



N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

**Les intégrales multiples et ses applications
en physique.**

Présenté par:

ABBAD Sara

CHERGUI Aicha

REDOUANE Khaoula

Sous la supervision de :

HAMROUNI Ahmed

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

*Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "**Hamrouni Ahmed**", à l'université d' **El-Oued**, a qui nous voudrions exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.*

*ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'**El-oued** .*

Nous remercions vivement nos familles surtout mes parent pour l'aide et le soutien moral.

*Nous tenons a remercié tous les étudiants de La promotion 2014/2015 de Math de l'université d'**El-oued***

Notations générales

$\nabla f(x)$: le gradient de f .

$\partial f(x)$: la dérivée partielle de f .

$J_f(x)$: la matrice jacobienne de f en x .

$\|\cdot\|$: la norme.

$|\cdot|$: la valeur absolue.

$\inf_{x \in \mathbb{k}} f(x)$: la borne inférieure de fonction f sur l'ensemble $\mathbb{k}$.

$\sup_{x \in \mathbb{k}} f(x)$: la borne supérieure de fonction f sur l'ensemble $\mathbb{k}$.

$\min$: le minimum.

$\max$: le maximum.

Table des matières

Notations générales	ii
Introduction générale	1
1 Rappels et notations des intégrales simples	2
1.0.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann	5
1.0.2 Fonctions intégrables	7
1.0.3 Propriétés des intégrales	7
1.1 Fonction de plusieurs variables	8
1.1.1 Dérivées partielles	8
2 Intégrale double	11
2.1 Définition d'intégrale double	11
2.2 Interprétation géométrique	12
2.3 Propriétés algébriques de l'intégrale double	13
2.4 Méthodes de calcul d'une intégrale double	14
2.4.1 Théorème de Fubini	14
2.4.2 Changement de variables	16
2.4.3 Cas des coordonnées polaires	18
3 Intégrale triple	19
3.1 Définitions et propriétés	19
3.1.1 Propriétés de l'intégrale triple	20
3.2 Méthodes de calcul d'une intégrale triple	21

3.2.1	Formule de Fubini	21
3.2.2	Changement de variables	23
3.2.3	Coordonnées cylindriques	23
3.2.4	Coordonnées sphériques	24
3.2.5	Coordonnées cartésiennes	25
4	Applications	27
4.1	Moments d'inertie	27
4.2	Aire	28
4.3	Volume	30
4.4	Masse	31
4.5	Centre de gravité	32
4.6	Exemples de calculs de volumes	34
4.7	Détermination du centre de gravité d'un solide	36
4.8	Moments d'inertie	37
4.9	Volume	38
4.10	Masse, centre et moments d'inertie	38
4.11	Notions d'électrostatique	39
	Conclusion Générale	41
	Bibliographie	42

Introduction générale

Le mathématicien suisse L. Euler fut le premier à avoir étudié les intégrales doubles, tant du point de vue de leur signification que de leurs calculs. Son étude l'amena à se poser la question suivante: que se produit-il si à une intégrale double, on fait un changement de variables? Euler donna une interprétation formelle de ce résultat.

En 1773, J. L. Lagrange eut aussi besoin de la formule d'un changement de variables, mais cette fois pour des intégrales triples. Suivant les idées de Euler, Lagrange obtint le résultat en utilisant formellement les différentielles, sans l'aide des approximations infinitésimales. Les intégrales multiples constituent la généralisation des intégrales dites simples : c'est-à-dire les intégrales des fonctions plusieurs de variables (deux ou trois).

Nous allons nous intéresser dans cette mémoire au calcul pratique d'intégrales doubles et triples sont très utiles dans de nombreux domaines de la Physique tels que la Mécanique du solide.

Dans le premier chapitre on a fait un rappel sur l'intégrale simple au sens de reimann et les fonctions des plusieurs variables.

Le deuxième chapitre, on a étudié l'intégrale double et le théorème de fubini et les méthodes de calcul (changement de variable, coordonnées polaires).

Le troisième chapitre, on a étudié l'intégrale double et le théorème de fubini et les méthodes de calcul (changement de variable, coordonnées polaires coordonnées cylindrique sphérique).

Le quatrième chapitre, nous avons donné des applications en physique (aire, volume, centre de gravité ...etc).

Chapitre 1

Rappels et notations des intégrales simples

Définition 1.0.1 (*intégrale définie*)

1. Soit f définie continue sur $I = [a, b]$ telle que $f(x) > 0$:

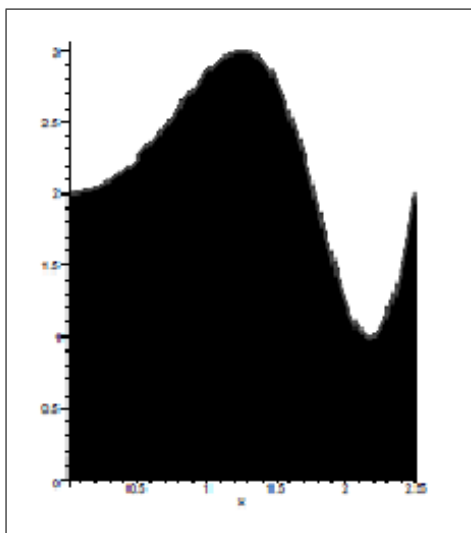


Figure 1.0.1 :

On peut alors délimiter une surface par: le graphe de f , l'axe Ox , les droites $x = a$, $x = b$, puis lui associer un nombre réel noté S appelé (l'unité de mesure étant un cube de coté 1).

- 2.** Une valeur approchée I_n de S put être obtenue en partageant I en n parties égales

$$x_0=a, x_k=a + k\frac{a-b}{n}....., x_n = b, \Delta x_i=x_{i+1}-x_i$$

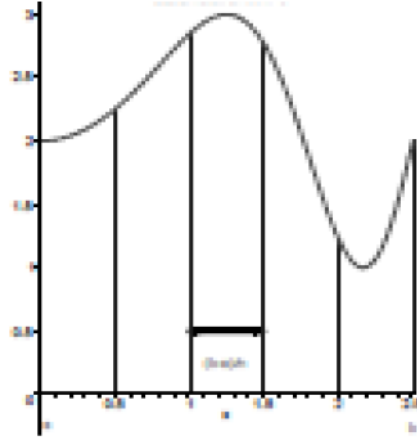


Figure 1.0.2 :

- 3.** Et en calculant la somme de aire des rectangles de base $\frac{b-a}{n}$ et de hauteurs

$$f(x_1),...f(x_n),$$

$$I_n = \frac{b-a}{n} f(x_1) + + f(x_k) + + f(x_n) .$$

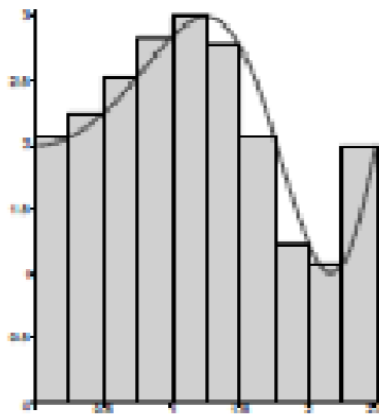


Figure 1.0.3 :

Définition 1.0.2 (*propriété admise*) Si f est continue sur $[a, b]$ alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = I(f). \quad (1.0.1)$$

$I(f)$ sera appelée intégrale définie de la fonction f continue entre les bornes a et b .

Définition 1.0.3 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$

le réel $\int_a^b f(x) dx$ est appelé intégrale de a et b de f .

Signe intégrale

Soit f une fonction définie et continue sur intervalle I contenant les réels a et b tel que $a \leq b$:

* Si f est positive sur $[a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

* Si f est négative sur $[a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Intégral et Aire

Soit f une fonction définie et continue sur intervalle $[a, b]$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

Soit (D) , L'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

* Si f est toujours positive sur $[a, b] : \int_a^b f(x) dx = \text{aire}(D)$ (Unités d'aire).

* Si f est toujours négative sur $[a, b] : \int_a^b f(x) dx = -\text{aire}(D)$.

* Si f a un signe variable sur $[a, b] : \int_a^b f(x) dx = \text{aire}(D_1) - \text{aire}(D_2) + \text{aire}(D_3)$.

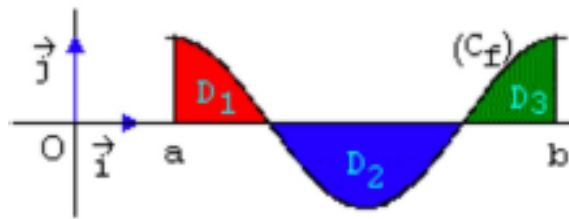


Figure 1.0.4 :

1.0.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Un grand nombre fonctions sont intégrables par le procédé de Riemann... On peut citer en particulier:

- * Toutes les fonctions définies et monotones dans $[a, b]$.
- * Toutes les fonctions continues par morceaux dans $[a, b]$ (C'est à dire les fonctions pour lesquelles on peu trouver un nombre fini de sousintervalle la fonction soit continue).

On voit donc apparaitre des fonctions qui ne sont pas intégrables par la méthode usuelle des primitives mais qui le sont par le procédé de Reimann: une fonction intégrable dans $[a, b]$ au sens de Reimann ne possède pas nécessairement une primitive dans $[a, b]$.

On encadre l'aire cherchée, disons A , en utilisant d'une part les bornes gauches des sous intervalles et d'autre part les bornes droites:

$$I_{\inf}(n) \leq A \leq I_{\sup}(n).$$

$$I_{\inf}(n) = \sum_{K=1}^N \text{Aire des rectangles avec les bornes gauches.}$$

$$I_{\sup}(n) = \sum_{i=1}^N \text{Aire des rectangles avec les bornes droites.}$$

On voit ainsi apparaitre dans chaque «colonne» l'erreur maximum commise: c'est l'écart entre l'aire de rectangle «trop grand» et celle du rectangle «trop petit».

On peut regrouper toutes ses erreurs en les faisant glisser dans la première collone la somme des erreurs est alors représentée par un rectangle de largeur $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(b) - f(a)$:

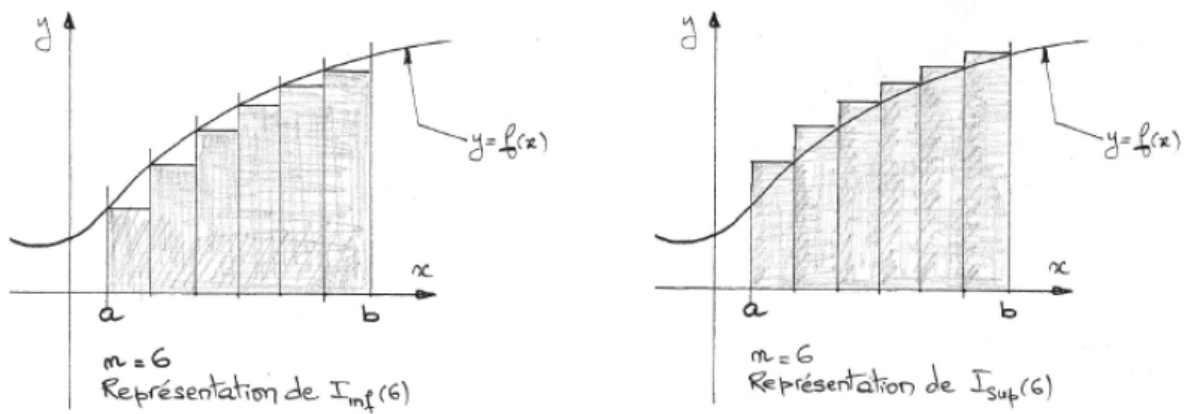


Figure 1.0.5 :

Si on note σ la somme des erreurs, on a :

$$\sigma = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)). \quad (1.0.2)$$

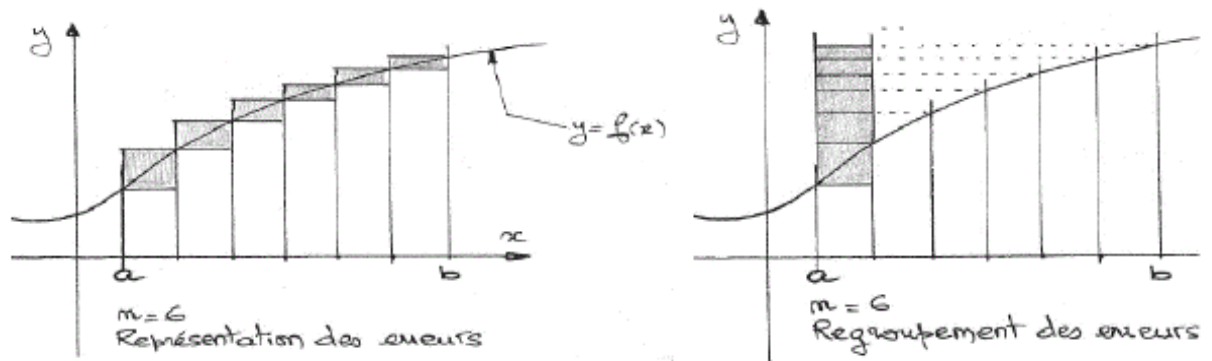


Figure 1.0.6 :

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on a $\sigma \rightarrow 0$ et le théorème des gendarmes permet d'être certain que $\int_a^b f(x)dx$ existe puisque:

$$I_{\inf}(n) \leq \int_a^b f(x)dx \leq I_{\sup}(n).$$

[1]

1.0.2 Fonctions intégrables

On voit aisément que les fonctions en escalier sont intégrables: on peut en effet choisir la subdivision de telle que les sommes de Darboux soient constantes égales à la somme des aires des rectangles dessinés par la courbe.

La proposition suivante que nous admettrons donne une autre classe bien plus importante de fonctions intégrables.

1.0.3 Propriétés des intégrales

Relation de chasle Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I pour tout réel a, b et c de I :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (1.0.3)$$

Linéarité de l'intégrale Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I contenant a et b pour tout:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (1.0.4)$$

Proposition 1.0.1 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Intégration par parties Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et dérivables sur l'intervalle $[a, b]$. Alors:

* Les fonctions f' et g' sont intégrables sur $[a, b]$.

* On a:

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = [f(t) g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt. \quad (1.0.5)$$

Idée générale on ne sait pas trouver une primitive de $f(t) g'(t)$. L'intégration par parties permet de remplacer $f(t) g'(t)$ par $f'(t) g(t)$ en espérant qu'il soit plus facile de trouver une primitive de $f'(t) g(t)$.

chargement de variable Soit $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable par convention on pose:

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt. \quad (1.0.6)$$

Proposition 1.0.2

Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable et dérivable telle que: $\varphi([a, b]) \subseteq [c, d]$.

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \quad (1.0.7)$$

1.1 Fonction de plusieurs variables

Les notions de fonction de plusieurs variables et de domaines de définition sont introduites de la manière que dans le cas de deux variables.

Le domaine de définition d'une fonction f à trois variable x_1, x_2 et x_3 est représenté par un ensemble de point de l'espace et on note $z = f(x_1, x_2, x_3)$.

1.1.1 Dérivées partielles

Définition 1.1.1 (*Dérivées partielle*) Soit une fonction à n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, si toutes les variables sont fixées à la valeur x_{i0} sauf la variable x_1 , on obtient une fonction g de la seule variable x_1 dont on peut étudier la dérivabilité au point x_{10} ; si c'est le cas on note :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_{10}} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}) = g'(x_{10}) \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_{10}} \frac{f(x_1, x_{20}, \dots, x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{x_1 - x_{10}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_{10} + h, x_{20}, \dots, x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{h}. \end{aligned}$$

Le même raisonnement est appliqué pour les autres variables. Soit:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i=x_{i0}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{i0}) \text{ avec } i = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Définition 1.1.2 (Dérivée partielle seconde) Lorsque la fonction f admet une dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_{i0}}$ en tout point de x_{i0} de $D_f \subset \mathbb{R}^n$, on définit une nouvelle fonction à n variables dont on peut examiner les dérivées partielles notées:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Définition 1.1.3 On a alors une dérivée partielle d'ordre 2.

On peut ainsi calculer des dérivées successives effectuées.

Définition 1.1.4 (Classe d'une fonction) Une fonction f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^n$ est de classe C^2 est dite de classe C^p sur D_f si elle admet des dérivées partielles d'ordre p continues.

Théorème 1.1.1 (Théorème de Schwarz) Si une fonction f définit sur $D_f \subset \mathbb{R}^n$ est de classe C^2 , alors l'ordre des dérivations n'intervient pas. En d'autres termes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Définition 1.1.5 (Forme différentielle) Sous condition d'existence des dérivées partielles $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\}$ de la fonction f on appelle forme différentielle de la fonction la quantité :

$$\delta f = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

La quantité δf représente les variations de f pour des petits déplacements $\{dx_i\}$ formule utilisée par exemple en physique pour le calcul d'erreur.

Définition 1.1.6 Soit f une fonction à trois variables x_1, x_2 et x_3 , pour lesquelles elles dépendent de la variable u , soit $x_i = x_i(u)$ avec $i = \{1, 2, 3\}$. On cherche alors à calculer la dérivée partielle de f selon la variable u . Sous la condition d'existence des dérivées partielles on peut alors montrer que:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x_3}. \quad (1.1.1)$$

Exemple de dérivation des fonction composées Soit f une fonction à deux variables x_1 et x_2 , pour lesquelles elles dépendent des variables u_1 et u_2 , soit $x_i = x_i(u_1, u_2)$

avec $i = \{1, 2\}$. On cherche alors à calculer la dérivée partielle de f selon les variables u_1, u_2 . Sous la condition d'existence des dérivées partielles on peut alors montrer que:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

[3]

Chapitre 2

Intégrale double

Dans ce chapitre, on a défini l'intégrale double et interprétation géométrique et ces propriétés et le théorème de Fubini, et on a aussi parlé du changement de variable et le cas des coordonnées polaires.

2.1 Définition d'intégrale double

Définition 2.1.1 *L'espace est rapporté au repère plan cartésien (Ox, Oy) dans lequel on considère un domaine D limité par une courbe fermée Γ (figure(2,1,1)). Décomposons D en n domaines élémentaires ΔD_i d'aire ΔA_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et soit $M_i(x_i, y_i)$ un point quelconque de ΔD_i . Soit une fonction $f(x, y)$ donnée définie et continue sur D . Au point $M_i \in \Delta D_i$ elle prend la valeur $f(x_i, y_i)$. Considérons la somme : $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta A_i$.*

Définition 2.1.2 *(l'intégrale double) La limite lorsqu'elle existe, de S_n quand $n \rightarrow \infty$ et que tous les ΔD_i tendent vers zéro est appelée intégrale double ordinaire $f(x, y)$ de f sur le domaine D elle s'écrit :*

$$I = \int \int_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta A_i. \quad (2.1.1)$$

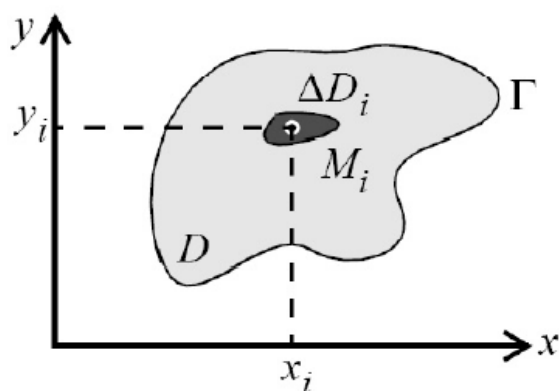


Figure 2.1.1 :

2.2 Interprétation géométrique

Soit Σ la surface représentative de la fonction $z = f(x, y)$ (figure(2,2,1)).

La somme : $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} z_i \Delta A_i$.

Réprésente une valeur approchée du volume V compris entre le plan (Ox, Oy) , la surface Σ et les droits parallèles à l'axe (Oz) s'appuyant sur le contour Γ de D . Lorsque $n \rightarrow \infty$, la limite correspond exactement au volume V ainsi :

$$I = \iint_D z(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} z(x_i, y_i) \Delta A_i = V. \quad (2.2.1)$$

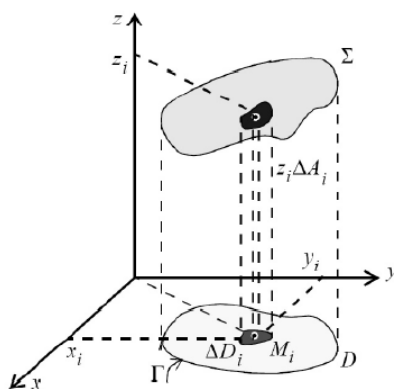


Figure 2.2.1 :

2.3 Propriétés algébriques de l'intégrale double

Dans ce paragraphe, nous donnerons quelques propriétés de nature algébrique de l'intégrale double. Ces propriétés se démontrent facilement à partir des sommes de Darboux et de Reimann.

L'intégrale double au sens de Reimann d'une fonction bornée sur un compact élémentaire vérifie les propriétés suivantes :

L'intégrale double est linéaire

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine élémentaire et f, g deux fonctions intégrales. Alors pour tous réels λ et μ on a :

$$\int \int_D (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) dx dy = \lambda \int \int_D f(x, y) dx dy + \mu \int \int_D g(x, y) dx dy. \quad (2.3.1)$$

L'intégrale double est additif

Soient D_1 et D_2 sont deux domaines élémentaires de $\mathbb{R}^2$ dont l'intersection $D_1 \cap D_2$ est vide ou égale à une courbe plane. Alors pour toute fonction intégrable $f : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\int \int_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \int \int_{D_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{D_2} f(x, y) dx dy. \quad (2.3.2)$$

L'intégrale double est croissante

* Si $f(x, y) \geq 0$ en tout point de D , avec f non identiquement nulle, alors $\int \int_D f(x, y) dx dy$ est strictement positive.

* Si $\forall (x, y) \in D, f(x, y) \leq g(x, y)$ alors :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy \leq \int \int_D g(x, y) dx dy. \quad (2.3.3)$$

* $|\int \int_D f(x, y) dx dy| \leq \int \int_D |f(x, y)| dx dy.$

Proposition 2.3.1 Soit D un domaine élémentaire et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée intégrable. Alors on a l'inégalité :

$$\left| \int \int_D f(x, y) dx dy \right| \leq \int \int_D |f(x, y)| dx dy \leq \sup \{ |f(x, y)| / (x, y) \in D \} \text{Aire}(D). \quad (2.3.4)$$

En particulier, si $\text{Aire}(D) = 0$ alors on a $\int_D f(x, y) dx dy = 0$.

2.4 Méthodes de calcul d'une intégrale double

2.4.1 Théorème de Fubini

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors,

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (2.4.1)$$

Preuve. Soit ε un nombre réel positif quelconque. Puisque la fonction

$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, elle est uniformément continue sur $[a, b] \times [c, d]$, ce qui implique l'existence d'une subdivision de $[a, b] : a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$ et d'une subdivision de $[c, d] : c = y_0 < y_1 < \dots < y_p = d$ telles que pour tout couple d'entiers $1 \leq i, j \leq p$:

$$M_{ij} - m_{ij} \leq \varepsilon \text{ où } M_{ij} = \max_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y) \text{ et } m_{ij} = \min_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y).$$

Considérons à présent la fonction $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$.

En constatant que pour tout $y \in [c, d] : g(y) = \sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx$

et que $\int_c^d g(y) dy = \sum_{j=1}^p \int_{y_{j-1}}^{y_j} g(y) dy$,

on peut écrire :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \sum_{j=1}^p \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \right) dy.$$

Où encore :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^p M_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) &\leq \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \\ &\leq \sum_{i,j=1}^p M_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

De façon analogue, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^p M_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) &\leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^p M_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left| \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^p (M_{ij} - m_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$$

$$\leq \varepsilon (b - a) (d - c).$$

Ce résultat étant valable quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut donc conclure que:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

D'où le théorème de Fubini. ■

Théorème 2.4.1 [4] Soit f une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$.

L'intégrale double $I = \int \int_D f(x, y) dx dy$ se calcule par l'une ou l'autre des façons suivantes :

Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f_1(x) \leq y \leq f_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

Alors,

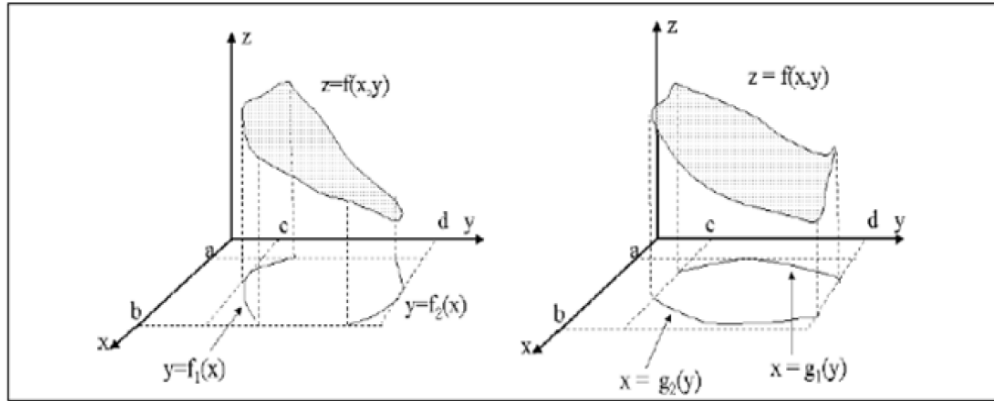


Figure 2.4.1 :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (2.4.2)$$

Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

Alors,

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (2.4.3)$$

Si les deux représentation sont possibles, les deux résultats sont évidemment égaux.

Exemple 2.4.1 Calculer l'intégrale $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ avec D est le triangle de somme $(0, 1)(0, -1)$ et $(1, 0)$

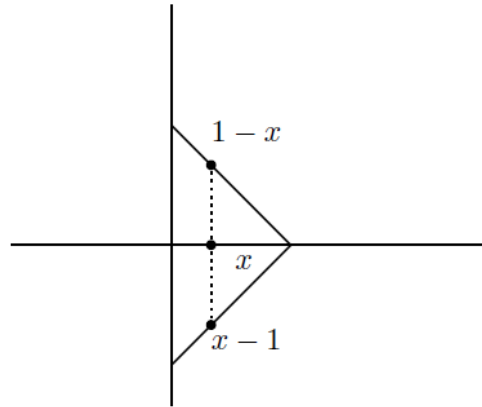


Figure 2.4.2 :

Pour cela on va D analytiquement par les inégalités :

$$D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ telque: } \{0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$$

$$\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right] dx = \frac{1}{3}.$$

2.4.2 Changement de variables

Soit $f(x, y)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe ζ^1

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_D f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv. \quad (2.4.4)$$

Où J : appelé jacobien, est le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \partial_u(\varphi) & \partial_v(\varphi) \\ \partial_u(\psi) & \partial_v(\psi) \end{bmatrix}$$

$$i.e : |J| = \partial_u(\varphi) \partial_v(\psi) - \partial_v(\varphi) \partial_u(\psi).$$

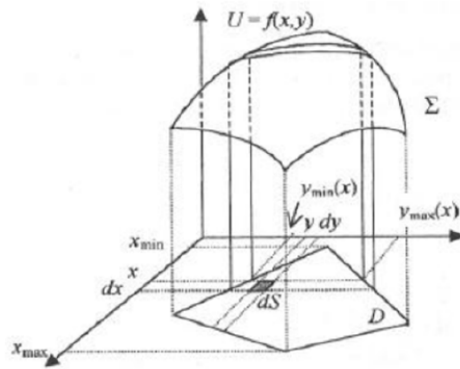


Figure 2.4.3 :

Exemple 2.4.2 Calcule $I = \int \int_D (x-1)^2 dx dy$ sur le domaine :

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x + y \leq 1, -2 \leq x - y \leq 2\}.$$

En effectuant le changement de variable $u = x + y$, $v = x - y$. Le domaine D en (u, v) est donc le rectangle $\{-1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2\}$. On a aussi $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$. Le jacobienne de ce changement de variables est :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ Dont le déterminant vaut } \frac{-1}{2}. \text{ Et donc :}$$

$$I = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 \left[\int_{-1}^1 (u + v - 2)^2 du \right] dv = \frac{136}{3}.$$

2.4.3 Cas des coordonnées polaires

[5] Le changement de variables en coordonnées polaires est donné par l'application :

$$(r, \theta) \longmapsto \begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{bmatrix}.$$

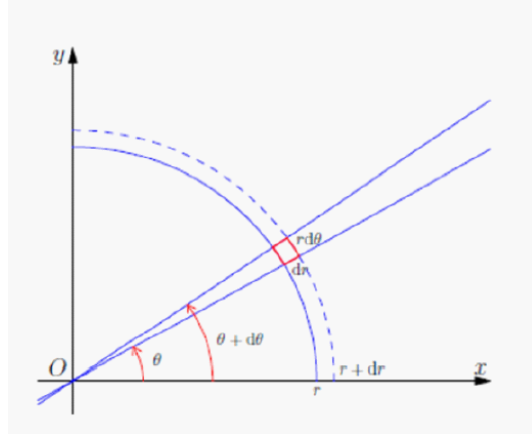


Figure 2.4.4 :

Où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0; 2\pi[$ sont les coordonnées du point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \{(a, b)\}$. Cette application a jacobien :

$$J = \det \begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r. \quad (2.4.5)$$

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_\Delta f(a + r \cos(\theta), b + r \sin(\theta)) r dr d\theta. \quad (2.4.6)$$

Chapitre 3

Intégrale triple

Dans ce chapitre, nous définirons l'intégrale triple d'une fonction $f(x, y, z)$ sur une région bornée de $\mathbb{R}^3$ et nous présenterons quelques-une de ces propriétés. Nous concluons ce chapitre en discutant des coordonnées cylindriques et sphériques et du théorème de changement de variables pour l'intégrale triple dans ces cas particuliers.

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.1 Soit $p = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ un pavé de l'espace, et $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ une fonction continue sur p pour intégrer f , on procède par approximations successives: on calcule des sommes de Riemann pour des subdivisions de plus fines du pavé p ,

$$\iiint_p f \approx \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq p- \\ 0 \leq k \leq q-1}} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k. \quad (3.1.1)$$

$$\iiint_p f = \lim_{\substack{\Delta x_{\max} \rightarrow 0 \\ \Delta y_{\max} \rightarrow 0 \\ \Delta z_{\max} \rightarrow 0}} \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq p- \\ 0 \leq k \leq q-1}} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k. \quad (3.1.2)$$

On veut intégrer une fonction f continue sur un domaine D qui n'est pas un pavé.

On choisit un pavé p qui contient D .

On pose: pour $(x, y, z) \in p$:

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si le domaine D est "sympathique", on définit l'intégrale de f sur D en posant :

$$\iiint_D f = \iiint_p \tilde{f}.$$

Définition 3.1.2 Une description hiérarchique du domaine Δ , partie fermée bornée de $\mathbb{R}^3$, est de la forme :

$$(x, y, z) \in \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \\ z \in [\alpha(x, y), \beta(x, y)] \end{cases}.$$

Où u, v, α et β sont des applications continues telles :

$$\forall x \in [a, b], u(x) \leq v(x) \text{ et } \forall x, y \in [a, b] \times [u(x), v(x)], \alpha(x, y) \leq \beta(x, y).$$

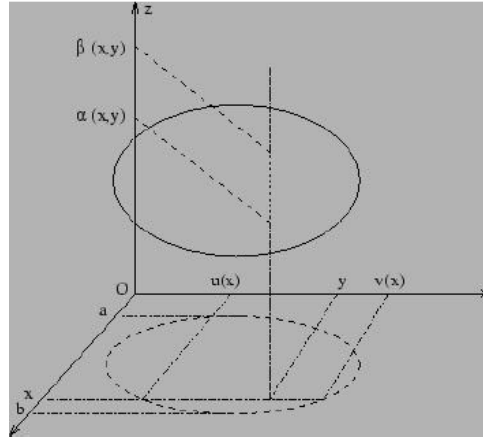


Figure 3.1.1 :

3.1.1 Propriétés de l'intégrale triple

1. Linéarité

$$\iiint_D [\lambda f + \mu g] = \lambda \iiint_D f + \mu \iiint_D g \quad (3.1.3)$$

2. Croissance, dont on déduit l'inégalité de la moyenne

$$m \leq f \leq M \implies mv(D) \leq \iiint_D f \leq Mv(D). \quad (3.1.4)$$

3. Additivité sur les domaines

Si les intérieurs de D_1 et D_2 sont disjoints, alors,

$$\iiint_{D_1 \cup D_2} f = \iiint_{D_1} f + \iiint_{D_2} f. \quad (3.1.5)$$

4. Positivité Si V est un compact élémentaire et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue positive alors on a:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \geq 0. \quad (3.1.6)$$

Plus généralement, si deux fonctions continues f et $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient l'inégalité $f \geq g$ alors on a:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \geq \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz. \quad (3.1.7)$$

[2]

3.2 Méthodes de calcul d'une intégrale triple

3.2.1 Formule de Fubini

Théorème 3.2.1 (Formule de Fubini) Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine élémentaire et $\varphi_1, \varphi_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions

continues, et soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un compact élémentaire défini analytiquement par:

$$V = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}.$$

L'intégrale triple d'une fonction continue $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est égale à :

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (3.2.1)$$

Notons que si le domaine d'intégration est défini par l'expression analytique,

$$V' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z) \in D', \phi_1(y, z) \leq x \leq \phi_2(y, z)\}.$$

Alors l'intégrale triple d'une fonction continue $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par la formule de Fubini :

$$\iiint_{V'} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D'} \left(\int_{\phi_1(y, z)}^{\phi_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy dz. \quad (3.2.2)$$

De même, quand le domaine d'intégration est défini par l'expression analytique :

$$V'' = \{(x, y, z) / (x, z) \in D'', \psi_1(x, z) \leq y \leq \psi_2(x, z)\},$$

la formule de Fubini s'écrit sous la forme :

$$\iiint_{V''} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D''} \left(\int_{\psi_1(x, z)}^{\psi_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz. \quad (3.2.3)$$

Exemple 3.2.1 Calculons le volume du domaine élémentaire $V \subset \mathbb{R}^3$ qui est limité par les deux paraboloides de révolution définies par les équations : $z = x^2 + y^2$ et $z = 4 - 3(x^2 + y^2)$.

Notons que le domaine V est limité par le graphe des deux fonctions $\varphi_1(x, y) = x^2 + y^2$ et $\varphi_2(x, y) = 4 - 3(x^2 + y^2)$ définies au-dessus du domaine élémentaire $D \subset \mathbb{R}^2$ qui est égale à la projection du domaine V sur le plan Oxy . En effet, le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est limité par la cintersection des graphes des fonctions φ_1 et φ_2 .

D'où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ et

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - 3(x^2 + y^2)\}.$$

Maintenant, si on applique la formule de Fubini à la description analytique du domaine D on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Volume}(V) &= \iiint_V dx dy dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{4-3(x^2+y^2)} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D (4 - 4(x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (4 - 4r^2) r dr \right) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

3.2.2 Changement de variables

Un changement de variable permet parfois de simplifier les calculs :

Soit une transformation T donnée par :

$$T : \begin{cases} x = x(u, v, w) . \\ y = y(u, v, w) . \\ z = z(u, v, w) . \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Définition 3.2.1 *Jacobien de cette transformation est défini par :*

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (3.2.5)$$

Proposition 3.2.1 *Soit f une fonction continue définie sur Δ et un système de coordonnées*

$T : \mathbb{R} \rightarrow \Delta$ donné par :

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw. \quad (3.2.6)$$

3.2.3 Coordonnées cylindriques

On rappelle qu'en dimension 3, les coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta . \\ y = r \sin \theta . \\ z = z . \end{cases}$$

Ici dV est obtenu en faisant varier r de dr , θ de $d\theta$ et z de dz ; dV est un pseudo-parallélépipède,

tel que: $dV = r dr d\theta dz$.

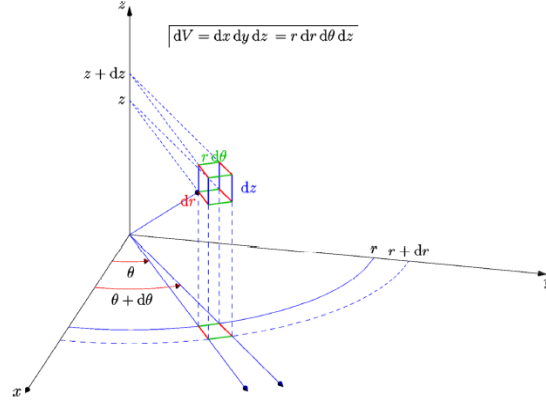


Figure 3.2.1 :

On a donc :

$$I = \iiint_{\Sigma} g(r, \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Dans la pratique, on calcule souvent ainsi :

$$I = \int_{\theta=\theta_{\min}}^{\theta=\theta_{\max}} \left(\int_{r=r_{\min}(\theta)}^{r=r_{\max}(\theta)} \left(\int_{z=z_{\min}(r,\theta)}^{z=z_{\max}(r,\theta)} r g(r, \theta, z) dz \right) dr \right) d\theta.$$

On notera l'ordre d'intégration. En effet, dans la pratique, il est souvent plus simple de voir ce qui se passe à θ fixé. Ceci revient à couper le domaine d'intégration par un plan pivotant autour de Oz . On coupe ensuite la section Σ_{θ} obtenue à r constant.

3.2.4 Coordonnées sphériques

On rappelle qu'en dimension 3, les coordonnées sphériques sont données par :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi. \\ y = r \sin \theta \sin \varphi. \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

L'élément de volume est alors,

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

et on a donc :

$$I = \iiint_{\Sigma} h(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

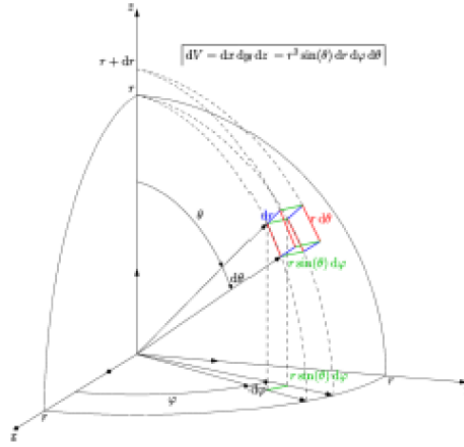


Figure 3.2.2 :

et son calcul pratique se fait souvent de la manière suivante :

$$I = \int_{\varphi=\varphi_{\min}}^{\varphi=\varphi_{\max}} \left(\int_{\theta=\theta_{\min}(\varphi)}^{\theta=\theta_{\max}(\varphi)} \left(\int_{r=r_{\min}(\theta,\varphi)}^{r=r_{\max}(\theta,\varphi)} r^2 h(r, \theta, \varphi) dr \right) \sin \theta d\theta \right) d\varphi.$$

3.2.5 Coordonnées cartésiennes

On procède par analogie avec les intégrales doubles. En coordonnées cartésiennes, l'élément de volume dV s'obtient en faisant varier x de dx , y de dy et z de dz et donc $dV = dx dy dz$.

Ainsi on a :

$$\iiint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy dz$$

Représentons un certain domaine Σ pour établir le traitement de la recherche des bornes d'intégration.

Pour un certain x fixé, variant entre $x_{\min}$ et $x_{\max}$, on découpe dans Σ une surface Σ_x .

On peut alors représenter Σ_x dans le plan yOz . Puis le traitement sur Σ_x se fait comme avec les intégrales doubles.

On a alors,

$$I = \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} \left(\int_{y=y_{\min}(x)}^{y=y_{\max}(x)} \left(\int_{z=z_{\min}(x,y)}^{z=z_{\max}(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Bien-sûr, on peut intervertir les rôles de x , y et z . Ainsi, on a différentes possibilités pour le calcul I

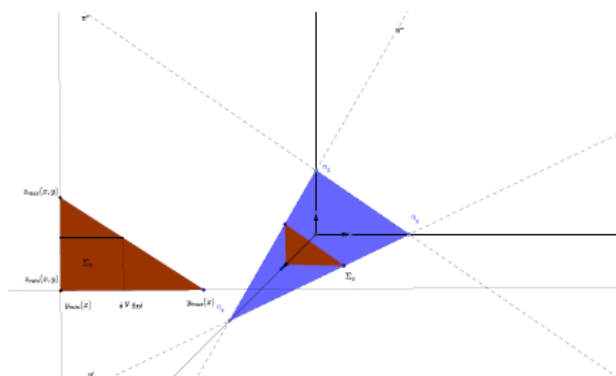


Figure 3.2.3 :

Chapitre 4

Applications

Ce chapitre sera très bref. Il existe un grand nombre d'applications de l'intégrale multiple. Il suffit de penser aux notions d'espérance et de variance en probabilités où encore des équations intégrales. Beaucoup de ces applications seront discutées dans d'autres livres. Ici nous n'énumérerons que quelques-unes, sur tout reliées à la physique. Plusieurs quantités physiques peuvent être exprimées comme des intégrales multiples.

4.1 Moments d'inertie

Définition 4.1.1 *Le moment d'inertie de la plaque D par rapport à la droite Δ est défini par :*

$$\varphi_{\Delta} = \iint_D [d(M, \Delta)]^2 \mu(x; y) dx dy.$$

Où $d(M, \Delta)$ représente la distance du point $M(x, y)$ à la droite Δ .

Exemple 4.1.1 *Ainsi $\varphi_{(oy)} = \iint_D x^2 \mu(x; y) dx dy$.*

De façon analogue, on a :

Définition 4.1.2 *Le moment d'inertie de la plaque D par rapport au point A est défini par:*

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \iint_D [d_2(M, \Delta)]^2 \mu(x; y) \, dx dy. \\ &= \iint_D (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \mu(x; y) \, dx dy.\end{aligned}$$

[4]

Exemple 4.1.2 Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe (ox) d'une plaque de masse surfacique constante μ de forme elliptique, avec comme équation pour son bord

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (a > 0, b > 0).$$

Pour trouver la fonction qui intègre sur l'ensemble $\left\{ (x, y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

(Revoyez la définition de moment d'inertie). On peut utiliser un changement de variable adapté à la géométrie de l'ensemble d'intégration:
$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$$
 avec $0 < \rho \leq 1$ et $0 < \theta \leq 2\pi$.

4.2 Aire

L'intégrale double $\iint_A dx dy$ est l'aire de A .

Exemple 4.2.1 Calculons l'aire d'un disque D_R de rayon $R > 0$: on se place dans un système de coordonnées centré sur le centre du disque, qui a donc pour équation

$$x^2 + y^2 \leq R^2. \text{ Donc :}$$

$$\int \int_{D_R} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\theta = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2.$$

Remarquons que dans ce cas on aurait pu utiliser directement ce qu'on a appris au premier chapitre: si nous ne conservons que les valeurs positives de y , on obtiendra un demi-disque, ensemble des points :

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / -R < x < R \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}.$$

C'est la surface sous la courbe de la fonction $x \rightarrow f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ dans l'intervalle $[-R, R]$. Comme c'est une fonction positive, l'aire correspondante égale l'intégrale

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Pour calculer celle-ci, effectuons le changement de variable $x = R \cos t$. On souhaite que x varie dans l'intervalle $[-R, R]$ on prend donc t variant dans l'intervalle $[0, \pi]$ par exemple. Là, la fonction $\varphi(t) = R \cos t$ est continûment dérivable sur $[0, \pi]$. De plus $\sqrt{R^2 - x^2} = R \sin t$ car le sinus est positif ou nul sur $[0, \pi]$. On a donc, en effectuant ce changement de variable:

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

On pose

$$(x = R \cos t \Rightarrow dx = (-R \sin t) dt).$$

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \int_0^\pi \sqrt{R^2 - (R \cos t)^2} (-R \sin t) dt \\ &= -R^2 \int_0^\pi \sin^2 t dt \\ &= -R^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = -R^2 \left[\frac{t}{2} - \sin(2t) \right]_0^\pi \\ &= -R^2 \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

C'est l'aire d'un demi-disque, donc l'aire du disque entier est πR^2 .

Exemple 4.2.2 Calculons l'aire d'une ellipse ε d'axes α et β , on se place dans un système de coordonnées centré sur le centre de l'ellipse, qui a donc pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1$. Donc :

$$\iint_{\varepsilon} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \alpha \beta r dr d\theta = \alpha \beta \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \alpha \beta \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \alpha \beta \pi.$$

Remarquons que dans ce cas on aurait pu utiliser directement ce qu'on a appris au premier chapitre: si nous ne conservons que les valeurs positives de y , on obtiendra une demi-ellipse, ensemble des points :

$$\left\{ (x; y) \in R / -\alpha \leq x \leq \alpha \text{ et } 0 \leq y \leq \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} \right\}.$$

C'est la surface sous la courbe de la fonction $x \rightarrow f(x) = \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}$ dans l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$. Comme c'est une fonction positive, l'aire correspondante égale l'intégral

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} dx.$$

Pour calculer celle-ci, effectuons le changement de variable $x = \alpha \cos t$. On souhaite que x varie dans l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$, on prend donc t variant dans l'intervalle car le sinus est positif ou nul sur par exemple: la fonction $\varphi(x) = \cos t$ est continûment dérivable sur $[0, \pi]$. De plus $\beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} = \sin t$ car le sinus est positif ou nul sur $[0, \pi]$ On a donc, en effectuant ce changement de variable :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \beta \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} dx.$$

On pose : $x = \alpha \cos t \Rightarrow dx = -\alpha \sin t dt$.

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \beta \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} dx &= \int_0^{\pi} \beta \sqrt{1 - (\cos t)^2} (-\alpha \sin t dt) \\ &= -\alpha \beta \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \\ &= -\alpha \beta \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= -\alpha \beta \left[\frac{t}{2} - \sin(2t) \right]_0^{\pi} = -\alpha \beta \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

C'est l'aire d'une demi-ellipse, donc l'aire de l'ellipse entière est $\alpha \beta \pi$.

4.3 Volume

L'intégrale triple $\iiint_V dx dy dz$ est le volume de V .

Exemple 4.3.1 Calculons le volume d'une boule B_R de rayon $R \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\iiint_{B_R} 1 dx dy dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi \\
&= \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 dr \right) \\
&= [\sin(\varphi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = 4\pi \frac{R^3}{3}.
\end{aligned}$$

Remarquons que dans ce cas on aurait pu utiliser directement ce qu'on a appris pour les intégrales doubles: le volume d'une boule de rayon R (sans restreindre la généralité nous la supposons centrée à l'origine) est le double du volume contenu entre le plan $z = 0$ et l'hémisphère nord de la sphère de rayon R centrée en $(0, 0, 0)$. En résolvant l'équation de cette sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ pour z , nous pouvons décrire son hémisphère nord comme le graphe de la fonction $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ dont le domaine est le disque D_R de rayon R , intersection de la boule avec le plan $z = 0$. Ce disque est un domaine limité par les graphes des fonctions $\varphi(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ et $\psi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ sur l'intervalle $[-R, R]$. Le volume de la boule est donc :

$$\begin{aligned}
2 \int_{D_R} f(x, y) dy dx &= \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy dx \\
&= \int_{-R}^R \frac{1}{2} \left[y + (R^2 - x^2) \arctan \frac{y}{R^2 - x^2} \right]_{y=-\sqrt{R^2 - x^2}}^{y=\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\
&= \int_{-R}^R \frac{\pi}{2} (R^2 - x^2) dx = \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-R}^{x=R} = \frac{4}{3} \pi R^3.
\end{aligned}$$

4.4 Masse

Si $f(x, y)$ est la densité au point (x, y) , l'intégrale double $\iint_A f(x, y) dx dy$ est la masse de la partie A . De manière analogue, si $f(x, y, z)$ est la densité au point (x, y, z) , l'intégrale triple $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ est la masse de la partie A .

Définition 4.4.1 : Les physiciens considèrent encore d'autres densités qui peuvent être traitées de la même manière. Par exemple, si une charge électrique est répartie sur une

région A et si la densité de charge (en unités par unités carrées) est donnée par $\sigma(x, y)$ en un point (x, y) de A , alors la charge totale Q est donnée par :

$$\iint_A \sigma(x, y) dx dy.$$

Par exemple, supposons qu'une charge est distribuée sur le domaine A de la figure(4,3,1) ci-contre de telle sorte que la densité de charge en (x, y) est $\sigma(x, y) = xy$, mesurée en coulombs par mètre carré (Cm^{-2}).

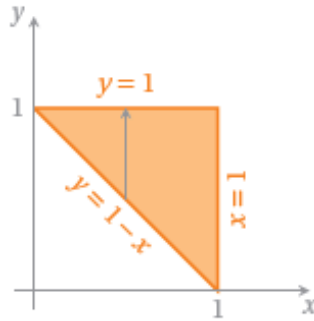


Figure 4.4.1 :

Alors la charge totale est:

$$\begin{aligned} Q &= \iint_A \sigma(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{x-1}^1 xy dx dy = \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{x-1}^1 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x (1 - (x-1)^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

4.5 Centre de gravité

Si $f(x, y)$ est la densité au point (x, y) , le centre de gravité de la partie A se trouve en (X_G, Y_G) ainsi définis

$$X_G = \frac{\iint_A x f(x, y) dx dy}{\iint_A f(x, y) dx dy}, \quad Y_G = \frac{\iint_A y f(x, y) dx dy}{\iint_A f(x, y) dx dy}.$$

Physiquement cela signifie que la plaque A se comporte comme si toute sa masse était concentrée en son centre d'inertie. Par exemple, elle est en équilibre horizontal lorsqu'elle repose sur son centre d'inertie.

De manière analogue, si $f(x, y, z)$ est la densité au point (x, y, z) , le centre de gravité de la partie A se trouve en (x_G, y_G, z_G)

ainsi définis

$$\begin{aligned} X_G &= \frac{\iiint_A x f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz} \\ Y_G &= \frac{\iiint_A y f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz} \\ Z_G &= \frac{\iiint_A z f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz} \end{aligned}$$

Exemple 4.5.1 On veut déterminer la masse et le centre d'inertie d'une fine plaque de métal triangulaire dont les sommets sont en $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$, sachant que la fonction densité est $f(x, y) = 1 + 3x + y$. Le triangle est représenté dans la figure ci-contre (l'équation de la frontière supérieure est $y = 2 - 2x$).

La masse de la plaque de métal est:

$$\begin{aligned} m &= \iint f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-2x} dx = \int_0^1 \left[(2-2x) + 3x(2-2x) + \frac{(2-2x)^2}{2} \right] dx \\ &= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Le moment de la plaque de métal entière par rapport à l'axe Ox est :

$$\begin{aligned} \iint_A x f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} x (1 + 3x + y) dx dy = \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + \frac{xy^2}{2} \right]_0^{2-2x} dx \\ &= 4 \int_0^1 [x - x^3] dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

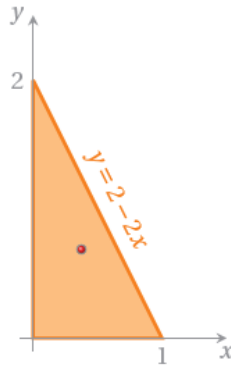


Figure 4.5.1 :

Et le moment de la plaque de métal entière par rapport à l'axe Oy est :

$$\begin{aligned} \iint_A y f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} y (1 + 3x + y) dx dy = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^{2-2x} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3) dx = \frac{2}{3} \left[7x - \frac{9}{2}x^2 - x^3 + \frac{5}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre d'inertie sont donc $\left(\frac{1}{8}, \frac{11}{16}\right) = \left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$.

4.6 Exemples de calculs de volumes

Considérons un cylindre de hauteur H et de rayon R ainsi qu'une sphère de rayon r . On sait que le volume de cylindre est $V = \pi R^2 H$ alors que celui de la sphère est $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. On peut maintenant démontrer ces résultats. Calculer l'intégrale triple de dV pour chacun de ces solides en coordonnées cartésiennes dans le but de déterminer ces volumes est une tâche fastidieuse! Par contre, exploiter le bon système de coordonnées pour évaluer les intégrales rend les calculs très simples.

volume d'un cylindre En calculant le volume en coordonnées cylindriques, on obtient:

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_v dv = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\Phi dz \\
 &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\Phi dz \\
 &= \int_0^H \frac{1}{2} R^2 (2\pi) dz = \pi R^2 H.
 \end{aligned}$$

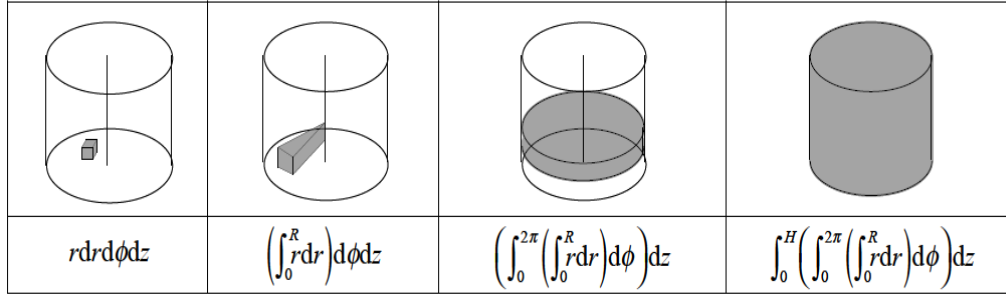


Figure 4.6.1 :

Volume d'une sphère En calculant le volume en coordonnées sphériques, on trouve :

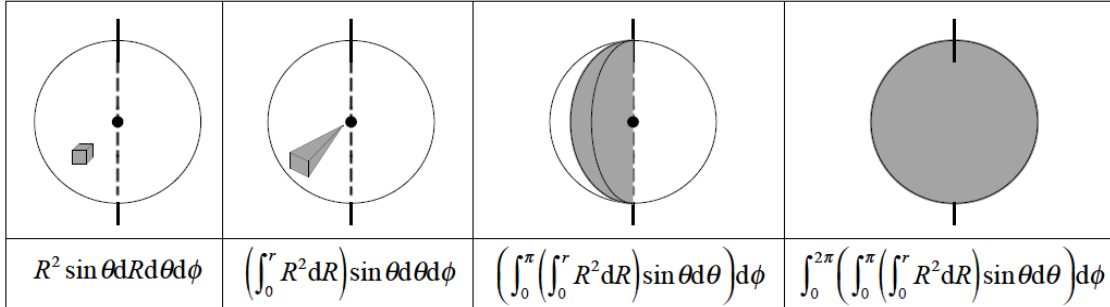


Figure 4.6.2 :

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_v dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r R^2 \sin \theta dR d\theta d\Phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{3} r^3 \sin \theta d\theta d\Phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 (2) d\Phi = \frac{4}{3} \pi r^3.
 \end{aligned}$$

4.7 Détermination du centre de gravité d'un solide

On considère un objet qu'on assimile à un ensemble cubable D de $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.7.1 On appelle *masse volumique* (ou *densité*) au point $M \in D$ le réel $\mu(M) = \mu(x; y; z)$ qui représente la masse par unité de volume de cet objet et qui peut dépendre de la position de M (et aussi du matériau avec lequel est fait l'objet).

Définition 4.7.2 On appelle *masse totale* du solide D de $\mathbb{R}^3$ de masse volumique μ le nombre réel positif m défini par l'intégrale triple :

$$m = \iiint_D \mu(M) dx dy dz$$

où M décrit D .

Définition 4.7.3 On appelle *centre d'inertie* (ou *centre de gravité*) du solide D de $\mathbb{R}^3$ de masse volumique μ le point G dont les coordonnées sont données par les intégrales triples :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m} \iiint_D \mu(M) x dx dy dz \\ y_G &= \frac{1}{m} \iiint_D \mu(M) y dx dy dz \\ z_G &= \frac{1}{m} \iiint_D \mu(M) z dx dy dz \end{aligned}$$

ce qui vectoriellement s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k} \\ &= \left(\frac{1}{m} \iiint_D \mu(M) x dx dy dz \right) \vec{i} + \left(\frac{1}{m} \iiint_D \mu(M) y dx dy dz \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{1}{m} \iiint_D \mu(M) z dx dy dz \right) \vec{k} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{m} \iiint_D \mu(M) \overrightarrow{OM} dx dy dz. \end{aligned}$$

[4]

Exemple 4.7.1 Soit B une demi-boule homogène (de masse volumique constante égale μ) définie par : $B = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$.

Calcul les coordonnées de son centre de gravité G .

Pour des raisons de symétrie, on doit trouver $x_G = y_G = 0$ et utiliser, bien sûr, les coordonnées sphériques pour calculer z_G .

La masse de la demi-boule est $m = \frac{2}{3}\pi R^3 \mu$ et

$$z_G = \frac{\mu}{m} \iiint_{[0,R] \times [0,2\pi] \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \rho \sin \phi \rho^2 \cos \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{3R}{8}.$$

4.8 Moments d'inertie

Avec les mêmes notations que précédemment:

Définition 4.8.1 Le moment d'inertie du solide D par rapport à la droite Δ est défini par :

$$\varphi_\Delta = \iiint_D [d(M, \Delta)]^2 \mu(x; y; z) dx dy dz$$

où $d(M, \Delta)$ représente la distance du point $M(x; y; z)$ à la droite Δ ,

i.e. $d(M, \Delta) = \|\overrightarrow{MH}\|$ où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite Δ .

Exemple 4.8.1 Calcul du moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène, par rapport

à son axe de révolution.

Soit le cylindre occupant l'ensemble $\{D = (x; y; z) / x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$

avec $a > 0, h > 0$.

$$\begin{aligned} \varphi_{oz} &= \iiint_D [d(M, (Oz))]^2 \mu dx dy dz \\ &= \mu \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \mu \iiint_\Delta \rho^3 d\rho d\theta dz. \end{aligned}$$

En passant en coordonnées cylindriques avec :

$$\Delta = \{(\rho, \theta, z) / 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}.$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{oz} &= \mu \cdot 2\pi \cdot h \cdot \int_0^a \rho^3 d\rho \\
&= \frac{1}{2} \mu \pi h a^4 \\
&= \frac{1}{2} m a^2.
\end{aligned}$$

où $m = \mu \pi h a^2$ est la masse du cylindre.

4.9 Volume

Le volume d'un corps est donné par $V = \iiint_D dx dy dz$ tel que D est le domaine délimité par ce corps.

Exemple 4.9.1 Calculer le volume d'une sphère.

$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dx dy dz$, d'après la propriété de la symétrie:

$V = 8 \iiint_D dx dy dz$ avec $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2; x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0\}$

d'où $V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi}{3} R^3$.

4.10 Masse, centre et moments d'inertie

Soit μ la densité d'un solide qui occupe la région V , alors sa masse est donnée par:

$$M = \iiint_D \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Le centre de masse G est de coordonnées :

$$\begin{cases}
x_G = \frac{1}{M} \iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz. \\
y_G = \frac{1}{M} \iiint_V y \mu(x, y, z) dx dy dz. \\
z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z \mu(x, y, z) dx dy dz.
\end{cases}$$

Les moments d'inertie par rapport aux trois axes sont :

$$\begin{cases}
I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz. \\
I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz. \\
I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dx dy dz.
\end{cases}$$

Exemple 4.10.1 Déterminer le centre de masse d'un solide de densité constante, borné par le cylindre parabolique $x = y^2$ et les plans $x = z, z = 0$ et $x = 1$.



Figure 4.10.1 :

La masse est $= \int_{-1}^1 \left(\int_{y^2}^1 \left(\int_0^x \mu dz \right) dx \right) dy = \frac{4\mu}{5}$, en raison de symétrie du domaine et μ par rapport au plan OXZ on a $y_G = 0$.

et

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_V x \mu dx dy dz = \frac{\mu}{M} \int_{-1}^1 \left(\int_{y^2}^1 \left(\int_0^x z dz \right) dx \right) dy = \frac{5}{7}$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z \mu dx dy dz = \frac{\mu}{M} \int_{-1}^1 \left(\int_{y^2}^1 \left(\int_0^x z dz \right) dx \right) dy = \frac{5}{14}.$$

4.11 Notions d'électrostatique

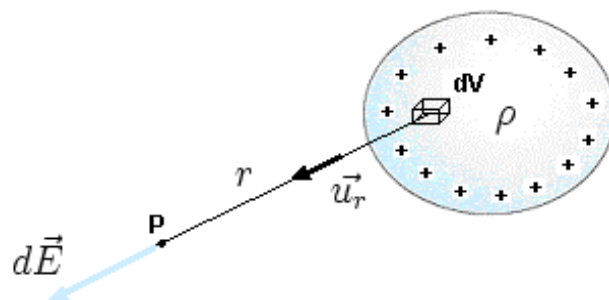


Figure 4.11.1 :

Soit une distribution de charges réparties dans un volume V telle qu'en un point courant M de V , la densité de charge volumique vale $\rho(M)$. Cela signifie que pour un volume élémentaire $d^3\tau$ autour d'un point M , la charge que porte le volume $d^3\tau$ vaut $d^3q = \rho d^3\tau$.

En un point P , le champ électrostatique généré par la charge d^3q présente en M vaut,

$$d\vec{E}(p) = \frac{d^3q \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 Mp^2} = \frac{\rho(M) d^3\tau}{4\pi\epsilon Mp^2} u_r$$

avec $\vec{u}_r$ vecteur unitaire de même sens et même direction que $\vec{Mp}$.

Pour obtenir le champ généré par l'intégralité des charges du volume V , on somme les contributions de tous les volumes élémentaires de V , ce qui se fait à l'aide d'intégrales suivant 3 dimensions x, y et z .

On note alors cette opération à l'aide d'une intégrale triple sur le volume V le champ

$$\vec{E}(P) = \iiint_v \frac{\rho(M) u_r}{4\pi\epsilon Mp^2} d^3\tau$$

électrostatique créé en P par la distribution vaut avec vecteur unitaire de même sens et même direction que $\vec{Mp}$.

Conclusion Générale

Dans ce travail nous avons étudié les méthodes de calcul et changement de variable dans quelques cas spécifiques des intégrales multiples.

Les applications d'intégrales multiples sont très nombreux domaine de la physique.

Finalement nous avons expliquer comment appliquer ces résultats pour les exemples d'applications en physique.

Bibliographie

- [1] K. ALLAB ,Eléments d'analyse 2 edition,1984.
- [2] E. Biland, Mathématiques pour l'ingénieur 2, MAT 1910,Université Laval,Hiver 2011.
- [3] Christophe BOURLIER, Mathématique de base pour les ingénieurs :Analyse et Algèbre, 25 juillet 2012.
- [4] Jacques Douchet Bruno Zwahlen, Calcul différentiel et intégral, 2006.
- [5] G.FACCANONI, Calculs différentiels M231, Recueil d'exercices corrigés, Jeudi 19 avril 2012, 2011/2012.
- [6] J. Melleray,Calcul Intégral et Différentiel, Université Lyon 1,Semestre de printemps, 2013-2014.

ملخص:

في هذه الذاكرة ندرس التكامل المتعدد وخاصةً المزدوج والمثلثي، وكيف نحسبها (تكاملات بسيطة بدرجة ١ و ٢) و استخدمنا فيها طرق الحساب (تغيير المتغير) (الإحداثيات القطبية الاسطوانية الكروية). وطبقنا هذه التكاملات على حساب المساحة والحجم. وفي الأخير أعطينا تطبيقاتاً في الفيزياء. **كلمات مفتاحية:** التكامل المزدوج، التكامل المثلثي، نظرية فيبيني.

Résumé:

Dans cette mémoire nous avons étudié les intégrales multiples et surtout l'intégrale double et triple et comment le calculer (intégrales simples superposées), et nous avons utilisé les méthodes de calcul (changement de variable, coordonnée polaire, cylindrique sphérique). Et on appliqué ces résultats pour calculer la surface et le volume. Et enfin on a donné des exemples pour les applications en physique
Les mot clés: intégrale double, intégrale triple, théorème de fubini .

Abstract:

In this memory we studied the integral multiple especially double and triple, and how to calculate (integrals simples superpose) and we used the calculation method (changing of variable, cordoning polar, cylindrical, spherical), and we apply these results to calculate the surface, volume. Finally we added the examples of applications in physique.
Keywords: integral double, integral triple, theorem of fubini .