = \rho r T \quad (II .28)$$

Pour le gaz parfait on écrit :

$$dh = c_p dT \quad (\text{II.29})$$

On a également l'habitude d'utiliser le rapport γ des chaleurs spécifiques $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ de même que les relations $c_p - c_v = r$ et $c_p = r\gamma/\gamma - 1$.

Le premier principe de la thermodynamique et le principe de conservation de l'énergie. La relation (II.13) peut s'écrire sous forme:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (\text{II.30})$$

II.3.2. L'évolution isentropique:

L'entropie une propriété désignée par « S » est issue de l'étude du deuxième principe de la thermodynamique.

L'évolution réversible d'un système est une notion imaginaire qui sert à simplifier l'étude thermodynamique que des systèmes lors des diverses transformations. Les évolutions des systèmes réels sont irréversibilités.

Alors les relations concernant l'entropie :

$$dS = \left[\frac{dQ}{T} \right]_{rev} \text{ et } dS > \left[\frac{dQ}{T} \right]_{irrev} \quad (\text{II.31})$$

Une évolution isentropique s'effectue donc à entropie constante $dS = 0$ et évolue de façon adiabatique $dQ = 0$ et réversible.

II.3.3. Equations fondamentales d'une évolution isentropique:

Si un système évolue de façon isentropique et qu'il est constitué d'un gaz parfait il obéit à la relation bien connue:

$$pv^\gamma = \text{cste} \quad (\text{II .32})$$

Ou bien

$$p_1 v_1^\gamma = p_2 v_2^\gamma \quad (\text{II .33})$$

Dans une évolution isentropique d'un gaz parfait, on a donc:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} \quad (\text{II .34})$$

Et peut écrire sous la forme:

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{II .35})$$

On peut également écrire pour une évolution isentropique les relations:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_2} &= \left[\frac{\rho_1}{\rho_2} \right]^\gamma = \left[\frac{v_2}{v_1} \right]^\gamma \\ &= \left[\frac{T_1}{T_2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (\text{II .36})$$

II.3.4. L'expression de la vitesse du son:

La vitesse du son s'exprime par la relation (II.20) :

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \text{ à } S = \text{cst}$$

On peut écrire la relation (II.35) sous la forme suivante :

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

Et à l'aide de la relation $p = \rho r T$ on peut écrire:

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma r T$$

Alors l'expression de la vitesse du son:

$$c = \sqrt{\gamma r T} \quad (\text{II.37})$$

II.3.5. Effets des changements de section sur les caractéristiques de l'écoulement d'un gaz parfait:

On va maintenant déterminer l'influence d'un changement de section élémentaire dA/A sur les variables caractérisant l'écoulement.

II.3.5.1. Relation d'Hugoniot : [1]

Dans un écoulement de fluide incompressible la section et la vitesse varient en sens inverse c'est-à-dire si la section augmente la vitesse diminue et vice-versa. Pour la vitesse et la pression il en est également de même si la vitesse augmente la pression diminue et vice-versa. Nous allons examiner à présent ce qui se passe en écoulement compressible.

On peut écrire la relation (II.18) sous la forme après la division par v^2 :

$$\frac{dv}{v} = \frac{-dp}{\rho v^2}$$

On a:

$$v = c.M \quad \text{Et} \quad c^2 = \gamma r T$$

Donc:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{M^2 \gamma} \frac{dp}{p} \quad (\text{II.38})$$

Cette relation donne la variation de la vitesse en fonction de pression. Les termes M^2 et γ étant toujours positif. La pression et la vitesse varient en sens inverse.

Maintenant on va combiner la relation (II.17) et (II.18)

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{d\rho}{dp} \right)$$

Avec :

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

Alors la relation précédente sera:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) = \frac{dp}{\rho v^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

On trouve :

$$\frac{dA}{A} = \frac{-dv}{v} (1 - M^2)$$

Alors la relation d'Hugoniot:

$$\begin{aligned} & \frac{dA}{A} \\ &= (M^2 - 1) \frac{dv}{v} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Cette relation est très importante, car elle permet de décrire la variation de la vitesse en fonction de la section pour un écoulement isentropique.

On retrouve à partir des expressions (II.38) et (II.39) :

$$\begin{aligned} & \frac{dp}{p} \\ &= \frac{\gamma M^2}{1 - M^2} \frac{dA}{A} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Dans une évolution isentropique (la relation (II.34)) on a :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

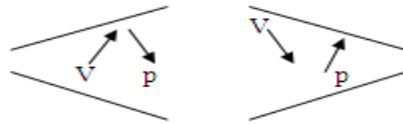
Alors on retrouve :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{M^2}{1 - M^2} \frac{dA}{A} \quad (\text{II.41})$$

II.3.5.2. Discussion de la relation d'Hugoniot:

Si $M > 1$ on a $(M^2 - 1)$ positif:

La vitesse et la section varient dans le même sens ce que veut dire que dans une zone supersonique de l'écoulement la vitesse augmente lorsque la section augmente et elle diminue lorsque la section diminue.



Figure(II.2): écoulement supersonique.

Si $M < 1$ on a $(M^2 - 1) < 0$: La vitesse et la section varient dans le sens inverse.

Ce que veut dire que dans la zone subsonique de l'écoulement, la vitesse augmente lorsque la section diminue et vice-versa.



Figure(II.3): écoulement subsonique.

Si $M = 1$ $\frac{dA}{A} = 0$ on a donc un extrême de section c'est-à-dire une section minimale s'appelle le col.

II.3.6. Les relations complémentaires (isentropiques):

A partir des relations (II.14) et (II.29) pour un point d'arrêt on peut écrire

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{v^2}{2} \quad (\text{II.42})$$

Puis diviser les deux membres par $C_p T$. Cette opération donne:

$$\begin{aligned} & \frac{T_0}{T} \\ &= 1 + \frac{v^2}{2C_p T} \end{aligned} \quad (\text{II .43})$$

On a le nombre de mach $M = v/c$ et $C_p = r\gamma/\gamma - 1$ et la relation (II.37) on peut écrire:

$$\begin{aligned} & \frac{T_0}{T} \\ &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \end{aligned} \quad (\text{II .44})$$

Les trois relations $\frac{T_0}{T}, \frac{p_0}{p}$ et $\frac{\rho_0}{\rho}$ sont ainsi déterminées en fonction du nombre de Mach. La température et la pression d'arrêt p_0 et T_0 sont constantes en écoulement isentropique.

A partir des relations (II.36) et (II.44) on peut écrire:

$$\begin{aligned} & \frac{p_0}{p} \\ &= \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{aligned} \quad (\text{II .45})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_0}{\rho} \\ &= \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \end{aligned} \quad (\text{II .46})$$

II.3.7. La relation de Saint-Venant:

Les équations de Saint-Venant donnent les relations entre la vitesse de l'écoulement et les autres paramètres tels que (température, pression, et masse volumique) pour un écoulement isentropique dans une conduite à section variable. On peut écrire l'expression (II.30) sous forme :

$$\begin{aligned} v_2^2 - v_1^2 &= 2C_p(T_1 - T_2) \\ &= 2C_p T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{II .47})$$

Pour un écoulement isentropique on peut utiliser la relation (II.36) alors:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2C_p T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \quad (\text{II .48})$$

A partir des relations (II.28) et ($C_p = r\gamma/\gamma - 1$) on a :

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \quad (\text{II .49})$$

Si on applique l'équation précédente entre un point de l'écoulement et le point d'arrêt.

$$v^2 = 2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \quad (\text{II .50})$$

Cette vitesse s'appelle **la vitesse de décharge**.

La vitesse maximale:[1]

Si nous imaginons un écoulement entre un réservoir « état générateur » ou un point d'arrêt, et un point quelconque, la pression de ce point est nulle ($p_1 = 0$), alors la vitesse de ce point prendre la valeur maximale.

$$v_{max} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II .51})$$

II.3.8. L'expression du débit massique : [1]

Dans l'étude de l'écoulement isentropique dans les tuyères, il est intéressant d'examiner l'expression générale du débit massique du fluide compressible dans une conduite quelconque, puis les différentes valeurs que peut prendre ce débit massique. On sait que le débit massique en un point quelconque d'une conduite s'écrit (la relation (II.12)):

$$\dot{m} = \rho A v$$

En substituant $\rho = p/rT$ et $v = Mc = M(\gamma r T)^{\frac{1}{2}}$, cette expression devient:

$$\begin{aligned} \dot{m} \\ = AMp \left(\frac{\gamma}{rT} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{II .52})$$

En utilisant les expressions de p_0/p et T_0/T en fonction du nombre de mach, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{m} \\ = AMp_0 \left(\frac{\gamma}{rT_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \end{aligned} \quad (\text{II .53})$$

II.3.9. Les conditions critiques:

On s'intéresse maintenant au comportement du fluide lorsque le régime de l'écoulement devient sonique ($M=1$). La section d'un conduit dans laquelle ce régime est atteint est appelée section critique et on dit que l'écoulement se trouve dans les conditions critiques.

Les valeurs de (p , ρ et T) relatives au point critiques, on a les relations complémentaires devient:

$$\begin{aligned} \frac{T_c}{T_0} \\ = \frac{2}{\gamma + 1} \end{aligned} \quad (\text{II .54})$$

$$\begin{aligned} \frac{p_c}{p_0} \\ = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (\text{II .55})$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_c}{\rho_0} \\ = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (\text{II .56})$$

A partir de l'expression de la vitesse du son (II.37) on a :

$$\begin{aligned}\frac{c_c}{c_0} &= \left(\frac{T_c}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (\text{II .57})$$

Au point critique on a :

$$\begin{aligned}M_c &= \frac{v_c}{c_c} = 1 \text{ alors } v_c \\ &= c_c\end{aligned}\quad (\text{II .58})$$

D'après les expressions (II.57) (II.58) La vitesse critique on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}v_c \\ &= c_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (\text{II .59})$$

On a l'expression de la vitesse du son $c_0 = \sqrt{\gamma r T_0}$

$$\begin{aligned}v_c \\ &= \left(\frac{2\gamma r}{\gamma + 1} T_0\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (\text{II .60})$$

II.3.10. L'expression de la section A/A_c:

Il est donc intéressant de connaitre les relations qui existent entre A/A_c et M d'une part et A/A_c et P d'autre part. Pour cela, on écrit que le débit massique est partout le même dans la tuyère et quel que soit le type d'écoulement on a:

$$\begin{aligned}\dot{m}_c &= A_c \rho_c v_c \\ &= A \rho v\end{aligned}\quad (\text{II .61})$$

(A, ρ et v étant mesurés en un point quelconque)

On peut développer l'expression du débit massique au point critique sous forme:

$$\begin{aligned}\dot{m}_c \\ &= A_c p_0 \left(\frac{\gamma}{r T_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}\end{aligned}\quad (\text{II .62})$$

En combinant cette relation avec (II.53), on obtient une équation pour le rapport de la section courante à la section critique qu'on appelle parfois la loi des aires:

$$\frac{A}{A_c} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}} \quad (\text{II .63})$$

En utilisant les relations déjà mentionnées, on peut obtenir:

$$\frac{A}{A_c} = \left[\frac{\left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{2}{\gamma - 1}} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{2}{\gamma}}}{1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II .64})$$

II.4.Ondes de choc dans les gaz parfaits:

II.4.1.Equations fondamentales pour les ondes de choc droites: [1]

On s'intéresse ici à une onde de choc qui est une surface de discontinuité plane perpendiculaire à l'écoulement séparant une région amont désignée par l'indice 1(repère les paramètres de l'écoulement en amont du choc) d'une région aval d'indice 2(repère les paramètres de l'écoulement en aval du choc), on suppose que la section du volume de contrôle étudié ne varie pas $A = A_1 = A_2$ (on se place dans un domaine proche de l'onde de choc qui est de très faible épaisseur). On a alors les différentes relations suivantes :

Conservation de la masse:

L'équation (II.12) est toujours valable dans le cadre de nos hypothèses. On peut en outre la simplifier puisque $A_1 = A_2$. On obtient finalement:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (\text{II .65})$$

Conservation de la quantité de mouvement:

Puisque les forces de volume et de frottement sont négligeables, la variation de quantité de mouvement entre l'état 1 et l'état 2 est due uniquement aux forces de pression agissant sur le fluide situé dans le volume de contrôle. On a donc :

$$\dot{m}v_1 - \dot{m}v_2 = p_1A_1 - p_2A_2$$

On en déduit alors immédiatement:

$$\begin{aligned} p_1 + \rho_1 v_1^2 \\ = p_2 + \rho_2 v_2^2 \end{aligned} \quad (\text{II.66})$$

Conservation de l'énergie:

$$\begin{aligned} C_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} \\ = C_p T_2 + \frac{v_2^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

Il sera ensuite possible de représenter tous les rapports des paramètres amont et aval du choc en fonction de l'un ou l'autre des nombres de Mach.

L'équation de conservation de l'énergie permet d'établir une relation pour la température à partir de $C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$ et (II.37) :

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} \\ = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir une relation pour la pression avec la relation $c_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} \\ = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

On peut maintenant passer à l'équation de conservation de la masse. Une première opération consiste à remplacer les vitesses v_1 et v_2 par $M_1 c_1$ et $M_2 c_2$

$$\begin{aligned}\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{v_1}{v_2} \\ &= \frac{M_1 c_1}{M_2 c_2}\end{aligned}\quad (\text{II.70})$$

On peut aussi écrire le rapport de la vitesse du son sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}\frac{c_2}{c_1} \\ = \sqrt{\frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2}}\end{aligned}\quad (\text{II.71})$$

On va pouvoir maintenant écrire une relation entre les Mach amont et aval, en combinant $\rho = p/RT$ et (II.37) et (II.70) :

$$\begin{aligned}\frac{p_2}{p_1} \\ = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (\text{II.72})$$

On peut maintenant écrire une relation entre les Mach amont et aval à partir des relations (II.68), (II.69) et (II.72):

$$\begin{aligned}\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \\ = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (\text{II.73})$$

La résolution de cette équation se fait en élevant les deux membres au carré, ramener au même dénominateur, observé que la relation obtenue est symétrique en fonction M_1 et M_2 et que l'une de ces racines est :

$$M_1^2 = M_2^2$$

L'autre racine est alors

$$\begin{aligned}
& M_2^2 \\
&= \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}{\frac{2\gamma M_1^2}{\gamma - 1} - 1}
\end{aligned} \tag{II .74}$$

En exploitant l'équation (II.74), on va pouvoir exprimer les rapports aval/amont des différentes variables uniquement en fonction de M_1 .

$$\begin{aligned}
& \frac{p_2}{p_1} \\
&= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1)
\end{aligned} \tag{II .75}$$

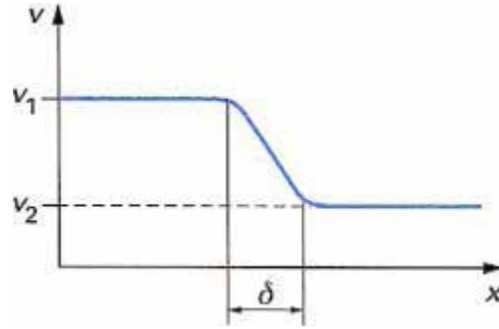
$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} \\
&= \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}
\end{aligned} \tag{II .76}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_2}{T_1} \\
&= \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2} \right]
\end{aligned} \tag{II .77}$$

II.4.2.Estimation de l'épaisseur d'une onde de choc:[6]

L'épaisseur de l'onde de choc peut être estimée à partir de l'analyse dimensionnelle et de considérations simplificatrices. Ainsi, si dans l'équation de la quantité de mouvement, on admet que toutes les forces sont du même ordre de grandeur, en particulier, les forces d'inertie et celles de viscosité, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \rho v \frac{dv}{dx} \\
&= \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dv}{dx} \right)
\end{aligned} \tag{II .78}$$



Figure(II.4): Épaisseur d'une onde de choc

Or, en première approximation (figure II.4) :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v_1 - v_2}{\delta}$$

Où δ est l'épaisseur de l'onde de choc. Ainsi:

$$\rho v \frac{dv}{dx} = \rho_0 v_0 \frac{v_1 - v_2}{\delta}$$

Où ρ_0 et v_0 et sont des valeurs moyennes à l'intérieur de l'onde de choc. Par ailleurs, on a :

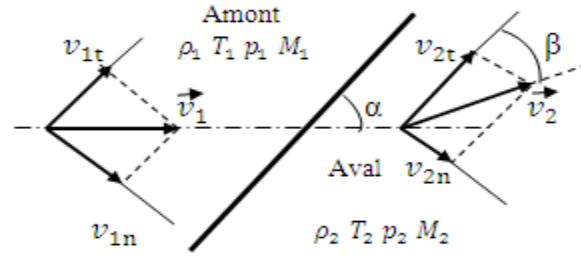
$$\frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dv}{dx} \right) = \mu_0 \frac{v_1 - v_2}{\delta^2}$$

La combinaison des trois relations dernières permet d'écrire :

$$\delta = \frac{\mu_0}{\rho_0 v_0} \quad (\text{II.79})$$

II.4.3. Equations fondamentale pour les chocs obliques:[7]

Les chocs obliques peuvent être facilement étudiés à partir des résultats déjà établis pour les ondes de choc droites. La configuration d'étude est représentée sur la figure .Elle correspond a la situation où l'onde de choc est inclinée d'un angle α par rapport à l'écoulement incident. L'angle β donne l'inclinaison de l'écoulement aval (qui est dévié par l'onde de choc) par rapport au plan du choc. Il en résulte que l'angle $\varphi = \alpha - \beta$ représente le changement de direction de l'écoulement, c'est-à-dire la déflexion. Ce cas de figure:



Figure(II.5): onde de choc oblique

Nous désignons par « n » et « t » les directions normale et tangentielle au choc. Ainsi v_{1n} et v_{1t} représente les composantes normale et tangentielle de la vitesse amont et v_{2n} et v_{2t} les composantes en aval.

On peut écrire les relations géométriques suivantes:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_{1n}^2 + v_{1t}^2 & v_2^2 &= v_{2n}^2 + v_{2t}^2 \\ v_{1n} &= v_1 \sin \alpha & v_{2n} &= v_2 \sin \beta \\ v_{1t} &= v_1 \cos \alpha & v_{2t} &= v_2 \cos \beta \end{aligned}$$

On peut maintenant écrire les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement projetées suivant les directions normale et tangente au choc ainsi que l'énergie. On obtient les équations suivant:

Conservation de la masse:

$$\begin{aligned} \rho_1 v_{1n} \\ = \rho_2 v_{2n} \end{aligned} \tag{II.80}$$

Conservation de la quantité de mouvement:

Le bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle entourant le choc s'écrit de la même façon que pour(II. 62). On a ici, avec la normale à l'onde de choc :

$$\begin{aligned} p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 \\ = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2 \end{aligned} \tag{II.81}$$

En projection suivant la direction tangentielle à l'onde de choc :

$$\begin{aligned} & \rho_1 v_{1n} v_{1t} \\ &= \rho_2 v_{2n} v_{2t} \end{aligned} \quad (\text{II .82})$$

A partir de l'équation de conservation de la masse, il reste simplement :

$$v_{1t} = v_{2t}$$

Conservation de l'énergie:

Les vitesses tangentielles d'amont et d'aval sont égales, alors on peut écrire l'équation de l'énergie:

$$\begin{aligned} & c_p T_1 + \frac{v_{1n}^2}{2} \\ &= c_p T_2 + \frac{v_{2n}^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{II .83})$$

Ces équations sont très similaires à celles pour les ondes de choc droites. En fait, toutes les relations établies pour le choc droit sont utilisables pour les chocs obliques en remplaçant les vitesses et les nombres de Mach par leurs composantes normales:

$$\begin{aligned} & M_{1n} = M_1 \sin \alpha, \quad M_{2n} \\ &= M_2 \sin \beta \end{aligned} \quad (\text{II .84})$$

Relation de Rankine-Hugoniot:[8]

$$\begin{aligned} & \frac{p_2}{p_1} \\ &= 1 \\ &+ \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{1n}^2 - 1) \end{aligned} \quad (\text{II .85})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_{1n}}{v_{2n}} \\ &= \frac{(\gamma + 1)M_{1n}^2}{2 + (\gamma - 1)M_{1n}^2} \end{aligned} \quad (\text{II .86})$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_2}{T_1} \\ &= \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \end{aligned} \quad (\text{II .87})$$

III.1.Introduction:

Dans ce chapitre on donne un code de calcul numérique réalisé en MATLAB pour la détermination des caractéristiques des écoulements isentropiques et celle des ondes de choc droites.

Ce code numérique se compose d'un programme principal et deux sous-programmes:

- ISEN: Sous-programme qui calcule les propriétés isentropiques de l'écoulement à travers la tuyère
- NCHC: Sous-programme qui calcule les propriétés de l'écoulement à l'aval et à l'amont de l'onde de choc.

III.2.Description de MATLAB:

Matlab est un logiciel de calcul numérique ce qui signifie que chaque variable doit avoir une valeur connue et définie contrairement aux logiciels de calcul analytique comme Maple ou Derive où chaque variable est représentée par un ensemble de valeurs indéfinies. En termes de temps de calcul, les logiciels numériques sont beaucoup plus efficaces que les logiciels

analytiques puisqu'ils utilisent moins de mémoire du fait que chaque variable a une valeur assignée. Cependant, les résultats de calcul numérique sont imputés d'une erreur basée sur la nature des opérations. La grandeur des erreurs associées au calcul numérique dépend des algorithmes de calcul. Pour des opérations de calcul simple l'erreur est souvent minime voire même nulle. C'est pourquoi en général les gens préfèrent perdre un peu de précision pour gagner du temps. Matlab est utilisé pour :

- effectuer des opérations de calcul
- faire de la visualisation graphique
- faire de la programmation.

III.2.1.Fenêtre de commande:

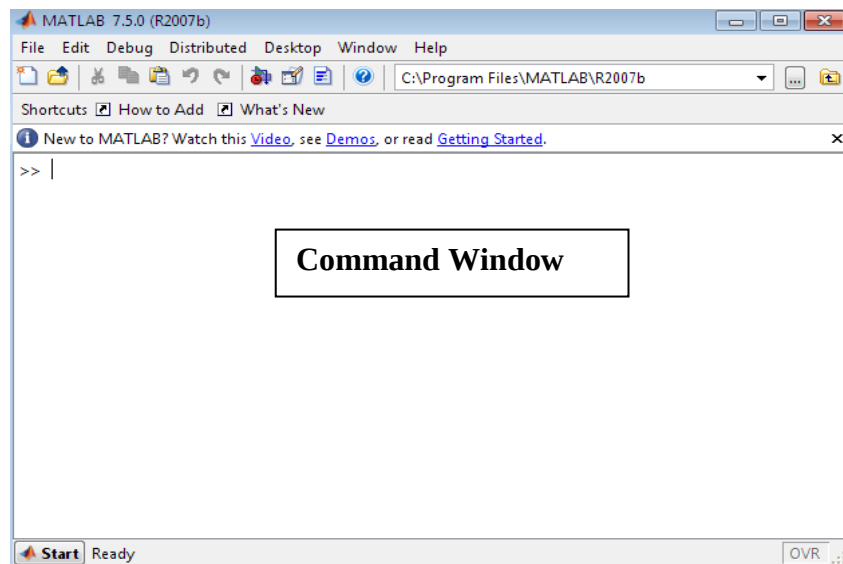


Figure (III.1): Fenêtre de commande.

III.2.2.Editeur (M-File) :

Les m-files permettent d'enregistrer les scripts sous forme de fichiers-texte et servent en particulier à définir de nouvelles fonctions (une grande partie des fonctions prédéfinies de MATLAB sont stockées sous forme de m-files dans la toolbox matlab).

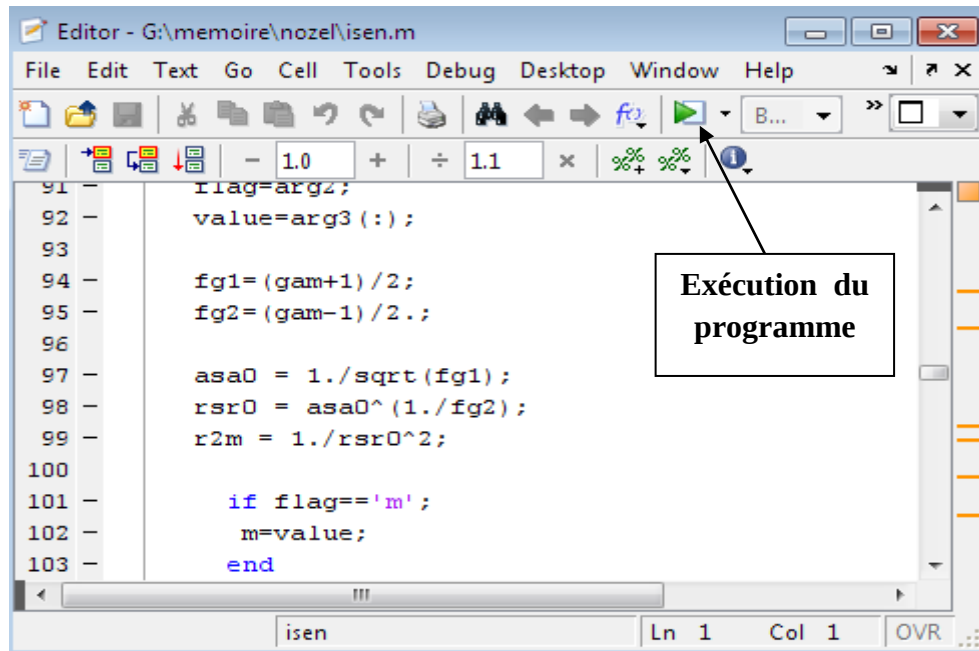


Figure (III.2): Editeur (M-File).

III.2.3.L'affichage des résultats:

Les résultats de l'exécution du programme sont affichés dans la fenêtre de commande.

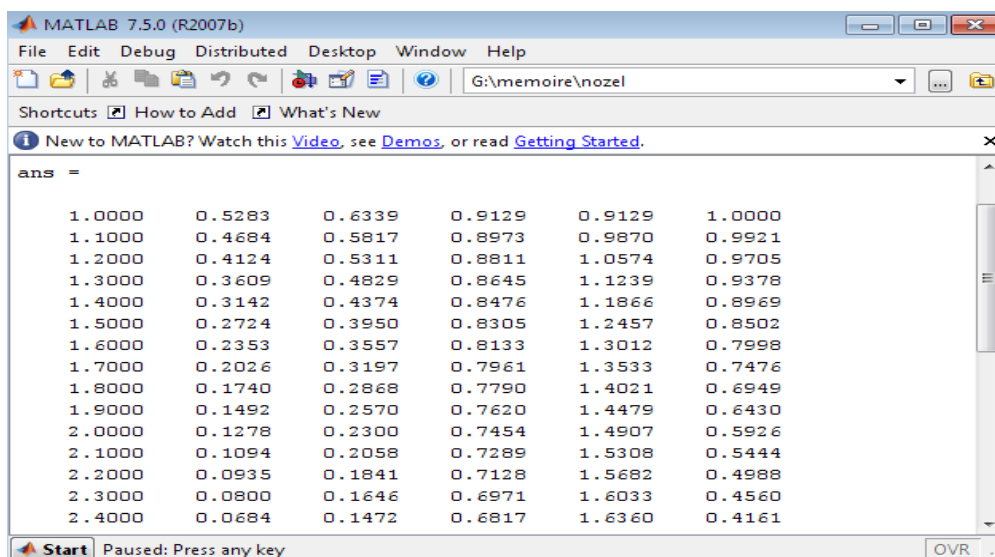


Figure (III.3): L'affichage des résultats.

III.3. Hypothèses de travail

- L'écoulement monodimensionnel : On suppose que le vecteur vitesse ne possède qu'une seule composante non nulle.
- les effets visqueux et les effets de conductivité thermique sont négligeables.
- L'écoulement stationnaire ou permanent.
- Fluide parfait.
- L'écoulement isentropique en dehors des chocs.
- Pas de forces extérieures.

III.4. Détermination des propriétés de l'écoulement supersonique:

Deux sous programmes sont réalisés pour calculer les différents rapports de (pression, densité, vitesse, section et température) en fonction de nombre de Mach pour :

- a. Le régime isentropique
- b. L'amont et l'aval du choc

III.4.1. Les caractéristiques de l'écoulement supersonique d'un gaz parfait en régime isentropique:

III.4.1.1. Les relations utilisées:

$$\frac{T}{T_0} = 1 / \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \quad (\text{III. 1})$$

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (\text{III. 2})$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (\text{III. 3})$$

On peut écrire :

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 4})$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (\text{III. 5})$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0} \right) \quad (\text{III. 6})$$

On utilise l'équation de conservation de masse pour écrire le rapport de section sous forme:

$$\frac{A}{A_c} = \frac{1}{\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{v}{c_0} \right) / \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \frac{c_c}{c_0} \right) \right]} \quad (\text{III. 7})$$

On a la vitesse de l'écoulement d'arrêt ($v_0 = 0$), alors on va écrire la vitesse de l'écoulement par rapport la vitesse du son d'arrêt :

$$\frac{v}{c_0} = \frac{c}{c_0} M \quad (\text{III. 8})$$

III.4.1.2. Nombre de Mach:

Pour une étude plus détaillée, on va varier chaque fois un rapport pour retrouver les autres en fonction de ce dernier, par exemple en fait varier le rapport de pression pour retrouver le nombre de Mach et les rapports de (densité, vitesse, section et température). Donc il est nécessaire de déterminer les relations de nombre de Mach en fonction des rapports précédents.

Alors on peut écrire le nombre de Mach :

1) En fonction du rapport de pression:

$$M = \left[\left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \left(-1 + \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 9})$$

2) En fonction du rapport de la vitesse du son :

$$M = \left[\left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \left(-1 + \left(\frac{c}{c_0} \right)^{-2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 10})$$

3) En fonction du rapport de la vitesse d'écoulement :

$$M = \left[\frac{1}{1 / \left(\frac{v}{c_0} \right)^2 - \frac{\gamma - 1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 11})$$

4) En fonction du rapport de la densité:

$$M = \left[\left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \left(-1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1-\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 12})$$

5) En fonction du rapport de la température :

$$M = \left[\left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \left(-1 + \left(\frac{T}{T_0} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 13})$$

Connaissant le rapport de la section on détermine le rapport de la densité par la formule suivante :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \left(1 - \left(\frac{A}{A_c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(2 / \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^2 - 1 \right) \left(1 - \left(\frac{A}{A_c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\rho_c}{\rho_0} \quad (\text{III. 14})$$

III.4.1.3. Description des tables:

Les résultats obtenus après l'exécution du sous programme (ISEN) peuvent être données sous forme des tableaux et courbes (voir Annexe).

M	P/P ₀	ρ/ρ ₀	c/c ₀	v/c ₀	A/A _c	T/T ₀

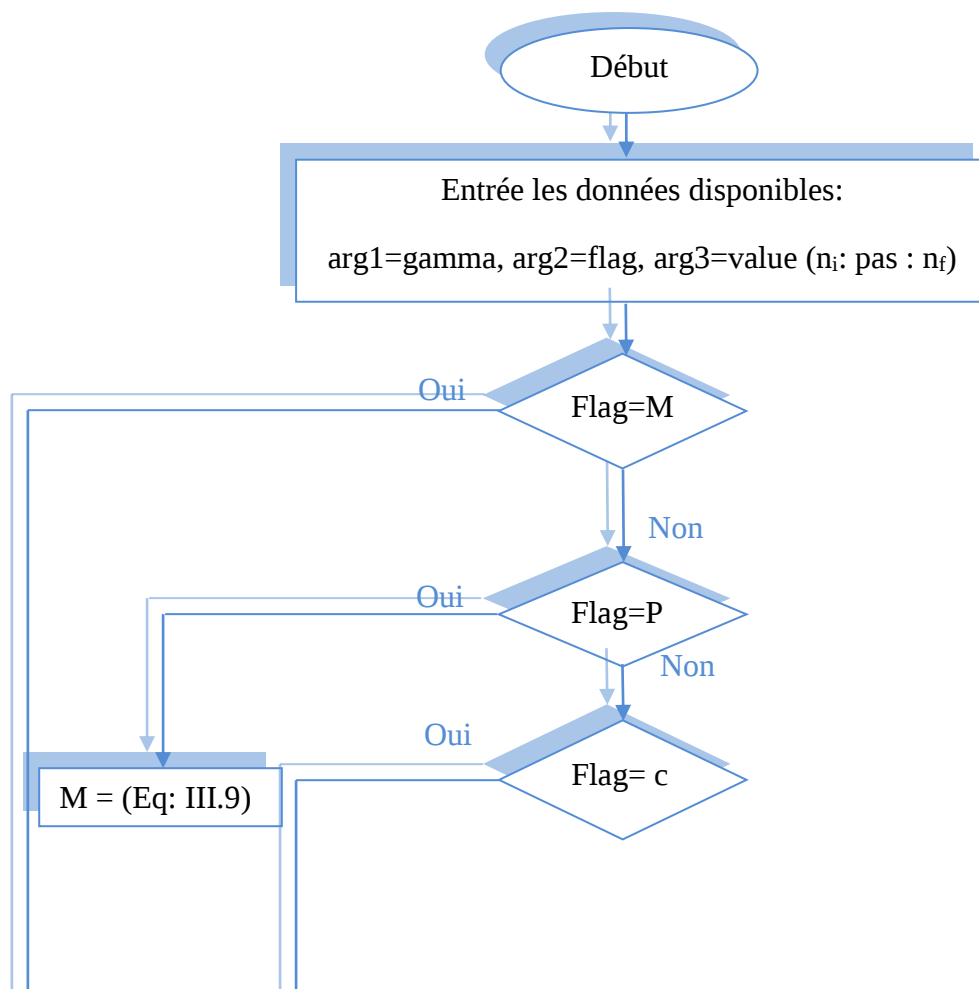
Cette table donne, en fonction du nombre de Mach d'un point de l'écoulement:

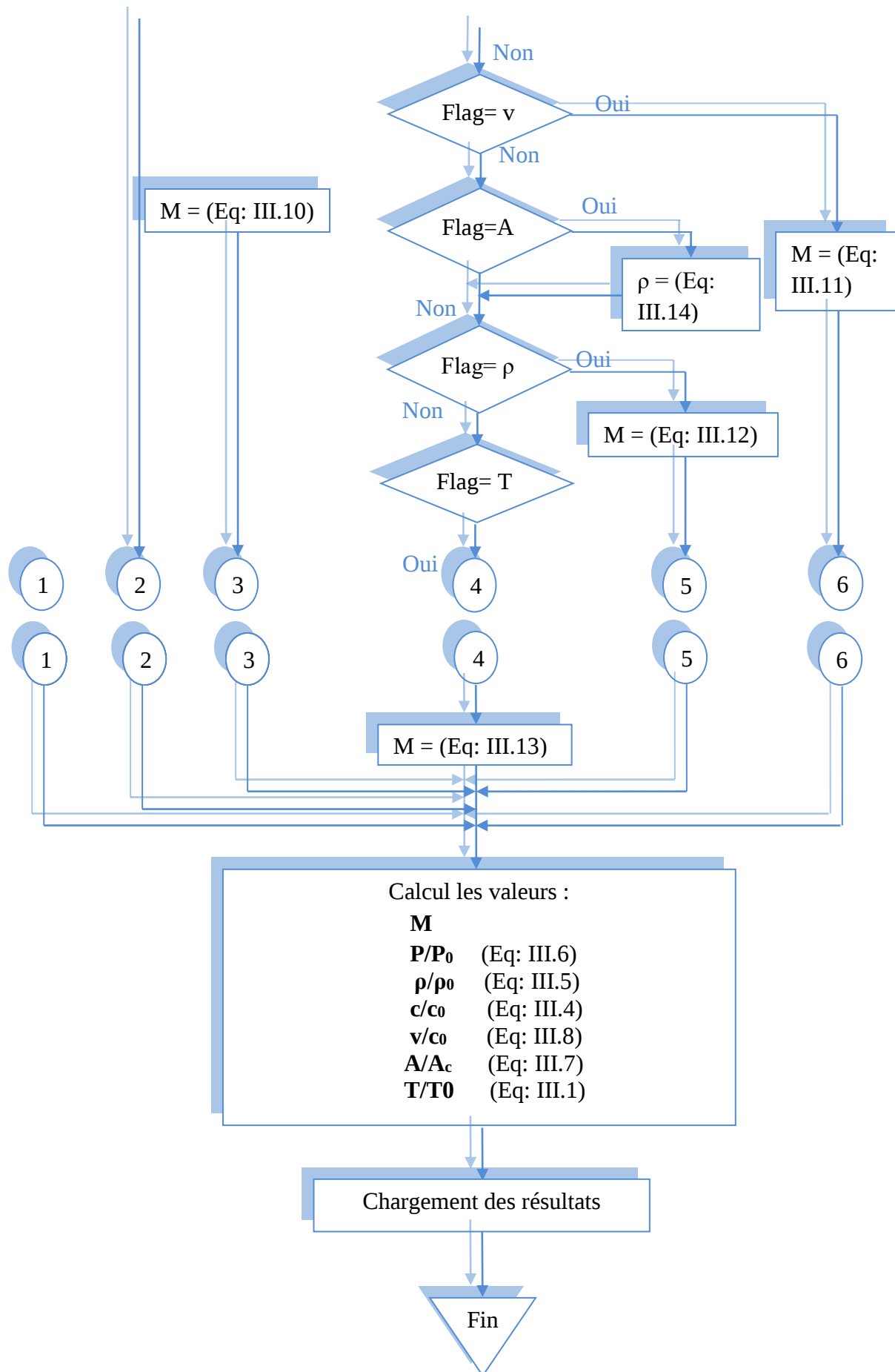
$$P/P_0, \rho/\rho_0, c/c_0, v/c_0, A/A_c, T/T_0$$

Les rapports des caractéristiques de l'écoulement aux caractéristiques de l'état générateur, ces rapports s'appliquant à tous les écoulements isentropiques.

III.4.1.4. Calcul les caractéristiques de l'écoulement supersonique gaz parfait en régime isentropique:

L'organigramme suivant résume les étapes d'un programme numérique itératif pour le calcul des caractéristiques de l'écoulement. (Sous programme ISEN):





III.4.2. Les caractéristiques de l'écoulement supersonique en amont et aval d'un choc:

III.4.2.1. Les relations utilisées:

Les relations utilisées dans cette étude en amont et aval de choc dans une tuyère Laval sont :

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}{\frac{2\gamma M_1^2}{\gamma - 1} - 1} \quad (\text{III. 15})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (\text{III. 16})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \quad (\text{III. 17})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2} \right] \quad (\text{III. 18})$$

Relation des pressions de stagnation isentropique: [3]

Dans le cas d'un écoulement présentant un choc, il faut naturellement tenir compte de l'existence de deux pressions d'arrêt de référence : l'une p_{01} associée à l'écoulement

isentropique en amont du choc, l'autre p_{02} associée à l'écoulement isentropique en aval du choc. On écrit donc

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{III. 19})$$

On peut écrire par la relation isentropique :

$$\frac{p_{02}}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (\text{III. 20})$$

Déterminé la relation précédente en fonction de M_1 . On obtient alors:

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) M_1^2 \left[\frac{\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2}{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (\text{III. 21})$$

Un autre rapport de pression utile est celui des pressions d'arrêt isentropique en aval et en amont de l'onde de choc, ce rapport peut être évalué par factorisation:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} \quad (\text{III. 22})$$

On obtient facilement:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left\{ \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} M_1^2 \right]^\gamma \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \right\}^{\frac{-1}{\gamma - 1}} \quad (\text{III. 23})$$

III.4.2.2.Relation entre les rapports caractéristiques de l'onde droite:[9]

Le rapport des températures est donné par:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{III. 24})$$

Le théorème d'Euler peut s'écrire:

$$\rho_1 A v_1 (v_2 - v_1) = A (p_1 - p_2) \quad (\text{III. 25})$$

Multiplions les deux membres par $v_2 + v_1$ pour faire apparaître $v_2^2 - v_1^2$

$$\rho_1 v_1 (v_2^2 - v_1^2) = (p_1 - p_2)(v_2 + v_1) \quad (\text{III. 26})$$

.

Divisons les deux membres par $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$:

$$v_2^2 - v_1^2 = (p_1 - p_2) \left(\frac{v_1}{\rho_1 v_1} + \frac{v_2}{\rho_2 v_2} \right) = (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\text{III. 27})$$

Et, en introduit cette expression dans le théorème de Barré de Saint-Venant :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = H_2 - H_1 \quad (\text{III. 28})$$

La relation de Rankine-Hugoniot lie les pressions amont et aval aux masses volumiques amont et aval. Elle s'obtient en éliminant le nombre de Mach M_1 entre les relations

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \quad (\text{III. 29})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{p_2}{p_1} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \quad (\text{III. 30})$$

Et on a aussi le rapport de la vitesse du son amont et aval du choc

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2}} \quad (\text{III. 31})$$

On peut aussi écrire le rapport de pression d'arrêt sous la forme :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (\text{III. 32})$$

III.4.2.3. Nombre de Mach:

On va varier chaque fois un rapport pour retrouver les autres en fonction ce dernier, par exemple en varier le rapport de pression pour retrouver le nombre de Mach et les rapports de

(densité, vitesse, section et la température).alors il faut déterminer les relations de nombre de Mach amont en fonction des rapports précédent.

Alors on peut écrire le nombre de Mach amont :

1) En fonction du nombre de Mach aval:

$$M_1 = \left[\frac{(\gamma - 1)M_2^2 + 2}{2\gamma M_2^2 - \gamma + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 33})$$

2) En fonction du rapport de pression:

$$M_1 = \left[\frac{(\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma - 1}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 34})$$

3) En fonction du rapport de la densité:

$$M_1 = \left[\frac{\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) \frac{\rho_2}{\rho_1}}{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{\rho_2}{\rho_1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 35})$$

Connaissant les rapports de température et vitesse du son en amont et aval de l'onde de choc on détermine le rapport de pression en fonction les deux derniers rapports par les formules suivantes:

1) En fonction du rapport de la température :

A partir des deux équations (III.24) et (III.30) :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{\frac{T_2}{T_1} - 1}{2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right] + \left[\left(\frac{\frac{T_2}{T_1} - 1}{2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right)^2 + \frac{T_2}{T_1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 36})$$

2) En fonction du rapport de la vitesse du son:

A partir les deux équations (III.30) et (III.31) :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 1}{2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right] + \left[\left(\frac{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 1}{2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right)^2 + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 37})$$

Connaissant le rapport de pression de stagnation en amont et aval de l'onde de choc on détermine le rapport de la densité par la formule suivante:

A partir les deux équations (III.29) et (III.32)

$$a = \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{1-\gamma}$$

$$da = a - 1$$

$$b = (da/a)^{1/3}$$

$$c = [\gamma (\gamma^2 - 1)/12]$$

$$c1 = 2c/(\gamma - 1) - 1 - (1/2c)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + b/c (1. + b/c/2 + c1. b. b) \quad (III. 38)$$

III.4.2.4.Description des tables:

L'exécution du deuxième sous programme (NCHC) donne les valeurs des caractéristiques de l'écoulement à l'aval et amont de l'onde de choc. Ses résultats sont donnés sous forme d'un tableau et courbes (voir Annexe).

M ₁	M ₂	P ₂ /P ₁	T ₂ /T ₁	ρ ₂ /ρ ₁	P ₀₂ /P ₀₁	C ₂ /C ₁

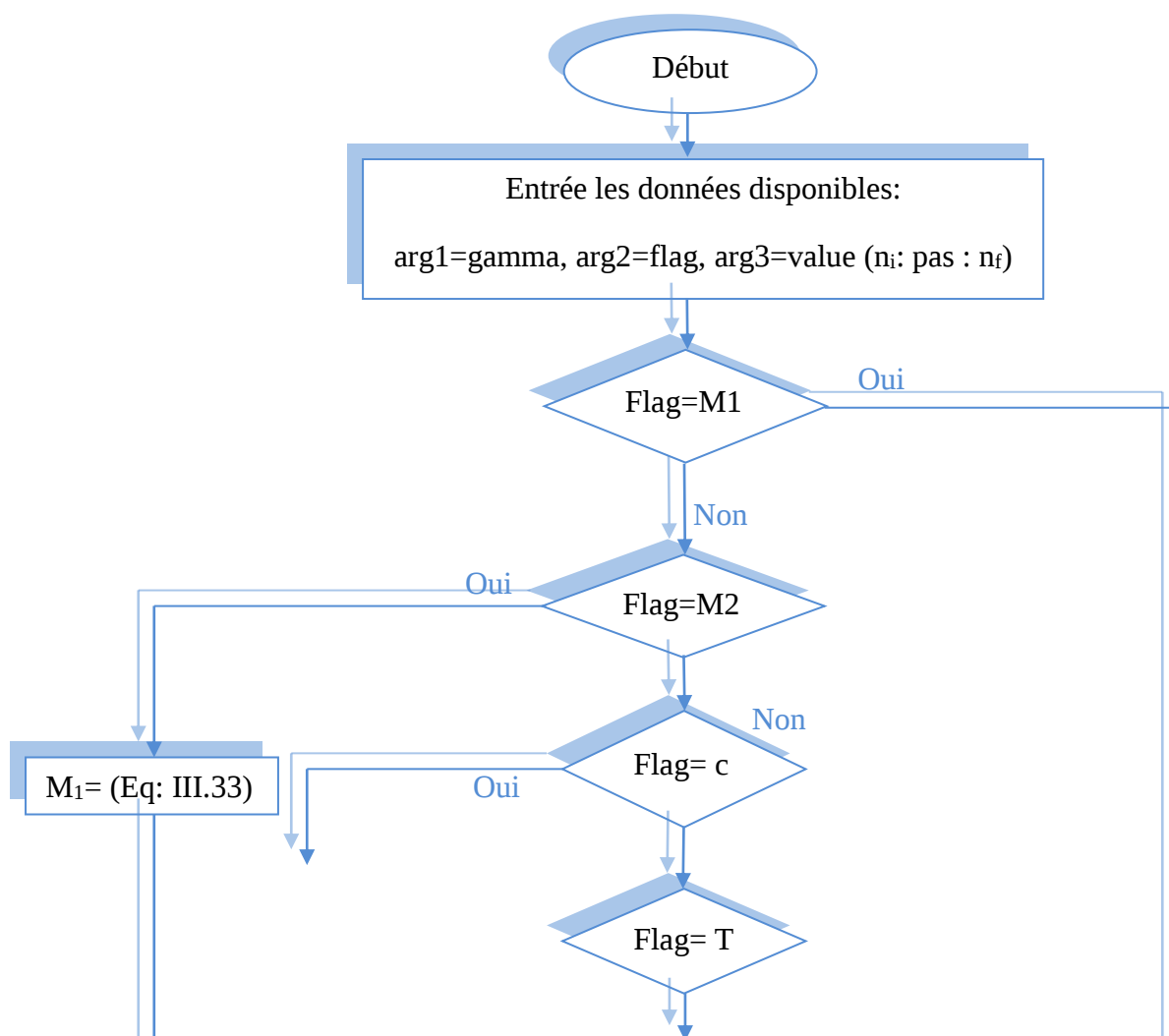
Cette table donne, en fonction du nombre de Mach d'un point de l'écoulement:

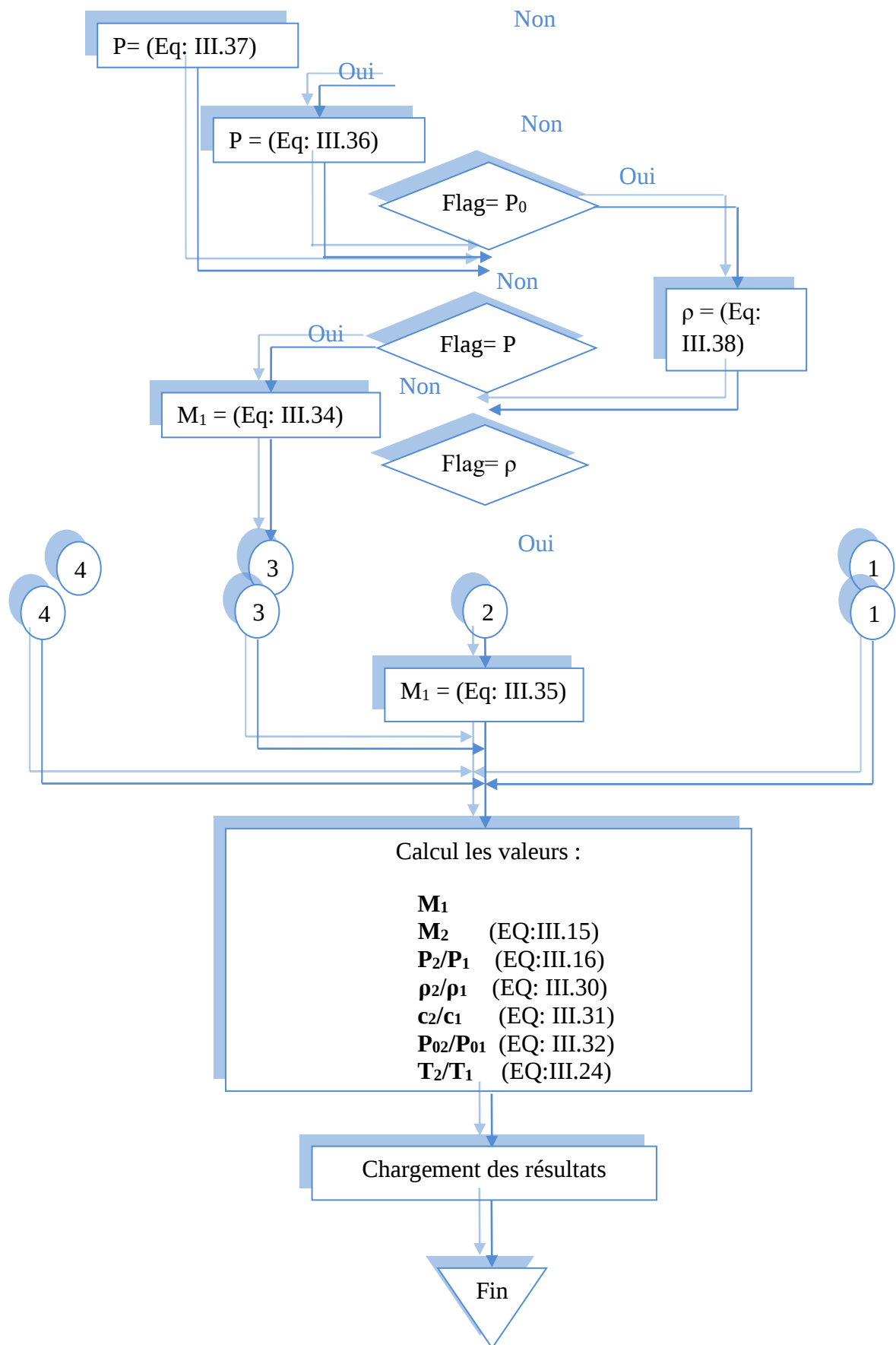
$$P_2/P_1, \quad T_2/T_1, \quad \rho_2/\rho_1, \quad T_2/T_1, \quad P_{02}/P_{01}, \quad C_2/C_1$$

Les rapports: des caractéristiques de l'écoulement avant le choc aux caractéristiques de l'état d'après du choc.

III.4.2.5. Calcul les caractéristiques de l'écoulement en amont et aval d'un choc:

L'organigramme suivant résume les étapes d'un programme numérique itératif pour le calcul des caractéristiques amont et aval d'une onde de choc. (Sous programme NCHC)





III.4.2.6. Utilisation des tables de l'onde de chocs droites pour le calcul de l'onde de choc oblique:

Les tables de choc droit peuvent être utilisées pour déterminer les chocs obliques. Si la déflexion φ et le nombre de Mach sont donnés, il faut d'abord déterminer l'angle de choc α , puis calculer la composante normale de Mach amont $M_{1n} = M_1 \sin \alpha$.

On peut alors lire dans les tables de choc droites les valeurs des rapports de propriétés correspondantes à M_{1n} . On obtient ainsi la valeur de M_{2n} et il faut pour passer à M_2 utiliser la relation:

$$M_2 = M_{2n} / \sin(\alpha - \varphi)$$

III.4.3. Description du comportement d'une tuyère Convergente/Divergente:

Pour étudier les différents types d'écoulements dans une tuyère convergente-divergente et pour capter les positions des ondes du choc, il faut varier la section de la tuyère (A_c/A_s) et la pression ambiante (P_a/P_0).

On utilise le sous programme (ISEN) avec les données de la section (A_c/A_s) en retrouve pour un écoulement subsonique les valeurs de la pression PR1, et pour un écoulement supersonique en retrouve les valeurs de la pression PR2 et le nombre de mach à la sortie (M_s).

On utilise aussi le sous programme (NCHC) avec la valeur du nombre de mach de la sortie pour retrouver les valeurs de la pression (P_2/P_1) (choc à la sortie de la tuyère), $PR_3 = PR_2$ (P_2/P_1)

III.4.3.1. Les différents types d'écoulements possibles :

On peut maintenant avec la variation de pression ambiante caractériser les différents écoulements pour chaque région :

- $P_a/P_0 > PR_1$ pas de choc alors l'écoulement est subsonique
- $P_a/P_0 < PR_1$ et $P_a/P_c > PR_3$ il y a un choc dans la divergente
- $P_a/P_0 < PR_3$ et $P_a/P_c > PR_2$ l'écoulement sur-détendu hors de la tuyère
- $P_a/P_0 = PR_2$ l'écoulement adapté dans la tuyère et hors de la tuyère
- $P_a/P_0 < PR_2$ l'écoulement sous-détendu hors de la tuyère.

Les trois derniers écoulements sont des écoulements adaptés dans la tuyère.

III.4.3.2. Calcul de la position de l'onde du choc droite:

On suppose que:

$$\frac{p_s}{p_0} = \frac{p_a}{p_0} \quad \text{et} \quad A = \frac{Ac}{As}$$

$$ep = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$$

On peut calculer les rapports de la densité, température, vitesse du son, et la vitesse d'écoulement à la sortie de la tuyère.

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{p_s}{p_0} + \left(\left(\frac{p_s}{p_0} \right)^2 + ep \left(2 \frac{\rho_c}{\rho_0} A \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{III. 39})$$

$$\frac{T_s}{T_0} = \left(\frac{p_s}{p_0} \right) / \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \quad (\text{III. 40})$$

$$\frac{c_s}{c_0} = \left(\frac{T_s}{T_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 41})$$

$$\frac{v_s}{c_0} = \left(2/(\gamma - 1) \left(1 - \frac{T_s}{T_0} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 42})$$

Alors on peut calculer nombre de Mach de la sortie

$$M_s = \left(\frac{v_s}{c_0} \right) / \left(\frac{c_s}{c_0} \right) \quad (\text{III. 43})$$

Il faut aussi calculer la pression d'arrêt à la sortie de la tuyère, on utilise l'équation (III.32) :

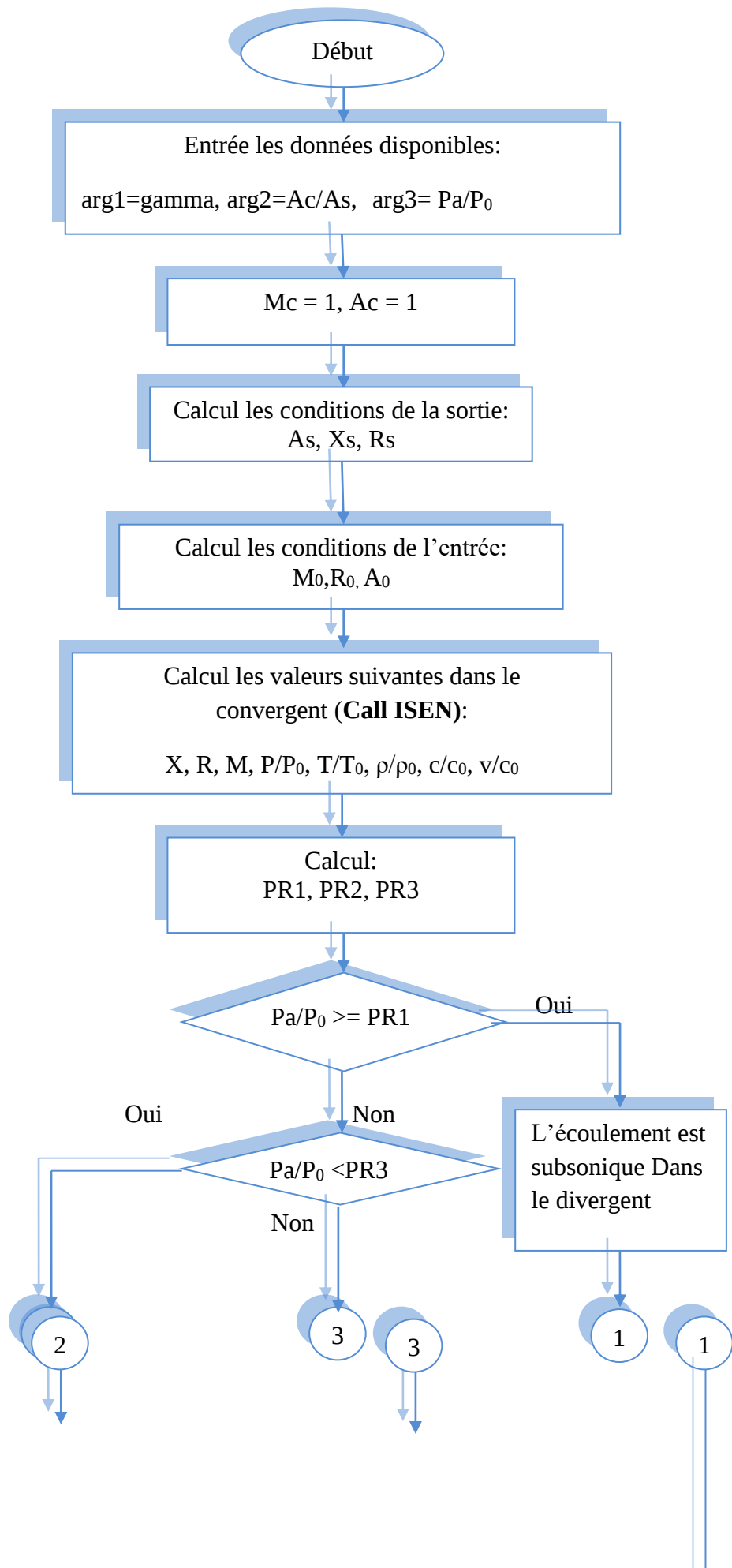
$$\frac{p_{0s}}{p_0} = \left[\left(\frac{p_s}{p_0} \right) \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right)^{-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (\text{III. 44})$$

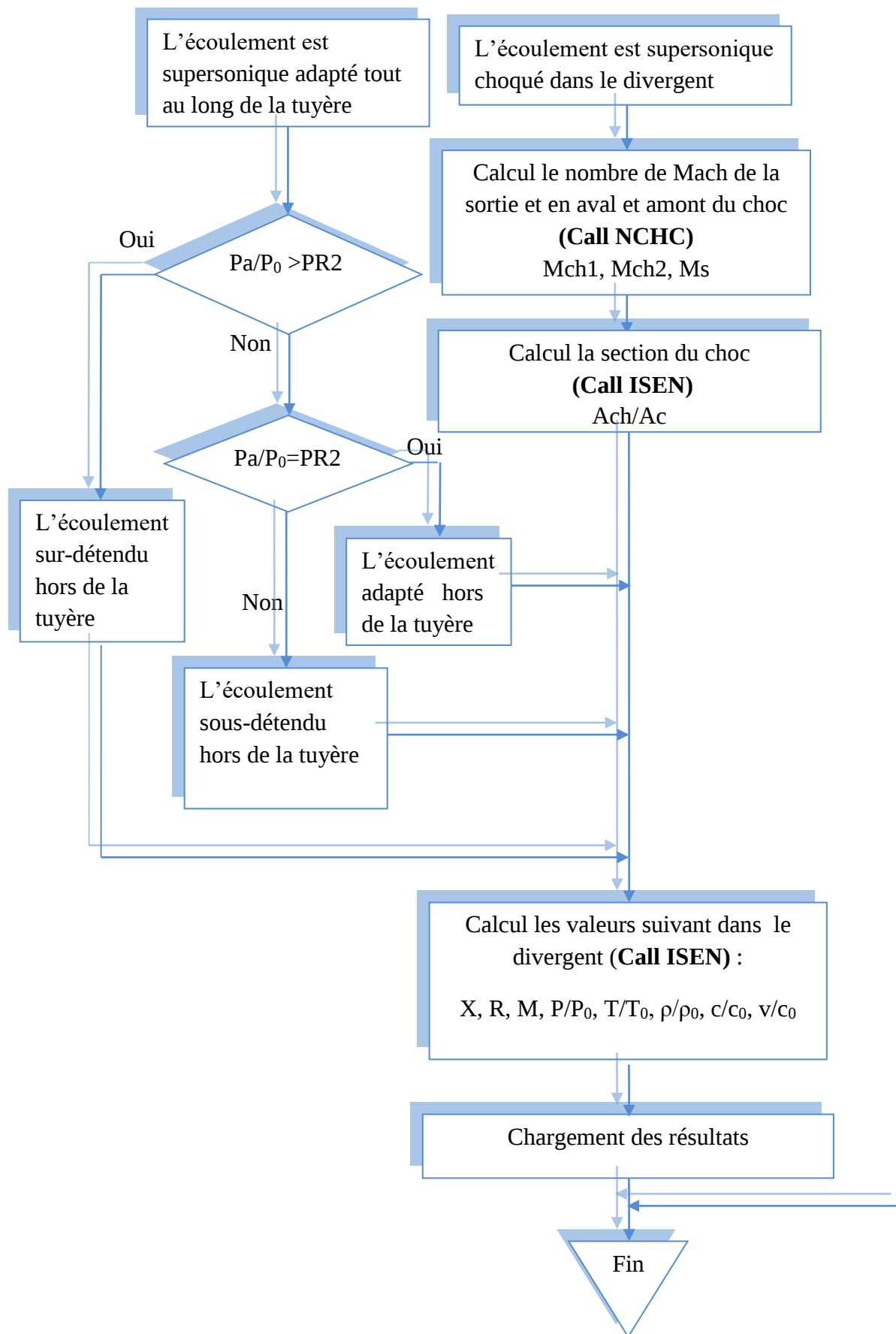
$$dp_0 = 1 - \frac{p_{0s}}{p_0} \quad (\text{III. 45})$$

On utilise le sous programme (NCHC) avec les valeurs de **dp0** pour trouver les nombres de Mach en amont et aval d'onde de choc (**Mch1**, **Mch2**).

On utilise le sous programme (ISEN) avec les valeurs de **Mch1** ou **Mch2** pour trouver la section d'onde du choc A_{ch}/A_c .

III.4.3.3.Organigramme du Programme principal:





IV.1. Introduction:

Nous présentons dans cette section du travail, les résultats obtenus lors de l'exécution du programme sous forme des courbes. Pour un écoulement supersonique compressible.

Les applications sont effectuées pour:

- Différents rapports de section.
- Différents rapports de pression ambiante.
- Différents fluides de travail (pour différentes valeurs de γ).

IV.2. Discussions des résultats:

- 1) On va étudier l'effet de la variation de section du col de la tuyère sur l'écoulement pour une pression ambiante en sortie fixe, voir fig. (IV.1,...21).

Pour une section du col très proche à la section de la sortie on a un écoulement supersonique adapté, mais la diminution de la section du col jusqu'à des valeurs très basses provoque une onde de choc droite dans le divergent de la tuyère.

- 2) L'effet de la variation de pression ambiante en sortie de la tuyère sur l'écoulement pour une section du col fixe, voir fig. (IV.22,...40).

- pression ambiante égale à la pression génératrice $P_a = P_0$. Dans ce cas, il n'y a pas d'écoulement dans la tuyère.
- maintenant nous diminuons la pression ambiante, La petite différence de pression ainsi formée engendre un écoulement à faible vitesse dans la tuyère c'est l'écoulement subsonique.
- Lorsque on continue de baisser la pression ambiante, l'écoulement devient supersonique dans le divergent avec une onde de choc droite se forme dans le divergent de la tuyère. lorsqu'on réduit encore un peu plus la pression ambiante, le choc se déplace vers la section de sortie; la limite de ce régime est atteinte lorsque le choc droit se situe dans la section de sortie.
- Lorsque la pression ambiante en sortie de la tuyère passe sous la valeur de pression aval d'un choc à la sortie de la tuyère (P_2), on dit que l'écoulement est adapté dans la tuyère. Mais dans cette situation il y a une onde du choc oblique hors de la tuyère en sortie (écoulement sur-détendu et sous-détendu) comme suit:
- ❖ Lorsque ($P_a=P_1$) on a un écoulement adapté dans la tuyère et hors de la tuyère.

- ❖ Lorsque la pression ambiante en sortie de la tuyère est comprise entre la pression aval et amont du choc ($P_1 < P_a < P_2$), on a une détente à la sortie de la tuyère s'appelle écoulement sur-détendu.
 - ❖ Enfin, lorsque la pression ambiante en sortie de la tuyère est inférieure à pression amont du choc ($P_a < P_1$), une détente hors de la tuyère en sortie s'appelle écoulement sous-détendu.
- 3) L'effet de la variation du rapport de chaleurs spécifique sur l'écoulement, voir fig. (IV.41,...53).

IV.3. Etude de le comportement d'une tuyère Convergente/Divergente:

IV.3.1. Etude de l'influence de la géométrie de la tuyère:

On étudiera l'influence de la géométrie de la tuyère sur l'écoulement de fluide, alors on suppose le rapport de la pression ($P_a/P_0=0.5$) et on fait varier le rapport de la section A_c/A_s dans l'intervalle $[0 : 1]$ avec une pas de 0.01.

Alors on a les différents types d'écoulements suivants :

IV.3.1.1. Un écoulement supersonique adapté:

Pour un rapport de pression ambiante ($P_a/P_0=0.5$) et avec les valeurs du rapport de la section A_c/A_s dans l'intervalle $[0.49 : 0.99]$ on a un écoulement supersonique adapté tout au long de la tuyère, et un écoulement sur- détendu en dehors de la tuyère.

Pour $A_c/A_s = 0.49$:

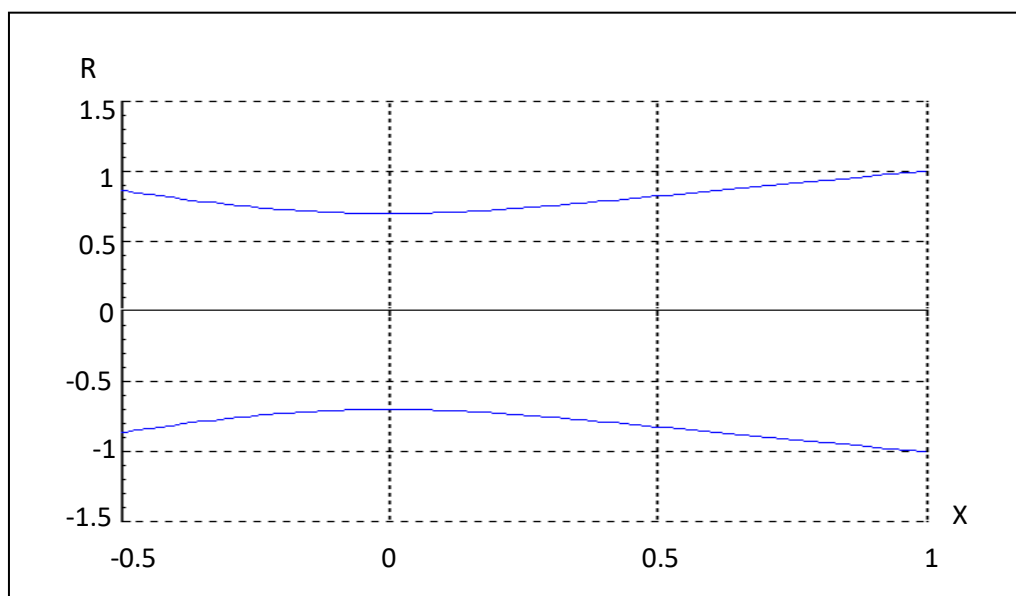


Figure (VI.1): la géométrie de la tuyère pour $A_c/A_s = 0.49$

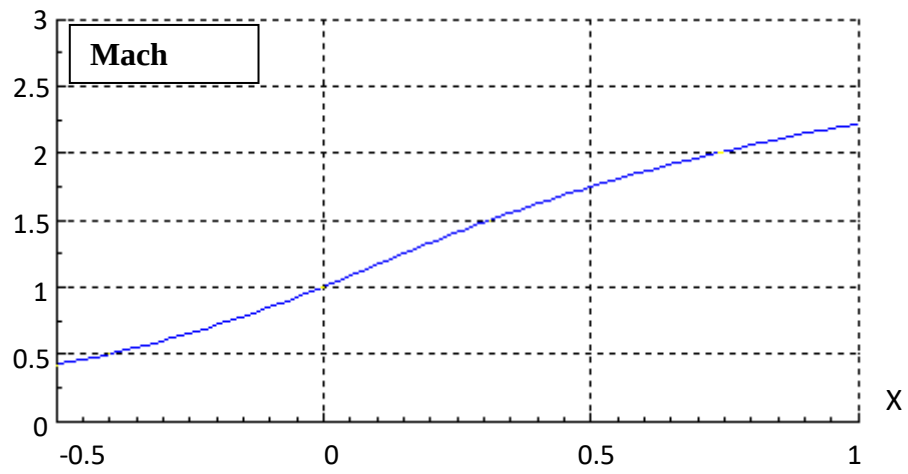


Figure (VI.2): variation de nombre de Mach pour $A_c/A_s = 0.49$

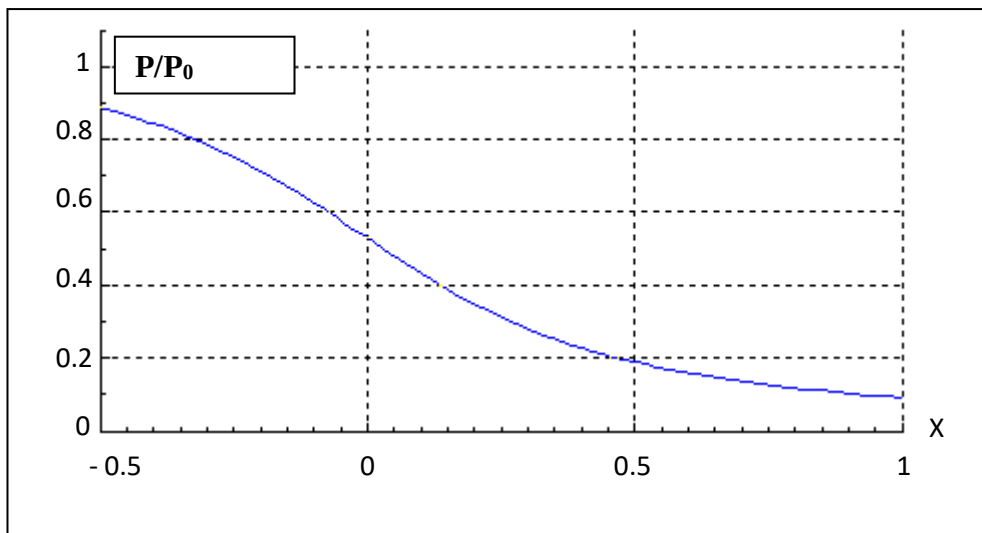


Figure (VI.3): variation de pression pour $A_c/A_s = 0.49$

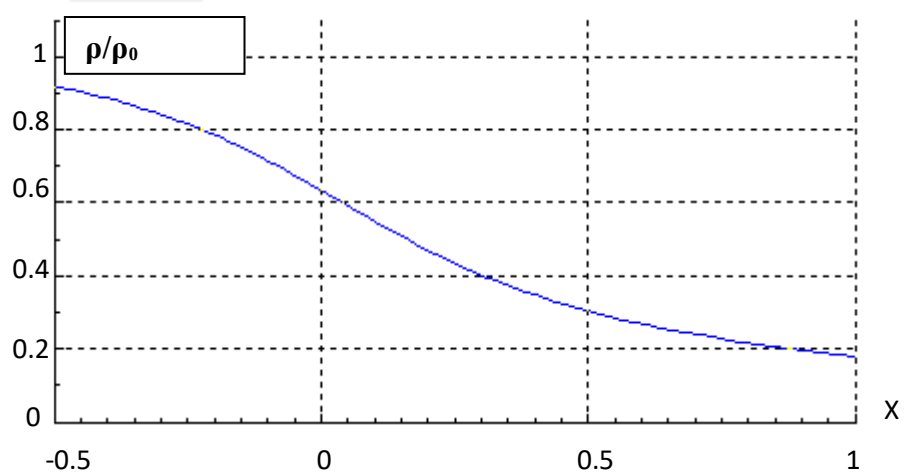


Figure (VI.4): variation de la densité pour $A_0/A_s = 0.49$

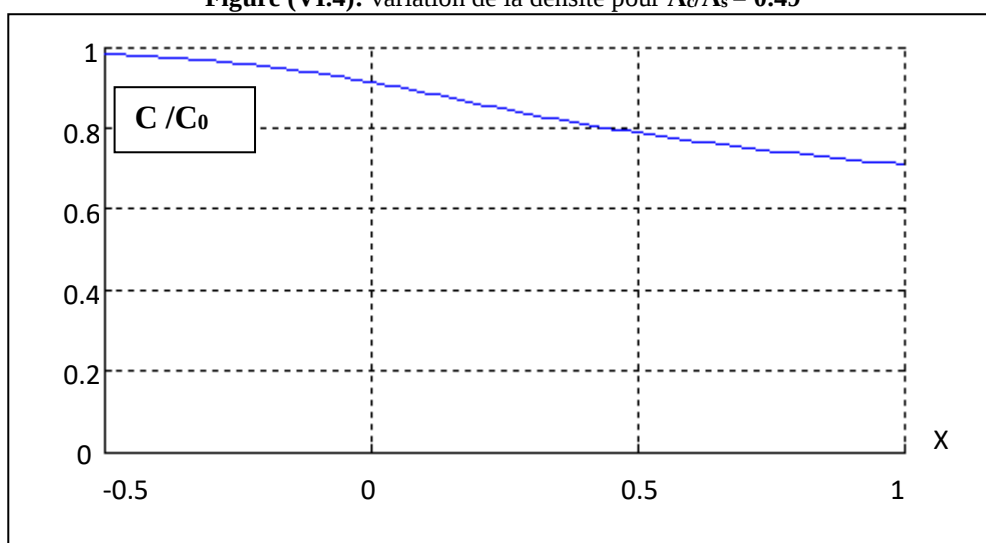


Figure (VI.5): variation de la vitesse du son pour $A_0/A_s = 0.49$

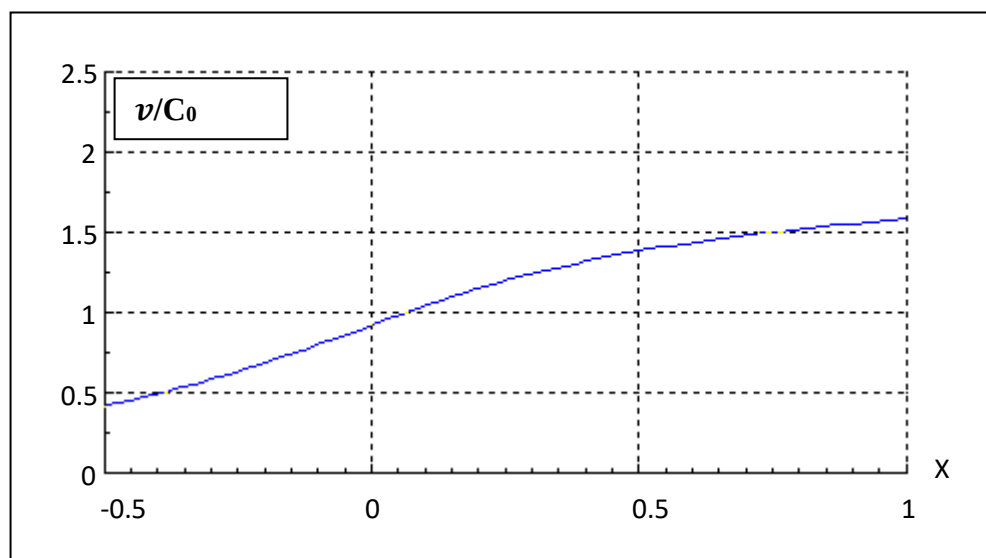


Figure (VI.6): variation de la vitesse du fluide pour $A_0/A_s = 0.49$

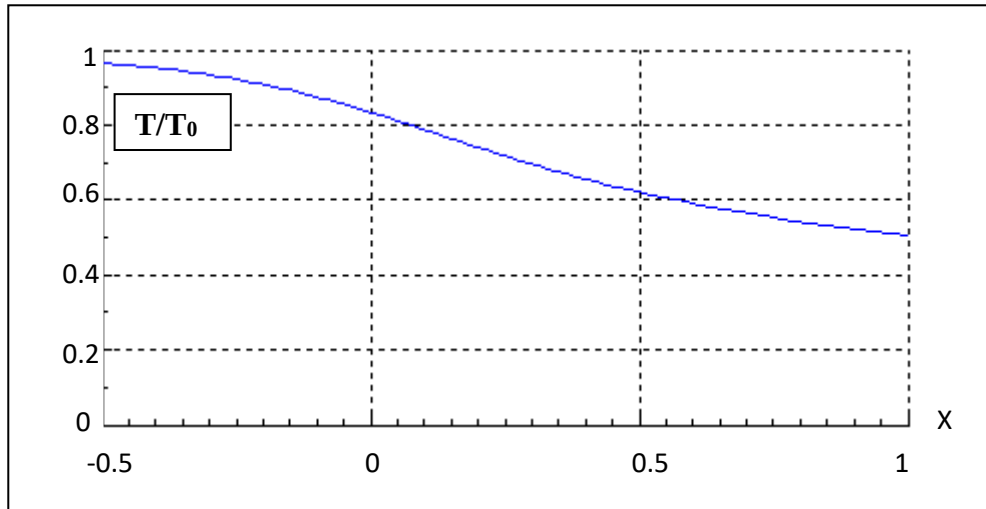


Figure (VI.7): variation de la température pour $A_c/A_s = 0.49$

IV.3.1.2.Écoulement choqué dans le divergent de la tuyère:

Le rapport de pression est toujours $P_a/P_0 = 0.5$, et avec les valeurs du rapport de la section A_c/A_s dans l'intervalle $[0.01 : 0.47]$, on a une onde de choc dans le divergent de la tuyère.

Pour $A_c/A_s = 0.2$:

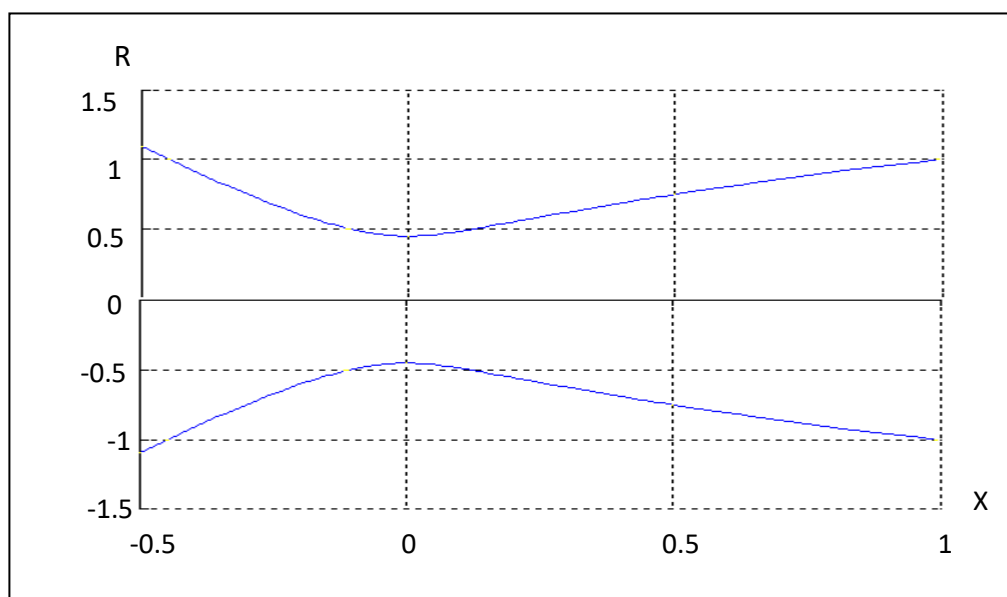


Figure (VI.8): la géométrie de la tuyère pour $A_c/A_s = 0.2$

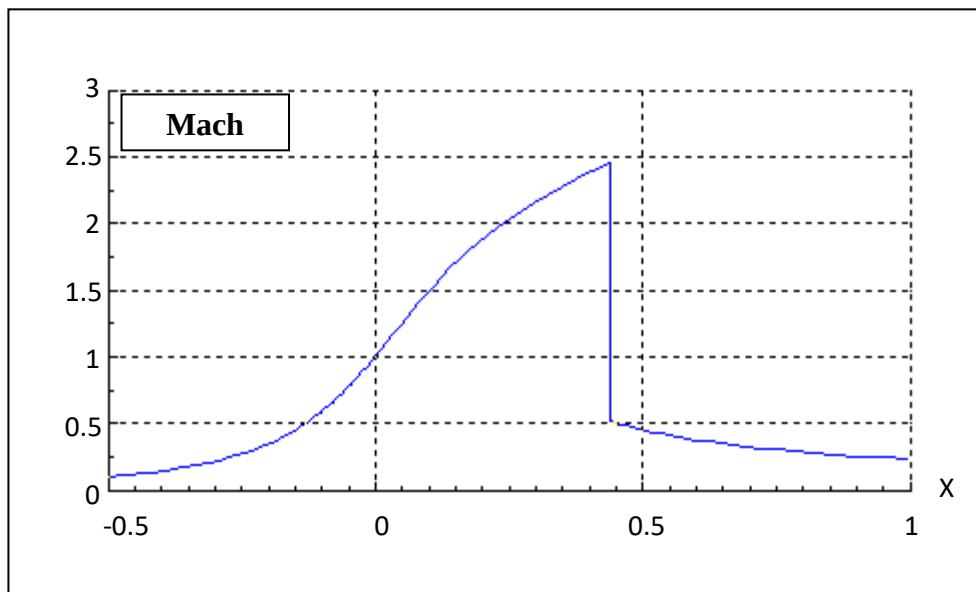


Figure (VI.9): variation de nombre de Mach pour $A_c/A_s = 0.2$

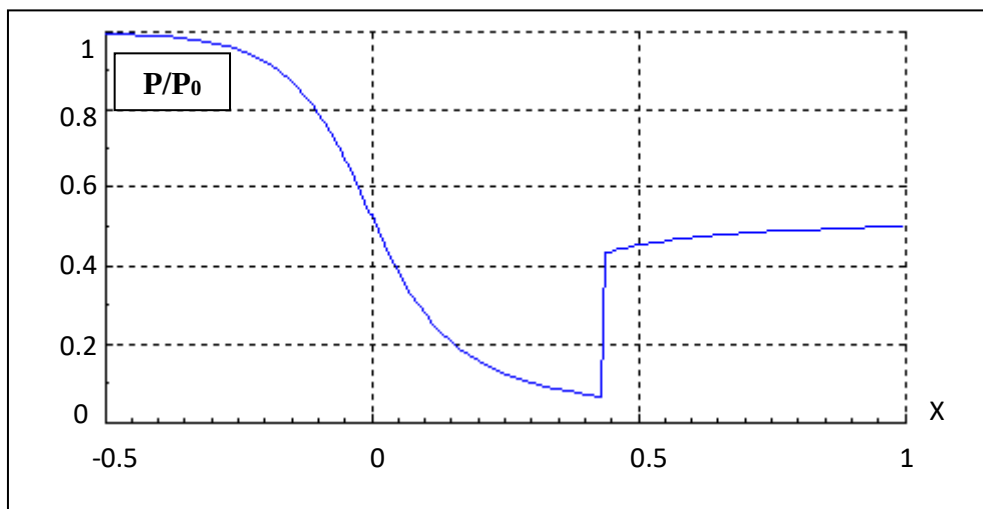
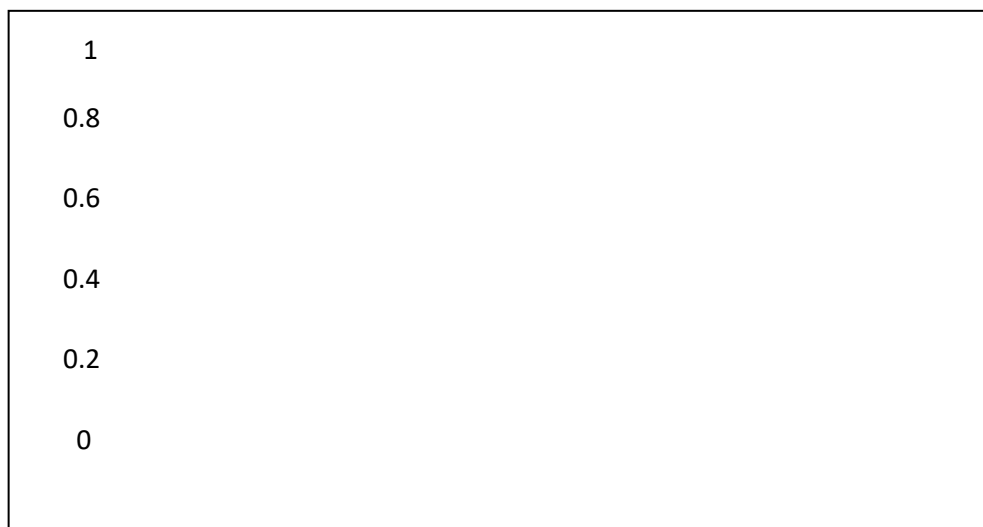


Figure (VI.10): variation de pression pour $A_c/A_s = 0.2$



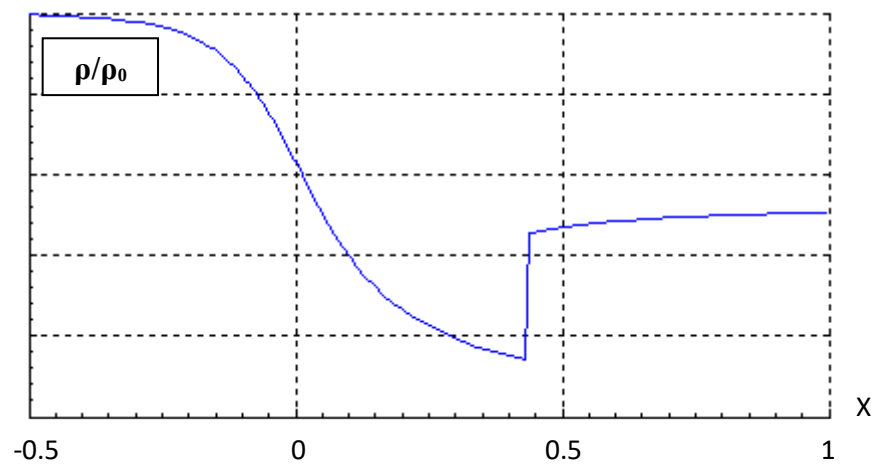


Figure (VI.11): variation de la densité pour $A_c/A_s = 0.2$

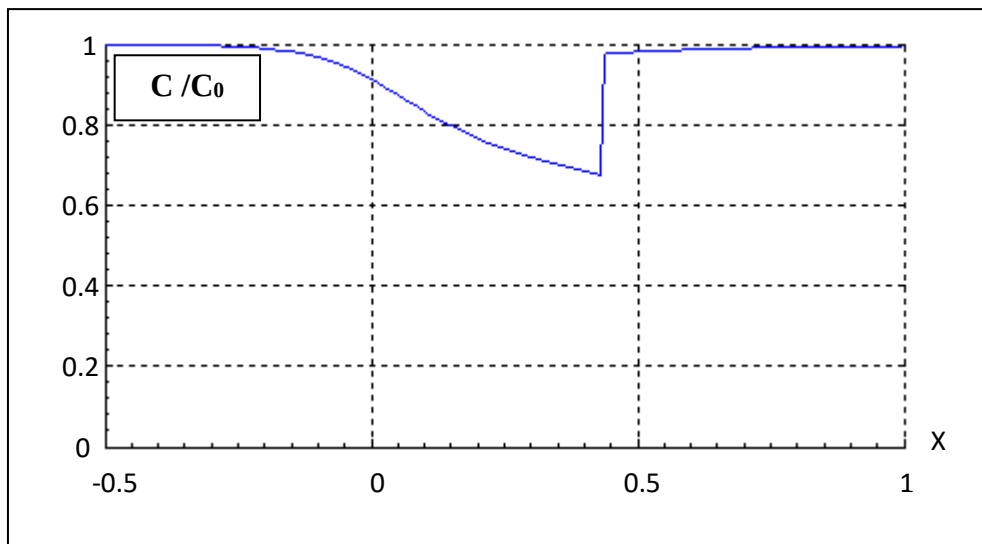


Figure (VI.12): variation de la vitesse du son pour $A_c/A_s = 0.2$

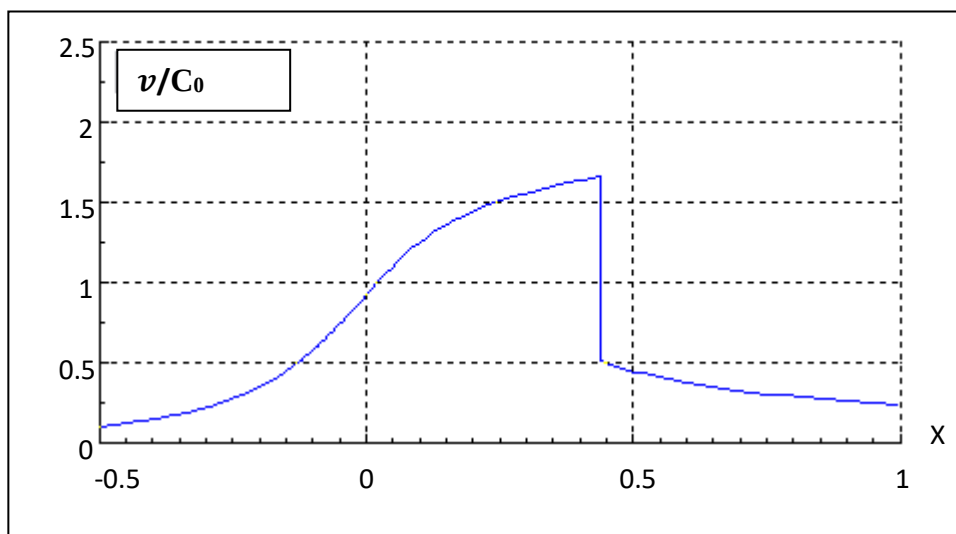


Figure (VI.13): variation de la vitesse du fluide pour $A_c/A_s = 0.2$

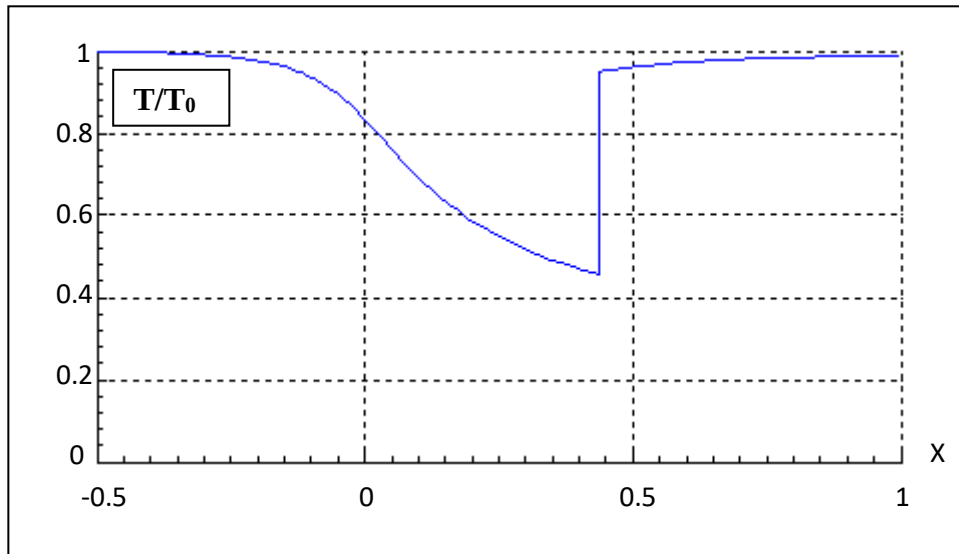
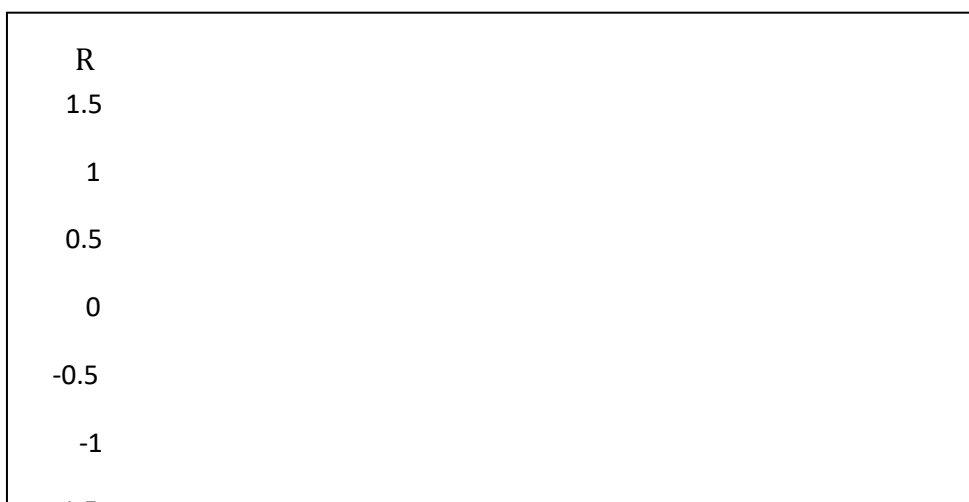


Figure (VI.14): variation de la température pour $A_c/A_s=0.2$

IV.3.1.3.Ecoulement choqué dans la sortie de la tuyère:

Le rapport de pression ambiante est maintenue constant $P_a/P_0= 0.5$, avec le rapport de la section $A_c/A_s =0.48$ on a un choc droit dans la sortie de la tuyère.



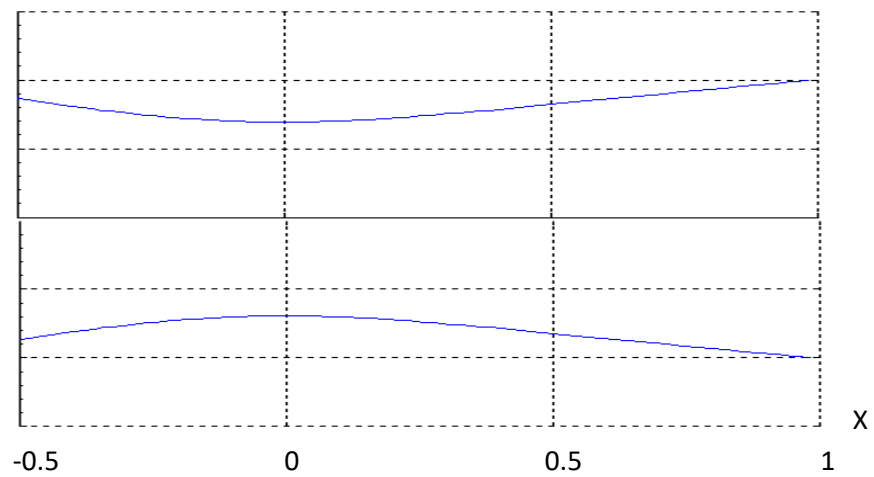


Figure (VI.15): la géométrie de la tuyère pour $A_c/A_s = 0.48$

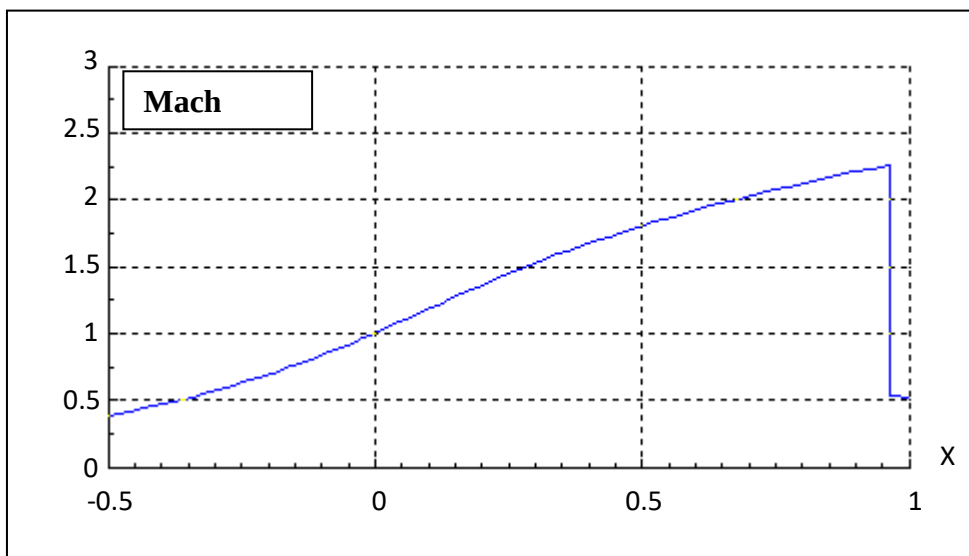


Figure (VI.16): variation de nombre de Mach pour $A_c/A_s = 0.48$

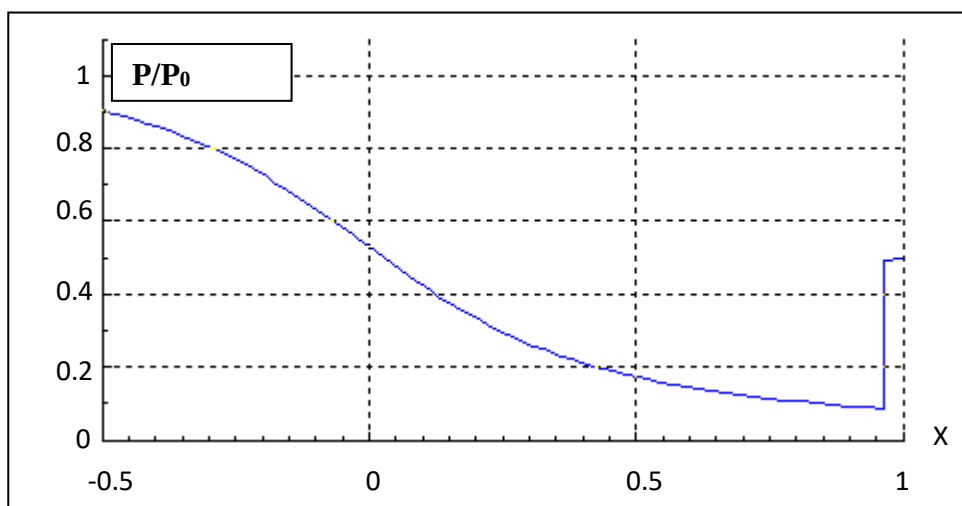


Figure (VI.17): variation de pression pour $A_c/A_s=0.48$

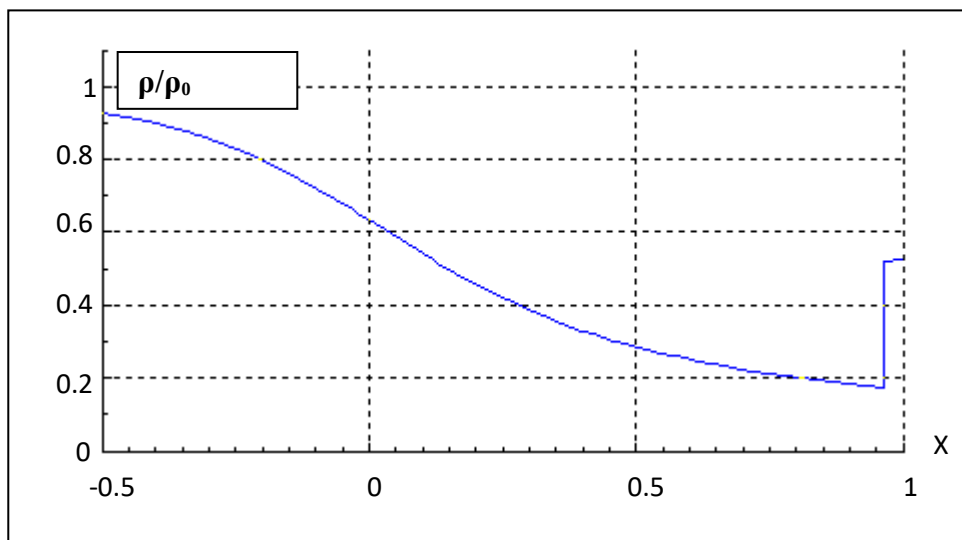


Figure (VI.18): variation de la densité pour $A_c/A_s=0.48$

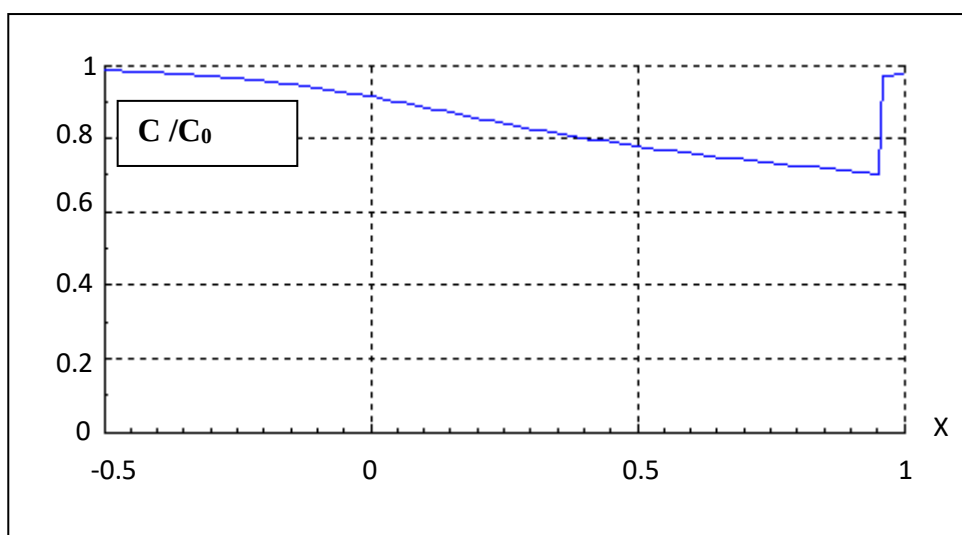


Figure (VI.19): variation de la vitesse du son pour $A_c/A_s=0.48$

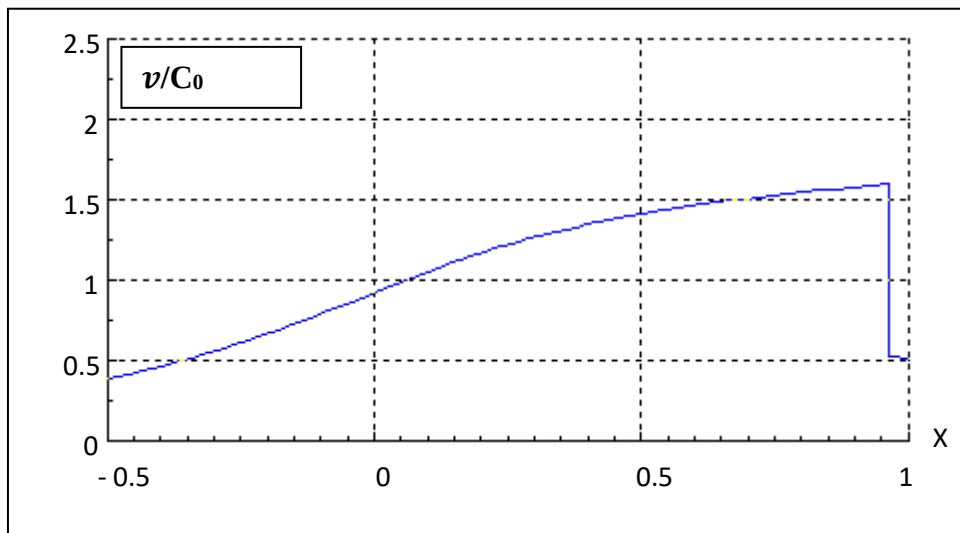


Figure (VI.20): variation de la vitesse du fluide pour $A_c/A_s = 0.48$

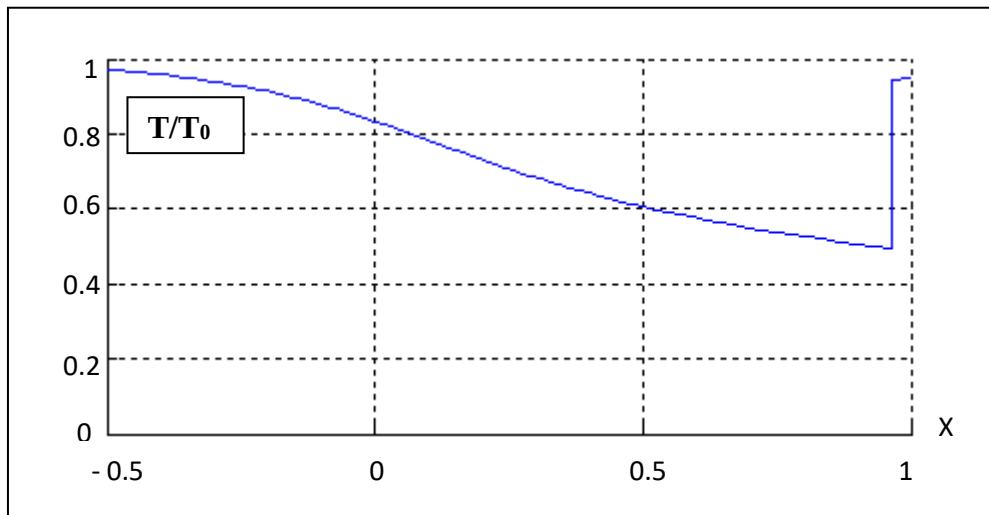


Figure (VI.21): variation de la température pour $A_c/A_s = 0.48$

IV.3.2. Influence du rapport de pression ambiante:

On étudiera l'influence du rapport de pression ambiante sur l'écoulement de fluide, alors on utilise une tuyère avec une section $A_c/A_s = 0.4$, et varie le rapport de pression P_a/P_0 dans l'intervalle $[0 : 0.99]$ avec un pas de 0.01.

IV.3.2.1. Un écoulement supersonique adapté:

On a un écoulement adapté tout au long de la tuyère pour les valeurs de pression ambiante dans l'intervalle $[0 : 0.43]$. et pour les mêmes valeurs de pression on a un écoulement sous-détendu hors de la tuyère en sortie dans l'intervalle $[0 : 0.06]$, et un écoulement sur-détendu dans l'intervalle $[0.07 : 0.43]$

Pour $P_a/P_0 = 0.43$:

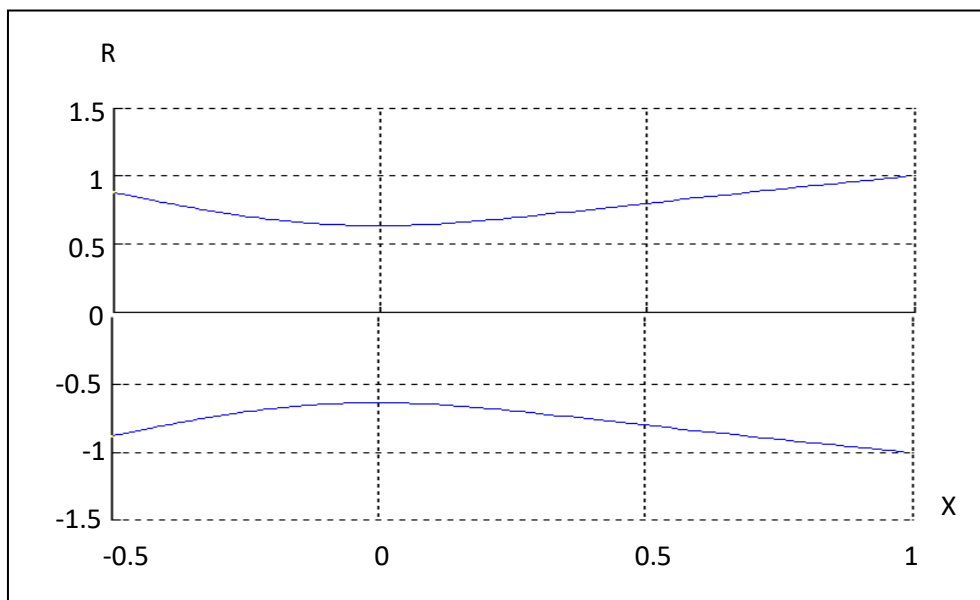


Figure (VI.22): la géométrie de la tuyère pour $A_c/A_s = 0.4$

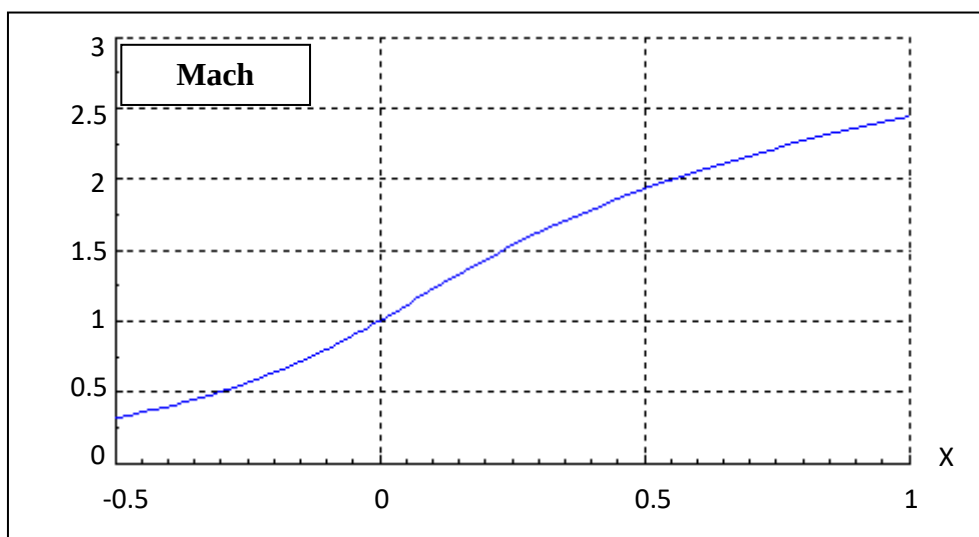


Figure (VI.23): variation de nombre de Mach pour $P_a/P_0 = 0.43$

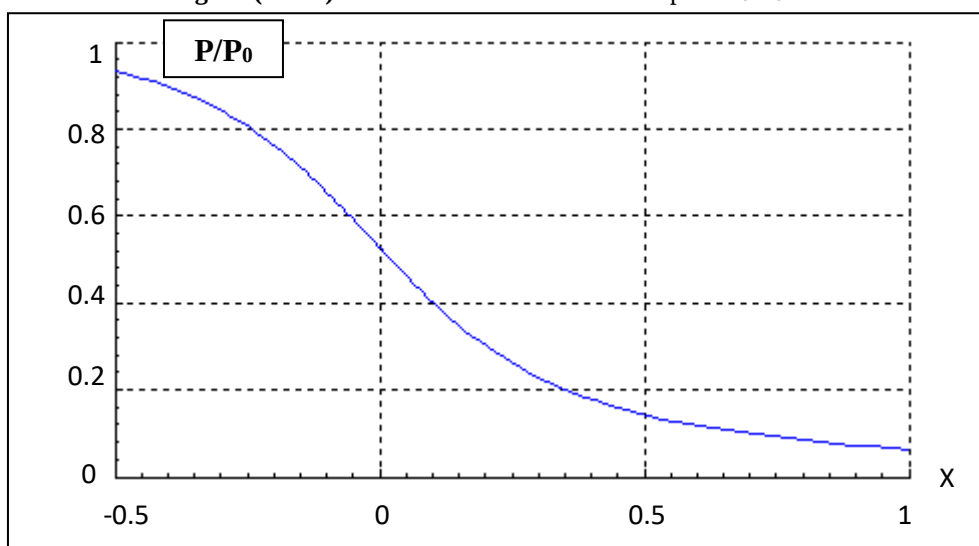


Figure (VI.24): variation de pression pour $P_a/P_0 = 0.43$

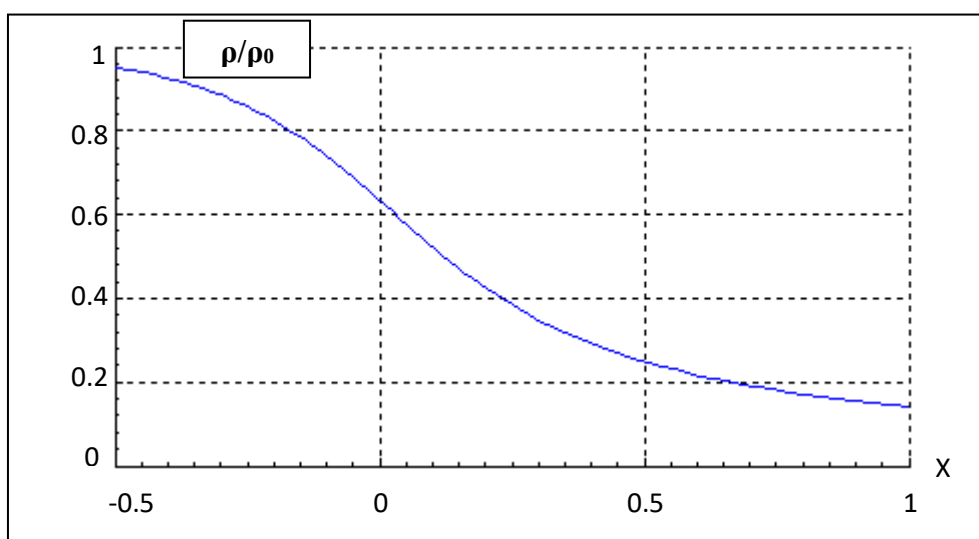


Figure (VI.25): variation de la densité pour $P_a/P_0 = 0.43$

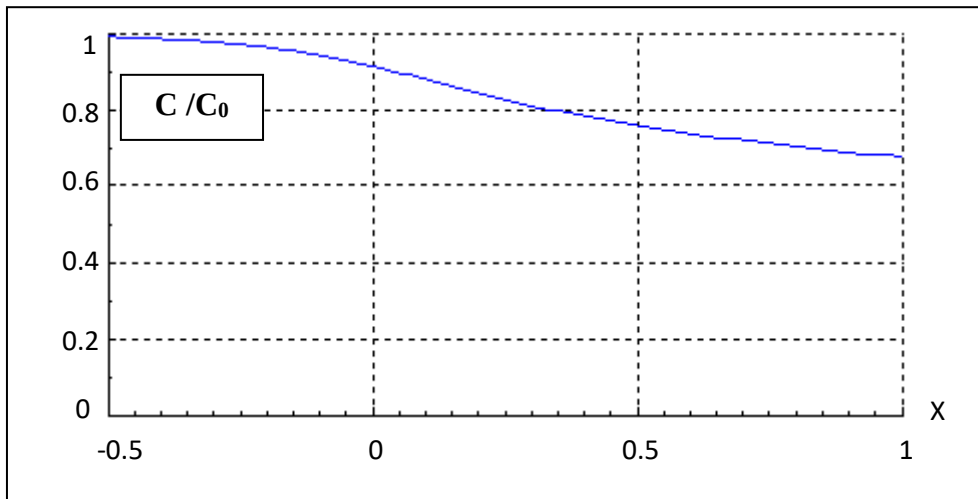


Figure (VI.26): variation de la vitesse du son pour $P_a/P_0 = 0.43$

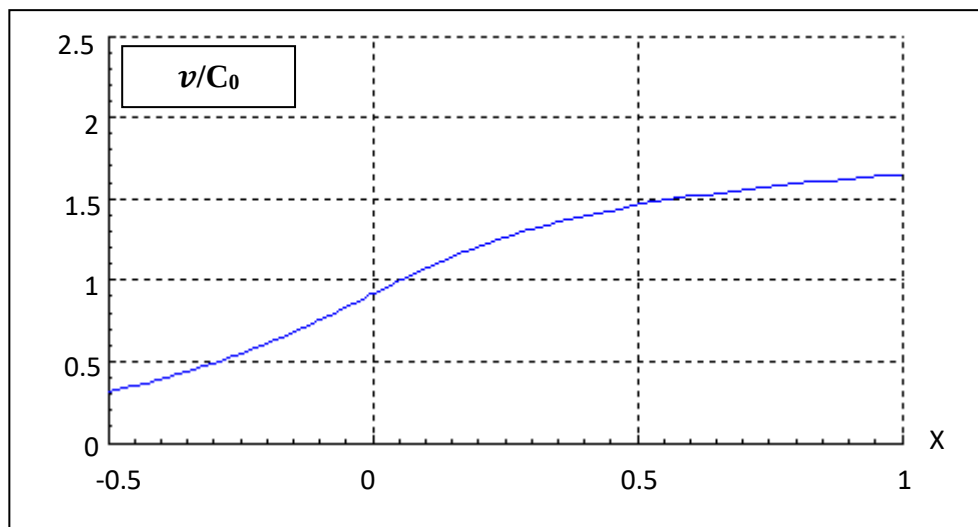


Figure (VI.27): variation de la vitesse du fluide pour $P_a/P_0 = 0.43$

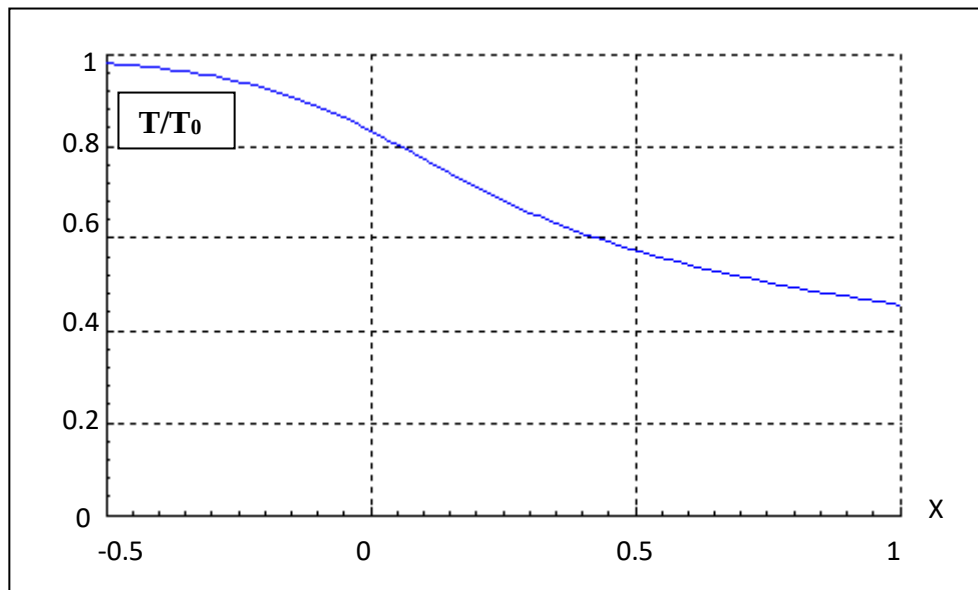


Figure (VI.28): variation de la température du son pour $P_a/P_0 = 0.43$

IV.3.2.2.Écoulement choqué dans la sortie de la tuyère:

Pour une pression $P_a/P_0=0.44$ on a un choc droit dans la sortie de la tuyère.

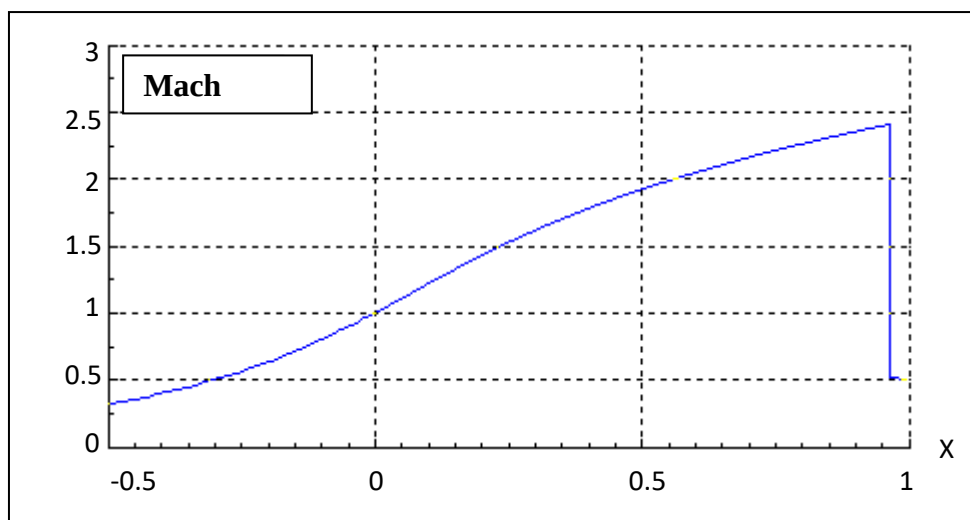


Figure (VI.29): variation de nombre de Mach pour $P_a/P_0= 0.44$

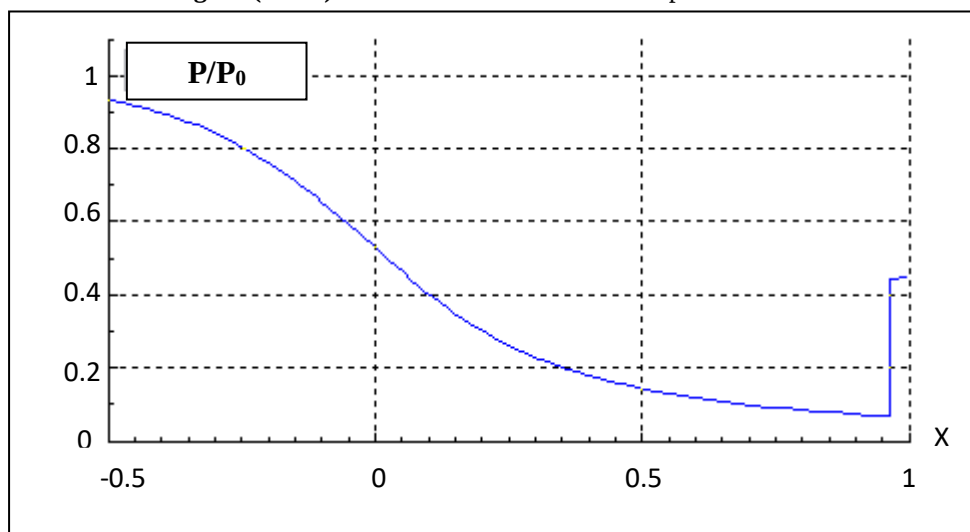


Figure (VI.30): variation de pression pour $P_a/P_0= 0.44$

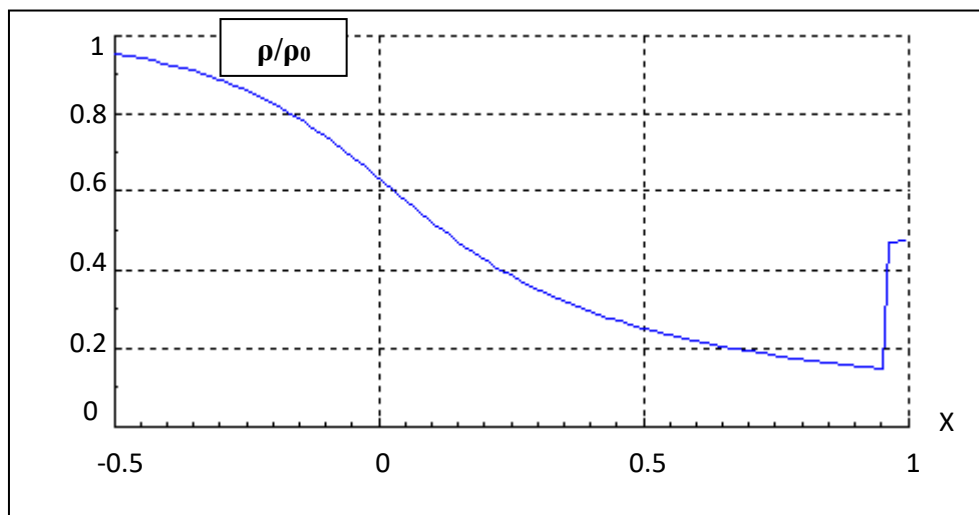


Figure (VI.31): variation de la densité pour $P_a/P_0 = 0.44$

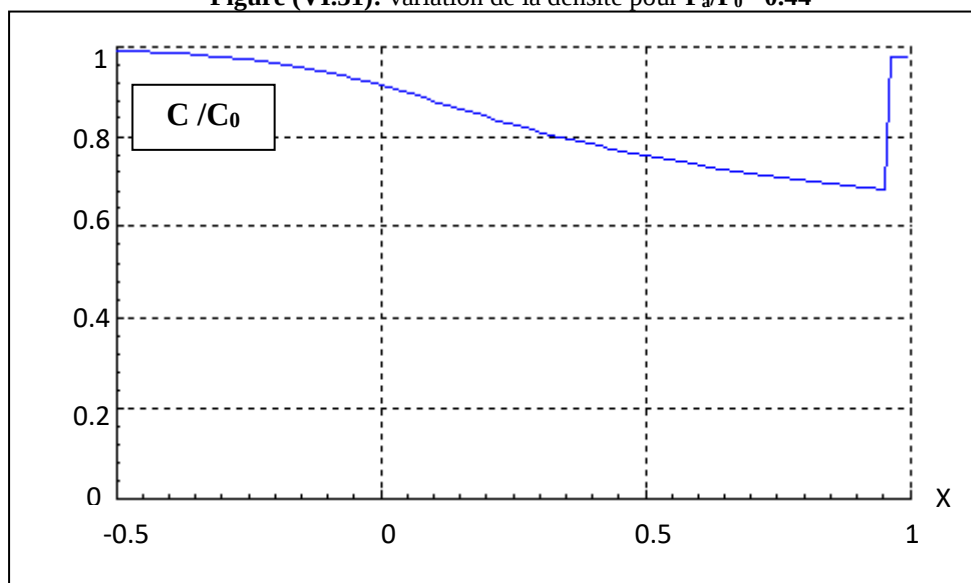


Figure (VI.32): variation de la vitesse du son pour $P_a/P_0 = 0.44$

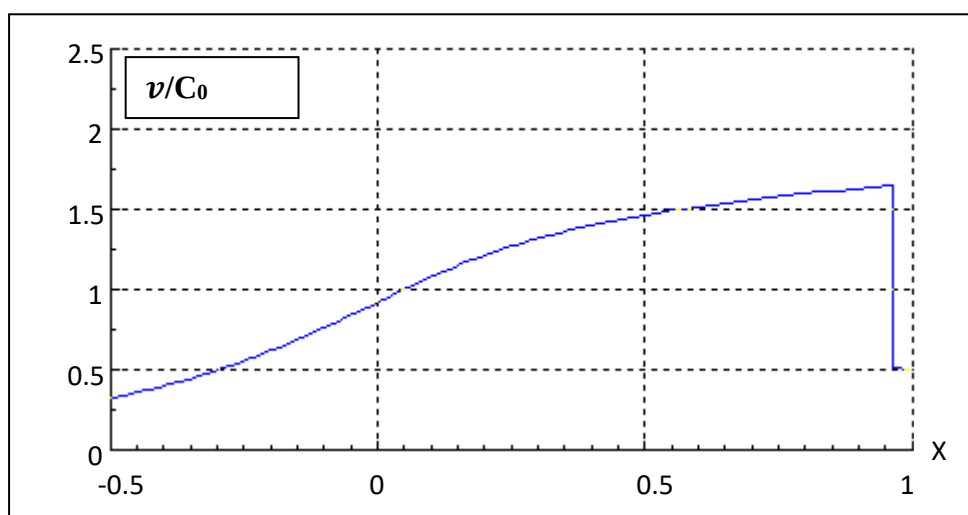


Figure (VI.33): variation de la vitesse du fluide pour $P_a/P_0 = 0.44$

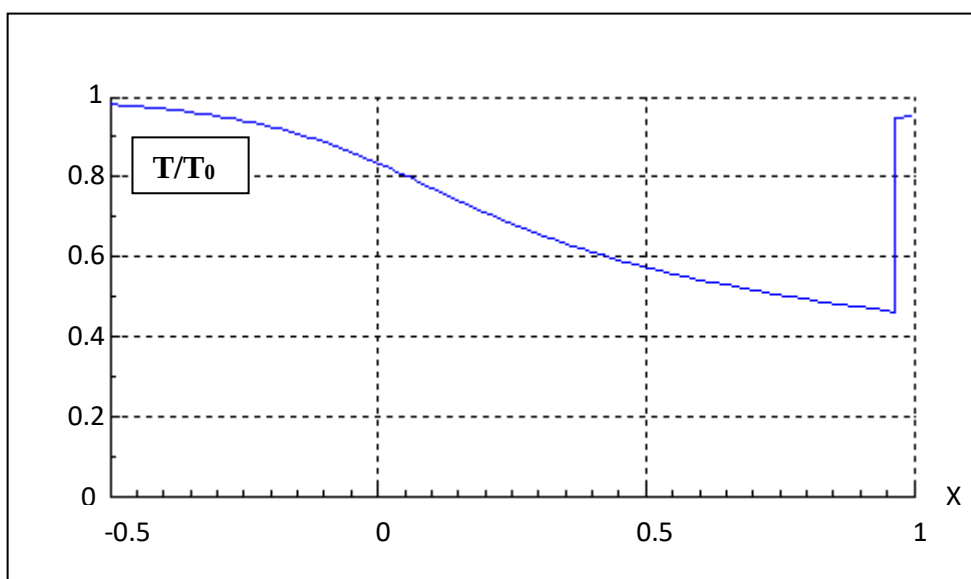


Figure (VI.34): variation de température pour $P_a/P_0 = 0.44$

IV.3.2.3.Écoulement choqué dans le divergent de la tuyère:

On augmentant le rapport de pression ambiante P_a/P_0 jusqu'à les valeurs $[0.45:0.96]$ une onde de choc est présente dans le divergent de la tuyère. Pour les valeurs supérieures à 0.96 on a un écoulement subsonique sur tout au long de la tuyère.

Pour $P_a/P_0 = 0.8$:

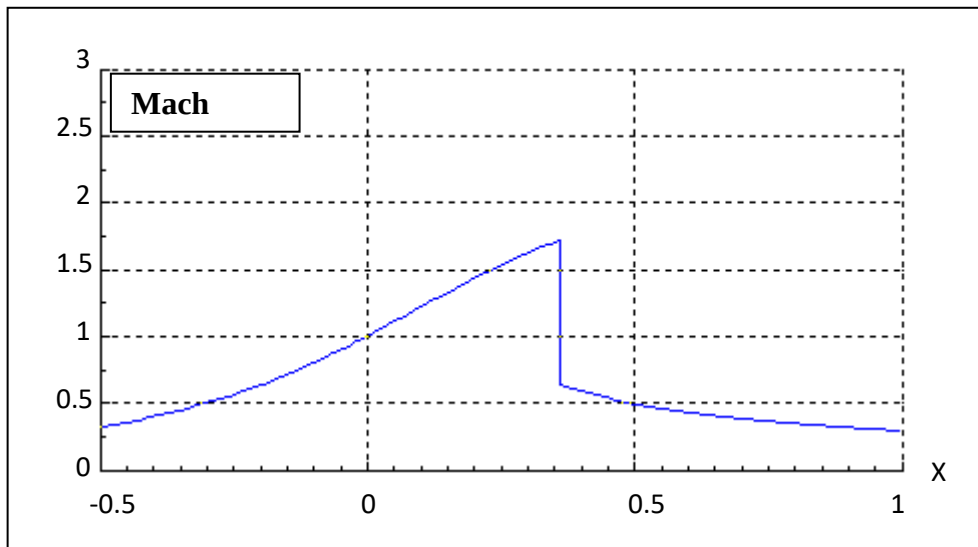


Figure (VI.35): variation de nombre de Mach pour $P_a/P_0 = 0.8$

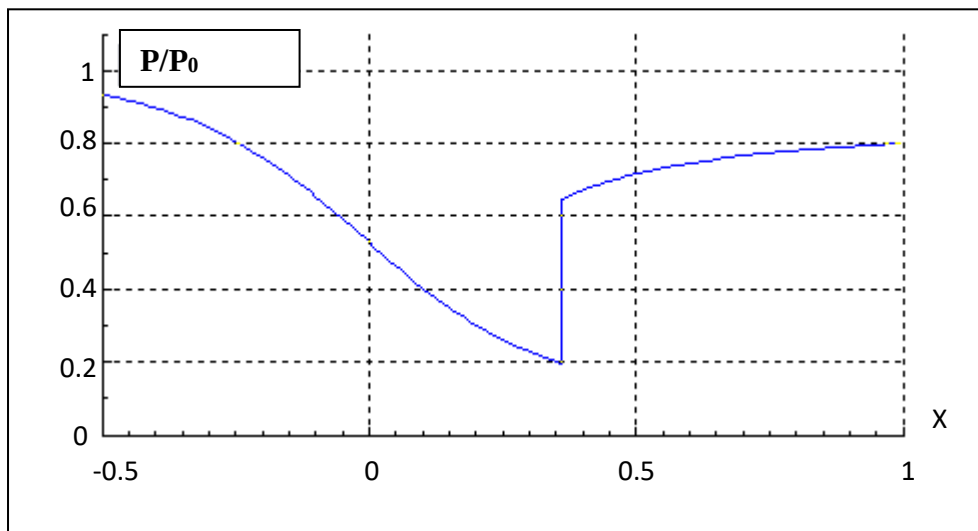


Figure (VI.36): variation de pression pour $P_a/P_0 = 0.8$

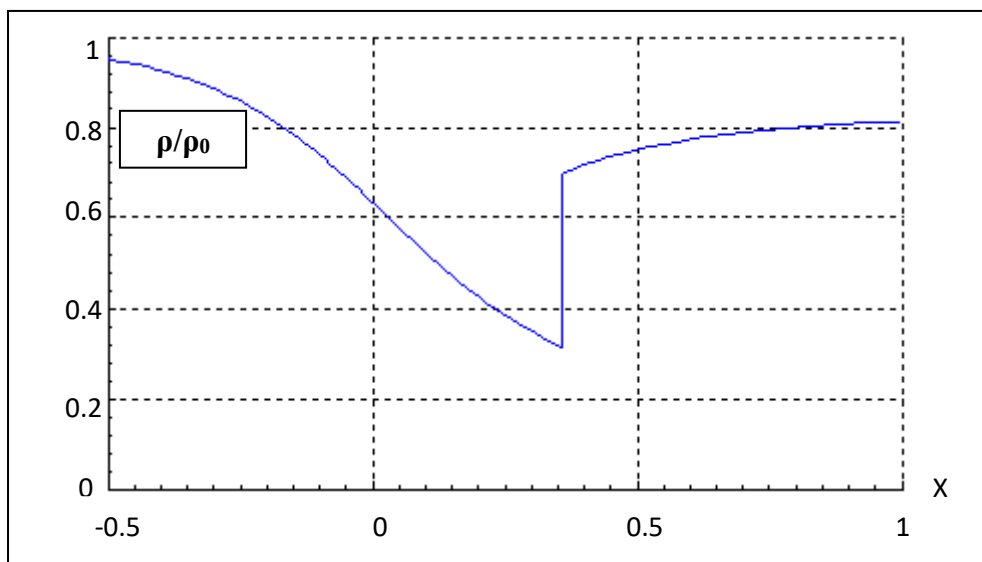


Figure (VI.37): variation de la densité pour $P_a/P_0 = 0.8$

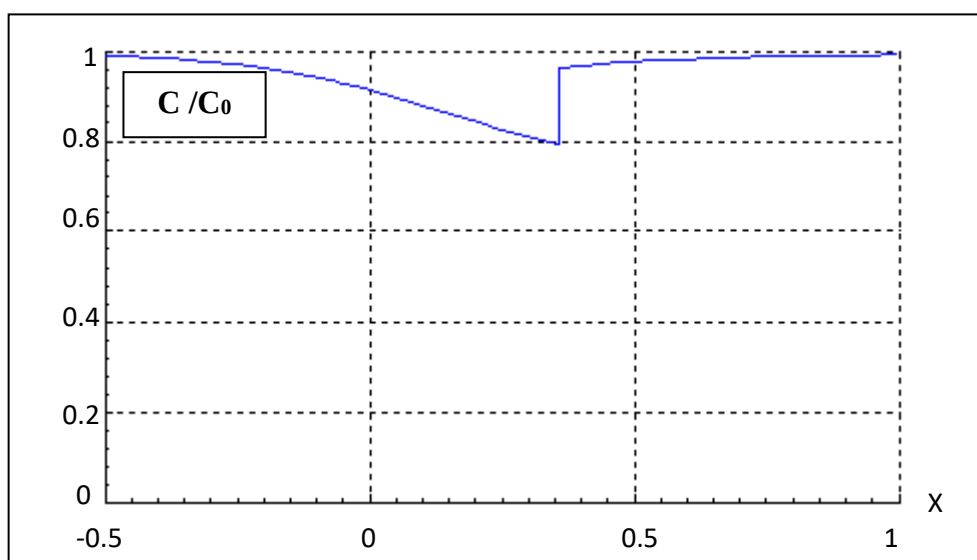


Figure (VI.38): variation de la vitesse du son pour $P_a/P_0 = 0.8$

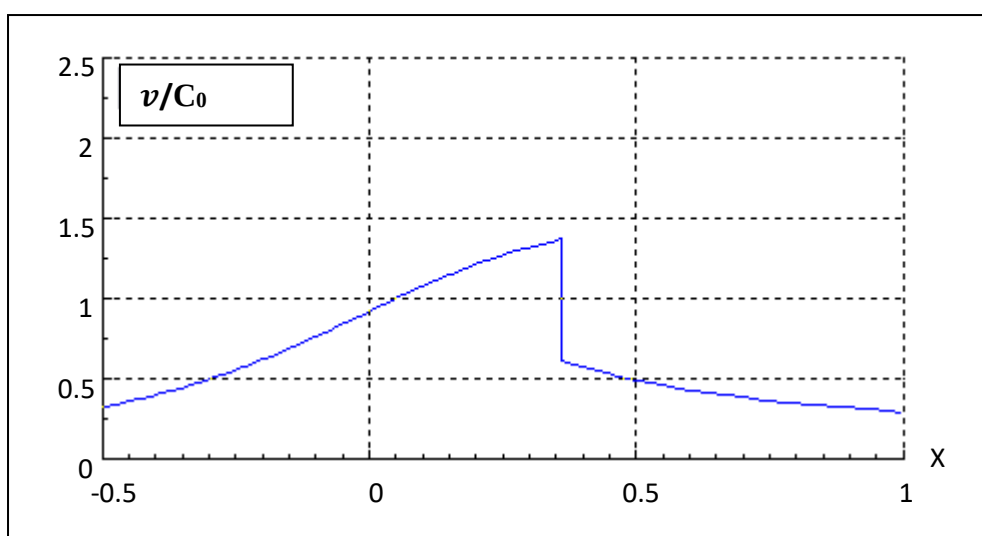


Figure (VI.39): variation de la vitesse du fluide pour $P_a/P_0 = 0.8$

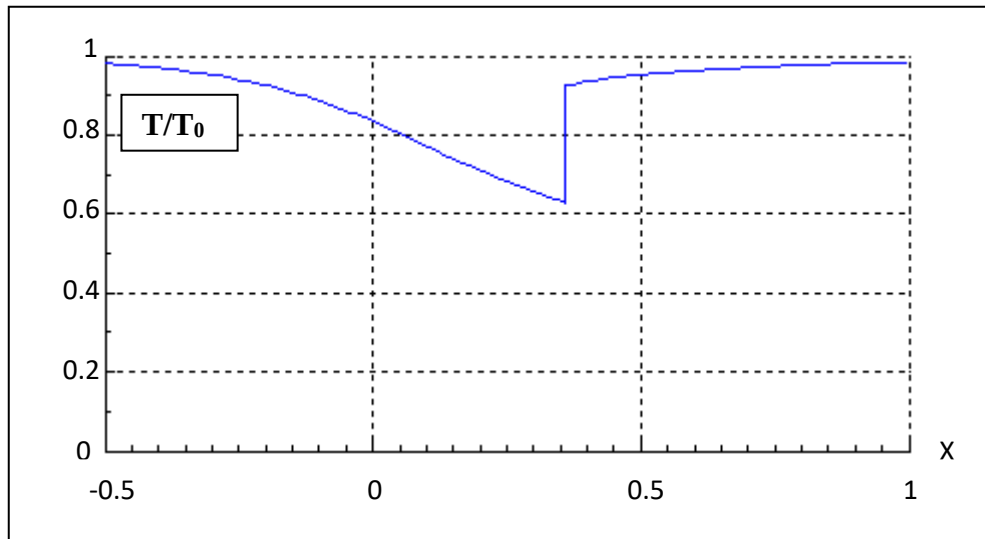


Figure (VI.40): variation de température pour $P_a/P_0 = 0.8$

IV.3.3. Influence de γ :

On utilise une tuyère avec une section $A_c/A_s = 0.15$, avec un rapport de pression ambiante en sortie de la tuyère $P_a/P_0 = 0.5$.

Pour $\gamma = 1.4$:

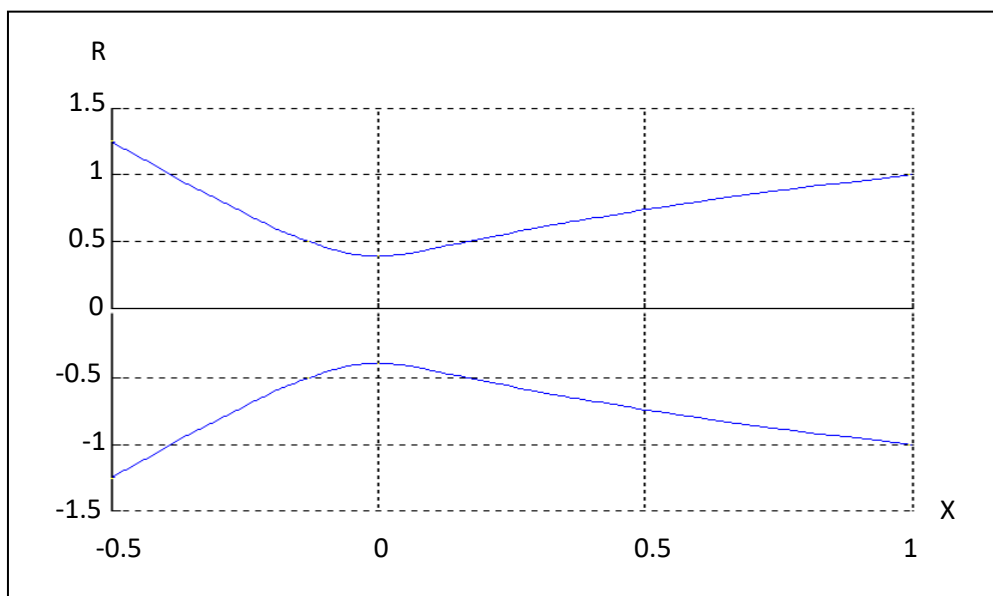


Figure (VI.41): la géométrie de la tuyère pour $A_c/A_s = 0.15$

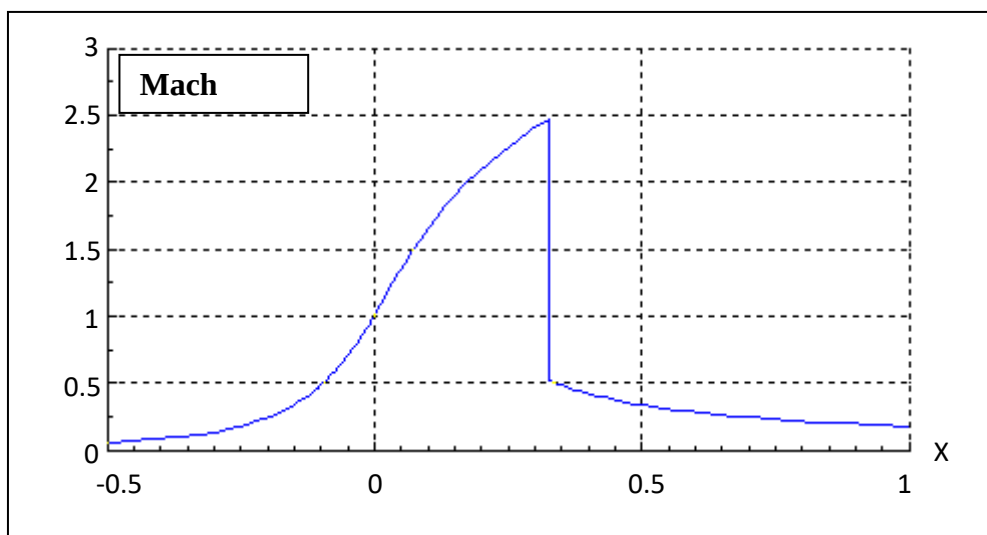


Figure (VI.42): variation de nombre de Mach pour $\gamma = 1.4$

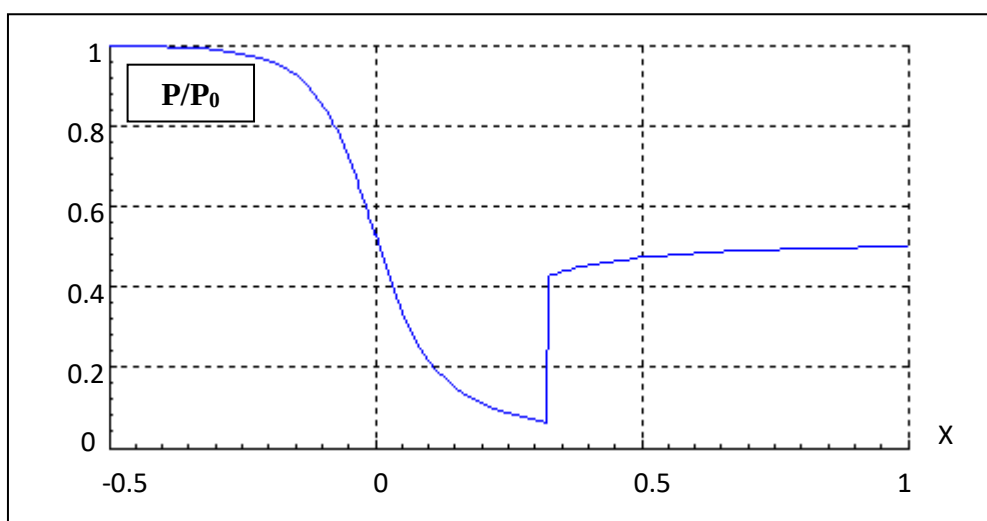


Figure (VI.43): variation de pression pour $\gamma = 1.4$

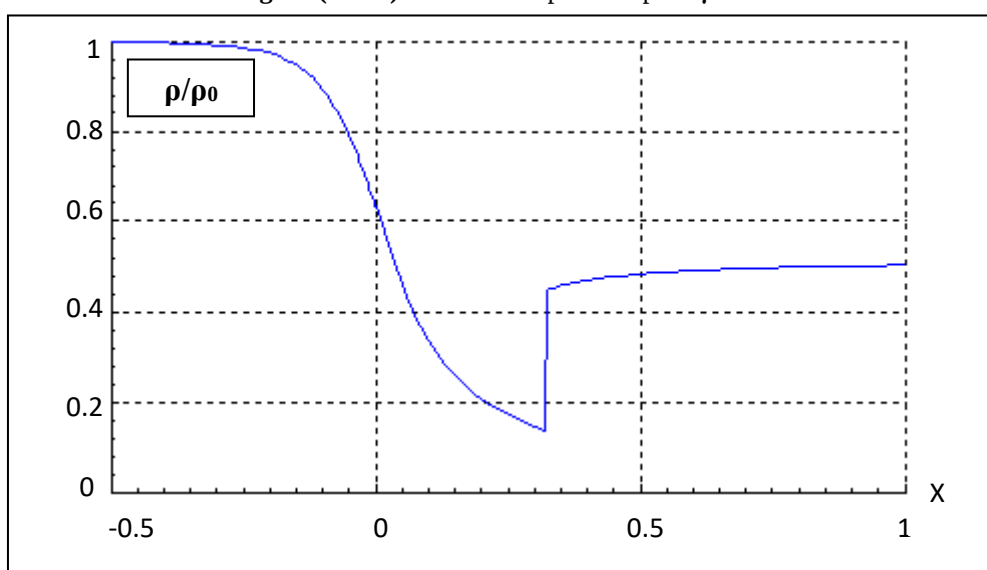


Figure (VI.44): variation de la densité pour $\gamma = 1.4$

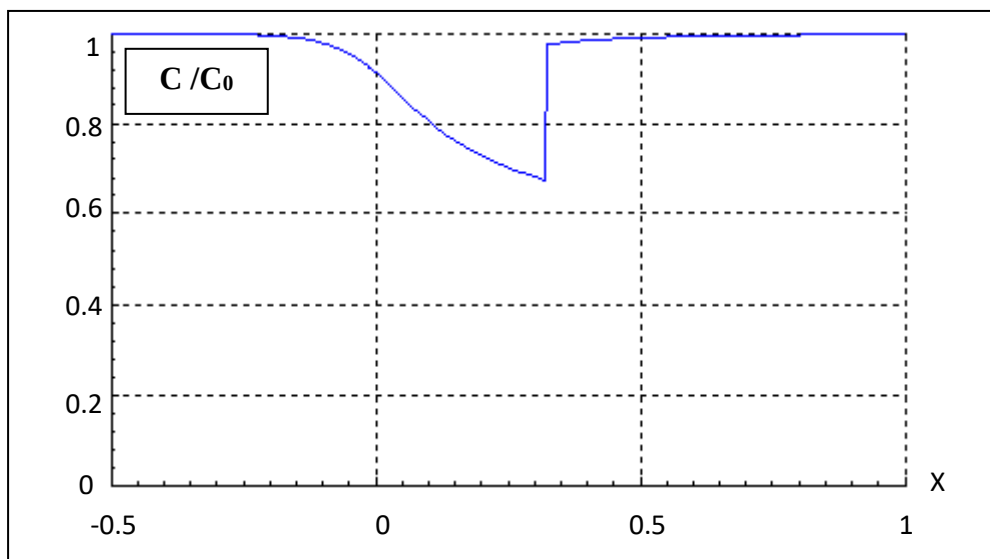


Figure (VI.45): variation de la vitesse du son pour $\gamma = 1.4$

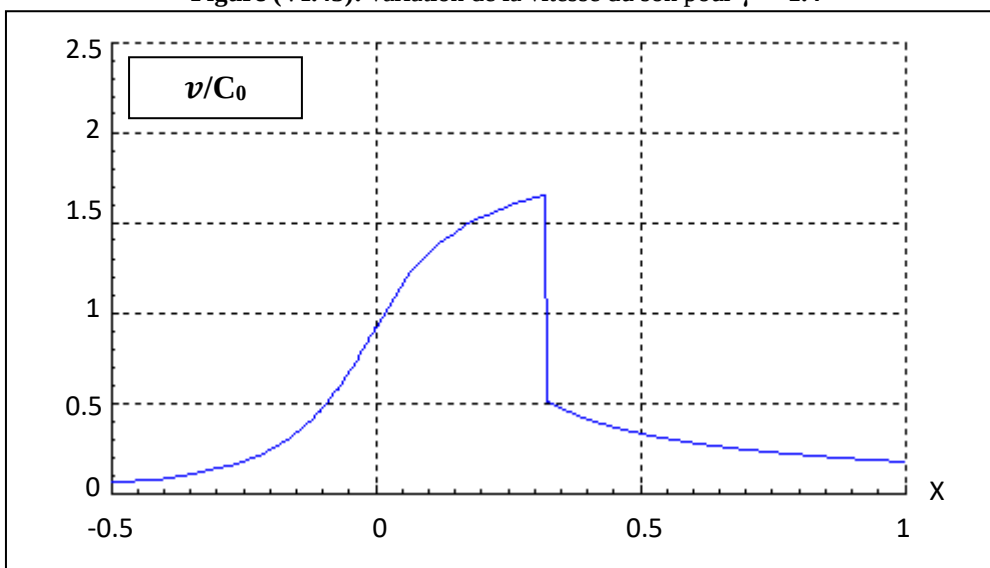


Figure (VI.46): variation de la vitesse du fluide pour $\gamma = 1.4$

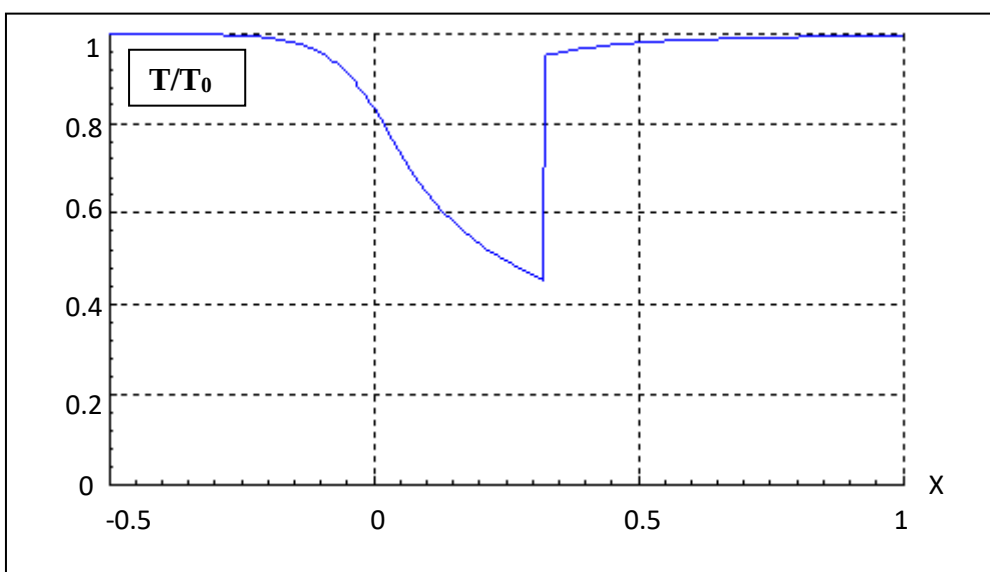


Figure (VI.47): variation de température pour $\gamma = 1.4$

Pour $\gamma = 1.7$:

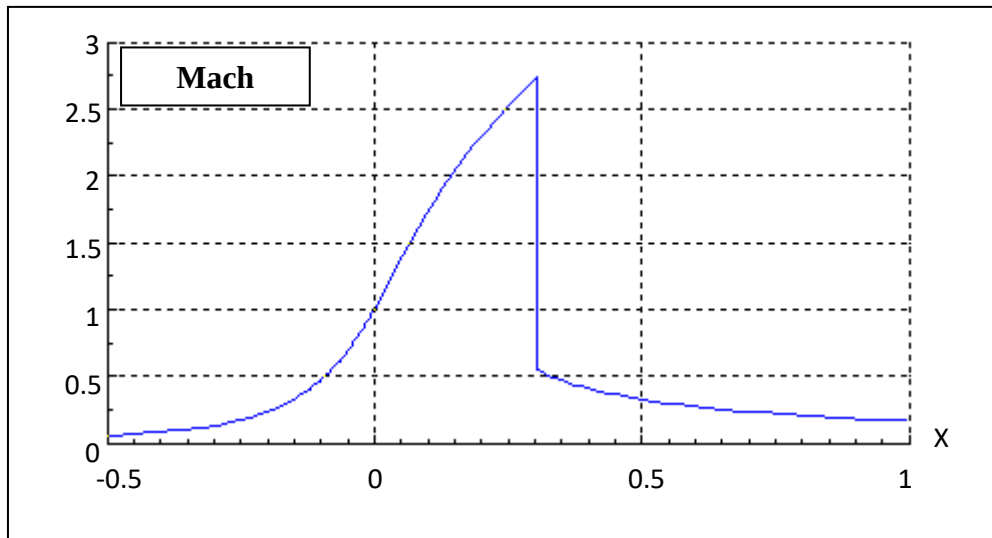


Figure (VI.48): variation de nombre de Mach pour $\gamma = 1.7$

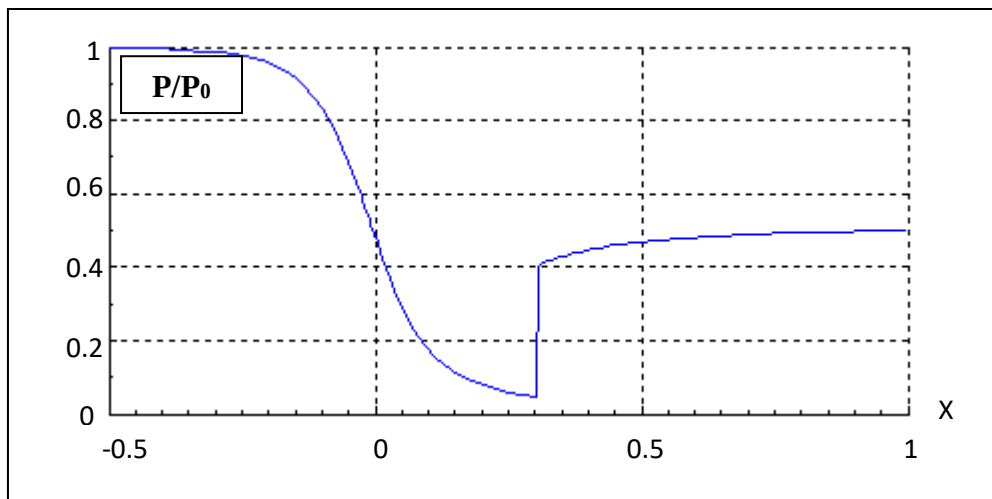


Figure (VI.49): variation de pression pour $\gamma = 1.7$

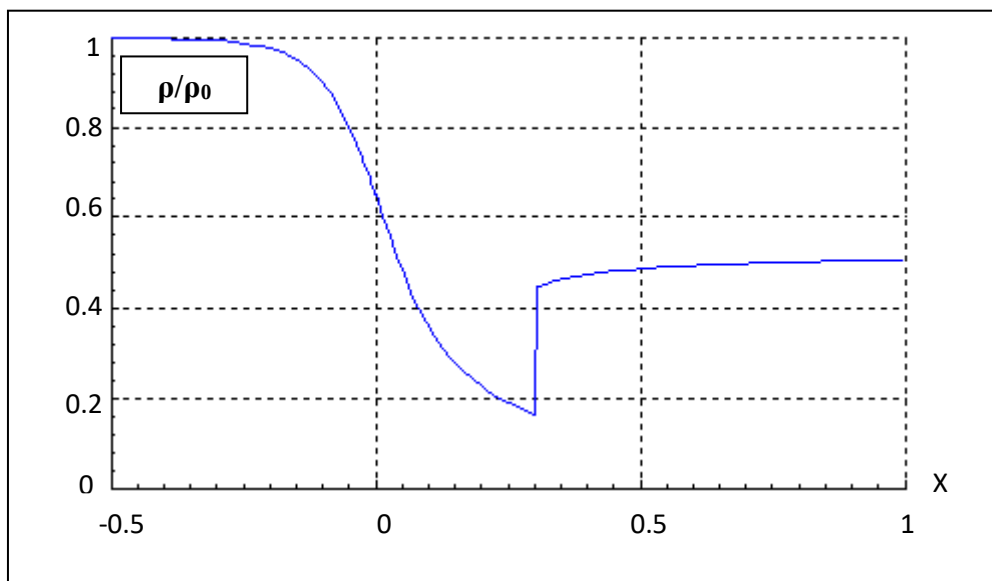


Figure (VI.50): variation de la densité pour $\gamma = 1.7$

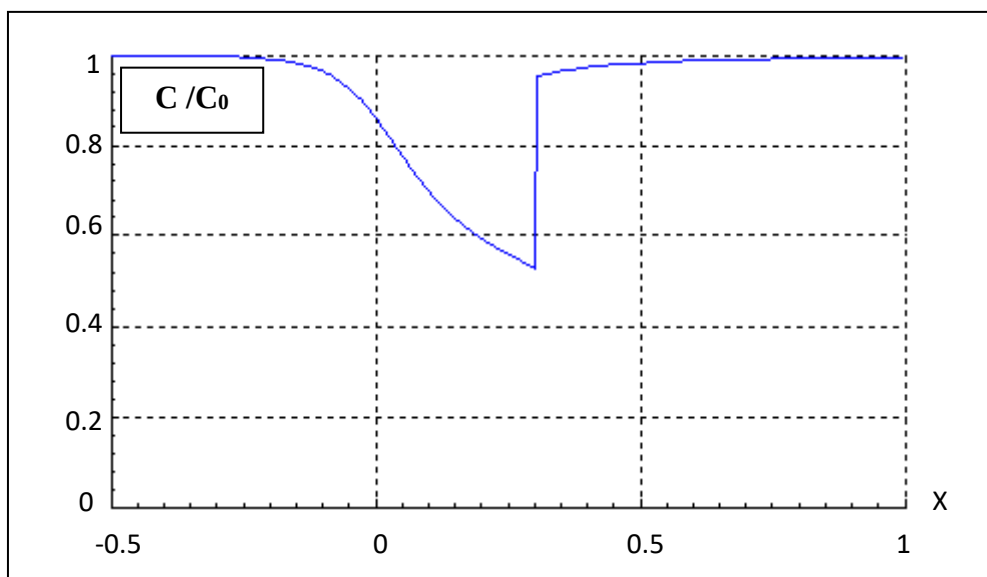


Figure (VI.51): variation de la vitesse du son pour $\gamma = 1.7$

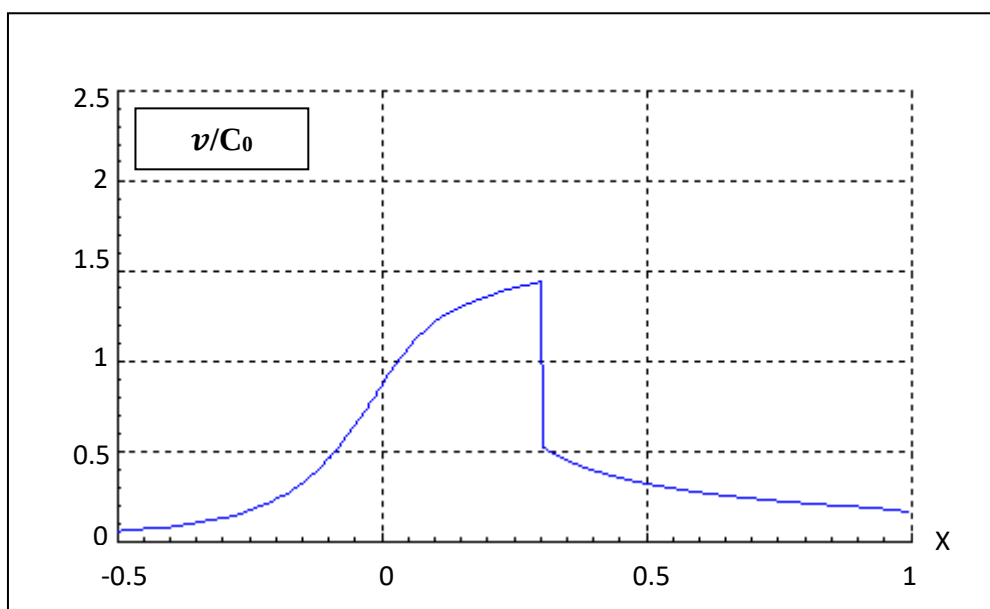


Figure (VI.52): variation de la vitesse du fluide pour $\gamma = 1.7$

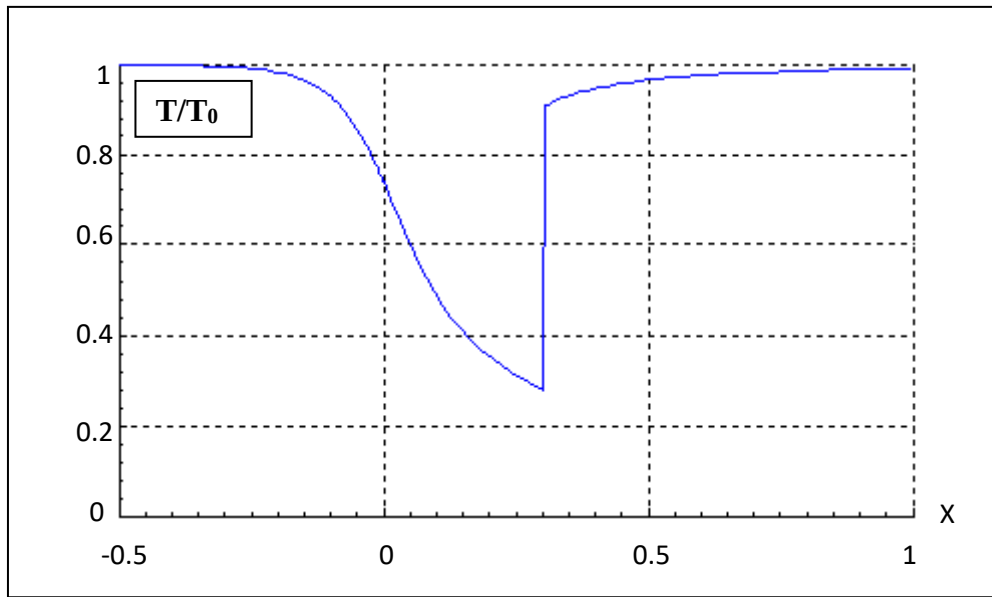


Figure (VI.53): variation de température pour $\gamma = 1.7$

IV.3.4. Calcul de la position d'un choc dans une tuyère Laval :

Table IV.1: la position d'une onde du choc droit ($\gamma=1.4$)

Variation de section du col A_c/A_s	Section du choc A choc/A_c			
	Pour pression P_a/P₀ = 0.6	Pour pression P_a/P₀ = 0.5	Pour pression P_a/P₀ = 0.4	Pour pression P_a/P₀ = 0.3
0.0100	2.1197	2.6304	3.3958	4.6766
0.0200	2.1192	2.6295	3.3942	4.6726
0.0300	2.1183	2.6281	3.3914	4.6660
0.0400	2.1172	2.6261	3.3874	4.6566
0.0500	2.1157	2.6235	3.3824	4.6447
0.0600	2.1138	2.6204	3.3763	4.6302
0.0700	2.1117	2.6167	3.3691	4.6131
0.0800	2.1092	2.6124	3.3608	4.5936
0.0900	2.1064	2.6076	3.3514	4.5716
0.1000	2.1032	2.6022	3.3410	4.5473
0.1100	2.0998	2.5963	3.3295	4.5206
0.1200	2.0960	2.5899	3.3171	4.4917
0.1300	2.0919	2.5829	3.3036	4.4606
0.1400	2.0875	2.5754	3.2892	4.4275
0.1500	2.0828	2.5673	3.2738	4.3924
0.1600	2.0778	2.5588	3.2575	4.3553
0.1700	2.0724	2.5497	3.2403	4.3165
0.1800	2.0668	2.5402	3.2222	4.2759
0.1900	2.0609	2.5302	3.2032	4.2337
0.2000	2.0547	2.5197	3.1834	4.1900
0.2100	2.0481	2.5088	3.1628	4.1449

0.2200	2.0413	2.4973	3.1415	4.0984
0.2300	2.0343	2.4855	3.1194	4.0507
0.2400	2.0269	2.4732	3.0966	4.0019
0.2500	2.0193	2.4605	3.0731	3.9520
0.2600	2.0114	2.4474	3.0489	0
0.2700	2.0032	2.4339	3.0242	0
0.2800	1.9948	2.4199	2.9988	0
0.2900	1.9862	2.4057	2.9729	0
0.3000	1.9773	2.3910	2.9464	0
0.3100	1.9681	2.3760	2.9195	0
0.3200	1.9587	2.3607	2.8920	0
0.3300	1.9491	2.3450	2.8642	0
0.3400	1.9393	2.3290	2.8359	0
0.3500	1.9292	2.3128	2.8072	0
0.3600	1.9189	2.2962	0	0
0.3700	1.9084	2.2793	0	0
0.3800	1.8978	2.2622	0	0
0.3900	1.8869	2.2448	0	0
0.4000	1.8758	2.2272	0	0
0.4100	1.8645	2.2094	0	0
0.4200	1.8531	2.1913	0	0
0.4300	1.8415	2.1730	0	0
0.4400	1.8297	2.1545	0	0
0.4500	1.8178	2.1359	0	0
0.4600	1.8056	2.1171	0	0
0.4700	1.7934	2.0981	0	0
0.4800	1.7810	2.0789	0	0
0.4900	1.7684	0	0	0
0.5000	1.7557	0	0	0
0.5100	1.7429	0	0	0
0.5200	1.7300	0	0	0
0.5300	1.7169	0	0	0
0.5400	1.7038	0	0	0
0.5500	1.6905	0	0	0
0.5600	1.6771	0	0	0
0.5700	1.6636	0	0	0
0.5800	1.6500	0	0	0
0.5900	1.6363	0	0	0
0.600	1.6225	0	0	0
0.6100	1.6086	0	0	0
0.6200	1.5947	0	0	0
0.6300	1.5807	0	0	0
0.6400	0	0	0	0

IV.3.5. Les iso-valeurs du nombre de Mach:

On suppose que la pression ambiante est fixe pour la valeur ($P_a/P_c=0.5$) et varier chaque fois la géométrie de la tuyère.

IV.3.5.1. Ecoulement adapté pour ($A_c/A_s = 0.49$) :

La figure représente les iso-valeurs du nombre de Mach, la ligne en bleu claire au col montre la frontière sonique séparant l'écoulement en une zone subsonique avant le col et une zone supersonique après le col.

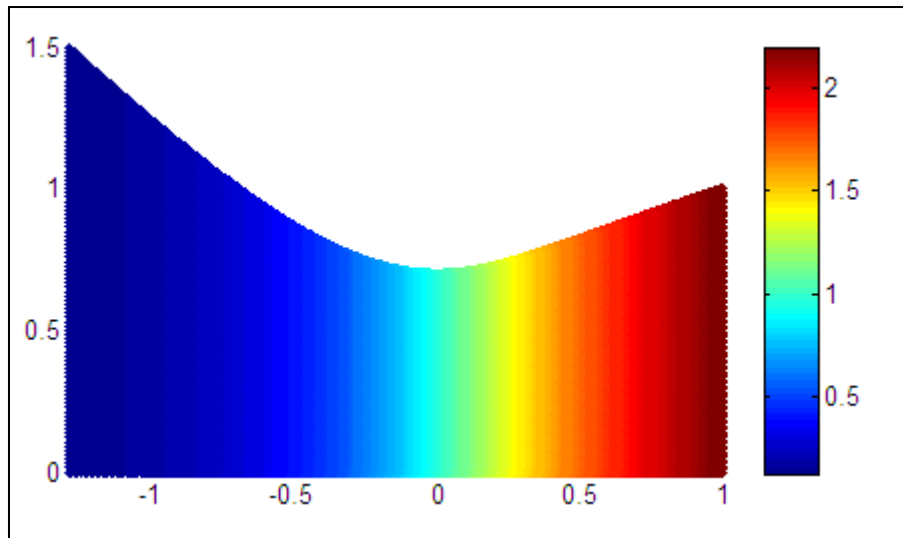


Figure (VI.54): Les iso-valeur du nombre de Mach pour ($A_c/A_s = 0.49$)

IV.3.5.2. Ecoulement choqué dans la sortie de la tuyère pour ($A_c/A_s = 0.46$):

La figure représente les iso-valeurs du nombre de Mach, la ligne en bleu claire au col montre la frontière sonique séparant l'écoulement en une zone subsonique avant le col et une zone supersonique après le col, et la ligne rouge foncé représente une onde du choc à la sortie de la tuyère, et l'écoulement devient subsonique après le choc.

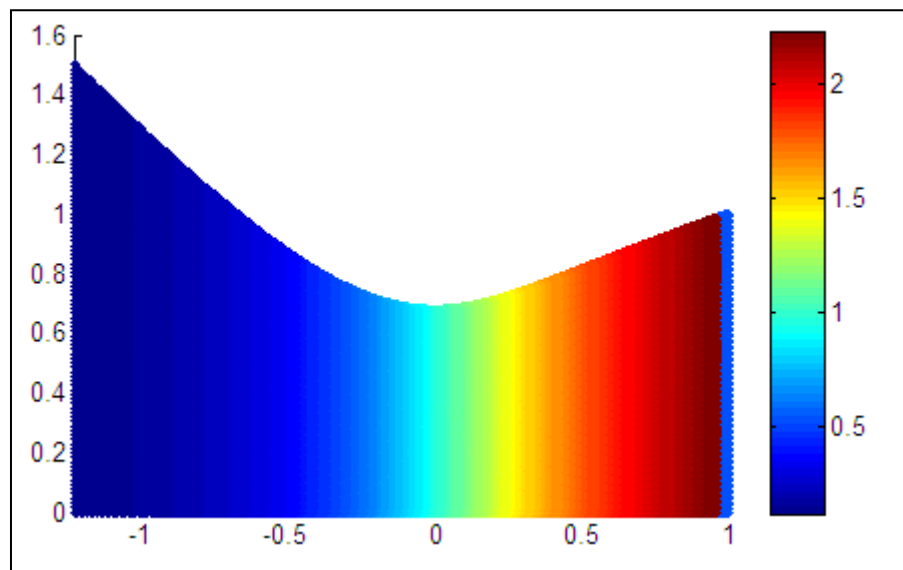


Figure (VI.55): Les iso-valeur du nombre de Mach pour ($A_c/A_s = 0.46$)

IV.3.5.3. Ecoulement choqué dans le divergent de la tuyère pour ($A_c/A_s = 0.2$):

On va diminuer la section jusqu'à la valeur de $A_c/A_s = 0.2$ pour voir une onde de choc dans le divergent de la tuyère, La figure représente les iso-valeurs du nombre de Mach, la ligne en bleu clair au col montre la frontière sonique séparant l'écoulement en une zone subsonique avant le col et une zone supersonique après le col, et la ligne rouge foncé montre la frontière du choc séparant l'écoulement en une zone supersonique avant le choc et une zone subsonique après le choc.

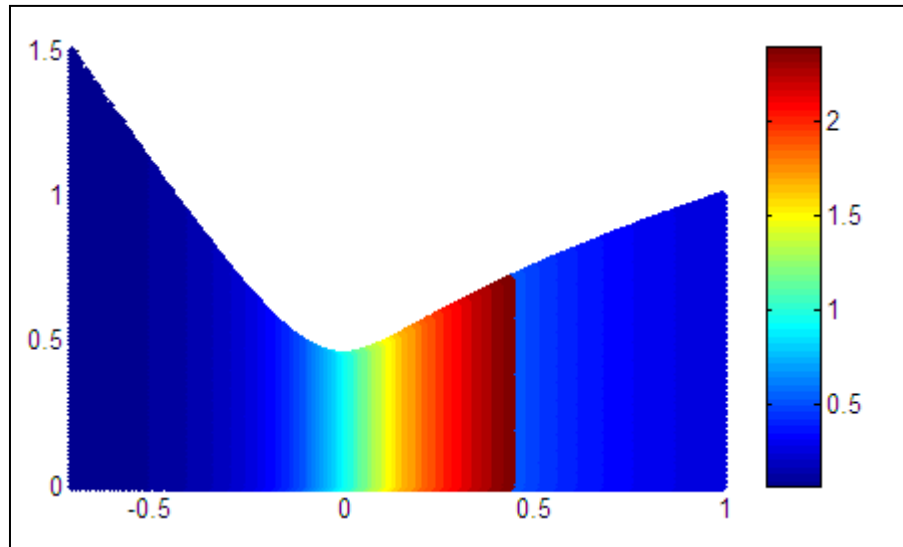


Figure (VI.56): Les iso-valeur du nombre de Mach pour ($A_c/A_s = 0.2$)

La même chose pour la variation de pression ambiante pour ($A_c/A_s = 0.1$)

IV.3.5.4. Ecoulement adapté pour ($P_a/P_c = 0.12$):

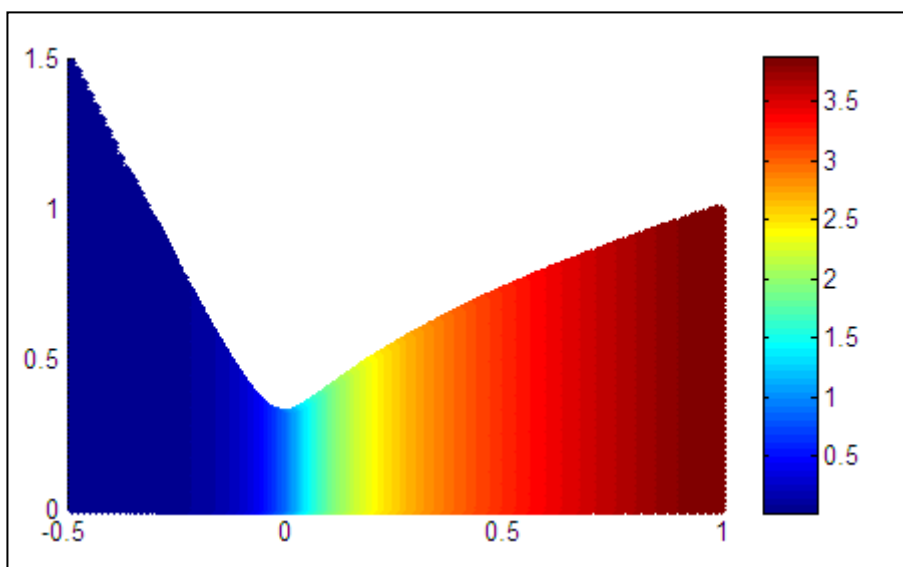


Figure (VI.57): Les iso-valeur du nombre de Mach pour ($P_a/P_c = 0.12$)

IV.3.5.5. Ecoulement choqué dans le divergent de la tuyère pour ($P_a/P_c = 0.33$):

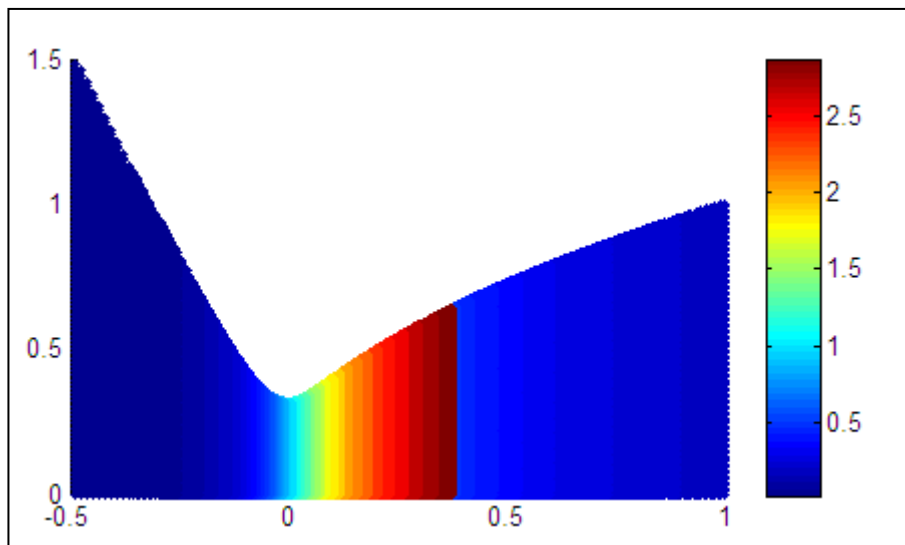


Figure (VI.58): Les iso-valeur du nombre de Mach pour ($P_a/P_c = 0.33$)

IV.3.5.6. Ecoulement choqué dans la sortie de la tuyère pour ($P_a/P_c = 0.14$):

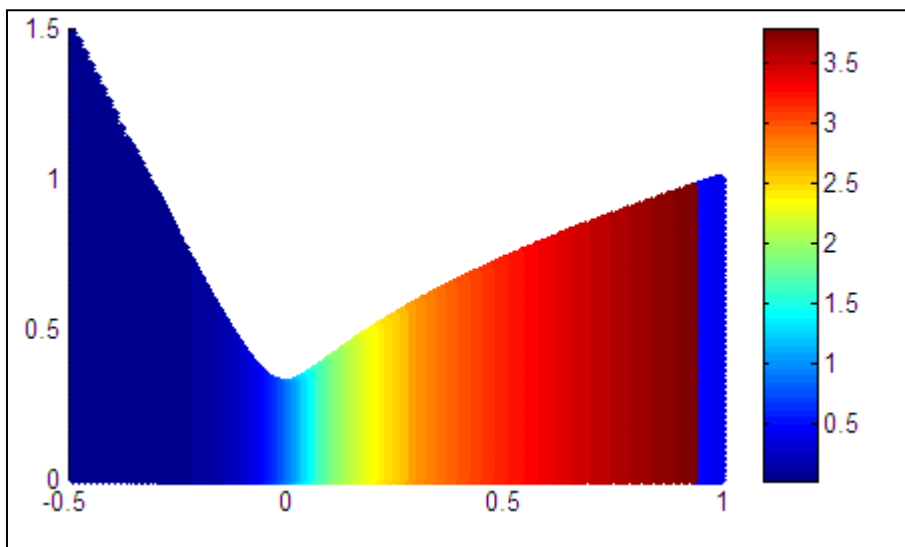


Figure (VI.59): Les iso-valeur du nombre de Mach pour ($P_a/P_c = 0.14$)

Conclusion générale:

Notre travail est concentré sur l'étude d'un écoulement supersonique dans une tuyère convergente-divergente avec une variation de la section du col de la tuyère et la pression ambiante.

Cette étude a permis de simuler la structure d'écoulements supersoniques choqué et adapté. Les résultats numériques obtenus sont très intéressants et montrent que :

- La pression ambiante en sortie influe sur les écoulements des fluides dans une tuyère Laval, et la diminution de la pression ambiante provoque des ondes de choc droites dans le divergent de la tuyère, le choc se déplace vers la section de sortie jusqu'à une détente hors de la tuyère en sortie.
- la géométrie de la tuyère aussi influe sur l'écoulement de fluide, alors la diminution de la section du col provoque des ondes de choc droites dans le divergent de la tuyère, et aussi une détente hors de la tuyère en sortie. Mais avec l'augmentation de la section du col, le choc se déplace vers la section de sortie jusqu'à une détente hors de la tuyère en sortie ou bien un écoulement subsonique, selon la pression ambiante.
- La variation du type de fluide (γ) influe aussi sur les valeurs de nombre de Mach et les rapports de pression, densité, vitesse du son, vitesse du fluide, et la température, avec une légère variation de position d'onde de choc.

Enfin, on peut dire que les résultats de notre étude ont reflété le comportement logique de l'écoulement supersonique dans une tuyère Laval et se concorde relativement avec les résultats trouvés sur les ouvrages bibliographiques.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE:

[1] Sébastien Candel.

Mécanique de fluide, cours 2^e cycle universitaire.

Dunod, Paris Edition 1995.

[3] EURL: Google Scholar, Wikipedia,

[5] ENCARTA 2009.

[6] André LALLEMAND

Écoulements monodimensionnels des fluides compressibles.

Professeur des universités à l'Institut national des sciences appliquées (INSA) de Lyon

[7] David LE TOUZE

Cours de Mécanique de fluide – PARTIE IV

Ecoulements compressibles de fluide parfait Ondes de choc

ICAM2 – Promotion 108 – Année 2006-2007.

[8] THIERRY FAURE

Dynamique des fluides appliquée (application à l'aérodynamique)

Dunod, écoules de l'ingénieurs, Master

[9] R. OUZIAUX et J.PERRIER

Mécanique des fluides appliquée.

Tome 2, fluides compressibles, aérodynamiques mesures.

Dunod, paris 1967.

[10] J.ROUSSEL

Cours de Mécanique des fluides. C.P.I.2 - Chem.I.St2 : 2005-2006

I.les résultats de sous programme (ISEN) :

I.1. Étude de l'écoulement supersonique d'un gaz parfait en régime isentropique supersonique :

I.1.1. Variation de nombre de Mach :

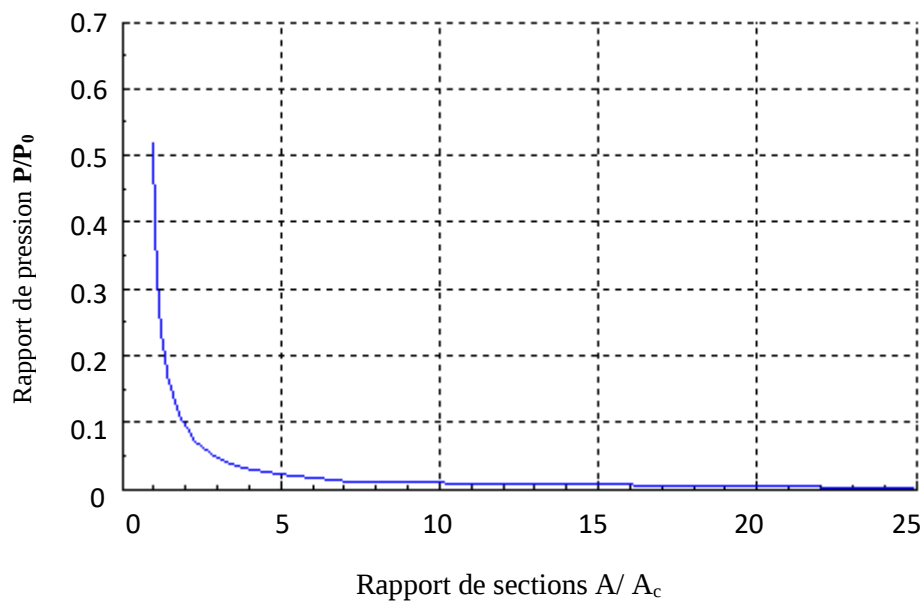
Table A.I: *écoulement d'un gaz parfait en régime isentropique*
($M > 1$), $\gamma = 1.4$

M	P/P ₀	ρ/ρ_0	c/c ₀	v / c_0	A / A _c	T/T ₀
1.0000	0.5283	0.6339	0.9129	0.9129	1.0000	0.8333
1.0100	0.5221	0.6287	0.9113	0.9205	1.0001	0.8306
1.0200	0.5160	0.6234	0.9098	0.9280	1.0003	0.8278
1.0300	0.5099	0.6181	0.9083	0.9355	1.0007	0.8250
1.0400	0.5039	0.6129	0.9067	0.9430	1.0013	0.8222
1.0500	0.4979	0.6077	0.9052	0.9504	1.0020	0.8193
1.0600	0.4919	0.6024	0.9036	0.9578	1.0029	0.8165
1.0700	0.4860	0.5972	0.9020	0.9652	1.0039	0.8137
1.0800	0.4800	0.5920	0.9005	0.9725	1.0051	0.8108
1.0900	0.4742	0.5869	0.8989	0.9798	1.0064	0.8080
1.1000	0.4684	0.5817	0.8973	0.9870	1.0079	0.8052
1.1100	0.4626	0.5766	0.8957	0.9942	1.0095	0.8023
1.1200	0.4568	0.5714	0.8941	1.0014	1.0113	0.7994
1.1300	0.4511	0.5663	0.8925	1.0085	1.0132	0.7966
1.1400	0.4455	0.5612	0.8909	1.0156	1.0153	0.7937
1.1500	0.4398	0.5562	0.8893	1.0227	1.0175	0.7908
1.1600	0.4343	0.5511	0.8877	1.0297	1.0198	0.7879
1.1700	0.4287	0.5461	0.8860	1.0367	1.0222	0.7851
1.1800	0.4232	0.5411	0.8844	1.0436	1.0248	0.7822
1.1900	0.4178	0.5361	0.8828	1.0505	1.0276	0.7793
1.2000	0.4124	0.5311	0.8811	1.0574	1.0304	0.7764
1.2100	0.4070	0.5262	0.8795	1.0642	1.0334	0.7735
1.2200	0.4017	0.5213	0.8778	1.0710	1.0366	0.7706
1.2300	0.3964	0.5164	0.8762	1.0777	1.0398	0.7677
1.2400	0.3912	0.5115	0.8745	1.0844	1.0432	0.7648
1.2500	0.3861	0.5067	0.8729	1.0911	1.0468	0.7619
1.2600	0.3809	0.5019	0.8712	1.0977	1.0504	0.7590
1.2700	0.3759	0.4971	0.8695	1.1043	1.0542	0.7561
1.2800	0.3708	0.4923	0.8679	1.1109	1.0581	0.7532
1.2900	0.3658	0.4876	0.8662	1.1174	1.0621	0.7503
1.3000	0.3609	0.4829	0.8645	1.1239	1.0663	0.7474
1.3100	0.3560	0.4782	0.8628	1.1303	1.0706	0.7445
1.3200	0.3512	0.4736	0.8611	1.1367	1.0750	0.7416
1.3300	0.3464	0.4690	0.8595	1.1431	1.0796	0.7387
1.3400	0.3417	0.4644	0.8578	1.1494	1.0842	0.7358
1.3500	0.3370	0.4598	0.8561	1.1557	1.0890	0.7329
1.3600	0.3323	0.4553	0.8544	1.1620	1.0940	0.7300

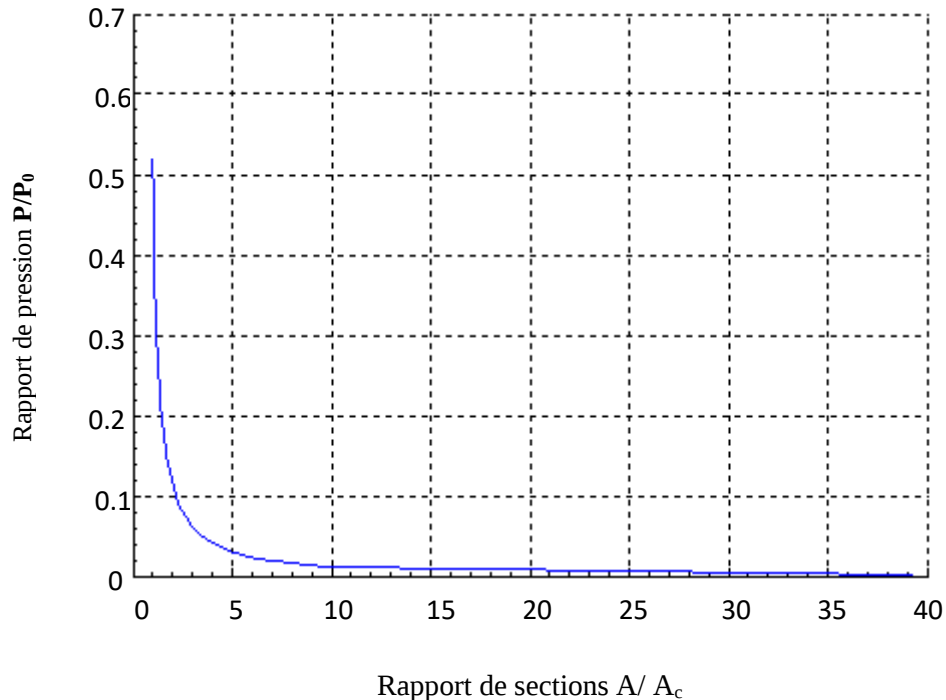
1.3700	0.3277	0.4508	0.8527	1.1682	1.0990	0.7271
1.3800	0.3232	0.4463	0.8510	1.1744	1.1042	0.7242
1.3900	0.3187	0.4418	0.8493	1.1805	1.1095	0.7213
1.4000	0.3142	0.4374	0.8476	1.1866	1.1149	0.7184
1.4100	0.3098	0.4330	0.8459	1.1927	1.1205	0.7155
1.4200	0.3055	0.4287	0.8442	1.1987	1.1262	0.7126
1.4300	0.3012	0.4244	0.8425	1.2047	1.1320	0.7097
1.4400	0.2969	0.4201	0.8407	1.2107	1.1379	0.7069
1.4500	0.2927	0.4158	0.8390	1.2166	1.1440	0.7040
1.4600	0.2886	0.4116	0.8373	1.2225	1.1501	0.7011
1.4700	0.2845	0.4074	0.8356	1.2283	1.1565	0.6982
1.4800	0.2804	0.4032	0.8339	1.2342	1.1629	0.6954
1.4900	0.2764	0.3991	0.8322	1.2399	1.1695	0.6925
1.5000	0.2724	0.3950	0.8305	1.2457	1.1762	0.6897
1.5100	0.2685	0.3909	0.8287	1.2514	1.1830	0.6868
1.5200	0.2646	0.3869	0.8270	1.2571	1.1899	0.6840
1.5300	0.2608	0.3829	0.8253	1.2627	1.1970	0.6811
1.5400	0.2570	0.3789	0.8236	1.2683	1.2042	0.6783
1.5500	0.2533	0.3750	0.8219	1.2739	1.2116	0.6754
1.5600	0.2496	0.3710	0.8201	1.2794	1.2190	0.6726
1.5700	0.2459	0.3672	0.8184	1.2849	1.2266	0.6698
1.5800	0.2423	0.3633	0.8167	1.2904	1.2344	0.6670
1.5900	0.2388	0.3595	0.8150	1.2958	1.2422	0.6642
1.6000	0.2353	0.3557	0.8133	1.3012	1.2502	0.6614
1.6100	0.2318	0.3520	0.8115	1.3066	1.2584	0.6586
1.6200	0.2284	0.3483	0.8098	1.3119	1.2666	0.6558
1.6300	0.2250	0.3446	0.8081	1.3172	1.2750	0.6530
1.6400	0.2217	0.3409	0.8064	1.3224	1.2836	0.6502
1.6500	0.2184	0.3373	0.8046	1.3277	1.2922	0.6475
1.6600	0.2151	0.3337	0.8029	1.3329	1.3010	0.6447
1.6700	0.2119	0.3302	0.8012	1.3380	1.3100	0.6419
1.6800	0.2088	0.3266	0.7995	1.3431	1.3190	0.6392
1.6900	0.2057	0.3232	0.7978	1.3482	1.3283	0.6364
1.7000	0.2026	0.3197	0.7961	1.3533	1.3376	0.6337
1.7100	0.1996	0.3163	0.7943	1.3583	1.3471	0.6310
1.7200	0.1966	0.3129	0.7926	1.3633	1.3567	0.6283
1.7300	0.1936	0.3095	0.7909	1.3683	1.3665	0.6256
1.7400	0.1907	0.3062	0.7892	1.3732	1.3764	0.6229
1.7500	0.1878	0.3029	0.7875	1.3781	1.3865	0.6202
1.7600	0.1850	0.2996	0.7858	1.3830	1.3967	0.6175
1.7700	0.1822	0.2964	0.7841	1.3878	1.4070	0.6148
1.7800	0.1794	0.2931	0.7824	1.3926	1.4175	0.6121
1.7900	0.1767	0.2900	0.7807	1.3974	1.4282	0.6095
1.8000	0.1740	0.2868	0.7790	1.4021	1.4390	0.6068
1.8100	0.1714	0.2837	0.7773	1.4069	1.4499	0.6041
1.8200	0.1688	0.2806	0.7756	1.4115	1.4610	0.6015
1.8300	0.1662	0.2776	0.7739	1.4162	1.4723	0.5989
1.8400	0.1637	0.2745	0.7722	1.4208	1.4836	0.5963

1.8500	0.1612	0.2715	0.7705	1.4254	1.4952	0.5936
1.8600	0.1587	0.2686	0.7688	1.4300	1.5069	0.5910
1.8700	0.1563	0.2656	0.7671	1.4345	1.5187	0.5884
1.8800	0.1539	0.2627	0.7654	1.4390	1.5308	0.5859
1.8900	0.1516	0.2598	0.7637	1.4435	1.5429	0.5833
1.9000	0.1492	0.2570	0.7620	1.4479	1.5553	0.5807
1.9100	0.1470	0.2542	0.7604	1.4523	1.5677	0.5782
1.9200	0.1447	0.2514	0.7587	1.4567	1.5804	0.5756
1.9300	0.1425	0.2486	0.7570	1.4610	1.5932	0.5731
1.9400	0.1403	0.2459	0.7553	1.4654	1.6062	0.5705
1.9500	0.1381	0.2432	0.7537	1.4697	1.6193	0.5680
1.9600	0.1360	0.2405	0.7520	1.4739	1.6326	0.5655
1.9700	0.1339	0.2378	0.7503	1.4782	1.6461	0.5630
1.9800	0.1318	0.2352	0.7487	1.4824	1.6597	0.5605
1.9900	0.1298	0.2326	0.7470	1.4866	1.6735	0.5580
2.0000	0.1278	0.2300	0.7454	1.4907	1.6875	0.5556
2.2000	0.0935	0.1841	0.7128	1.5682	2.0050	0.5081
2.4000	0.0684	0.1472	0.6817	1.6360	2.4031	0.4647
2.6000	0.0501	0.1179	0.6521	1.6953	2.8960	0.4252
2.8000	0.0368	0.0946	0.6240	1.7473	3.5001	0.3894
3.0000	0.0272	0.0762	0.5976	1.7928	4.2346	0.3571
3.2000	0.0202	0.0617	0.5728	1.8329	5.1210	0.3281
3.4000	0.0151	0.0501	0.5495	1.8682	6.1837	0.3019
3.6000	0.0114	0.0409	0.5276	1.8995	7.4501	0.2784
3.8000	0.0086	0.0335	0.5072	1.9272	8.9506	0.2572
4.0000	0.0066	0.0277	0.4880	1.9518	10.7188	0.2381
4.2000	0.0051	0.0229	0.4699	1.9738	12.7916	0.2208
4.4000	0.0039	0.0191	0.4531	1.9934	15.2099	0.2053
4.6000	0.0031	0.0160	0.4372	2.0111	18.0178	0.1911
4.8000	0.0024	0.0134	0.4223	2.0269	21.2637	0.1783
5.0000	0.0019	0.0113	0.4082	2.0412	25.0000	0.1667

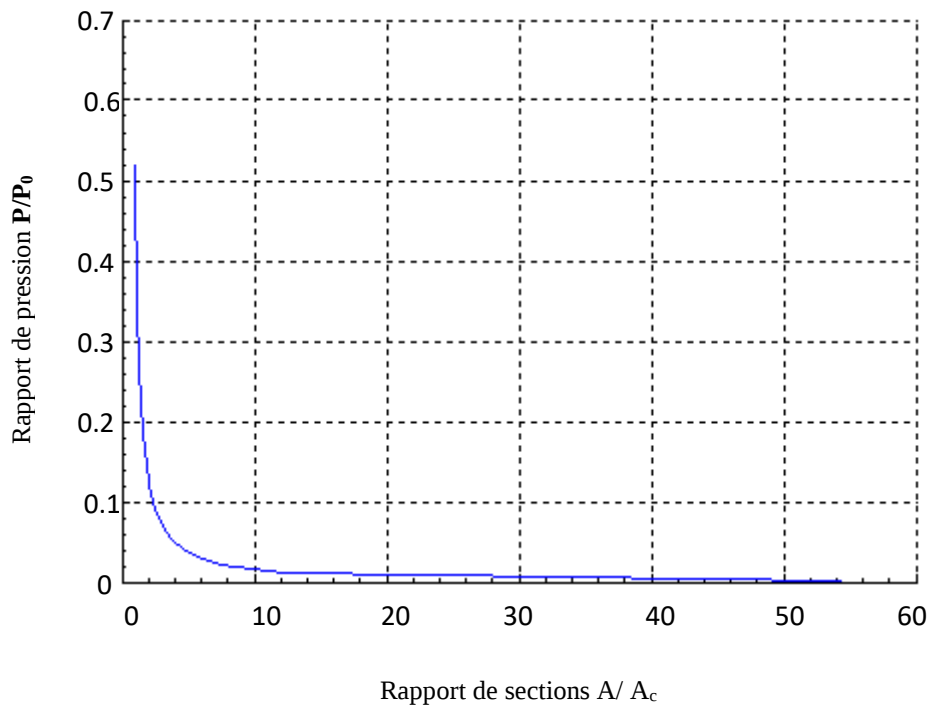
I.1.2. La relation entre le rapport de la section et pression pour un écoulement isentropique supersonique :



Figure(A.1): Relation entre (section locale /section critique) et rapport (Pression statique / pression totale) pour $\gamma=1.4$.

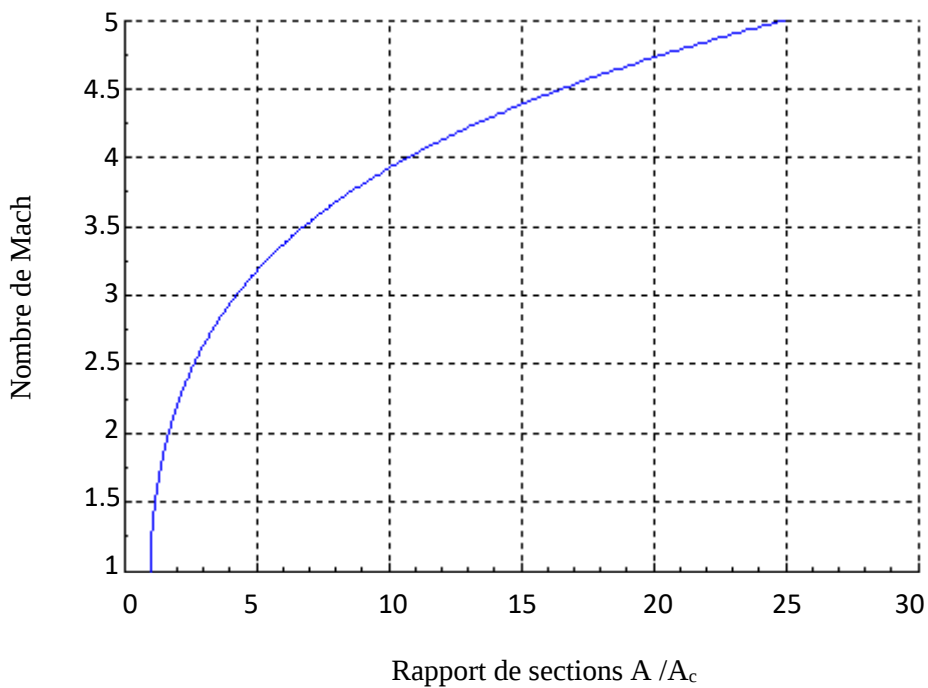


Figure(A.2): Relation entre (section locale /section critique) et rapport (Pression statique / pression totale) pour $\gamma=1.23$.



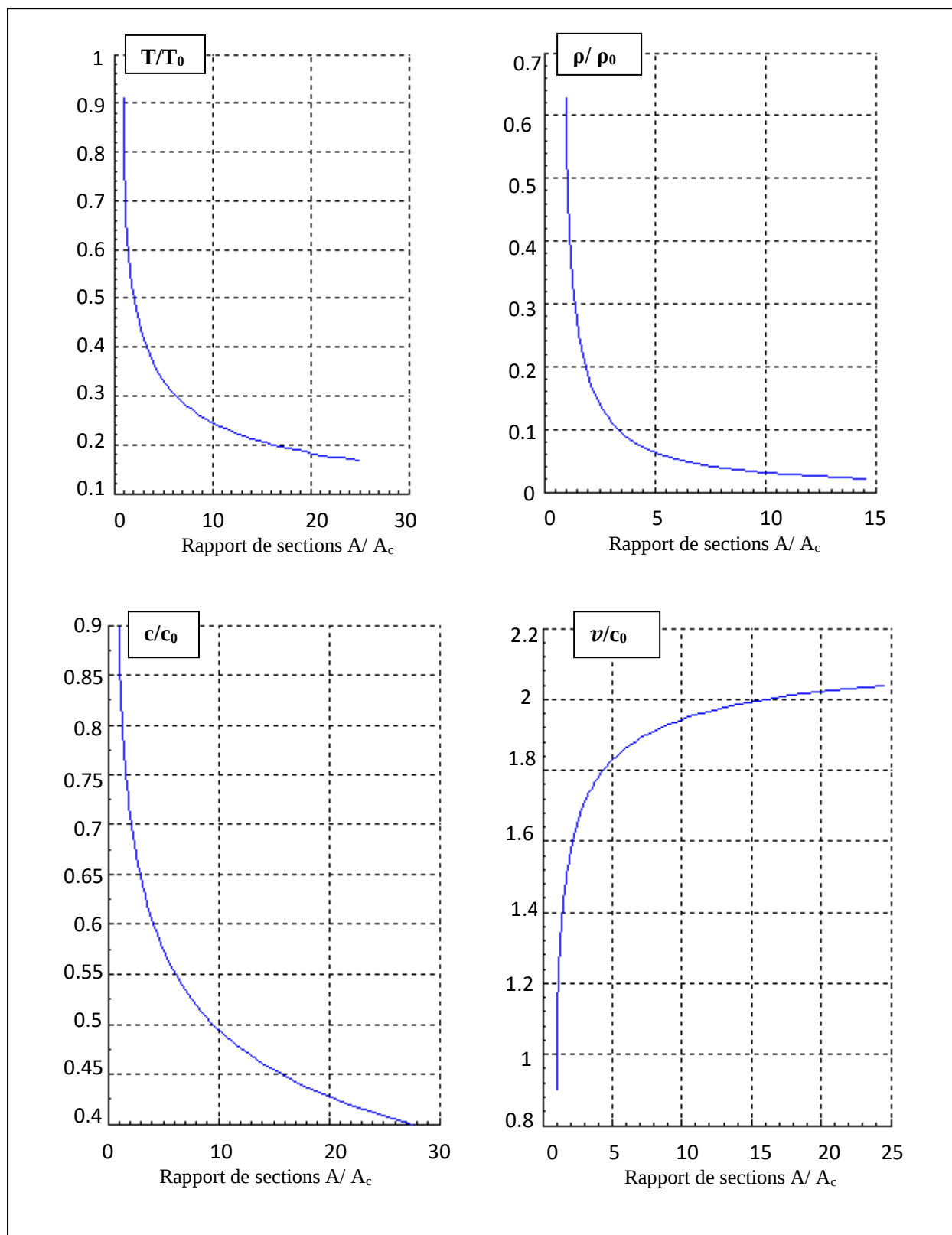
Figure(A.3): Relation entre (section locale /section critique) et rapport (Pression statique / pression totale) $\gamma=1.13$.

I.1.3. La relation entre le rapport de la section et nombre de Mach pour un écoulement supersonique ($\gamma=1.4$) :



Figure(A.4): Relation entre (section locale / section critique) et nombre de Mach

I.1.4. La relation entre les rapports (T/T_0 , ρ/ρ_0 , c/c_0 , v/c_0) et le rapport de section pour un écoulement isentropique supersonique ($\gamma=1.4$) :



Figure(A.5): La relation entre les rapports (T/T_0 , ρ/ρ_0 , c/c_0 , v/c_0) et le rapport de section.

II. les résultats de sous programme (NCHC) :

II.1. Etude de l'écoulement supersonique en amont et aval d'un choc:

II.1.1. Variation de nombre de Mach :

Table A.II : les propriétés de l'écoulement en amont et aval du choc
($M > 1$), $\gamma = 1.4$

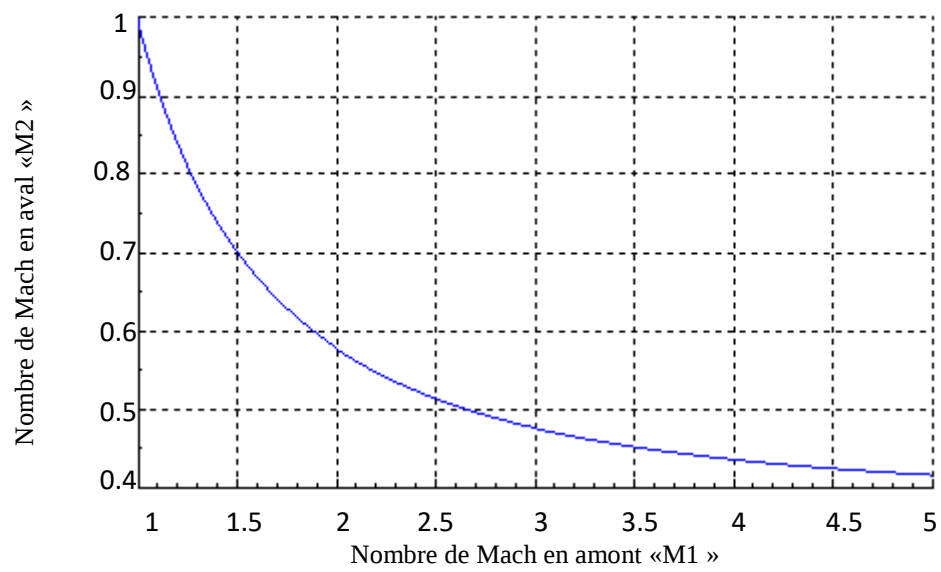
M_1	M_2	P_2/P_1	ρ_2/ρ_1	c_2/c_1	P_{02}/P_{01}	T_2/T_1
1.0000	1.0000	1.0000	1.000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0100	0.9901	1.0235	1.0167	1.0033	1.0000	1.0066
1.0200	0.9805	1.0471	1.0334	1.0066	1.0000	1.0132
1.0300	0.9712	1.0710	1.0502	1.0099	1.0000	1.0198
1.0400	0.9620	1.0952	1.0671	1.0131	0.9999	1.0263
1.0500	0.9531	1.1196	1.0840	1.0163	0.9999	1.0328
1.0600	0.9444	1.1442	1.1009	1.0195	0.9998	1.0393
1.0700	0.9360	1.1691	1.1179	1.0226	0.9996	1.0458
1.0800	0.9277	1.1941	1.1349	1.0258	0.9994	1.0522
1.0900	0.9196	1.2195	1.1520	1.0289	0.9992	1.0586
1.1000	0.9118	1.2450	1.1691	1.0320	0.9989	1.0649
1.1100	0.9041	1.2708	1.1862	1.0350	0.9986	1.0713
1.1200	0.8966	1.2968	1.2034	1.0381	0.9982	1.0776
1.1300	0.8892	1.3230	1.2206	1.0411	0.9978	1.0840
1.1400	0.8820	1.3495	1.2378	1.0442	0.9973	1.0903
1.1500	0.8750	1.3762	1.2550	1.0472	0.9967	1.0966
1.1600	0.8682	1.4032	1.2723	1.0502	0.9961	1.1029
1.1700	0.8615	1.4304	1.2896	1.0532	0.9953	1.1092
1.1800	0.8549	1.4578	1.3069	1.0561	0.9946	1.1154
1.1900	0.8485	1.4854	1.3243	1.0591	0.9937	1.1217
1.2000	0.8422	1.5133	1.3416	1.0621	0.9928	1.1280
1.2100	0.8360	1.5415	1.3590	1.0650	0.9918	1.1343
1.2200	0.8300	1.5698	1.3764	1.0680	0.9907	1.1405
1.2300	0.8241	1.5984	1.3938	1.0709	0.9896	1.1468
1.2400	0.8183	1.6272	1.4112	1.0738	0.9884	1.1531
1.2500	0.8126	1.6563	1.4286	1.0767	0.9871	1.1594
1.2600	0.8071	1.6855	1.4460	1.0797	0.9857	1.1657
1.2700	0.8016	1.7151	1.4634	1.0826	0.9842	1.1720
1.2800	0.7963	1.7448	1.4808	1.0855	0.9827	1.1783
1.2900	0.7911	1.7748	1.4983	1.0884	0.9811	1.1846
1.3000	0.7860	1.8050	1.5157	1.0913	0.9794	1.1909
1.3100	0.7809	1.8355	1.5331	1.0942	0.9776	1.1972
1.3200	0.7760	1.8661	1.5505	1.0971	0.9758	1.2035
1.3300	0.7712	1.8971	1.5680	1.0999	0.9738	1.2099
1.3400	0.7664	1.9282	1.5854	1.1028	0.9718	1.2162
1.3500	0.7618	1.9596	1.6028	1.1057	0.9697	1.2226
1.3600	0.7572	1.9912	1.6202	1.1086	0.9676	1.2290
1.3700	0.7527	2.0231	1.6376	1.1115	0.9653	1.2354

1.3800	0.7483	2.0551	1.6549	1.1144	0.9630	1.2418
1.3900	0.7440	2.0875	1.6723	1.1172	0.9607	1.2482
1.4000	0.7397	2.1200	1.6897	1.1201	0.9582	1.2547
1.4100	0.7355	2.1528	1.7070	1.1230	0.9557	1.2612
1.4200	0.7314	2.1858	1.7243	1.1259	0.9531	1.2676
1.4300	0.7274	2.2190	1.7416	1.1288	0.9504	1.2741
1.4400	0.7235	2.2525	1.7589	1.1317	0.9476	1.2807
1.4500	0.7196	2.2863	1.7761	1.1346	0.9448	1.2872
1.4600	0.7157	2.3202	1.7934	1.1374	0.9420	1.2938
1.4700	0.7120	2.3544	1.8106	1.1403	0.9390	1.3003
1.4800	0.7083	2.3888	1.8278	1.1432	0.9360	1.3069
1.4900	0.7047	2.4234	1.8449	1.1461	0.9329	1.3136
1.5000	0.7011	2.4583	1.8621	1.1490	0.9298	1.3202
1.5100	0.6976	2.4935	1.8792	1.1519	0.9266	1.3269
1.5200	0.6941	2.5288	1.8963	1.1548	0.9233	1.3336
1.5300	0.6907	2.5644	1.9133	1.1577	0.9200	1.3403
1.5400	0.6874	2.6002	1.9303	1.1606	0.9166	1.3470
1.5500	0.6841	2.6363	1.9473	1.1635	0.9132	1.3538
1.5600	0.6809	2.6725	1.9643	1.1664	0.9097	1.3606
1.5700	0.6777	2.7091	1.9812	1.1694	0.9062	1.3674
1.5800	0.6746	2.7458	1.9981	1.1723	0.9026	1.3742
1.5900	0.6715	2.7828	2.0149	1.1752	0.8989	1.3811
1.6000	0.6684	2.8200	2.0317	1.1781	0.8952	1.3880
1.6100	0.6655	2.8574	2.0485	1.1811	0.8915	1.3949
1.6200	0.6625	2.8951	2.0653	1.1840	0.8877	1.4018
1.6300	0.6596	2.9330	2.0820	1.1869	0.8838	1.4088
1.6400	0.6568	2.9712	2.0986	1.1899	0.8799	1.4158
1.6500	0.6540	3.0096	2.1152	1.1928	0.8760	1.4228
1.6600	0.6512	3.0482	2.1318	1.1958	0.8720	1.4299
1.6700	0.6485	3.0871	2.1484	1.1987	0.8680	1.4369
1.6800	0.6458	3.1261	2.1649	1.2017	0.8639	1.4440
1.6900	0.6431	3.1654	2.1813	1.2046	0.8599	1.4512
1.7000	0.6405	3.2050	2.1977	1.2076	0.8557	1.4583
1.7100	0.6380	3.2448	2.2141	1.2106	0.8516	1.4655
1.7200	0.6355	3.2848	2.2304	1.2136	0.8474	1.4727
1.7300	0.6330	3.3251	2.2467	1.2165	0.8431	1.4800
1.7400	0.6305	3.3655	2.2629	1.2195	0.8389	1.4873
1.7500	0.6281	3.4062	2.2791	1.2225	0.8346	1.4946
1.7600	0.6257	3.4472	2.2952	1.2255	0.8302	1.5019
1.7700	0.6234	3.4884	2.3113	1.2285	0.8259	1.5093
1.7800	0.6210	3.5298	2.3273	1.2315	0.8215	1.5167
1.7900	0.6188	3.5715	2.3433	1.2346	0.8171	1.5241
1.8000	0.6165	3.6133	2.3592	1.2376	0.8127	1.5316
1.8100	0.6143	3.6554	2.3751	1.2406	0.8082	1.5391
1.8200	0.6121	3.6978	2.3909	1.2436	0.8038	1.5466
1.8300	0.6099	3.7404	2.4067	1.2467	0.7993	1.5541
1.8400	0.6078	3.7832	2.4224	1.2497	0.7948	1.5617
1.8500	0.6057	3.8262	2.4381	1.2527	0.7902	1.5693

1.8600	0.6036	3.8695	2.4537	1.2558	0.7857	1.5770
1.8700	0.6016	3.9131	2.4693	1.2588	0.7811	1.5847
1.8800	0.5996	3.9568	2.4848	1.2619	0.7765	1.5924
1.8900	0.5976	4.0008	2.5003	1.2650	0.7720	1.6001
1.9000	0.5956	4.0450	2.5157	1.2680	0.7674	1.6079
1.9100	0.5937	4.0895	2.5310	1.2711	0.7627	1.6157
1.9200	0.5918	4.1341	2.5463	1.2742	0.7581	1.6236
1.9300	0.5899	4.1791	2.5616	1.2773	0.7535	1.6314
1.9400	0.5880	4.2242	2.5767	1.2804	0.7488	1.6394
1.9500	0.5862	4.2696	2.5919	1.2835	0.7442	1.6473
1.9600	0.5844	4.3152	2.6069	1.2866	0.7395	1.6553
1.9700	0.5826	4.3610	2.6220	1.2897	0.7349	1.6633
1.9800	0.5808	4.4071	2.6369	1.2928	0.7302	1.6713
1.9900	0.5791	4.4535	2.6518	1.2959	0.7255	1.6794
2.0000	0.5774	4.5000	2.6667	1.2990	0.7209	1.6875
2.2000	0.5471	5.4800	2.9512	1.3627	0.6281	1.8569
2.4000	0.5231	6.5533	3.2119	1.4284	0.5401	2.0403
2.6000	0.5039	7.7200	3.4490	1.4961	0.4601	2.2383
2.8000	0.4882	8.9800	3.6636	1.5656	0.3895	2.4512
3.0000	0.4752	10.3333	3.8571	1.6368	0.3283	2.6790
3.2000	0.4643	11.7800	4.0315	1.7094	0.2762	2.9220
3.4000	0.4552	13.3200	4.1884	1.7833	0.2322	3.1802
3.6000	0.4474	14.9533	4.3296	1.8584	0.1953	3.4537
3.8000	0.4407	16.6800	4.4568	1.9346	0.1645	3.7426
4.0000	0.4350	18.5000	4.5714	2.0117	0.1388	4.0469
4.2000	0.4299	20.4133	4.6749	2.0896	0.1173	4.3666
4.4000	0.4255	22.4200	4.7685	2.1683	0.0995	4.7017
4.6000	0.4217	24.5200	4.8532	2.2477	0.0846	5.0523
4.8000	0.4183	26.7133	4.9301	2.3277	0.0721	5.4184
5.0000	0.4152	29.0000	5.0000	2.4083	0.0617	5.8000

II.1.2. Relation entre les nombres de Mach amont et aval d'une onde de choc droite:

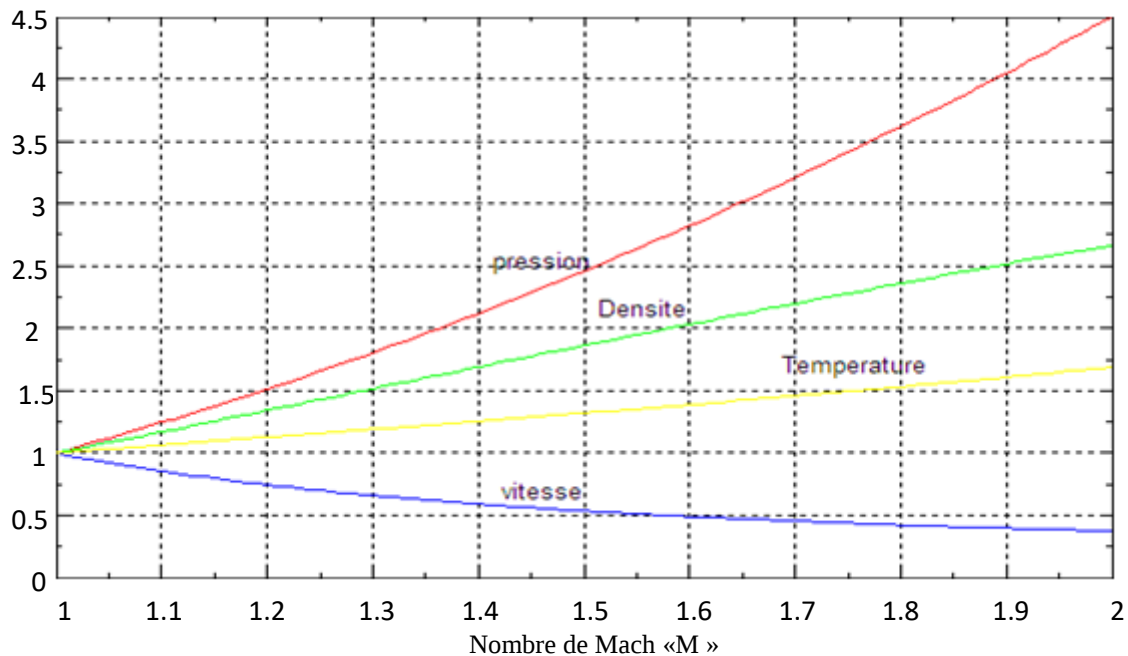
Pour une onde de choc droite, le nombre de Mach M_2 après le choc est représenté en fonction du nombre de Mach M_1 avant le choc à la figure (A.6), pour le rapport γ de 1.4. Nous verrons plus loin que le nombre de Mach de l'écoulement en amont du choc doit être obligatoirement supérieur à 1. Les ondes de choc ne peuvent se former en écoulement subsonique.



Figure(A.6): relation entre les nombres de Mach
amont et aval d'une onde de choc droite.

II.1.3. Les évolutions à travers un choc droit:

Nous avons tracé sur la figure ci-dessous l'évolution des rapports de la masse volumique, pression, température et la vitesse à travers un choc droit, amont et aval:



Figure(A.7): les évolutions à travers un choc droit

Comme nous l'avons vu précédemment, un choc droit permet de décélérer l'écoulement : $v_2 < v_1$, à travers une compression forte adiabatique $p_2 > p_1$ et $\rho_1 > \rho_2$. L'énergie cinétique de l'écoulement est transformée en énergie interne par augmentation de l'agitation moléculaire: la température augmente à travers un choc $T_2 > T_1$