



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Mesure de non compacité pour étudier les problèmes
d'équations différentielles d'ordre fractionnaire
avec conditions intégrales**

Présenté par: Gaboussa. M et Zouari Ferhat. M

Sous la supervision de: Hamrouni Ahmed

Soutenue devant le jury:

M: Ferhat Mohammed Said	MAB	Université d'El-Oued	Président
M: Hamrouni Ahmed	MAA	Université d'El-Oued	Rapporteur
M: Gabbessi Hussine	MAB	Université d'El-Oued	Examineur

Année universitaire 2023 – 2024

إهداء

وفي هذا العالـم لله على التمام والصلاة والسلام على خير الأنام؛ وبعد: فأني أهدي عملي المتواضع هذا لمن كان سنداً في كل الأوقات، الذي لطالما شجّعني على مواجهة الصعاب والنكبات والأزمات، الذي كان يفرح بي إذا حققت نجاحاً من النجاحات، لأبي عليه من الله سوابغ الرحمات ... وإلى التي سهرت وربّت وأنفقت عنيّ وما بخلت وساندتني ونصحت، لوالدي الكريمة التي أسأل الله أن يمد في عمرها ويرزقها الصحة والعافية.

وإلى إخوتي الأعزّاء وأخواتي الحبيبات، الذين حفّزوني للوصول لهذه المرحلة، وكانوا عوناً لي في كل ملّة ومعضلة، أسأل الله أن يحفظهم لي ويوفّقهم لكل خير ومسرّة.

وإلى رفيقتا دربي وصديقتا عمري وجدان ومنى، اللتان كانتا سنداً لي وصاحبتاي في معترك العمر ومعيناتي على نوائب الدهر.

وإلى أساتذتي ومعلّيني خلال سنين دراستي في كل المراحل فلهم عليّ تمام الفضل والمنة بعد الله جلّ وعلا حتّى وصلت لهذه الرتبة.

وإلى كلّ من شجّعني ولو بكلمة، وتذكّرني في الغيب بدعوة، وسأل لي النجاح والتوفيق، فلهم مني جميل الشكر والمودّة.

وأتقدم بجزيل الشكر والعرفان لمشرّفي على إنجاز هاته المذكرة الدكتور حمروني للجهود والمعلومات القيمة التي قدمها.

يا من لهم فضل علينا سابق * شكر لكم حق علينا أوجب.

إهداء

الحمد لله وكفى والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى وأهله ومن وفى أما بعد: الحمد لله الذي وفقنا لتأمين هذه الخطوة في مسيرتنا الدراسية بمذكرتنا هاته ثمرة الجهد والنجاح بفضلته تعالى مهداة الى من مهد لي الطريق وكان الداعم الأول لي أبي الغالي أطال الله بعمره وجعلك سنداً لي ولأخوتي لا ينكسر أبداً .

والى من تتمن الحب وتغزل الأمل في قلبي لطالما كانت دعواتها عنوان دربي أُمي حفظك الله ورعاك. إلى من شجعني على إكمال دراستي حين فشلت و تحمل معي عناء التنقل بين الدراسة والعمل وسخر لي كل وقته وجهده هو الآن في بيت الله الحرام جعل الله حجه مقبولا وذنبه مغفورا زوجي الغالي حفظه الله ورعاه.

إلى اخوتي وأخواتي وأبناء أختي.

إلى والدا زوجي وكل أفراد عائلته.

إلى مشرفي حمروني أحمد، دون أن أنسى الأستاذ الذي كان معنا دائماً بلول السعيد.

إلى صديقات الدرب: * نرمان * مباركة * ربيعة .

إلى من ساعدتني في إتمام هذا العمل الأستاذة المتألقة عفاف واني.

إلى كل الزملاء والزميلات في الدراسة والعمل.

إلى قسم الرياضيات وإدارة العلوم الدقيقة وجميع دفعة 2024 جامعة الشهيد حمة لخضر -الوادي

إلى كل من كان لهم أثر على حياتي وإلى من أحبهم قلبي ولم يكتبهم قلبي أهدي عملي المتواضع.

زواري فرحات مريم

Ω : ensemble non vide.

$\overline{\Omega}$: la fermeture de Ω .

$\partial\Omega$: la frontière de Ω

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

$[\alpha]$: désigne la partie entière de α

$C([a, b], \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$B(x_0, r)$: la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r .

$\overline{B(x_0, r)}$: la boule fermée de centre x_0 et de rayon r .

$conv\Omega$: l'enveloppe convexe d'un ensemble Ω .

$\overline{conv}\Omega$: l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble Ω .

$|\cdot|$: valeur absolue ou module.

$\alpha(\cdot), \mu(\cdot), \gamma(\cdot)$: la mesure de non-compacité de Kuratowski ou Hausdorf.

$diam(A)$: diamètre de l'ensemble A .

$\|\cdot\|_\infty$: $= \sup\{\|x(t)\| : t \in I\}$

$AC([a, b])$: l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$

$AC^n([a, b])$: $\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a, b]), k = 0 \dots n-1, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}$

MNC : mesure non-compacité.

Introduction générale

La théorie des mesures du non-compacité constitue une branche très importante d'analyse fonctionnelle non linéaire.

Il trouve beaucoup d'applications dans la théorie des opérateurs. Les mesures de non-compacité jouent un rôle important dans la théorie du point fixe et ont de nombreuses applications dans diverses branches d'analyse non linéaire, y compris les équations différentielles, intégrales.

En gros, une mesure du non-compacité est une fonction définie sur une famille de sous-ensembles non vides et bornés d'un certain espace métrique tel qu'il soit égal à zéro sur toute la famille des ensembles relativement compacts. Le concept de mesure de non-compacité a été introduit pour la première fois par Kuratowski [3] en 1930. En 1955, le mathématicien italien Darbo [4] a utilisé la mesure de Kuratowski pour étudier une classe d'opérateurs condensants (opérateurs à condensation) dont les propriétés peuvent être caractérisés comme étant intermédiaire entre ceux de la contraction et compact cartographies. D'autres mesures de non-compacité ont été définies depuis lors. Le plus important d'entre eux est la mesure de non-compacité de Hausdorff introduite par Goldenstein et al. [5] en 1957 (et plus tard étudié par Goldenstein et Markus), la partie interne Mesure de non-compacité de Hausdorff introduite par Istrătescu en 1972.

Le but de ce travail est d'appliquer la technique de mesure de non-compacité pour obtenir l'existence des solutions à certaines équations différentielles, intégrales.

Cette mémoire est répartie en trois chapitres.

Le premier chapitre intitulé "Preliminaires", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.

Dans **le deuxième chapitre**, intitulé "Problème aux limites pour des équations fractionnaires", on traitera l'existence des solutions pour les équations différentielles d'ordre fraction-

naire de type Caputo suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t k(t, s, x(s))ds, & 0 \leq t \leq 1, & 1 < \alpha \leq 2 \\ ax(0) - bx'(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 h(s)g(s, x(s))ds + \lambda, \end{cases} \quad (1)$$

où ${}^c D^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$ est la dérivée fractionnelle de Caputo, f , g , et h est des fonctions données. $f : [0; T] \times C([0; 1]; \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow R$, $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $h \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$, $a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+$, $a + b > 0$ et $\frac{a}{a+b} < \alpha - 1$.

Dans **Le troisième chapitre**, nous étudions une problème de Cauchy d'équations différentielles d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & t \in J = [0, T], & 1 < \alpha \leq 2 \\ y(0) - y'(0) = \int_0^1 g(s, y(s))ds \\ y(T) - y'(T) = \int_0^1 h(s, y(s))ds \end{cases} \quad (2)$$

où ${}^c D^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, f , g , et h est des fonctions données

$f : [0; T] \times C([0; 1]; \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow R$, $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $h \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Chapter 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, définitions, résultats, lemmes et théorèmes nécessaires qui sont utiles pour la suite de cette étude.

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Espaces métriques

On dispose sur $\mathbb{R}$ de la distance usuelle

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = |x - y|. \end{aligned}$$

On l'utilise pour définir la convergence des suites et la continuité des fonctions. Le but ici est de généraliser cette notion.

Définition 1.1. *Une distance sur un ensemble E est une application*

$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que:

- 1. $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (séparation).*
- 2. $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$, (symétrie).*
- 3. $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (inégalité triangulaire).*

Le couple (E, d) est appelé un espace métrique.

Seconde inégalité triangulaire:

$$\forall x, y, z \in E, |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Définition 1.2. Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E . On dit que A est bornée si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall (x, y) \in A^2, \text{ on a } d(x, y) \leq M.$$

Définition 1.3. Dans un espace métrique (E, d) , on appelle boule ouverte (resp. boule fermé) de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\} \quad (\text{resp. } B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}).$$

Définition 1.4. Soit A une partie non vide et bornée de E . On appelle diamètre de A le nombre $\delta(A)$ tel que

$$\delta(A) = \sup_{(x, y) \in A^2} d(x, y).$$

Remarque 1.1.

$$\delta(\emptyset) = 0.$$

Pour $A \neq B$, $\delta(A, B) = \sup\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Définition 1.5. Soit (E, d) un espace métrique, A et B deux parties de E et $x \in E$. On définit la distance entre x et A par:

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

On définit la distance entre A et B par:

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

Suites dans les espaces métriques

Définition 1.6 (Convergence).

Soit (E, d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \in E$ une suite de points de E .

Soit $x \in E$. On dit que $(x_n)_n \in E$ converge vers x si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Définition 1.7 (Suite de Cauchy).

Une suite $(x_n)_n \in E$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \text{telque} \quad n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.

Définition 1.8 (Espace métrique complet). On dit que l'espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

Continuité dans l'espace métrique

Définition 1.9. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$ est une application, on dit que f est continue en $a \in E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.2. L'application f est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point a de E .

Définition 1.10 (Applications lipschitziennes).

Une application $f : (E, d_E) \longrightarrow (E', d_{E'})$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, d_{E'}(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

Remarque 1.3. Si la constante $k < 1$, on dit que f est une contraction.

1.1.2 Espaces de Banach

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ représente le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.11 (Norme).

Soit X un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tous x, y dans E et tout α dans $\mathbb{K}$:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité),
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.12 (Espace vectoriel normé).

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$, noté $(E, \|\cdot\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.

Remarque 1.4. Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.

Proposition 1.2. Soit A une partie de E et x un élément de E . Alors x est un élément de A si et seulement si x est une limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des éléments de A .

Définition 1.13. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(E', \|\cdot\|_{E'})$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow E'$ est une application, on dit que f est continue en $a \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{E'} < \varepsilon.$$

1.1.3 Compacité et convexité

Définition 1.14 (Compacité). Un ensemble A de E est compact si de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de A .

Définition 1.15 (Autre définition d'ensemble compact). Soit A un ensemble d'un espace norme E , A est dit compact si de tout recouvrement de A par des ouverts de A on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e.,

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts); } U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n \text{ telque } U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}.$$

Proposition 1.3. 1. Si A est compact, alors A est fermé et borné.

2. Si V est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.

On peut en fait énoncer un résultat bien plus général qui souligne la différence entre la dimension finie et la dimension infinie.

Théorème 1.1. *La boule unité fermée de V est compacte si et seulement si V est de dimension finie.*

Définition 1.16. *Un ensemble A de E est faiblement compact si de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite converge faiblement vers un élément de A .*

Définition 1.17. *On dit que partie A de E relativement compact (faiblement relativement compact) si et seulement si $\overline{A}$ est compact (faiblement compact).*

Soient E, F deux espaces de Banach et Ω une partie non vide de E .

Définition 1.18 (L'application compacte). *Une application $f : \Omega \subseteq E \longrightarrow F$ est dite compacte si et seulement si l'image de tout ensemble borné X de Ω est un ensemble relativement compact de F , c'est-à-dire, $\overline{f(X)}$ est compact.*

Définition 1.19. *Une sous-ensemble X d'un espace vectoriel normé E est dit convexe si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in X.$$

Autrement dit, un ensemble est convexe s'il contient tout segment passant par deux de ses points.

Lemme 1.1 (d'Ascoli-Arzelà). *Soit (E, d) un espace métrique compact, (F, d') un espace métrique complet. Une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si*

1. *l'ensemble A est borné, i.e. il existe une constante $K > 0$, tel que*

$$\|f(x)\| \leq K \text{ pour tout } x \in E \text{ et tout } f \in A.$$

2. *A est équicontinue, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad \text{et} \quad \forall f \in A.$$

3. *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact.*

1.2 Mesures de non-compacité

Dans cette section, nous définissons les mesures les plus connues de non-compacité et de rappel brièvement certaines de leurs propriétés de base.

Considérons E est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$. On noté par M_E la famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de E et par N_E sa sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts.

Définition 1.20. [8, 9] On dit que application $\mu : M_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une mesure de non-compacité dans E s'il satisfait aux conditions suivantes:

1. La famille $\ker \mu = \{X \in M_E : \mu(X) = 0\}$ est non vide et $\ker \mu \subset N_E$.
2. $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
3. $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.
4. $\mu(\text{Conv} X) = \mu(X)$.
5. $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y)$ pour $\lambda \in [0, 1]$.
6. Si $\{X_n\}_{n \geq 1}$ est une suite imbriquée. d'ensembles fermés de M_E tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0$, alors l'ensemble d'intersection $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ est non vide.

La famille $\ker \mu$ décrit dans 1 est appelée le noyau de la mesure de non-compacité μ .

En remarquant l'ensemble d'intersection X_∞ est un membre du noyau $\ker \mu$.

En effet, puisque $\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mu(X_\infty) = 0$.

Cela donne $X_\infty \in \ker \mu$.

Dans la suite, nous allons utiliser des mesures de non-compacité ayant des propriétés supplémentaires.

Une mesure est dite sous linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes:

7. $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
8. $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$.

On dit qu'une mesure de non-compacité μ a la propriété maximale si

$$9. \mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}.$$

Une mesure de non-compacité sous-linéaire μ qui a le maximum et est telle que $\ker \mu = N_E$ est appelé une mesure régulière.

Proposition 1.4. [20] *Invariance sous traduction: Soit X ensemble borné*

$$\mu(X + x_0) = \mu(X), \text{ pour tout } x_0 \in E.$$

Dans cette section, nous définissons les mesures de non-compacité les plus connues et rap-
pelons brièvement certaines de leurs propriétés de base. On commence par définir les mesures
de non compacité de Kuratowski et nous allons donner leurs propriétés fondamentales.

Soit E un espace métrique et Ω un sous ensemble non vide, borné de

1.2.1 Mesure de Kuratowski

Définition 1.21. [20]

La mesure de non compacité de Kuratowski, de l'ensemble Ω , notée $\alpha(\Omega)$ est l'inf des nombres $d > 0$, tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d , i.e.,

$$\alpha(\Omega) = \inf \left\{ d > 0, \Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i \quad \text{tel que} \quad \delta(\Omega_i) \leq d \right\}.$$

*La fonction α définie sur l'ensemble des sous-ensembles non vide et borné de (X, d) est appelé
mesure de non-compacte de Kuratowski.*

Proposition 1.5. [20] *Soit Ω , Ω_1 et Ω_2 des sous-ensembles non vides et bornés d'un ensemble
espace métrique (X, d) . alors*

1. $\alpha(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \overline{\Omega}$ est compact, où $\overline{\Omega}$ désigne la fermeture de Ω .
2. $\alpha(\Omega) = \overline{\Omega}$.
3. $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2)$.

$$4. \alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}.$$

$$5. \alpha(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \min\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}.$$

Proposition 1.6. [20] Soit Ω , Ω_1 et Ω_2 des sous-ensembles non vides et bornés d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ sur $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors

$$1. \alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2).$$

$$2. \alpha(\Omega + x) = \alpha(\Omega), \forall x \in X.$$

$$3. \alpha(\lambda\Omega) = |\lambda|\alpha(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

$$4. \alpha(\text{conv}\Omega) = \alpha(\Omega) \text{ où } \text{conv}(\Omega) \text{ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble } \Omega.$$

1.2.2 Mesure de Hausdorff

En général, le calcul de la valeur exacte de $\alpha(\Omega)$ est difficile. Une autre mesure de la non-compacité, qui semble être plus applicable, est dite la mesure de non-compacité de Hausdorff. Il est défini comme suit.

Définition 1.22. Soit (X, d) un espace métrique complet. La mesure Hausdorff de la non-compacité d'un sous-ensemble non vide et borné Ω de X , notée $\chi(\Omega)$, est l'inf de tous les nombres $\epsilon > 0$ tel que Ω puisse être couvert par un nombre fini de balles avec des rayons $< \epsilon$, c'est-à-dire

$$\chi(\Omega) = \inf\{\epsilon > 0 : \Omega \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

Le résultat suivant montre l'équivalence entre la mesure de non-compacité de Kuratowski et la mesure de non-compacité de Hausdorff.

Pour la preuve de ces résultats, nous nous référons à [20].

Remarque 1.5. Dans le cas où Ω est un sous-ensemble non vide et non borné, alors

$$\alpha(\Omega) = \chi(\Omega) = \infty.$$

Les deux mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff sont liées entre elles par les inégalités suivantes:

Théorème 1.2. *Soient α et χ les mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach E . Alors*

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega).$$

Théorème 1.3. *[31] Soit E un espace de Banach, $B \subset C([a; b]; E)$ un sous-ensemble équicontinu et borné, où $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\mu(B) = \max_{t \in [a; b]} \mu\{(x(t) : x(\cdot) \in B)\}.$$

Remarque 1.6. *Il est facile d'observer que la non-singularité découle directement de la régularité et la monotonie de la semi-additivité et la continuité de la lipschitzianité.*

La mesure de non compacité de Kuratowski ou de Hausdorff sont invariantes par le passage à la fermeture et l'enveloppe convexe, ce qu'affirme le théorème suivant:

Théorème 1.4. *Soient γ une mesure de non compacité (Kuratowski ou de Hausdorff) et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach E . Alors,*

$$\gamma(\Omega) = \gamma(\overline{\Omega}) = \gamma(\text{Conv}\Omega),$$

où $\overline{\Omega}$ est la fermeture de Ω .

1.2.3 k -contraction d'ensemble

Définition 1.23.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue et bornée (i.e., f transforme les bornés de E en des bornés de F).

1. *On dit que f est une k -contraction d'ensembles s'il existe $k \geq 0$, tel que,*

$$\mu(f(\Omega)) \leq k\mu(\Omega), \forall \Omega \in M_E.$$

2. *f est appelée k -contraction stricte d'ensembles (ou contraction stricte d'ensembles) si:*

$$0 \leq k < 1.$$

3. f est dite condensante si:

$$\mu(f(\Omega)) < \mu(\Omega),$$

pout tout Ω borné et non relativement compact ($\mu(\Omega) > 0$).

Remarque 1.7. Il est évident que toute application f complètement continue, est une k -contraction stricte d'ensembles et toute k -contraction stricte d'ensembles est condensante. De plus on a:

- f est condensante $\Rightarrow f$ est une 1-contraction d'ensembles;
- f est complètement continue $\Leftrightarrow f$ est une 0-contraction d'ensembles.

Lemme 1.2. [28] Soit D un sous-ensemble borné d'un espace de Banach X . Si $f : X \rightarrow X$ est une application de la forme $L + T$, où L est une application linéaire et T est complètement continue.

Alors,

$$\alpha(f(D)) = \alpha[f(\overline{\text{conv}}([D \cup \{\theta\}])].$$

Lemme 1.3. [9] Soit C un sous-ensemble borné, fermé et convexe dans espace du Banach $C(J, E)$, pour tout V de C borné et équicontinu, on a $\alpha(V(x))$ est continu et que

$$\alpha\left(\int_J V(x)dx\right) \leq \int_J \alpha(V(x))dx.$$

Lemme 1.4. [31] Si $V \subset C(J, E)$ est un ensemble borné et équicontinu, alors

i. la fonction $v : t \mapsto \alpha(V(t))$ est continue sur J , et $\|v\| = \sup_{0 \leq t \leq T} ((V(t))$

ii.

$$\alpha\left(\int_0^T x(s)ds : x \in V\right) \leq \int_0^T \alpha(V(s))ds, \text{ où } V(s) = \{x(s) : x \in V\}, s \in J.$$

Lemme 1.5. [7] Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe de l'espace de Banach $C(J, X)$, G une fonction continue sur $J \times J$ et f une fonction de $J \times X \rightarrow X$ qui satisfait les conditions de Carathéodory, et supposons qu'il existe $p \in L^1(J, R_+)$ tel que, pour chaque $t \in J$ et chaque ensemble bornée $B \subset X$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mu(f(J_{t,h} \times B)) \leq p(t)\mu(B); \text{ ici } J_{t,h} = [t - h, t] \cap J.$$

Si V est un sous-ensemble équicontinu de D , alors

$$\mu(\{ \int_J K(s, t) f(s, y(s)) ds : y \in V \}) \leq \int_J \| K(t, s) \| p(s) \mu(V(s)) ds.$$

1.3 Théorèmes de point fixe

Dans cette section, Nous allons juste nous concentrer sur plusieurs théorèmes du point fixe que nous appliquerons dans l'étude de l'existence des solutions aux problèmes proposés. Dans ce section on présente la théorème de Darbo et quelques ses généralisations qui étude l'existence du point fixe des applications continues sur un sous-ensembles non vides, bornés, fermés et convexes des espaces de Banach. Maintenant nous rappelons le théorème de point fixe suivant qui est une version du point fixe classique théorème pour les applications lipschitziennes dans le contexte des mesures de non-compacité.

1.3.1 Théorème de Brouwer

En 1912, Brouwer a énoncé son célèbre théorème qui est bien connu dans la théorie du point fixe. Ce théorème a beaucoup d'applications dans l'analyse.

Théorème 1.5. *[12] Soit A un sous ensembles non vide, fermé, borné et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $n \geq 1$. Si l'application $F : A \rightarrow A$ est continue, alors, F admet au moins un point fixe dans A .*

1.3.2 Théorème de Schauder

Plus tard en 1930, Schauder a prolongé le théorème de Brouwer au cas de dimension infinie.

Théorème 1.6. *[12] Soit X un espace de Banach réel; A une partie non vide, convexe, fermée et bornée de X . Si l'application $F : A \rightarrow A$ est compacte, alors F admet au moins un point fixe dans A .*

1.3.3 Théorème de Darbo

En 1955, Darbo a formulé la généralisation suivante du théorème de Schauder.

Théorème 1.7. [27] *Soit Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace Banach E et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ une k -contraction stricte d'ensembles, alors T admet au moins un point fixe dans Ω .*

1.3.4 Théorème de Sadovski

En 1967, Sadovski a généralisé le théorème de Darbo pour les application condensante.

Théorème 1.8. [12] *Soit Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace Banach E et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application condensante. Alors, T admet un point fixe dans Ω .*

1.3.5 Théorème de Mönch

En 1980, Mönch a généralisé les théorèmes du point fixe de Schauder, de Darbo et de Sadovski dans le théorème suivant:

Théorème 1.9. [17] *Soit D un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach, tel que $0 \in D$ et soit N une application continue de D dans D .*

Si l'implication:

$$V = \overline{\text{conv}}N(V) \text{ ou } V = N(V) \cup 0 \Rightarrow \gamma(V) = 0.$$

est vérifiée pour tout sous ensemble V de D , alors N admet un point fixe dans D .

1.4 Rappel sur le calcul fractionnaire

Le concept de dérivée fractionnaire est apparu pour la première fois dans une célèbre correspondance entre G.A. de L'Hospital et G.W. Leibniz, en 1695.

Beaucoup de mathématiciens ont développé ce domaine. Au cours des soixante dernières années, le calcul fractionnaire avait joué un rôle très important dans divers domaines tels que la physique, la chimie, la mécanique, électricité, biologie, économie, théorie du contrôle, traitement du signal et de l'image, biophysique, phénomènes de flux sanguin, aérodynamique, ajustement de données expérimentales, etc.

Le plus important de ces modèles sont celles décrites par des équations différentielles contenant des dérivés d'ordre fractionnaire.

De nouvelles théories et méthodes sont donc nécessaires à développer spécifiquement, dont l'enquête devient plus difficile. En comparant avec la théorie classique des équations différentielles, les recherches sur la théorie des équations différentielles fractionnaires n'en sont qu'à leur stade initial de développement.

1.4.1 Fonctions utiles

La fonction Gamma

Définition 1.24. On appelle fonction Gamma eulérienne (où intégrale eulérienne de seconde espèce) la fonction notée Γ définie par:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

où α est un nombre complexe quelconque tel que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

Proposition 1.7. On a la relation suivante:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

En particulier, on a

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.4.2 Intégrale fractionnaire

Définition 1.25. [34] L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $f \in C([a, b])$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est définie par

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad a \leq t \leq s.$$

Proposition 1.8. On a les propriétés suivantes:

- i) $I^0 f(t) = f(t)$.
- ii) $I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$.
- iii) l'opérateur intégral I^α est linéaire.

$$I^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I^\alpha f(t) + I^\alpha g(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$iiii) \quad \frac{d}{dt}(I^\alpha f)(t) = I^{\alpha-1} f(t).$$

Exemple 1.1. Soit $f(t) = (t-a)^m$ alors:

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (t-a)^m ds. \end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ on obtient,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^m dx. \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, m+1) \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+m+1)}. \end{aligned}$$

D'où

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-a)^{m+\alpha}.$$

1.4.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, dans cette partie on va citer celles qui sont les plus utilisées .

Dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville

Définition 1.26. [34] Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n - 1 \leq \alpha < n$) au sens de **Riemann-Liouville** est définie par:

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-\alpha} f(t)) = D^n I^{n-\alpha} f(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α .

Propriétés

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

- i) L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche
L'opérateur de dérivation fractionnaire

$${}^{RL}D^\alpha (I^\alpha f(t)) = f(t),$$

en général on a

$${}^{RL}D^{\alpha_1} (I^{\alpha_2} f(t)) = {}^{RL}D^{\alpha_1-\alpha_2} f(t)$$

et si $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$, ${}^{RL}D^{\alpha_1-\alpha_2} f(t) = I^{\alpha_2-\alpha_1} f(t)$.

ii) En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$${}^{RL}D^{-\alpha_1} ({}_a^{RL}D_t^{\alpha_2} f(t)) = {}^{RL}D^{\alpha_2-\alpha_1} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}_a^{RL}D_t^{\alpha_2-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha_1-k}}{\Gamma(\alpha_1-k+1)},$$

avec $m-1 \leq \alpha_2 < m$

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que

si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}^{RL}D^\alpha f(t)) = {}^{RL}D^{n+\alpha} f(t),$$

mais

$${}^{RL}D^\alpha \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}^{RL}D^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}.$$

3. Pour l'opérateur différentiel fractionnaire Riemann-Liouville, on a les propriétés suivantes:

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^{RL}D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^{RL}D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t).$$

4. Linéarité.

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire $\alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}$

$${}^{RL}D^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^{RL}D^\alpha f(t) + {}^{RL}D^\alpha g(t).$$

5. Non-commutativité

l'opérateur de Riemann-Liouville est aussi non-commutative i.e :

$$D^\alpha D^m f(t) = D^{\alpha+m} f(t) \neq D^m D^\alpha f(t).$$

Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.27. [34] Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a, b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de **Caputo** de f , d'ordre $\alpha > 0$ est définie par:

$${}^c D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(s) ds,$$

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α .

Propriétés

Nous donnons les propriétés suivant:

1. La relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

On suppose que $n - 1 < \alpha < n, m, n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ et ${}^{RL} D^\alpha f(t)$ existe, alors

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; on aura:

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t).$$

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue on a:

$${}^c D^\alpha I^\alpha f = f \text{ et } I_a^{\alpha c} D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

3. Non-commutativité

On suppose que $n - 1 < \alpha < n, m, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe, alors:

$${}^c D^\alpha D^m f(t) = {}^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^m {}^c D^\alpha f(t).$$

4. Soit $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe alors:

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

5. Linéarité.

La dérivation fractinnaire de Caputo est un opérateur lineaire.

Soit $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$. :

$${}^c D^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^c D^\alpha f(t) + {}^c D^\alpha g(t).$$

Exemple 1.2. La différentiation de la fonction constante pour l'opérateur de Caputo est

$${}^c D^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - x)^{n-\alpha-1} c^{(n)} dx = 0.$$

Alors ${}^c D^\alpha c = 0$, $c = \text{const.}$

Et pour Riemann-Liouville:

$${}^{RL} D^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha} \mathbb{N}eq 0, \quad c = \text{const.}$$

Lemme 1.6. Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielles

$${}^c D^\alpha f(t) = 0,$$

admet le solution

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},$$

telque: $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, $n = [\alpha] + 1$.

ou

$$f(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_N t^{\alpha-N},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, N, N = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.7. *Soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha c} D^{\alpha} f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n = [\alpha] + 1$,

ou

$$I^{\alpha c} D^{\alpha} f(t) = f(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_N t^N,$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, N$ et $N = [\alpha] + 1$.

Chapter 2

Application 1

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier l'existence de solutions pour des équations fractionnaires différentielles avec conditions intégrales aux bord, sous la forme suivante:

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t k(t, s, x(s))ds, & 0 \leq t \leq 1, & 1 < \alpha \leq 2 \\ ax(0) - bx'(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 h(s)g(s, x(s))ds + \lambda, \end{cases} \quad (2.1)$$

où ${}^c D^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$ est la dérivation fractionnelle de Caputo, f , g , et h sont des fonctions données.

$f : [0; 1] \times C([0; 1]; \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $h \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$, $a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+$, $a + b > 0$ et $\frac{a}{a+b} < \alpha - 1$.

Lemme 2.1. *La fonction $x \in C^1([0, T])$ est une solution de (2.1) si et seulement si elle est une solution de l'équation intégrale suivante:*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(f(s, x(s)) + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau))d\tau \right) ds \right] \\ &+ \frac{at+b}{a+b} \left[\int_0^1 h(s)g(s, x(s))ds + \lambda - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \int_0^s k(s, \tau, x(\tau))d\tau ds \right) \right]. \end{aligned}$$

Preuve. On a

$$I^\alpha ({}^c D^\alpha x(t)) = x(t) - c_0 - c_1 t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t f(s, x(s))ds + \int_0^t \int_0^s k(s, \tau, x(\tau))d\tau ds \right],$$

ce que implique que

$$x(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t f(s, x(s)) ds + \int_0^t \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \right].$$

En passant aux conditions aux limites, on obtient

$$ax(0) - bx'(0) = ac_0 - bc_1 = 0,$$

et

$$\begin{aligned} x(1) &= c_0 + c_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \right] \\ &= \int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \end{aligned}$$

donc on obtient

$$c_0 = \frac{b}{a+b} \left[\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \right),$$

et

$$c_1 = \frac{a}{a+b} \left[\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \right)$$

En conséquence, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \right) \\ &+ \frac{at+b}{a+b} \left[\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \right). \end{aligned}$$

Alors nous pouvons écrire

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) \left(f(s, x(s)) + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right) ds + \frac{at+b}{a+b} \left(\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right),$$

où

$$G(t, s) = \frac{1}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (a+b)(t-s)^{\alpha-1} + (at+b)(1-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ (at+b)(1-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

□

Lemme 2.2. *G est une fonction satisfaite*

$$G(t, s) \leq \frac{2(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Preuve. • si $0 \leq s \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{1}{(a+b)\Gamma(\alpha)} [(a+b)(t-s)^{\alpha-1} + (at+b)(1-s)^{\alpha-1}] \\ &\leq \frac{1}{(a+b)\Gamma(\alpha)} [(a+b)(t-s)^{\alpha-1} + (a+b)(1-s)^{\alpha-1}] \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(t-s)^{\alpha-1} + (1-s)^{\alpha-1}] \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(1-s)^{\alpha-1} + (1-s)^{\alpha-1}] = \frac{2(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned}$$

car $\alpha - 1 > 0$, $t \leq 1$.

• si $0 \leq t \leq s \leq 1$,

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{1}{(a+b)\Gamma(\alpha)} [(at+b)(1-s)^{\alpha-1}] \\ &\leq \frac{1}{(a+b)\Gamma(\alpha)} [(a+b)(1-s)^{\alpha-1}] \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1-s)^{\alpha-1} \leq \frac{2(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

□

Pour établir notre résultat principal concernant l'existence de solutions de (2.1), nous imposons des conditions appropriées aux fonctions impliquées dans ce problème. A savoir, nous supposons que

1. $[A_1]$: il existe $\varphi \in L^\infty([0, 1])$, tel que

$$|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \varphi(t)|x - y|,$$

et pour tout sous- ensemble bornée A de X , on a

$$\gamma(f(t, A)) \leq \varphi_0 \gamma(A).$$

2. $[A_2]$: il existe $\phi \in L^\infty([0, 1])$, tel que

$$|k(t, s, u(s)) - k(t, s, v(s))| \leq \phi(t)|u - v|,$$

et pour tout sous- ensemble bornée B de X , on a

$$\gamma(k(t, s, B)) \leq \phi_0 \gamma(B).$$

3. $[A_3]$: il existe $\psi \in L^\infty([0, 1])$, tel que

$$|g(t, x(t)) - g(t, y(t))| \leq \psi(t)|x - y|,$$

et pour tout sous- ensemble bornée B de X , on a

$$\gamma(g(t, C)) \leq \psi_0 \gamma(C),$$

$$\text{où } \varphi_0 = \sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t)|, \quad \psi_0 = \sup_{t \in [0,1]} |\psi(t)| \text{ et } \phi_0 = \sup_{t \in [0,1]} |\phi(t)|.$$

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses $[A_1] - [A_3]$ le problème (2.1) admet une solution si*

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)}(\varphi_0 + \phi_0) + \|h\|_{L^1} \psi_0 + \lambda < 1.$$

Preuve. On transformé le problème (2.1) au problème de point fixé. On considérer l'opérateur

$T : C([0, 1], X) \longrightarrow C([0, 1], X)$ qui définie par

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t, s) \left(f(s, x(s)) + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right) ds + \frac{at + b}{a + b} \left(\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right).$$

En clair, les points fixes de l'opérateur T sont des solutions de le problème (2.1).

On montre que T satisfait les hypothèses de Théorème (2.1).

Le preuve sera donné en trois étapes.

étape 1: T est continue.

Soit (x_n) est une suite tel que $x_n \longrightarrow x$ dans $C([0, 1], X)$.

Danc pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} |T(x_n)(t) - T(x)(t)| &= \left| \int_0^1 G(t, s) \left(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right) ds + \left(\int_0^s \left(k(s, \tau, x_n(\tau)) - k(s, \tau, x(\tau)) \right) d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{at+b}{a+b} \left(\int_0^1 h(s) \left(g(s, x_n(s)) - g(s, x(s)) \right) ds \right) \right| \\ &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds + \int_0^s |k(s, \tau, x_n(\tau)) - k(s, \tau, x(\tau))| d\tau \\ &\quad + \int_0^1 |h(s)| |g(s, x_n(s)) - g(s, x(s))| ds. \end{aligned}$$

Par (A1), (A2) et (A3), on a

$$\begin{aligned} |T(x_n)(t) - T(x)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| \varphi_0 |x_n(s) - x(s)| ds + \int_0^s \phi_0 |x_n(s) - x(s)| d\tau \\ &\quad + \int_0^1 |h(s)| \psi_0 |x_n(s) - x(s)| ds \\ &\leq \left[\frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)} (\varphi_0 + \phi_0) + \|h\|_{L^1} \psi_0 \right] |x_n(s) - x(s)|. \end{aligned}$$

Donc

$$\|T(x_n)(t) - T(x)(t)\| \leq \left[\frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)} (\varphi_0 + \phi_0) + \|h\|_{L^1} \psi_0 \right] |x_n(s) - x(s)|.$$

Depuis $x_n \longrightarrow x$, pour tout $t \in [0, 1]$.

$$\|T(x_n)(t) - T(x)(t)\| \longrightarrow 0, \quad \text{si } n \longrightarrow \infty,$$

donc

$$\|T(x_n)(t) - T(x)(t)\|_{[0,1]} \rightarrow 0, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Donc, T est continue.

Soit r est une constante tel que

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)}[(\varphi_0 + \phi_0) + f^* + k^*] + \|h\|_{L^1} \psi_0 + g^* + \lambda \leq r,$$

et

$$f^* = \sup_{t \in [0,1]} |f(t, 0)|, \quad g^* = \sup_{s \in [0,1]} |g(s, 0)|, \quad K^* = \sup_{t \in [0,1]} |k(t, 0, 0)|$$

définie $B_r = \{x \in C([0, 1], X) : \|x\| \leq r\}$.

Il est clair que B_r est une sous-ensemble borné, fermée et convexe $C([0, 1], X)$.

étape 2: T donc nous allons monter ce $T(B_r) \subset B_r$.

Soit $x \in B_r$ on montre que $Tx \in B_r$. On a, pour chaque $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} |T(x)(t)| = & \left| \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right. \\ & \left. + \frac{at + b}{a + b} \left(\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right) \right|. \end{aligned}$$

Par (A1), (A2) et (A3), on a pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |f(t, x(t))| &= |f(t, x(t)) - f(t, 0) + f(t, 0)| \\ &\leq |f(t, x(t)) - f(t, 0)| + |f(t, 0)| \\ &\leq \varphi_0 |x| + f^*, \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned} |k(t, s; x(s))| &= |k(t, s, x(s)) - k(t, 0, 0) + k(t, 0, 0)| \\ &\leq |k(t, s, x(s)) - k(t, 0, 0)| + |k(t, 0, 0)| \\ &\leq \phi_0 |x| + k^*, \end{aligned} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned}
 |g(t, x(t))| &= |g(t, x(t)) - g(t, 0) + g(t, 0)| \\
 &\leq |g(t, x(t)) - g(t, 0)| + |g(t, 0)| \\
 &\leq \psi_0|x| + g^*.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donc

$$\|Tx(t)\| \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)}((\varphi_0 + \phi_0)r + f^* + k^*) + (\psi_0\|h\|_{L^1}r + g_*) + \lambda,$$

il s'ensuit que pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$\|Tx(t)\| \leq r \text{ alors } T(B_r) \subset B_r.$$

. **étape 3:** $T(B_r)$ est bornée et équicontinue.

Selon l'étape 2, on a

$$T(B_r) = \{T(x) : x \in B_r\} \subset B_r.$$

Donc pour tout $x \in B_r$ on a $\|T(x)\|_\infty \leq r$, ce qui signifie que $T(B_r)$ est borné.

Soit $t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 < t_2$ et soit $x \in T(B_r)$ alors

$$\begin{aligned}
 |T(x)(t_2) - T(x)(t_1)| &= \left| \int_0^1 G(t_2, s)[f(s, x(s)) + \int_0^s |k(s, \tau, x(\tau))d\tau]ds + \frac{at_2 + b}{a + b} \left(\int_0^1 h(s)g(s, x(s))ds + \lambda \right) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^1 G(t_1, s)[f(s, x(s)) + \int_0^s |k(s, \tau, x(\tau))d\tau]ds + \frac{at_1 + b}{a + b} \left(\int_0^1 h(s)g(s, x(s))ds + \lambda \right) \right| \\
 &= \left| \int_0^1 [G(t_2, s) - G(t_1, s)] [f(s, x(s)) + \int_0^s |k(s, \tau, x(\tau))d\tau]ds \right. \\
 &\quad \left. + \left| \frac{a}{a + b} \int_0^1 h(s)g(s, x(s))(t_2 - t_1)ds + \lambda \frac{a}{a + b} (t_2 - t_1) \right| \right| \\
 &\leq \int_0^1 [G(t_2, s) - G(t_1, s)] \|F(s)\|ds \\
 &\quad + \frac{a(t_2 - t_1)}{a + b} \int_0^1 h(s)\|y(s)\|ds + \lambda \frac{a}{a + b} (t_2 - t_1).
 \end{aligned}$$

Selon (2.3), (2.4) et (2.5) on a

$$\begin{aligned}
 \|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)\| &\leq ((\varphi_0 + \phi_0)r + f^* + k^*) \int_0^1 [G(t_2, s) - G(t_1, s)] ds \\
 &\quad + \frac{a(\psi_0r + g_*)}{a + b} \int_0^1 |h(s)|(t_2 - t_1)ds + \lambda \frac{a}{a + b} (t_2 - t_1).
 \end{aligned}$$

Comme $t_2 \rightarrow t_1$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

Alors T est équicontinue.

Soit $V \subset TB_r$, tel que: $V = \{Tx, x \in B_r\}$ donc $V \subset \overline{\text{conv}}(T(V) \cup \{0\})$

, la sous-ensemble V est bornée et équicontinue, d'où la fonction $v : t \mapsto \mu(v(t)) \in \mathbb{R}$ est continue sur $[0, 1]$. En utilisant le lemme 1.4 et les propriétés de la mesure μ , on a, pour tout $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} v(t) = \mu(V(t)) &\leq \mu(T(V)(t) \cup \{0\}) \\ &\leq \mu(T(V)(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(T(V)(t)) &= \mu((Tx)(t), x \in V) \\ &= \mu\left(\int_0^1 G(t, s)[f(t, x(t)) + \int_0^s |k(s, \tau, x(\tau))d\tau]ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{at+b}{a+b}\left(\int_0^1 h(s)g(s, x(s))ds + \lambda\right), x \in V\right) \\ &\leq \mu\left(\int_0^1 G(t, s)[f(t, x(t)) + \int_0^s |k(s, \tau, x(\tau))d\tau]ds, x \in V\right) \\ &\quad + \mu\left(\frac{at+b}{a+b}\left(\int_0^1 h(s)g(s, x(s))ds + \lambda\right), x \in V\right) \\ &\leq \int_0^1 G(t, s)\mu\left(f(t, x(t)) + \int_0^s |k(s, \tau, x(\tau))d\tau\right)ds + \frac{at+b}{a+b} \int_0^1 h(s)\mu(g(s, x(s)) + \lambda)ds. \end{aligned}$$

Puis par (A1), (A2), (A3) et les lemmes de mesure de non-compacité implique que pour chaque $s \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \mu(f(t, x(t)) + \int_0^s |k(s, \tau, x(\tau))d\tau, x \in V) &\leq \varphi_0\mu(x(t), x \in V) + \phi_0\mu(x(t), x \in V) \\ &\leq (\varphi_0 + \phi_0)\mu(x(t), x \in V). \end{aligned}$$

Et

$$\mu(g(x(s)), x \in V) \leq \psi_0\mu(x(s), x \in V),$$

donc

$$\begin{aligned}
\mu(T(V)(t)) &\leq (\varphi_0 + \phi_0) \int_0^1 G(t, s) \mu(x(s)) ds + \frac{at+b}{a+b} (\psi_0 \int_0^1 h(s) \mu(x(s)) ds + \lambda) \\
&\leq (\varphi_0 + \phi_0) \int_0^1 G(t, s) \mu(V(s)) ds + \frac{at+b}{a+b} (\psi_0 \int_0^1 h(s) \mu(V(s)) ds + \lambda) \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} (\varphi_0 + \phi_0) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} v(s) ds + \left(\int_0^1 h(s) v(s) ds + \lambda \right) \\
&\leq \left(\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} (\varphi_0 + \phi_0) + (\psi_0 \|h\|_{L^1} + \lambda) \right) \|v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|v\|_\infty \leq \left(\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} (\varphi_0 + \phi_0) + (\psi_0 \|h\|_{L^1} + \lambda) \right) \|v\|_\infty,$$

on obtient $\|v\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $v(t) = 0$, pour tout $t \in [0, 1]$, puis $V(t)$ est relativement compact dans X . Au vu de lemme d'Ascoli - Arzela, V est relativement compact dans B_r .

En appliquans maintenant le Théorème de Mönch, on conclue que T a un point fixe qui est une solution du problème (2.1). Ceci termine la preuve. □

Enfin, on presente un exemple numérique illustrant les résultats obtenus dans ce section.

Exemple: Considérons le problème de valeur limite fractionnaire suivant:

$$\begin{cases} {}^c D^{\frac{3}{2}} x(t) = \frac{1}{10} \frac{t}{1+t^2} x(t) + \frac{2\sqrt[4]{3}}{30} \int_0^t e^{-t} \arctan(t + \sin t + x(s)) ds, & t \in [0, 1] \\ x(0) - 5x'(0) = 0 \\ x(1) = \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{1}{(s+1)^2} (x(s) + \sqrt{1+x^2(s)}) ds \end{cases} \quad (2.6)$$

ou

$$f(t, x) = \frac{1}{10} \frac{t}{1+t^2} x(t), \quad k(t, s, x) = \frac{2\sqrt[4]{3}}{30} e^{-t} \arctan(t + \sin t + x(s)), \quad t \in [0, 1], \quad x \in C([0, 1], X)$$

$$h(s) = s, \quad g(s, x) = \frac{2}{5} \frac{1}{(s+1)^2} (x(s) + \sqrt{1+x^2(s)}), \quad g \in C(X, X), \alpha = 1.5, a = 1, b = 5.$$

Clair $\frac{a}{a+b} < \alpha - 1$

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &\leq \frac{1}{10} \left| \frac{t}{1+t^2} x - \frac{1}{10} \frac{t}{1+t^2} y \right| \\ &\leq \frac{1}{10} \frac{t}{1+t^2} |x - y|, \end{aligned}$$

et en fait, observons d'abord qu'en utilisant les outils standards du calcul différentiel on peut facilement montrer que

$$|k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq \frac{1}{10} e^{-t} |x - y|,$$

et

$$\begin{aligned} |g(t, x) - g(t, y)| &= \frac{2}{5} \frac{1}{(t+1)^2} \left| \frac{1}{2} (x - y + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}) \right| \\ &= \frac{2}{5} \frac{1}{(t+1)^2} \left| \frac{1}{2} (x - y) \left(1 + \frac{x+y}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{10} \frac{1}{(t+1)^2} |x - y|. \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(t) = \frac{1}{10} \frac{t}{1+t^2}, \quad \phi(t) = \frac{1}{10} e^{-t}, \quad \psi(t) = \frac{1}{10(t+1)^2}$$

et

$$\varphi_0 = \frac{1}{20}, \quad \phi_0 = \frac{1}{10}, \quad \psi_0 = \frac{1}{10}$$

En conséquent, les conditions (A1), (A2) et (A3) sont satisfaites

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} (\varphi_0 + \phi_0) + \|h\|_{L^1} \psi_0 + \lambda \cong 0.308 < 1.$$

D'après les hypothèses, le problème admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Chapter 3

Application 2

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions du problème aux limites avec des conditions intégrales suivant :

$${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), t \in J = [0, 1], 1 < \alpha \leq 2 \quad (3.1)$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s, y(s)) ds, \quad (3.2)$$

$$y(1) - y'(1) = \int_0^T h(s, y(s)) ds, \quad (3.3)$$

où ${}^C D^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, f, g et $h : J \times E \rightarrow E$ sont des fonctions données vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et E est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$. Nous consacrons la première section à l'existence des solutions du problème 3.1-3.3 qui est basé sur le Théorème du point fixe de Mönch et la deuxième section sera réservée à un exemple illustrant l'applicabilité des conditions imposées.

3.1 Existence des Solutions

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème .

Définition 3.1. *Une fonction $y \in AC^1(J, E)$ est dite une solution de 3.1-3.3 si elle satisfait l'équation 3.1 sur J , et les conditions 3.2-3.3.*

Lemme 3.1. *Soit $1 < \alpha \leq 2$ et $\sigma, \rho_1, \rho_2 : J \rightarrow E$ des fonctions continues. Le problème aux*

limites linéaire

$${}^C D^\alpha y(t) = \sigma(t), t \in J = [0, T], 1 < \alpha \leq 2 \quad (3.4)$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T \rho_1(s) ds, \quad (3.5)$$

$$y(T) - y'(T) = \int_0^T \rho_2(s) ds, \quad (3.6)$$

a une solution unique donnée par

$$y(t) = P(t) + \int_0^T G(t, s) \sigma(s) ds,$$

avec

$$P(t) = \frac{(T+1-t)}{T-2} \int_0^T \rho_1(s) ds + \frac{t+1}{T-2} \int_0^T \rho_2(s) ds,$$

et

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-1}}{(t+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-2}}{(t+2)\Gamma(\alpha-1)} & , \quad 0 \leq s \leq t \\ -\frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-1}}{(t+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-2}}{(t+2)\Gamma(\alpha-1)} & , \quad t \leq s < T \end{cases} \quad (3.7)$$

Lemme 3.2. *Le problème aux limites 3.1-3.3 a une solution y , si et seulement si $y \in C(J, E)$ satisfait l'équation intégrale*

$$y(t) = P_y(t) + \int_0^T G(t, s) f(s, y(s)) ds,$$

avec

$$P_y(t) = \frac{(T+1-t)}{T-2} \int_0^T g(s) ds + \frac{t+1}{T-2} \int_0^T h(s) ds,$$

et

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-1}}{(t+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-2}}{(t+2)\Gamma(\alpha-1)} & , \quad 0 \leq s \leq t \\ -\frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-1}}{(t+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-2}}{(t+2)\Gamma(\alpha-1)} & , \quad t \leq s < T \end{cases} \quad (3.8)$$

Remarque 3.1. *Il est clair que la fonction $t \rightarrow \int_0^T \|G(t, s)\| ds$ est continue sur J , et est donc bornée. Soit*

$$\widehat{G} = \sup \left\{ \int_0^T \|G(t, s)\| ds, t \in J \right\}.$$

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H1) Les fonctions $f, g, h : J \times E \rightarrow E$ satisfont aux conditions de Carathéodory.

(H2) Ils existent $p_f, p_g, p_h \in L^{\text{inf}}(J, \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\|f(t, y)\| \leq p_f(t)\|y\| \text{ p.p. } t \in J; y \in E,$$

$$\|g(t, y)\| \leq p_g(t)\|y\| \text{ p.p. } t \in J; y \in E,$$

$$\|h(t, y)\| \leq p_h(t)\|y\| \text{ p.p. } t \in J; y \in E.$$

(H3) Pour $p.p. t \in J$ et chaque ensemble borné $B \subset E$ nous avons

$$\gamma(f(t, B)) \leq p_f(t)\gamma(B),$$

$$\gamma(g(t, B)) \leq p_g(t)\gamma(B),$$

$$\gamma(h(t, B)) \leq p_h(t)\gamma(B),$$

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses (H1) - (H3) sont vérifiées. Si*

$$\frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}] + \widehat{G}\|p_f\|_{L^\infty} < \infty, \quad (3.9)$$

alors le problème aux limites 3.1-3.3 a au moins une solution.

Proof. On transforme le problème 3.1-3.3 en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N : C(J, E) \rightarrow C(J, E)$ défini par :

$$(Ny)(t) = P_y(t) + \int_0^T G(t, s)f(s, y(s))ds$$

où

$$P_y(t) = \frac{(T+1-t)}{T-2} \int_0^T g(s, y(s))ds + \frac{t+1}{T-2} \int_0^T h(s, y(s))ds,$$

et la fonction $G(t, s)$ est donnée par 3.8. D'après le Lemme 3.2 les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème 3.2. Soit $R > 0$ et considérer l'ensemble

$$D_R = \{y \in C(J, E) : \|y\|_\infty \leq R\}.$$

Il est clair que le sous-ensemble D_R est fermé, borné, et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du Théorème. La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : N est continu

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \rightarrow y$ dans $C(J, E)$. Alors, pour chaque $t \in J$:

$$\begin{aligned} \|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| &\leq \frac{T+1}{T+2} \int_0^T \|g(s, y_n(s)) - g(s, y(s))\| ds \\ &\quad + \frac{T+1}{T+2} \int_0^T \|h(s, y_n(s)) - h(s, y(s))\| ds \\ &\quad + \int_0^T |G(t, s)| \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds \end{aligned}$$

Soit $\rho > 0$ tel que

$$\|y_n\|_\infty \leq \rho, \|y\|_\infty \leq \rho.$$

Par (H2) nous avons

$$\|g(s, y_n(s)) - g(s, y(s))\| \leq 2\rho p_g(s) = \sigma_1(s); \sigma_1 \in L^1(J, \mathbb{R}^+),$$

$$\|h(s, y_n(s)) - h(s, y(s))\| \leq 2\rho p_h(s) = \sigma_2(s); \sigma_2 \in L^1(J, \mathbb{R}^+),$$

$$|G(t, s)| \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| \leq 2|G(t, s)| \rho p_f(s) = \sigma_3(s); \sigma_3 \in L^1(J, \mathbb{R}^+).$$

Puisque f , g et h sont des fonctions Carathéodory, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\|N(y_n) - N(y)\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Étape 2 : N est un opérateur de D_R dans lui-même.

Pour chaque $y \in D_R$ par (H2) et 3.9 nous avons pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned}
 \|(N_y)(t)\| &\leq \frac{T+1}{T+2} \int_0^T \|g(s, y(s))\| ds \\
 &\quad + \frac{T+1}{T+2} \int_0^T \|h(s, y(s))\| ds + \int_0^T |G(t, s)| \|f(s, y(s))\| ds \\
 &\leq R \left[\frac{T(T+1)}{T+2} \|p_g\|_{L^\infty} + \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_h\|_{L^\infty} + \widehat{G} \|p_f\|_{L^\infty} \right] \\
 &\leq R.
 \end{aligned}$$

Étape 3 : $N(D_R)$ est bornée et équicontinue.

Par l'étape 2, il est évident que $N(D_R) \subset C(J, E)$ est bornée.

Pour l'équicontinuité de $N(D_R)$. Soit $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ et $y \in D_R$. Alors

$$\begin{aligned}
 \|(N_y)(t_2) - (N_y)(t_1)\| &= \left\| -\frac{t_2 - t_1}{T+2} \int_0^T g(s, y(s)) ds + \frac{t_2 - t_1}{T+2} \int_0^T h(s, y(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T [G(t_1, s) - G(t_2, s)] f(s, y(s)) ds \right\| \\
 &\leq \frac{t_2 - t_1}{T+2} T R \left[\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty} + \widehat{G} \|p_f\|_{L^\infty} \right] \\
 &\quad + R \|p_f\|_{L^\infty} \int_0^T |G(t_1, s) - G(t_2, s)| ds
 \end{aligned}$$

Comme $t_1 \rightarrow t_2$ le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

Maintenant, soit V un sous-ensemble de D_R telles que $V \subset \overline{\text{conv}}(N(y)U_0)$. V est borné et équicontinu, et donc la fonction $v \rightarrow v(t) = \gamma(V(t))$ est continue. Par (H3), et les propriétés de la mesure γ nous avons pour chaque $t \in J$:

$$\begin{aligned}
 v(t) &< \gamma(N(V)(t) \cap \{0\}) \\
 &\leq \gamma(N(V)(t)) \\
 &\leq \int_0^T \left| \frac{T+1-t}{T+2} \right| p_g(s) \gamma(V(s)) ds + \int_0^T \left| \frac{T+1}{T+2} \right| p_h(s) \gamma(V(s)) ds \\
 &\quad + \int_0^T |G(t, s)| p_f(s) \gamma(V(s)) ds \\
 &\leq \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_g\|_{L^\infty} v(s) + \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_h\|_{L^\infty} v(s) + \widehat{G} \|p_f\|_{L^\infty} v(s) \\
 &\leq \|v\|_{L^\infty} \frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty} + \|p_f\|_{L^\infty}].
 \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\|v\|_{L^\infty} \left(1 - \left[\frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty} + \|p_f\|_{L^\infty}] \right] \right) \leq 0$$

Par 3.9 il s'ensuit que $\|v\|_{L^\infty} = 0$, c'est-à-dire $v(t) = 0$ pour chaque $t \in J$ et $V(t)$ est relativement compact dans E . selon le Lemme d'Ascoli- Arzela, V est relativement compact dans D_R . Appliquons maintenant le Théorème, nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème 3.1-3.3. $\square$

3.2 Exemple:

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats. Considérons le problème fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha y_n(t) &= \frac{2}{19 + e^t} |y_n(t)|, t \in J = [0, 1], 1 < \alpha \leq 2 \\ y_n(0) - y'_n(0) &= \int_0^1 \frac{1}{5 + e^{5t}} |y_n(s)| ds, \\ y_n(T) - y'_n(T) &= \int_0^1 \frac{2}{3 + e^{3t}} |y_n(s)| ds, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$E = l^1 = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|y\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|.$$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ et $f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$,

$$f(t, x_n) = \frac{2}{19 + e^t} x_n, (t, x_n) \in J \times E,$$

$$g(t, x_n) = \frac{1}{5 + e^{5t}} x_n, (t, x_n) \in J \times E,$$

$$h(t, x_n) = \frac{2}{3 + e^{3t}} x_n, (t, x_n) \in J \times E,$$

Il est clair que les conditions (H1) et (H2) sont vérifiées avec

$$p_f(t) = \frac{2}{19 + e^t}, p_g(t) = \frac{1}{5 + e^{5t}}, p_h(t) = \frac{2}{3 + e^{3t}}.$$

De (3.7) la fonction G est donnée par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} & , \quad 0 \leq s \leq t \\ -\frac{(1+t)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} & , \quad t \leq s < 1 \end{cases}$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(t, s) ds &= \int_0^t G(t, s) ds + \int_t^1 G(t, s) ds \\ &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1+t)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1+t)}{3\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad + \frac{(1+t)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)}{3\Gamma(\alpha)} \\ &\quad - \frac{(1+t)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1+t)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$\widehat{G} < \frac{3}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}$$

La condition 3.9 est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned} \frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty} + \|p_f\|_{L^\infty}] &< \frac{2}{3} \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right] + \frac{3}{10\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{10\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{5}{10} + \frac{3}{10\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{10\Gamma(\alpha)} \\ &< 1 \end{aligned}$$

est satisfaite pour chaque $\alpha \in (1, 2]$. Alors d'après le Théorème 3.1, le problème 3.10 a une solution sur $[0, 1]$.

Conclusion générale

Dans ce travail, l'objectif est l'étude d'existence des solutions pour quelques classes des équations différentielles avec conditions intégrales dans des espaces de Banach de dimension fini ou infinie. Et spécifiquement en utilisant dans cette étude la technique de mesure de non- compacité combiné avec les théorèmes du point fixe et en particulier le point fixe de Mönch.

Cette technique est souvent utilisée dans plusieurs branches de l'analyse non linéaire. Pour obtenir l'existence des solutions, des conditions suffisantes seront considérées dans l'étude des différentes classes de ces problèmes aux limites. Et nous allons essayer de présenter les résultats que nous avons obtenus grâce à notre étude de l'existence de solutions à certaines des différents types des problèmes d'équations différentielles avec conditions intégrales. Et nous avons conclu ce travail en donnant des exemples pratiques de chaque problème pour confirmer ce travail.

Bibliography

- [1] A.A. Kilbas,H.M. Srivastava,J.J. Trujillo ,*Theory And Applications Of Fractional Differential Equations*,2006.
- [2] A. ARDJOUNI , A. DJOUDI: Existence and uniqueness of positive solutions for first-order non- linear Liouville-Caputo fractional differential equations. São Paulo J. Math. Sci., 14(2020), 381-390.
- [3] ABBAS, S., BENCHOHRA, M: Partial hyperbolic differential equations with finite delay involving the Caputo fractional derivative. Commun. Math. Anal. 7, 62-72 (2009).
- [4] ABBAS, S., BENCHOHRA, M: Fractional order integral equations of two independent variables. Appl. Math. Comput. 227, 755-761 (2014).
- [5] ABBAS, S., BENCHOHRA, M., N GUÉRÉKATA, G.M: Advanced Fractional Differential and Integral Equations. Nova Science Publishers, New York (2015).
- [6] A. HAMROUNI , S. BELOUL: PExistence of solutions for boundary value problems of fractional integro-differential equations with integral boundary conditions on Banach spaces.Nonlinear Stud, 26(3)(2019), 693-701.
- [7] A. NANWARE, D. B. DHAIGUDE:Existence and uniqueness of solutions of differential equations of fractional order with integral boundary conditions, J. Nonlinear Sci. Appl, 7 (2014), 246-254.
- [8] BENCHOHRA, M., HENDERSON, J., NTOUYAS, S.K., OUAHAB, A: Existence results for functional differential equations of fractional order. J. Math. Anal. Appl. 338, 1340-1350 (2008).
- [9] DARBO, G: Punti uniti in trasformazioni a condominio non compatto. Rend Sem. Mat. Univ. Padova 24, 84-92 (1955).

- [10] D. O'Regan, Fixed Point Theorems for Nonlinear Operators, J. Math. Anal. Appl. Vol. 202 (1996) pp 413-432.
- [11] D. O'Regan, Y. J. Cho, Y. Q. Chen, Topological Degree Theory and Applications, Copyright 2006.
- [12] D. SEBA: Nonlinear fractional differential inclusion with nonlocal fractional integro differential boundary conditions in Banach spaces. Math. Bohem., 142(3)(2017), 309-321.
- [13] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Vol. I: Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [14] G. Darbo, Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto. Rend. Sem. Mat. Un. Padova. 24, 84-92 (1955).
- [15] L.S. Goldenšteĭn, I.T. Gohberg, A.S. Markus, Investigation of some properties of bounded linear operators with their q -norms. Učen. Zap. Kishinevsk. Univ. 29, 29-36 (1957).
- [16] HILFER, R: Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore (2000).
- [17] H. MĕNCH: Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, vol. 4, no. 5, pp. 985-999, 1980.
- [18] J. Banaś, *On measures of noncompactness in Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae 21 (1980) 131-143.
- [19] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach spaces*, Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 60, Dekker, New York, 1980.
- [20] J. Banaś, M. Mursaleen, Sequence Spaces and Measures of noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations. Springer, New Delhi (2014).
- [21] KILBAS, A.A., SRIVASTAVA, H.M., TRUJILLO, J.J: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science B.V, Amsterdam (2006).
- [22] Kuratowski. K, Sur les espaces complets. Fund. Math. 15, 301-309 (1930).

- [23] L. Schwartz ,*Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle* ,Paris,1993.
- [24] L.S.Goldenšteĭn,A.S. Markus , On a measure of noncompactness of bounded sets and linear operators. In: Studies in Algebra and Mathematical Analysis, Kishinev, pp. 45-54 (1965).
- [25] L.S.Istrătescu , Investigation of some properties of bounded linear operators with their q -norms. Učen. Zap. Kishinevsk. Univ. 29, 29-36 (1957).
- [26] KURATOWSKI, K.;, Sur les espaces complets. Fund. Math. 15, 301-309 (1930).
- [27] MILLER, K.S., ROSS, B: An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations. John Wiley, New York (1993).
- [28] R. R. AKHMEROV, M. I. KAMENSKII, A. S. PATAPOV, A. E. RODKINA AND B. N. SADOVSKII: Measures of Noncompactness and Condensing Operators, trans. from the Russian by A. Iacob, Birkhauser Verlag, Basel, 1992.
- [29] S. Ishikawa ,H. Fujita, Some Variants of Strict-Set-Contraction. Vol. 11 (1972)pp 83-87.
- [30] S. Szuffla, On the application of measure of noncompactness to existence theorems.Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 75 (1986), 1-14.
- [31] TARASOV, V.E: Fractional Dynamics: Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Heidelberg; Higher Education Press, Beijing, Springer (2010).
- [32] VITYUK, A.N., GOLUSHKOV, A.V: Existence of solutions of systems of partial differential equations of fractional order. Nonlinear Oscil. 7, 318-325 (2004).
- [33] V. Millot , Analyse et calcul différentiel École Normale Supérieure 2015-2016 .
- [34] YONG ZHOU,JINRONG WANG,LU ZHANG: Basic Theory of Fractional Differential Equations,New Jersey : World Scientific, 2016.
- [35] Y. Zhou,X.H. Shen,L. Zhang:, Cauchy problem for fractional evolution equations with Caputo derivative, Eur. Phys. J. Special Topics 222, 1749-1765 (2013).

Résumé

Dans ce travail, nous allons présenter les résultats que nous avons obtenus grâce à notre étude de l'existence de solutions à certaines des différents types des problèmes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire avec conditions intégrales , impliquant des dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville avec des conditions aux limites dans des espaces de Banach muni de leurs topologies faibles sur des domaines bornés.

Notre principal outil est la technique de la mesure de non compacité combiné avec les théorèmes du point fixe et en particulier le point fixe de Mönch.

Cette technique est souvent utile dans l'existence de solutions de plusieurs types d'équations différentielles.

Summary

In this work, we will present the results that we obtained through our study of the existence of solutions to some of the different types of fractional order differential equation problems with conditions integrals, involving Caputo and Riemann-Liouville derivatives with boundary conditions in Banach spaces provided with their weak topologies on bounded domains.

Our main tool is the combined non-compactness measurement technique with the fixed point theorems and in particular the Mönch fixed point.

This technique is often useful in the existence of solutions types of differential or integral equations.

ملخص

وفي هذا العمل سوف نعرض النتائج التي حصلنا عليها من خلال دراستنا لوجود حلول لبعض مسائل المعادلات التفاضلية ذات الترتيب الكسري المختلفة مع الشروط الحدية التكاملية، التي تتضمن مشتقات كابوتو وريمان-ليوفيل مع الشروط الحدودية في فضاءات باناخ المقدمة مع طوبولوجياتها الضعيفة في المجالات المحدودة.

أداتنا الرئيسية هي تقنية قياس عدم التراص مع نظريات النقطة الثابتة وخاصة النقطة الثابتة لمونك.

هذه التقنية التي أثبتت نجاعتها في إثبات وجود حلول أنواع المعادلات التفاضلية أو التكاملية.