



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de  
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

# MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

## Thème

**Analyse variationnelle d'un problème  
de contact de matériau visco-élastique  
avec usure et endommagement**

Présenté par: Ahnani Wissam

Guessoum Sawsen

Soutenu publiquement le : 07/06/2023

Devant le jury composé de :

|                          |     |           |                |
|--------------------------|-----|-----------|----------------|
| Azeb Ahmed Abdel Aziz    | MCA | Président | Univ d'El Oued |
| Douib Bachir             | MCB | Encadreur | Univ d'El Oued |
| Mesai Aoun Mohamed Salah | MAA | Examineur | Univ d'El Oued |

Année universitaire : 2022 – 2023

---

## Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier un problème quasi-statique décrivant le contact avec frottement, et usure entre un corps piézoélectrique et une fondation en mouvement. Le matériau est modélisé par une loi de comportement électro-viscoélastique à mémoire longue et endommagement. L'usure de la surface de contact due au frottement est prise en compte et est décrite par la condition différentielle d'Archard. Le contact est modélisé avec la condition de compliance normale et la loi de frottement associée. Dans notre travail on a présenté une formulation variationnelle du problème puis on a établi l'existence et l'unicité de la solution sous des hypothèses sur les données. La démonstration est basée sur des arguments d'inéquation évolutive parabolique, d'inégalité variationnelle elliptique et du point fixe de Banach.

**Mots clés :** problème quasi-statique, viscoélastique, endommagement, compliance normale, frottement, usure, point fixe, solution faible.

---

## Abstract

The objective of this thesis is to study a quasi-static problem describing the contact with friction and wear between a piezoelectric body and a moving foundation. The material is modeled by an electro-viscoelastic constitutive law with long memory and damage. Wear of the contact surface due to friction is taken into account and is described by Archard's differential condition. The contact is modeled with the condition of normal compliance and the associated law of friction. In our work we presented a variational formulation of the problem then we established the existence and uniqueness of the solution under assumptions on the data. The proof is based on arguments of parabolic evolutionary inequality, elliptical variational inequality and Banach fixed point.

**Keywords :** quasi-static problem, viscoelastic, damage, normal compliance, friction, wear, fixed point, weak solution.

---

## ملخص

الهدف من هذا البحث هو دراسة مسألة شبه ساكنة لتلامس جسم كهروضغطي وأساس متحرك في وجود الاحتكاك والتآكل. لقد تم نمذجة المادة بواسطة قانون سلوك الأجسام الكهروضغطية ومرنة مع ذاكرة طويلة وتلف. يتم الأخذ بعين الاعتبار تآكل سطح التلامس بسبب الاحتكاك ويتم وصفه بواسطة شرط أرشارد التفاضلي. كما تم نمذجة التماس الجسم والأساس وفقاً لشروط الامتثال العادي وقانون الاحتكاك المرتبط به. قدمنا في عملنا صيغة تغييرية للمسألة، ثم حددنا وجود الحل و وحدانيته وفقاً لافتراضات على المعطيات. يركز البرهان على نظريات متباينة التطور المكافئة، ومتباينة التفاضل الإهليجية و نظرية النقطة الثابتة لبناخ.

**كلمات مفتاحية** مسألة شبه ساكنة، لزجة ومرنة، تلف، امتثال عادي، احتكاك، تآكل، نقطة ثابتة، حل ضعيف.

*Je dédie mon mémoire de master*

*A ma chère mère "Ghedioui Djamila"*

*A mon cher père "Abd Allah"*

*A mes chers frères "Ahmed, Abd Elillah, Taki  
Eddine"*

*A mes chères sœurs " Chima, Ikram"*

*A mes chères amis" Malika, Sawsen, Aicha,  
Marwa, Hanin, Nada, Nihad"*

*A tout la famille des proches, tous ceux qui  
portent un nom de famille "Ahnani" et "Ghedioui".*

*Wissam*

## DÉDICACES

*Je remercie **Allah** pour ce qu'il m'a permis de faire, puis je présente le fruit de ma récolte à mon âme dans cette vie, **ma mère** qui était mon inclinaison et mon refuge, à **mon père** qui était ma couverture et ma source de force après Dieu , et à **ma mère** qui m'a donné naissance et à ses héritiers ma bonté, et à **mon père** qui m'a donné la vie et a été ma fierté et mon honneur , à Chérie, ma grand-mère et mon soutien après **Allah mes frères** et à La source de mon sourire **Mes soeurs** , et à **la lumière de la famille** et de ses petits-enfants, et à tous **mes petits êtres aimés**, et cette **âme pure** qui nous a quittés, et qui m'a fait terminer mon travail avec un cœur brûlant, que **Allah** ait pitié de toi, à mon cher et aux compagnons de la marche et du chemin, **mes amis**, et à tous ceux qui m'ont appris la connaissance ou la sagesse tout au long de mon. et à toute ma grande famille.*

**Sawsen**

## REMERCIEMENTS

*Nous remercions **Dieu** Tout-Puissant qui nous permis de terminer ce travail.*

*Nous adressons nos remerciements les plus chaleureuses et sincères à notre encadreur le docteur **DOUIB Bachir** de nous avoir beaucoup appris lors de son encadrement de notre mémoire de master. Son enthousiasme et sa compétence nous ont encouragé à nos travaux de recherche sous sa direction.*

*Nous sommes très honorées que Monsieur le docteur **Mesai Aoun Mohamed Salah** a accepté de présider le jury de notre soutenance de notre thèse.*

*nous voudrions adresser tous nos remerciements sincèrement et apprécions au membre du jury Monsieur le docteur **AZEB AHMED Abelaziz**, je leur prie de trouver ici l'expression de ma plus grande gratitude.*

*A **tous nos amis et collègues** qui nous ont accompagnés et soutenus durant nos années des études, qu'ils trouvent ici l'expression de notre gratitude.*

*Aussi, nous rendons hommage à **tous mes maîtres et professeurs** à partir du primaire, à celles et ceux qui nous ont stimulé dans nos études, nous leur disons du fond du cœur merci en espérant que cette thèse leur soit dédié comme fruit de leur travail.*

*A **tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ces travaux**, de près ou de loin, nous remercions et apprécions beaucoup.*

***Ahnani wissam***

***Guessoum Sawsen***

# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction générale</b>                                                                                      | <b>1</b>  |
| <b>Notations principales</b>                                                                                      | <b>4</b>  |
| <b>1 MODÉLISATION DU CONTACT PIÉZOÉLECTRIQUE</b>                                                                  | <b>6</b>  |
| 1.1 Cadre physique . . . . .                                                                                      | 6         |
| 1.2 Phénomènes mécaniques . . . . .                                                                               | 9         |
| 1.3 Modèle mathématique . . . . .                                                                                 | 9         |
| 1.4 Lois de comportement piézoélectriques . . . . .                                                               | 11        |
| 1.4.1 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques . . . .                                           | 11        |
| 1.4.2 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec<br>mémoire longue et endommagement . . . . . | 12        |
| 1.5 Conditions aux limites de contact et lois de frottement avec usure . . . .                                    | 12        |
| 1.6 Conditions électriques à la surface de contact . . . . .                                                      | 14        |
| <b>2 Outils Mathématiques</b>                                                                                     | <b>16</b> |
| 2.1 Espaces fonctionnels . . . . .                                                                                | 16        |
| 2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables . . . . .                                                | 17        |
| 2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .                                                                             | 17        |
| 2.1.3 Espace de Hilbert . . . . .                                                                                 | 18        |
| 2.1.4 Espace de Sobolev . . . . .                                                                                 | 19        |
| 2.2 Espaces liés au problème à étudier . . . . .                                                                  | 20        |

|          |                                                                     |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.3      | Espaces des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .              | 23        |
| 2.3.1    | Espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ . . . . .                         | 24        |
| 2.3.2    | Espace de Sobolev $W^{k,p}(0, T; X)$ . . . . .                      | 25        |
| 2.4      | Éléments d'analyse non linéaire dans un espace de Hilbert . . . . . | 26        |
| 2.5      | Triplet de Gelfand . . . . .                                        | 28        |
| 2.6      | Théorème du point fixe de Banach . . . . .                          | 31        |
| 2.7      | Lemme de type Gronwall . . . . .                                    | 32        |
| <b>3</b> | <b>Problème électro-viscoélastique avec usure et endommagement</b>  | <b>33</b> |
| 3.1      | Formulation mécanique du problème . . . . .                         | 33        |
| 3.2      | Formulation variationnelle du problème . . . . .                    | 35        |
| 3.3      | Existence et unicité de la solution . . . . .                       | 42        |
|          | <b>Conclusion générale</b>                                          | <b>59</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                | <b>60</b> |

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

La piézoélectricité traduit l'aptitude qui présentent certains cristallins à se polariser sous l'action d'une contrainte mécanique (effet direct) ou bien à se déformer lorsqu'il leur est appliqué un champ électrique (effet inverse). La piézoélectricité ne peut se manifester, ni pour des corps conducteurs, ni pour des corps à haut degré de symétrie, autrement dit, tous les matériaux piézoélectriques sont anisotropes. Ceci signifie qu'ils possèdent des propriétés physiques variant selon la direction considérée. Bien qu'ayant été prédit par Coulomb et découvert par Becquerel en 1879, l'effet piézoélectrique n'a été correctement expliqué par expérimentation qu'en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie. Par la suite le formalisme de la piézoélectricité a été développé par P. Duhem, F. Pockels et particulièrement par W. Voigt en 1894 [33].

Les matériaux piézoélectriques sont des matériaux intelligents (adaptatifs) ; ils ont surtout trouvé application dans le contrôle des vibrations dans les domaines de l'automobile (injecteurs), l'aérospatiale, le contrôle de forme (ailes d'avion, miroirs des télescopes) ainsi que dans le contrôle en acoustique des nuisances sonores : le quartz est largement utilisé dans le domaine des télécommunications en tant que filtre contrôleur ou générateur de fréquence. Actuellement, il y a de nouvelles applications dans le domaine de la médecine, du suivi de grossesse aux problèmes cardiaques en passant par l'examen du tube digestif, le principe est le même que celui du sonar. Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps (piézoélectrique) déformable entre en contact avec d'autres corps [15, 14] : dans un contexte médical, la modélisation correcte de l'interaction entre les outils de chi-

rurgie et les organes est de première importance pour réaliser des simulations réalistes. Des modèles généraux pour des matériaux viscoélastiques avec effets piézoélectriques peuvent être trouvés plus récemment dans [4, 21, 24], et pour les modèles des matériaux électro-viscoélastiques à mémoire longue sont cités dans [14, 20, 28].

Ce travail se donne pour étudier d'un problème de contact entre un corps piézoélectrique et une fondation conductrice, il est évident que le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, etc.... Avant l'application de forces sur un corps, la surface de contact réelle sur laquelle les corps se touchent est inconnue ; par ailleurs, les conditions de frontière sur cette surface inconnue fait intervenir des efforts et des déplacements inconnus. En conséquence, les modèles mathématiques de contact impliquent des systèmes d'inégalités ou d'équations non linéaires (non linéarités géométriques ou matérielles). L'abondance de ce type de problèmes a fait prendre un essor considérable mais relativement récent à l'étude mécanique, mathématique et numérique de la Mécanique du Contact, engendrant de nombreux ouvrages sur le sujet, voir par exemple [4, 6, 12, 22, 30]. Signorini fut le premier à énoncer un problème de contact entre un corps déformable et une fondation rigide, ce problème fut résolu pour la première fois par Fichera en 1964 (voir [19]). La Théorie Mathématique de la Mécanique du Contact débute avec Duvaut et Lions, qui présentèrent des formulations variationnelles des problèmes de contact et des résultats d'existence et d'unicité (voir [17]).

Dans tous les travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction  $\beta$  ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque  $\beta$  il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque  $\beta = 0$ , le matériau est complètement endommagé et lorsque  $0 < \beta < 1$ , il a un d'endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes de contact avec endommagement ont été étudiés dans [3, 14, 15, 16, 20, 26, 30].

Notre travail, qui s'inspire de l'article [26], représente une contribution à l'analyse d'un problème de contact en tenant compte de l'effet piézoélectrique du matériau. Nous considérons un modèle mathématique pour le processus de contact avec compliance normale et frottement lorsque l'usure de la surface de contact due au frotte-

ment est prise en compte comme dans [31, 32]. L'étude se fait lorsque le contact est avec une fondation conductrice et de matériau électro-viscoélastique à mémoire longue, défini par un opérateur de relaxation. Nous dérivons la formulation variationnelle et prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible du modèle. Sous l'hypothèse de petite transformation nous étudions un processus est supposé être électriquement statique, c'est-à-dire que tous les effets du rayonnement sont négligés et mécaniquement quasi-statique. Les conditions aux limites sont compliance normale et avec frottement et usure. Les conditions électriques sont introduites dans le cas où la fondation est conductrice. Notre étude de phénomène de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant de résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Ce mémoire se compose de trois chapitres : Le premier chapitre introduit des notations générales de la mécanique nécessaire pour une bonne compréhension de la suite du problème traité. Nous commençons par le cadre physique et le modèle mathématique utilisé. Dans le deuxième chapitre nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées, pour ceci on a utilisé [1, 10]. Ensuite nous passons aux résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les équations variationnelles, les équations et les inéquations d'évolution, les lemmes de Gronwall et de certains théorèmes très utiles dans notre travail (voir [2, 3, 14]). Enfin on a consacré le dernier chapitre pour étudier un problème de contact avec compliance normale entre un corps électro-viscoélastique et une fondation avec frottement et usure ; nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible, en utilisant les techniques de point fixe et de monotonie.

## NOTATIONS PRINCIPALES

Si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ , on note par

|                                        |                                                                                      |
|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$                           | l'ensemble des nombres réels,                                                        |
| $\mathbb{K}$                           | l'ensemble des nombres réels ou imaginaire,                                          |
| $\overline{\Omega}$                    | l'adhérence de $\Omega$ ,                                                            |
| $\Gamma$                               | la frontière de $\Omega$ supposée régulière,                                         |
| $\Gamma_i (i = \overline{1, 3}, a, b)$ | une partie mesurable de la frontière $\Gamma$ ,                                      |
| $\text{mes } \Gamma_j (j = 1, a)$      | la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de $\Gamma_j$ ,                       |
| $\nu$                                  | la normale unitaire sortante à $\Gamma$ ,                                            |
| $v_\nu, v_\tau$                        | les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel $v$ ,                     |
| $\sigma_\nu, \sigma_\tau$              | les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel $\sigma$ ,                |
| $C^1(\overline{\Omega})$               | l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$ , |
| $H$                                    | l'espace $L^2(\Omega)^d$ ,                                                           |
| $H_1$                                  | l'espace $H^1(\Omega)^d$ ,                                                           |
| $\mathcal{H}$                          | l'espace $L_s^2(\Omega)^{d \times d}$ ,                                              |
| $\mathcal{H}_1$                        | l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H} / \text{Div } \sigma \in H\}$ ,                   |
| $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$              | l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ ,                             |
| $H_\Gamma$                             | l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ ,                                               |
| $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$             | l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,                                         |
| $H'_\Gamma$                            | l'espace dual de $H_\Gamma$ ,                                                        |
| $W$                                    | l'espace $\{\zeta \in H^1(\Omega) / \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$ ,             |
| $\mathcal{W}$                          | l'espace $\{D = (D_i) / D_i \in L^2(\Omega), \text{div } D \in L^2(\Omega)\}$ ,      |

$\gamma : H_1 \longrightarrow H_\Gamma$  l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $H$  est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

$(\cdot, \cdot)_H$  le produit scalaire de  $H$ ,  
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$  le produit de dualité entre  $H'$  et  $H$ ,  
 $\|\cdot\|_H$  la norme de  $H$ ,

De plus, si  $[0, T]$  un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , on note par

$C(0, T; H)$  l'espace des fonctions continues sur  $[0, T]$  dans  $H$ ,  
 $C^1(0, T; H)$  l'espace des fonctions continument dérivables sur  $[0, T]$  dans  $H$ ,  
 $L^p(0, T; H)$  l'espace des fonctions mesurables sur  $[0, T]$  dans  $H$ ,  
telles que  $\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt < +\infty$  avec les modifications usuelles si  $p = +\infty$ .  
 $\|\cdot\|_{L^p(0, T; H)}$  la norme de  $L^p(0, T; H)$ ,  
 $W^{k, p}(0, T; H)$  l'espace de Sobolev de paramètres  $k$  et  $p$ ,  
 $\|\cdot\|_{W^{k, p}(0, T; H)}$  la norme de  $W^{k, p}(0, T; H)$ .

Autre notations :

$\dot{u}, \ddot{u}$  les dérivées première et seconde de  $u$  par rapport au temps,  
 $\nabla \varphi$  le gradient de  $\varphi$ ,  
 $\text{Div } \sigma$  divergence de  $\sigma$ ,  
 $\text{div } D$  divergence du vecteur  $D$ ,  
 $\varepsilon(u)$  le tenseur de déformation,  
 $\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur  $\mathbb{R}^d$ ,  
 $\Lambda^n$  puissance  $n$  de l'opérateur  $\Lambda$ ,  
 $c, C$  des constantes génériques strictements positives,  
 $\Psi_K$  fonction indicatrice de  $K$ ,  
p.p. presque partout,  
i.e. c'est-à-dire.

# CHAPITRE 1

---

## MODÉLISATION DU CONTACT PIÉZOÉLECTRIQUE

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique de contact ou nous allons introduire le cadre physique utilisé dans ce mémoire, nous commençons de rappeler l'équation de mouvement de Cauchy et décrire les lois de comportement électro-viscoélastiques et électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement. Par ailleurs nous précisons les conditions aux limites de contact concernant les problèmes étudiés dans ce mémoire.

### 1.1 Cadre physique

Nous considérons un corps matériel piézoélectrique déformable qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  avec une frontière lipschitzienne  $\Gamma$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , correspondant aux conditions aux limites mécaniques tel que  $\text{mes } \Gamma_1 > 0$ . D'autre part,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  est divisée en deux parties disjointes et mesurables  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  correspondant aux conditions aux limites électriques telle que  $\text{mes } \Gamma_a > 0$ . On note par  $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agissent des tractions surfaciques de densité  $f_2$  et dans  $\Omega$  agissent des forces volumiques de densité  $f_0$  et des charges électriques de densité volumiques  $q_0$ . On suppose que  $f_2$  et  $f_0$  varient très lentement par rapport au temps. Le corps est soumis à l'action de potentiel nul sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière, ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique  $q_2$  agissent sur la partie

$\Gamma_b$  (voir figure 1.1).

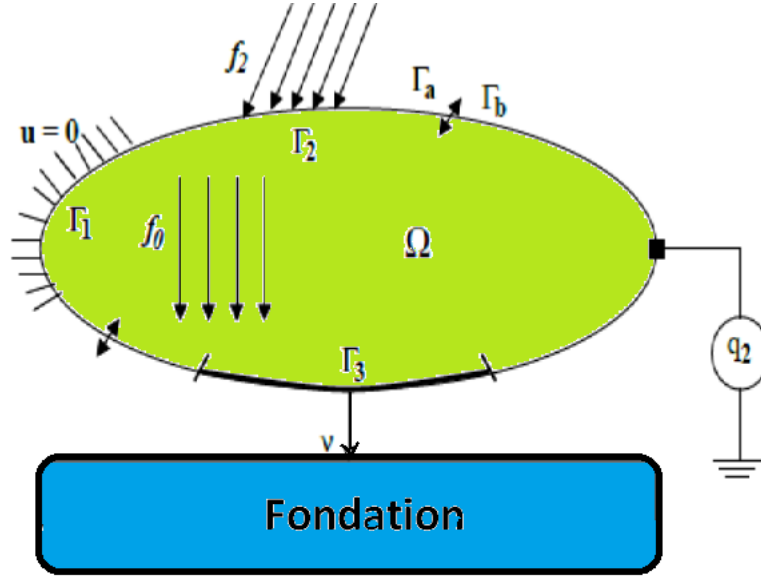


FIGURE 1.1 – Corps piézoélectrique en contact avec une fondation

Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Nous considérons de contact avec compliance normale et frottement, lorsque l'usure de la surface de contact due au frottement est prise en compte. On étudie l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps  $[0, T]$ , sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous désignons par  $\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$ ; ". " représente le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{S}^d$  et  $\|\cdot\|$  représentent respectivement la norme sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ .

Dans ce qui suit les indices  $i$  et  $j$  sont compris entre 1 et  $d$ ; la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée et l'indice qui suit une virgule indique une dérivée partielle par rapport à la composante correspondante de la variable indépendante. Nous avons

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i v_i, & \|v\| &= (v \cdot v)^{\frac{1}{2}}, & \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\tau\| &= (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}}, & \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

Pour un vecteur  $v$ , nous notons par  $v_\nu$  et  $v_\tau$  les composantes normale et tangentielle

à la frontière définies par

$$\begin{cases} v_\nu = v \cdot \nu, \\ v_\tau = v - v_\nu \cdot \nu. \end{cases} \quad (1.1)$$

Nous désignons par  $\sigma = \sigma(x, t)$  le champ des contraintes, par  $u = u(x, t)$  le champ des déplacements et par  $\varepsilon(u)$  le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à  $x \in \bar{\Omega}$  et  $t \in [0, T]$ .

Nous avons aussi Pour un champ des contraintes  $\sigma$  nous dénotons par  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  les traces normale et tangentielle d'une fonction  $\sigma \in H_1$ , on rappelle que lorsque  $\sigma$  est une fonction régulière alors :

$$\begin{cases} \sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \\ \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \cdot \nu. \end{cases} \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma \nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire dans l'établissement de formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps ; par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2},$$

où  $\dot{u}$  désigne le champ des vitesses et  $\ddot{u}$  désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses  $\dot{u}$  les notations  $\dot{u}_\nu$  et  $\dot{u}_\tau$  représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{u}_\nu = \dot{u} \cdot \nu, \\ \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \cdot \nu. \end{cases}$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (1.4)$$

en outre, le champ électrique est défini par la relation suivante

$$E(\varphi) = -\nabla \varphi = -(\varphi_{,i}). \quad (1.5)$$

## 1.2 Phénomènes mécaniques

Dans cette section exact, la note traite de trois phénomènes, à savoir aux l'endommagement, l'usure et le frottement.

### L'endommagement

L'endommagement est un phénomène très important en ingénierie, car il affecte directement la structure des machines. Il existe une littérature abondante sur ce sujet. Des modèles introduisant l'influence de l'endommagement interne du matériau ont été investi mathéma-tiquement.

### L'usure

L'usure est un problème majeur pour les matériaux. Lorsque un corp entrent en contact avec frottement et glissement, les surfaces en contact s'en retrouvent usées, la surface la plus rigide use l'autre.

### Le frottement

Le frottement est causé par les irrégularités d'une surface. Bien qu'une surface puisse paraître lisse à l'oeil nu, des petites aspérités (des irrégularités) sont présentes sur la surface d'un objet lorsqu'on le regarde au microscope. Il faut également considérer la force normale. Cette force est en lien direct avec la force gravitationnelle, puisqu'elle est généralement en action-réaction. Plus la force normale est grande, plus la force de frottement sera grande.

Nous allons maintenant décrire le modèle mathématique associé au cadre physique que nous avons vu au paragraphe précédent.

## 1.3 Modèle mathématique

Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le cadre physique de la figure 1.1. Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  avec une surface frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  supposée assez régulière. Du point de vue mécanique, on étudie le nouvel état d'équilibre du corps résultant de l'application des forces volumiques dans  $\Omega$  et des force surfacique sur une partie de la frontière  $\Omega$ , dans un intervalle de temps  $[0, T]$ . Les fonctions inconnues de notre problème  $\mathcal{P}$  sont le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le

champ de potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ de déplacements électriques  $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ d'endommagement  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le champ d'usure  $\zeta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de cauchy

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.6)$$

où  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne la densité de masse, et "Div" représente l'opérateur divergence pour le tenseurs ;  $\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$ . Le processus d'évolution défini par (1.6) s'appelle processus dynamique. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier, par exemple, dans la cas où le champ des vitesses  $\dot{u}$  varie très lentement par rapport au temps, le terme  $\rho \ddot{u}$  peut être négligé, dans ce cas l'équation (1.6) devient

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) s'appelle l'équation d'équilibre. Le processus d'évolution défini par (1.7) s'appelle processus quasi-statique.

Nous rappelons que dans le cadre physique,  $f_0$  et  $f_2$  varient très lentement par rapport au temps, par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables, nous plaçons donc le cas quasi-statique et nous utilisons l'équation (1.7). Puisque le corps est encastré sur  $\Gamma_1$ , le champ des déplacements s'annule

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.8)$$

La condition aux limites en traction est

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.9)$$

$f_2$  étant une donnée du problème.

Le potentiel électrique s'annule sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (1.10)$$

Tandis que sur  $\Gamma_b$ , une charge électrique de densité  $q_2$  est prescrite,

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T). \quad (1.11)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.7)-(1.11) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact  $\Gamma_3$ .

## 1.4 Lois de comportement piézoélectriques

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. Dans la description des phénomènes purement électro-mécaniques, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes  $\sigma$ , le tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon(u)$ . Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques.

Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériaux électro-viscoélastiques, pour ceci nous prenons en considération le champ de contraintes  $\sigma = (\sigma_{ij})$ , le champ de déplacements mécaniques  $u = (u_i)$ , le champ de déplacements électriques  $D = (D_i)$ , le champ électrique  $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ , le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$ , l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A}$ , l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F}$ , l'opérateur de permittivité électrique  $B$  et la fonction de relaxation  $M$ . Ceci est naturellement il lui faut ajouté d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de solide.

### 1.4.1 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes  $\sigma$  et le vecteur des déplacements électriques  $D$  sont reliés par la loi de comportement

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*E(\varphi), \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi), \end{cases} \quad (1.12)$$

dans laquelle l'opérateur  $\mathcal{A}$  est l'opérateur de viscosité,  $\mathcal{F}$  est l'opérateur d'élasticité pas forcément linéaire,  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  est le tenseur piézoélectrique,  $B = (b_{ij})$  est le tenseur de la permittivité électrique et  $E(\varphi) = -\nabla\varphi$  représente le champ électrique, par ailleurs  $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*) = (e_{kij})$  dénote le transposé du tenseur  $\mathcal{E}$  telle que

$$\mathcal{E}\sigma.v = \sigma.\mathcal{E}^*v \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, v \in \mathbb{R}^d \quad (1.13)$$

### 1.4.2 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement

La loi de comportement d'un matériau électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement est donnée par

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) - \mathcal{E}^* E(\varphi) - \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u(s)) ds, \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi), \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}$  sont des opérateurs de viscosité et d'élasticité qui sont pas forcément linéaire,  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  est le tenseur piézoélectrique,  $B$  est le tenseur de la permittivité électrique,  $E(\varphi) = -\nabla\varphi$  représente le champ électrique, enfin,  $M$  est un tenseur de relaxation qui représente une fonction constitutive non linéaire et décrit le comportement électro-viscoélastique du matériau.

Nous utilisons la loi (1.14) dans le problème  $\mathcal{P}$  qu'on va étudier dans le troisième chapitre de ce mémoire.

$\beta$  représente le champ d'endommagement est modélisé par

$$\dot{\beta} - k_e \triangle \beta + \partial\Psi_K \ni S(\varepsilon(u), \beta) \text{ dans } \Omega \times (0, T),$$

où  $k_e$  est un coefficient positif et  $\partial\Psi_K$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble  $K$  des fonctions d'endommagement admissibles donné par

$$K = \{\xi \in H^1(\Omega) / 0 \leq \xi \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\}. \quad (1.15)$$

## 1.5 Conditions aux limites de contact et lois de frottement avec usure

Dans ce paragraphe, nous exposons en détails les conditions aux limites que nous utilisons dans le problème de contact en petites déformations. Nous décrivons aussi bien l'aspect mathématique que mécanique de ces conditions.

Par *condition de contact* nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements  $u_\nu$ , des vitesses  $\dot{u}_\nu$  ou des contraintes  $\sigma_\nu$ . Par *loi de frottement* nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle  $\sigma_\tau$  et

le déplacement tangentiel  $u_\tau$  où la vitesse tangentiel  $\dot{u}_\tau$ . Notons ici que  $\sigma_\tau$  s'appelle aussi *force de frottement*.

Nous décrivons maintenant brièvement les conditions aux limites sur la surface de contact  $\Gamma_3$ . Nous introduisons la fonction d'usure  $\zeta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  qui mesure l'usure accumulée de la surface. L'évolution de l'usure de la surface de contact est régie par une version simplifiée de la loi d'Archard (voir [31, 32]). La forme rapide de la loi d'Archard est

$$\dot{\zeta} = k_1 \mu p_\nu R^*(\|\dot{u}_\tau - v^*\|), \quad (1.16)$$

où  $k_1 > 0$  est un coefficient d'usure,  $p_\nu$  est une fonction imposée de la compliance normale,  $\mu \geq 0$  est le coefficient de frottement,  $v^*$  est la vitesse tangentielle de la fondation,  $|\dot{u}_\tau - v^*|$  représente la vitesse de glissement entre la surface de contact et la fondation et  $R^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est l'opérateur de troncature défini par

$$R^*(r) = \begin{cases} r & \text{si } r \leq R, \\ R & \text{si } r > R, \end{cases}$$

où  $R$  étant une constante positive fixe. Nous voyons que le taux d'usure est supposé être proportionnel à la contrainte de contact et à la vitesse de glissement. Pour des raisons de simplicité, nous supposons dans la suite de la section que le mouvement de la fondation est uniforme. Rappelons que dans le cas de l'usure et  $p_\nu = p_\nu(u_\nu - h - \zeta)$ , une version de la compliance normale est donnée par :

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - h - \zeta), \quad \|\sigma_\tau\| \leq p_\nu(u_\nu - h - \zeta), \quad (1.17)$$

où  $h$  représente l'écart initial entre le corps et la fondation. Nous modélisons le contact par frottement entre le corps électro-viscoélastique et la fondation avec une version de la loi de frottement de Coulomb. Puisqu'il n'y a qu'un contact glissant il s'ensuit que

$$\sigma_\tau = -\mu p_\nu \frac{(\dot{u}_\tau - v^*)}{\|\dot{u}_\tau - v^*\|}, \quad (1.18)$$

ces relations fixent des contraintes sur l'évolution de la contrainte tangentielle, en particulier, la contrainte tangentielle est dans la direction opposée à la vitesse de glissement relative  $\dot{u}_\tau - v^*$ .

## 1.6 Conditions électriques à la surface de contact

Dans ce paragraphe nous allons énoncer les conditions de contact électrique, associées aux problèmes électro-mécaniques, sur la partie  $\Gamma_3$  de la surface. Nous supposons que la fondation est conductrice et son potentiel est maintenu à  $\varphi_0$  :

La condition électrique sur  $\Gamma_3$  est donnée par :

$$D.\nu = \psi(u_\nu - h - \zeta)\phi_L(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.19)$$

où  $\psi$  et  $\varphi$  sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes : Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point de la surface (*i.e.*  $u_\nu < h$ ), il n'y a pas des charges électriques sur la surface de contact et le champ de la composante normale du déplacement électrique disparaît *i.e.*

$$u_\nu < h \Rightarrow D.\nu = 0. \quad (1.20)$$

Durant le processus de contact, (*i.e.*  $u_\nu \geq h$ ) la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge électrique libre est supposée être proportionnelle à la différence de potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive  $k$  comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq h \Rightarrow D.\nu = k(\varphi - \varphi_0). \quad (1.21)$$

Combinons (1.20) et (1.21) pour obtenir

$$D.\nu = k\chi_{[0, \infty]}(u_\nu - h)(\varphi - \varphi_0), \quad (1.22)$$

où  $\chi_{[0, \infty]}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, \infty[$ , qui est donnée par :

$$\chi_{[0, \infty]}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (1.22) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications. Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition(1.22) par la condition (1.19) dans

laquelle  $\psi$  est une fonction régulière qui va être décrite ci-dessous et  $\phi_L$  est une fonction de troncation,

$$\phi_L(s) = \begin{cases} -L & \text{si } s < -L, \\ s & \text{si } -L \leq s \leq L, \\ L & \text{si } s > L, \end{cases} \quad (1.23)$$

où  $L$  est une constante positive très grande. De cette façon, la différence  $\varphi - \varphi_0$  est remplacé par  $\phi_L(\varphi - \varphi_0)$  : Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'application du modèle puisque  $L$  peut être arbitrairement grand et donc dans les applications  $\phi_L(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$ .

Les raisons de la régularisation (1.19) de (1.22) sont mathématiques. Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction  $k\chi_{[0,\infty[}$  dans (1.22) par une fonction lipschitzienne : Un choix possible est l'exemple suivant :

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0, \\ k\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\delta}, \\ k & \text{si } r < \frac{1}{\delta}, \end{cases} \quad (1.24)$$

où  $\delta > 0$  est un paramètre assez grand. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface, et se stabilise quand la pénétration  $u_\nu - h$  atteint la valeur  $\frac{1}{\delta}$ . Deuxièmement, nous avons besoin du terme  $\phi_L(\varphi - \varphi_0)$  pour rendre le terme  $\varphi - \varphi_0$  borné.

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire, et donnons quelques propriétés nécessaires dans la suite. Partout dans ce chapitre  $\Omega$  est un domaine borné et lipschitzien de  $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ , de frontière  $\Gamma$  représentable localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de  $\mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\Omega$  étant situé localement d'un seul côté de  $\Gamma$ . Par ailleurs, nous considérons une partition  $\Gamma$  en trois parties mesurables disjointes  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  d'un côté et une partition de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  en deux parties ouvertes  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  d'un autre côté, telles que  $\text{mes } \Gamma_1 > 0$  et  $\text{mes } \Gamma_a > 0$ .

## 2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles. Nous allons aborder les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de Hilbert, les fonctions  $p$  intégrables et les espaces de Sobolev, qui nous permettront d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique au prochaine section. Nous rappelons par la suite les définitions et quelques propriétés de ces espaces. Nous ne donnons pas de démonstrations afin de pas rallonger la longueur de ce chapitre.

### 2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur  $\Omega$  est noté par  $C(\overline{\Omega})$  et il est un espace de Banach pour la norme donnée par :

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)|, x \in \overline{\Omega}\}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur  $\overline{\Omega}$ . Pour tout entier  $k$ , l'espace  $C^k(\overline{\Omega})$  donné par

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) / D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq k\},$$

est l'espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiable sur  $\overline{\Omega}$ . Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

L'espace  $C^\infty(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables :

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur l'ensemble à support compact inclus dans  $\Omega$ , défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) / \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où  $\text{supp } v = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) / v(x) \neq 0\}}$  est le support de la fonction  $v$ . Si  $\text{supp } v$  est un sous ensemble propre de  $\Omega$ , on dit que  $v$  est une fonction à support compact dans  $\Omega$ .

### 2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$

On suppose connues la définition des applications mesurables pour la mesure de Lebesgue et la définition de  $L^1(\Omega)$  ; l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$ , muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |v(x)| dx.$$

**Définition 2.1.1.** *L'espace des fonctions  $p$ -intégrables dans  $\Omega$  peut être défini par :*

$$L^p(\Omega) = \{v \text{ mesurables sur } \Omega \text{ à valeurs dans } \mathbb{K} / |v|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Grâce à l'inégalité de Minkowski,  $L^p(\Omega)$  c'est un espace normé, dont la norme noté  $\|v\|_{L^p}$ , est définie par :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On appelle l'espace de Lebesgue  $L^\infty(\Omega)$  l'ensemble

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable; } \exists C > 0, |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

### 2.1.3 Espace de Hilbert

Soit  $H$  un espace vectoriel réel et  $(.,.)_H$  un produit scalaire sur  $H$  i.e.  $(.,.)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par  $\|\cdot\|_H$  l'application de  $H \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par :

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1)$$

On rappelle que  $\|\cdot\|_H$  est une norme sur  $H$  qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2)$$

On dit que  $H$  est un espace de Hilbert si  $H$  est complet pour la norme défini par (2.1). Soit  $H'$  l'espace dual de  $H$  c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur  $H$  muni de la norme :

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{|\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}|}{\|v\|_H},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$  représente le produit de dualité entre  $H'$  et  $H$ .

### 2.1.4 Espace de Sobolev

L'espace de Sobolev a permis de résoudre de bon nombre des problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espaces de Sobolev  $H^1(\Omega)$  défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / u_{,i} \in L^2(\Omega), \quad i = \overline{1, d}\}.$$

On note par  $\nabla u$  le vecteur de composante  $u_{,i}$ . On a  $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$  pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ .

On sait que  $H^1(\Omega)$  est un espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u_{,i}, v_{,i})_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}},$$

alors on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

**Théorème 2.1.1. (*de densité*).**

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

**Théorème 2.1.2. (*Rellich*).**

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

**Théorème 2.1.3. (*trace de Sobolev*).**

*Il existe une application linéaire et continue  $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  telle que  $\delta u = u|_{\Gamma}$  pour tout  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ .*

**Remarque 2.1.1.** *L'espace  $L^2(\Gamma)$  ci-dessus représente l'espaces de fonctions réelles sur  $\Gamma$  qui sont  $L^2$  pour la mesure superficielle  $d\Gamma$ . L'application  $\delta$  s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application  $u \mapsto u|_{\Gamma}$  définir pour  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ .*

**Remarque 2.1.2.** On note que l'application de trace  $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  est un opérateur compact.

**Définition 2.1.2.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $p \in [1, +\infty]$ , nous définissons l'espace de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  par :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u\},$$

**Remarque 2.1.3.** Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier  $D^\alpha u$  et  $v_\alpha$ .

La norme sur l'espace  $W^{k,p}(\Omega)$  est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour  $p = 2$ , on note par  $H^k(\Omega)$  l'espace  $W^{k,2}(\Omega)$  et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Pour plus des détails sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [1, 10].

## 2.2 Espaces liés au problème à étudier

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques  $u$  et  $\sigma$  :

$$\begin{cases} H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\} = L^2(\Omega)^d, \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\} = L_s^2(\Omega)^{d \times d}, \\ H_1 = \{u = (u_i) \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} = H^1(\Omega)^d, \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les espaces  $H, \mathcal{H}, H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{cases} (u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx & \forall u, v \in H, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx & \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}, \\ (u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} & \forall u, v \in H_1, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, \text{Div } \tau)_H & \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1, \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$  et  $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$  sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces  $H, \mathcal{H}, H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont notées par  $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$  respectivement.

Puisque la frontière  $\Gamma$  est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur  $\nu$  à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs  $v \in H_1$  nous utilisons la notation  $v$  pour désigner la trace  $\gamma v$  de  $v$  sur  $\Gamma$ . Rappelons que l'application de trace  $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$  est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de  $H_1$  par cette application est notée par  $H_{\Gamma} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$  ce sous-espace s'injecte continûment dans  $L^2(\Gamma)^d$ . Désignons par  $H'_{\Gamma}$  le dual de  $H_{\Gamma}$ , et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}}$  le produit de dualité entre  $H'_{\Gamma}$  et  $H_{\Gamma}$ . Pour tout  $\sigma \in \mathcal{H}_1$ , il existe un élément  $\sigma\nu \in H'_{\Gamma}$  tel que :

$$\langle \sigma\nu, \gamma v \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \quad (2.5)$$

En outre, si  $\sigma$  est assez régulier (par exemple  $C^1$ ), nous avons la formule

$$\langle \sigma\nu, \gamma v \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1. \quad (2.6)$$

Donc, pour  $\sigma$  assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1. \quad (2.7)$$

Par ailleurs, soient  $u$  et  $v$  deux fonctions assez régulières, elles vérifient la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v da. \quad (2.8)$$

Nous introduisons au présent un sous-espace fermé de  $H_1$ , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1\}. \quad (2.9)$$

Soit  $\text{mes } \Gamma_1 > 0$ . Alors il existe une constante  $c_K > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  vérifie l'inégalité suivante, dite inégalité de Korn

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq c_K \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (2.10)$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouver dans ([27] p.79)

Nous considérons sur l'espace  $V$ , le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (2.11)$$

Soit  $\|\cdot\|_V$  la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V. \quad (2.12)$$

Par l'inégalité de Korn et (2.4), il vient que  $\|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et ainsi  $(V, \|\cdot\|_V)$  est un espace de Hilbert.

En effet, d'après (2.4)

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}.$$

Alors

$$\|v\|_{H_1} = (\|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant (2.10) et (2.12), il résulte

$$c_K \|v\|_{H_1} \leq \|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.13)$$

Alors  $\|\cdot\|_{H_1}$  équivalent  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ .

En outre, d'après le théorème de trace de Sobolev, on trouve qu'il existe une constante  $c_0 > 0$  dépendante uniquement de  $\Omega, \Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (2.14)$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnus électriques (Le champ des déplacements électriques  $D$  et le potentiel électrique  $\varphi$ ) de

problème électro-mécanique qui va être introduit dans ce mémoire. Soient les espaces

$$\begin{cases} W = \{\phi \in H^1(\Omega) / \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \\ \mathcal{W} = \{D = (D_i) / D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} D \in L^2(\Omega)\}, \end{cases}$$

où  $\operatorname{div} D = D_{i,i}$ . Ces espaces  $W$  et  $\mathcal{W}$  sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi, \phi)_W = \int_{\Omega} \nabla \varphi, \nabla \phi dx, \quad (D, E)_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega} D \cdot E dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \cdot \operatorname{div} E dx. \quad (2.15)$$

Soient  $\|\cdot\|_W$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$  les normes associées ;

$$\|\phi\|_W = \|\nabla \phi\|_H, \quad \|D\|_{\mathcal{W}}^2 = \|D\|_H^2 + \|\operatorname{div} D\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.16)$$

Puisque  $\operatorname{mes} \Gamma_a > 0$ , l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$\|\nabla \phi\|_H \geq c_F \|\phi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \phi \in W, \quad (2.17)$$

où  $c_F > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $\Omega$  et  $\Gamma_a$ . Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée, par exemple dans [10].

Il s'ensuit de (2.16), et (2.17) que  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_W$  sont des normes équivalentes sur  $W$  et donc  $(W, \|\cdot\|_W)$  est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante  $a_0$  dépendant uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$\|\phi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq a_0 \|\phi\|_W, \quad \forall \phi \in W. \quad (2.18)$$

Aussi, rappelons que lorsque  $D \in \mathcal{W}$  est une fonction régulière, la formule de Green est satisfaite

$$(D, \nabla \phi)_H + (\operatorname{div} D, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (2.19)$$

## 2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Soit  $0 < T < \infty$  et soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel.

**Définition 2.3.1.** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble  $E \subset [0, T]$  de mesure nulle et une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que  $\|u_n(t) - u(t)\|_X \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , pour tout  $t \in [0, T]/E$ .

**Définition 2.3.2.** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  est dite fortement dérivable en  $t_0 \in (0, T)$  s'il existe un élément  $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$  appelé la dérivée forte de  $u$  en  $t_0$ , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (u(t_0 + h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

**Définition 2.3.3.** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  est dite intégrable s'il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X dt = 0.$$

**Théorème 2.3.1. (Bochner).** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  mesurable et intégrable si et seulement si  $t \rightarrow \|u(t)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est intégrable. Dans ce cas

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

### 2.3.1 Espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$

Soit  $1 \leq p < \infty$ . L'espace de Lebesgue  $L^p(0, T; X)$  est l'ensemble des classes de fonctions  $u : [0, T] \rightarrow X$  mesurables, telles que l'application  $t \rightarrow \|u(t)\|_X$  appartient à  $L^p(0, T)$ . On sait que  $L^p(0, T; X)$  est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{ c > 0 / \|u(t)\|_X < c \text{ p.p. } t \in (0, T) \} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

**Proposition 2.3.1.** 1.  $L^p(0, T; X)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) est un espace de Banach.

2. Si  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$ , alors  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

3.  $L^r(0, T; X) \subseteq L^q(0, T; X)$ , avec injection continue,  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ .

4. Si  $X$  est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où  $L^p(0, T; X)'$  représente le dual de l'espace  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition 2.3.4.** Soit  $u, w \in L^1(0, T; X)$ . La fonction  $w$  s'appelle la dérivée généralisée d'ordre  $n$  de  $u$  sur  $(0, T)$  si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) w(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T)$$

$C_c^\infty(0, T)$  étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables à support compact dans  $(0, T)$ . Nous écrivons  $w = \dot{u}$  pour  $n = 1$  et  $w = u^{(n)}$  pour  $n \geq 2$ .

### 2.3.2 Espace de Sobolev $W^{k,p}(0, T; X)$

**Définition 2.3.5.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(0, T; X)$  est l'espace des fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  telles que  $u \in L^p(0, T; X)$  et  $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$ .  $W^{1,p}(0, T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

En particulier,  $W^{1,2}(0, T; X)$  est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

**Définition 2.3.6.** Une fonction  $u : [0; T] \rightarrow X$  est dite absolument continue si quelque soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon)$  tel que pour toute suite d'intervalles  $(a_i, b_i)$  disjoints, inclus dans  $[0; T]$ , tels que  $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$  on a  $\sum_i \|u(b_i) - u(a_i)\|_X \leq \varepsilon$ .

**Théorème 2.3.2.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $X$  un espace de Banach réflexif et soit  $u \in L^p(0, T; X)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ .
2.  $u$  admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans  $L^p(0, T; X)$ .
3. Il existe  $u_0 \in X$  et  $g \in L^p(0, T; X)$ , telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

**Théorème 2.3.3.** *Si la fonction  $u$  appartient à l'espace  $W^{1,p}(0, T; X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ .*

*Nous avons alors :*

$$1. \|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

2. si de plus  $p < \infty$ , on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t - s)^p \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

3. si  $p = \infty$ , on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}\|_{L^\infty(0, T; X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

**Théorème 2.3.4.** *Dans le cas où l'espace  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  est un espace de Hilbert et si la fonction  $u$  appartient à l'espace  $W^{1,2}(0, T; H)$ , alors*

1. la fonction  $t \longrightarrow \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2$  est une fonction absolument continue sur l'intervalle  $]0, T[$ .

$$2. \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 = (\dot{u}(t), u(t))_H \quad \text{p.p. } t \in ]0, T[.$$

$$3. \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_H ds \quad \forall t \in ]0, T[.$$

Ces quelques propriétés achèvent cette section. Pour plus de détails sur les résultats dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple aux références [27, 8]

## 2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans un espace de Hilbert

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert  $H$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et la norme associée  $\|\cdot\|_H$  et  $H'$  l'espace dual de  $H$  en notant par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$  pour le produit de dualité entre  $H$  et  $H'$ .

**Définition 2.4.1.** *L'opérateur  $A : H \rightarrow H'$  est dite :*

1. monotone si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{H' \times H} \geq 0 \quad \forall u, v \in H;$$

2. *fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{H' \times H} \geq m \|u - v\|_H^2 \quad \forall u, v \in H;$$

3. *de Lipschitz s'il existe  $L > 0$*

$$\|Au - Av\|_{H'} \leq L \|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

4. *hemicontinu si pour toute suite numérique  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  telle que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  on a*

$$\langle A(u + \lambda_n v), w \rangle_{H' \times H} \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle_{H' \times H} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant :

**Proposition 2.4.1.** *Tout opérateur de Lipschitz est hemicontinu.*

**Théorème 2.4.1.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soit  $A : H \rightarrow H$  un opérateur lipschitzien et fortement monotone. Alors, pour chaque  $f \in H$ , il existe un élément unique  $u \in H$  tel que  $Au = f$ .*

Le théorème 2.4.1 montre que si  $A : H \rightarrow H$  un opérateur lipschitzien et fortement monotone défini sur un espace  $H$  de Hilbert, alors  $A$  est inversible. Les propriétés de son inverse, noté  $A^{-1}$ , sont données par le résultat suivant.

**Proposition 2.4.2.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soit  $A : H \rightarrow H$  un opérateur lipschitzien et fortement monotone. Alors,  $A^{-1} : H \rightarrow H$  est un opérateur lipschitzien et fortement monotone.*

**Théorème 2.4.2.** *Soit  $A : H \rightarrow H$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz,  $K$  un convexe fermé non-vide de  $H$  et  $f \in H$ . Alors l'inéquation variationnelle elliptique de première espèce admet une solution unique.*

**Définition 2.4.2.** *Soit une fonction  $j : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .*

1. *La fonction  $j$  est dite propre si elle n'est pas identiquement à  $+\infty$ , c'est-à-dire s'il existe  $u \in H$  tel que  $j(u) < +\infty$ , et si elle ne prend jamais la valeur  $-\infty$ .*

2. *La fonction  $J$  est dite convexe si*

$$j(tu + (1 - t)v) \leq tj(u) + (1 - t)j(v), \quad \forall u, v \in H, \quad \forall t \in [0, 1].$$

3. La fonction  $J$  est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i) en  $u$  de l'espace  $H$ , si pour toute suite  $(u_n)_n$  d'éléments de  $H$  convergeant vers  $u$  dans  $H$ , elle vérifie

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} j(u_n) \geq j(u). \quad (2.20)$$

4. La fonction  $j$  est dite s.c.i. sur  $H$  si elle est s.c.i. pour tout point de  $H$ .

**Proposition 2.4.3.** *Si la fonction  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est convexe, propre et semi-continue inférieurement alors elle faiblement semi-continue inférieurement et réciproquement.*

**Théorème 2.4.3.** *Soit  $A : H \rightarrow H$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et  $j$  une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement et  $f \in H$ . Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce admet une solution unique.*

Soit  $H$  un espace de Hilbert doté du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et la norme associé  $\|\cdot\|$ . Soit maintenant un opérateur  $A : H \rightarrow H$ ,  $K \subset H$ ,  $j : H \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction propre et  $f \in H$ . Plusieurs problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles en mécanique des milieux continus conduisent à une problème mathématique ayant la forme suivantes : Trouver  $u$  tel que

$$u \in H \quad (Au, v - u)_H + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H. \quad (2.21)$$

Ce problème est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur  $H$ .

**Théorème 2.4.4.** *Soit  $A : H \rightarrow H$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et  $j$  une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement et  $f \in H$ . Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce admet une solution unique.*

Les démonstrations de ces théorèmes de cette section peut être trouvée par exemple dans [18, 21, 23].

## 2.5 Triplet de Gelfand

Tout d'abord, nous rappelons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet. L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert  $H$  peut se représenter à l'aide du produit scalaire.

**Théorème 2.5.1. (*Représentation de Riesz-Fréchet*)** Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $H'$  son espace dual. Alors, pour tout  $\phi \in H'$  il existe  $f \in H$  unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

On a de plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

Pour une démonstration de ce théorème voir par exemple ([10] p. 81-82) . L'application  $\phi \mapsto f$  est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier  $H$  et  $H'$ . Soit maintenant  $H$  un espace de Hilbert réel tel que  $V$  dense dans  $H$  et l'injection  $V \subset H$  est continue. On identifie  $H$  et  $H'$ . Soit  $V'$  le dual de  $V$ , on peut alors prolonger  $H$  dans  $V'$  grâce au procédé suivant : étant donné  $f \in H$ , l'application  $v \in V \mapsto (f, v)_H$  est une forme linéaire continue sur  $H$  et a fortiori sur  $V$  ; on la note  $Tf \in V'$  de sorte que

$$\langle Tf, v \rangle_{V' \times V} = (f, v)_H, \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que  $T : H \rightarrow V'$  possède les propriétés suivantes

- (1)  $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H \quad \forall f \in H.$
- (2)  $T$  est injective.
- (3)  $T(H)$  est dense dans  $V'$ .

En général  $T$  n'est pas surjective de  $H$  sur  $V'$ . A l'aide de  $T$  on prolonge  $H$  dans  $V'$  et on a le schéma

$$V \subset H = H' \subset V', \tag{2.22}$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé **Triplet de Gelfand**. On dit que  $H$  est l'espace pivot.

Maintenant, nous donnons un théorème très important pour étudier le problème  $\mathcal{P}$  qu'on va étudier dans le troisième chapitre de ce mémoire.

**Théorème 2.5.2.** Soit  $V \subset H \subset V'$  est un triple de Gelfand,  $K$  est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de  $V$ , et soit  $A : V \rightarrow V'$  est un opérateur linéaire, symétrique et continu qui satisfait

$$\exists C_2 \in \mathbb{R} \text{ et } C_3 > 0 \text{ telle que } \langle Av, v \rangle_{V' \times V} + C_2\|v\|_H^2 \geq C_3\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout  $u_0 \in K$  et  $f \in L^2(0, T; V')$ , il existe une unique fonction  $u$  qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V') \quad (2.23)$$

$$u(t) \in K, \forall t \in [0, T], \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} + \langle Au(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} \\ & \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v \in K, p.p.t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.26)$$

Si  $u_0 \in K$  et  $f \in L^2(0, T; H)$ , alors il existe une unique fonction  $u$  qui satisfait (2.24) - (2.26) et vérifie  $u \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$

### Sous différentiabilité.

Si  $X$  désigne un espace de Hilbert et  $K$  un sous ensemble de l'espace  $X$ . Considérons la fonction  $\psi_K$  définie par

$$\psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K, \end{cases}$$

on appelle  $\psi_K$  fonction indicatrice. Nous savons que l'ensemble  $K$  est fermé, non vide et convexe si et seulement si sa fonction indicatrice  $\psi_K$  est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement.

**Définition 2.5.1.** Soit une fonction  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  et  $u$  un élément de l'espace  $X$  tel que  $j(u) \neq \infty$ . Le sous-différentiel de la fonction  $j$  en  $u$ , noté  $\partial j(u)$ , est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' / j(v) \geq j(u) + \langle u', v - u \rangle_{X' \times X}, \forall v \in X\}.$$

Rappelons que le crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$  désigne le produit de dualité entre  $X'$  et  $X$ . Tout élément  $u'$  de l'ensemble  $\partial j(u)$  est appelé sous gradient de la fonction  $j$  en  $u$ . La fonction  $j$  est dite sous-différentiable en  $u$  si  $\partial j(u) \neq \emptyset$ . Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point  $u$  de l'espace  $X$ . Soit  $K$  un sous-ensemble convexe non vide

de l'espace  $X$ . Considérons la fonction indicatrice  $\psi_K$  de l'ensemble  $K$ , nous avons de suite que si  $u \notin K$  alors  $\partial\psi_K(u) = \emptyset$ . Supposons alors que  $u \in K$ , il vient que si  $u' \in \partial\psi_K(u)$  alors  $\langle u', v-u \rangle_{X' \times X} \leq 0$ , pour tout  $v \in K$ . Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel  $\partial\psi_K(u)$  d'une fonction indicatrice  $\psi_K$  d'un ensemble convexe  $K$  non vide en  $u \in K$  par

$$\partial\psi_K(u) = \{u' \in X' / \langle u', v-u \rangle_{X' \times X} \leq 0, \forall v \in K\}. \quad (2.27)$$

## 2.6 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans cette thèse pour démontrer l'existence et l'unicité. Soit  $X$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_X$ ,  $K \subset X$  une partie de  $X$  et soit  $\Lambda : K \rightarrow X$  un opérateur défini sur  $K$ . On s'intéresse à l'existence d'une solution de l'équation

$$\Lambda u = u, \quad u \in K. \quad (2.28)$$

Une telle solution de (2.28) s'appelle un point fixe de  $\Lambda$  dans  $K$ .

**Théorème 2.6.1. (Théorème du point fixe de Banach).** *Soit  $K$  une partie non vide et fermé de l'espace de Banach  $X$  et soit  $\Lambda : K \rightarrow K$  une contractante, i.e.,  $\exists k \in ]0, 1[$  tel que*

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq k \|u - v\|_X, \quad u, v \in K.$$

*Alors il existe un unique élément  $u \in K$  tel que  $\Lambda u = u$ , i.e.,  $\Lambda$  possède un point fixe unique dans  $K$ .*

*Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.*

*Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur  $\Lambda$  sont définies récursivement par*

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

**Théorème 2.6.2.** *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.6.1, on suppose que  $\Lambda^n$  est une contractante pour un certain entier  $n \geq 2$ . Alors  $\Lambda$  admet un point fixe unique dans  $K$ .*

Les démonstrations des théorèmes 2.6.1 et 2.6.2 peuvent être trouver dans [21].

## 2.7 Lemme de type Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, on pourra consulter par exemple [22]. Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser la version "presque partout" qu'on note par p.p. de ces lemmes.

**Lemme 2.7.1.** *Soient  $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  soit  $a \geq 0$  une constante, et  $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$  est une fonction telle que*

1. Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left( \int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \cdot \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

pour le cas particulier  $m = 0$  la partie (1) de ce lemme devient.

**Corollaire 2.7.1.** *Soient  $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$  telles que  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$  est une fonction telle que*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \cdot \exp \left( \int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T],$$

Le corollaire 2.7.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par  $\psi$  la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer  $\psi$  sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction  $n \geq 0$ . En appliquant corollaire 2.7.1 donne immédiatement la nullité de  $\psi$ .

## CHAPITRE 3

# PROBLÈME ÉLECTRO-VISCOÉLASTIQUE AVEC USURE ET ENDOMMAGEMENT

Nous dérivons dans ce chapitre un modèle mathématique dans un processus quasi-statique d'un problème de contact avec compliance normale pour de matériau électro-viscoélastique, nous supposons que le contact est modélisé avec conditions d'usure et d'endommagement. Ce chapitre comporte trois sections, dans la première nous écrivons le problème mécanique, ensuite dans la deuxième nous présentons la formulation variationnelle du problème, enfin, dans la troisième section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème.

### 3.1 Formulation mécanique du problème

Le problème peut se formuler de la manière suivante

**Problème  $\mathcal{P}$ .** Trouver un champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un champ de potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ des déplacements électriques  $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ d'endommagement  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et qu'un champ d'usure  $\zeta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}(\varepsilon(u), \beta) + \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u(s))ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - B \nabla \varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\dot{\beta} - k_e \Delta \beta + \partial \Psi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$\text{div } D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu \\ \|\sigma_\tau\| \leq \mu p_\nu \\ \sigma_\tau = -\mu p_\nu \frac{(\dot{u}_\tau - v^*)}{\|\dot{u}_\tau - v^*\|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq v^* \\ \dot{\zeta} = k_1 \mu p_\nu R^*(\|\dot{u}_\tau - v^*\|), \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.9)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - h - \zeta) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.12)$$

$$u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \zeta(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.13)$$

Les équations (3.1) et (3.2) représentent la loi électro-viscoélastique à mémoire longue et endommagement, les équations (3.3) décrit l'évolution d'endommagement où  $S$  la fonction source d'endommagement,  $k_e$  est un coefficient positif et  $\partial \Psi_K$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble admissible  $K$  des fonctions d'endommagement défini par (1.15), les équations (3.4) et (3.5) représentent les équations d'équilibre de contraintes et de déplacements électriques, tandis que les équations (3.6) et (3.7) représentent les conditions aux limites de déplacements et de tractions, l'équation (3.8) représente une condition de contact et une loi de frottement et loi d'Archad, où  $k_1 > 0$  est une coefficient d'usure,  $\mu = \mu(\zeta, \|\dot{u}_\tau - v^*\|)$  et  $p_\nu$  est une fonction de la compliance normale, où  $p_\nu = p_\nu(u_\nu - h - \zeta)$ . L'équation (3.9) représente des conditions aux limites de neumann homogène pour le champ d'endommagement sur  $\Gamma$ , où  $\frac{\partial \beta}{\partial \nu}$  est la dérivée

normale de  $\beta$ . Les équations (3.10) et (3.11) représentent des conditions aux limites électriques, l'équation (3.12) est la condition de contact électrique sur  $\Gamma_3$ . Dans l'équation (3.13)  $u_0$  et  $\beta_0$  sont des conditions initiales données de déplacements et d'endommagement et  $\zeta(0) = 0$  signifie qu'au moment initial le corps ne subit aucune usure antérieure.

## 3.2 Formulation variationnelle du problème

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}$  on introduit le sous-espace fermé  $V$  de  $H^1(\Omega)^d$  défini par (2.9). Nous énonçons des hypothèses pour les données, pour ceci nous supposons que :

L'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe une constante } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (c) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (d) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe une constante } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{F}(x, \varepsilon_1, r_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2, r_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} (\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |r_1 - r_2|), \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon, r) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } r \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

La fonction d'endommagement de la source  $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe une constante } L_S > 0 \text{ telle que} \\ \quad |S(x, \varepsilon_1, r_1) - S(x, \varepsilon_2, r_2)| \leq L_S (\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |r_1 - r_2|), \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } r \in \mathbb{R}, \\ \quad \text{l'application } x \mapsto S(x, \varepsilon, r) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega, \\ (c) \text{ l'application } x \mapsto S(x, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.16)$$

L'opérateur de relaxation  $M$  satisfait

$$M \in C(0, T; \mathcal{H}_\infty), \quad (3.17)$$

où  $\mathcal{H}_\infty$  est l'espace du champ de tenseur du quatrième ordre donné par :

$$\mathcal{H}_\infty = \{E = (E_{ijkl}) / E_{ijkl} = E_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d\},$$

qui est un espace de Banach réel muni de la norme :

$$\|E\|_{\mathcal{H}_\infty} = \max_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \|E_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

La fonction de compliance normale  $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe une constant } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\nu(x, u_1) - p_\nu(x, u_2)| \leq L_\nu |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}, x \mapsto p_\nu(x, u) \text{ est Lebesgue mesurable,} \\ (c) \quad p_\nu(x, u) = 0 \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (d) \quad p_\nu(x, u) \leq p_\nu^* \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

La fonction de le coefficient de frottement  $\mu : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe une constant } L_\mu > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mu(x, a_1, b_1) - \mu(x, a_2, b_2)| \leq L_\mu (|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|) \\ \quad \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) \text{ l'application } x \mapsto \mu(x, a, b) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \\ (c) \quad \mu(x, a, b) \leq \mu^* \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

L'opérateur de permittivité électrique  $B = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & B(x)E = (b_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) & b_{ij} = b_{ji}, \quad b_{ij} \in L^\infty(\Omega), \\ (c) & \text{il existe une constante } m_B > 0 \quad \text{telle que} \\ & BE \cdot E \geq m_B \|E\|^2 \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

L'opérateur piézoélectrique  $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \mathcal{E}(x)\tau = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) & e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

La fonction de conductivité électrique de surface  $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \text{il existe une constant } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ & |\psi(x, u_1) - \psi(x, u_2)| \leq L_\psi |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) & \text{il existe une constant } N_\psi > 0 \text{ telle que} \\ & |\psi(x, u)| \leq N_\psi \quad \forall u \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c) & \text{l'application } x \mapsto \psi(x, u) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Gamma_3 \\ & \text{pour tout } u \in \mathbb{R}, \\ (d) & \text{l'application } x \mapsto \psi(x, u) = 0 \text{ pour tout } u \leq 0. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

On suppose aussi que les forces de corps et les tractions de surface satisfont

$$f_0 \in C(0, T; H), \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (3.23)$$

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (3.24)$$

Nous supposons que la fonction d'écart  $h$ , le potentiel donné de la fondation  $\varphi_0$ , le champ de déplacement initial  $u_0$  et le champ d'endommagement initial  $\beta_0$  satisfont

$$h \in L^2(\Gamma_3), h \geq 0 \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \quad \varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad u_0 \in V, \quad \beta_0 \in K. \quad (3.25)$$

On définit la forme bilinéaire  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$a(\zeta, \vartheta) = \kappa_e \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \vartheta \, dx. \quad (3.26)$$

Ensuite, nous définissons les quatre applications  $f : [0, T] \rightarrow V$ ,  $q : [0, T] \rightarrow W$ ,  $j : V \times V \times V \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\gamma : V \times W \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow W$  par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) v da, \quad (3.27)$$

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} j(u, v, w, \zeta) &= \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (u_{\nu} - h - \zeta) w_{\nu} da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} (u_{\nu} - h - \zeta) \|w_{\tau} - v^*\| da, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$(\gamma(u, \varphi, \zeta), \phi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_{\nu} - h - \zeta) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \phi da. \quad (3.30)$$

Pour tout  $u, v, w \in V$ ,  $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$ ,  $\varphi, \phi \in W$  et  $t \in [0, T]$ .

La fonctionnelle  $j : V \times V \times V \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$\begin{cases} \text{pour tout } g, w \in V \text{ et } \zeta \in L^2(\Gamma_3) : v \mapsto j(g, w, v, \zeta) \\ \text{est propre, convexe et semi-continu inférieurement sur } V. \end{cases} \quad (3.31)$$

On remarque que les conditions (3.23) et (3.24) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (3.32)$$

Pour la formule variationnelle dépendante des deux variables mécanique  $u$  et  $\sigma$ , la formule de Green (2.7) permet de donner, pour  $u \in V$

$$(\sigma, \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v - \dot{u})_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da \quad \forall v \in V,$$

ou encore d'après (3.4)

$$(\sigma, \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} - (f_0, v - \dot{u})_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da \quad \forall v \in V.$$

Mais on a

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da.$$

En utilisant (3.6) et (3.7), il devient

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da.$$

La formule (1.3) donne

$$\int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da = \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu} (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}) da.$$

On a d'après (3.8)

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu} (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da = - \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da,$$

et comme  $p_{\nu} = p_{\nu}(u_{\nu} - h - \zeta)$ , alors

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu} (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da = - \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (u_{\nu} - h - \zeta) v_{\nu} da + \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (u_{\nu} - h - \zeta) \dot{u}_{\nu} da,$$

ainsi

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}) da = \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} (v_{\tau} - v^* + v^* - \dot{u}_{\tau}) da = \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} (v_{\tau} - v^*) da - \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} (\dot{u}_{\tau} - v^*) da.$$

Si  $\dot{u}_{\tau} \neq v^*$ , on a d'après (3.8)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}) &= - \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} \frac{(\dot{u}_{\tau} - v^*)}{\|\dot{u}_{\tau} - v^*\|} (v_{\tau} - v^*) da + \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} \frac{(\dot{u}_{\tau} - v^*)}{\|\dot{u}_{\tau} - v^*\|} (\dot{u}_{\tau} - v^*) da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} \frac{(\dot{u}_{\tau} - v^*)}{\|\dot{u}_{\tau} - v^*\|} (v_{\tau} - v^*) \|da + \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} \frac{(\dot{u}_{\tau} - v^*)}{\|\dot{u}_{\tau} - v^*\|} (\dot{u}_{\tau} - v^*) da \\ &= - \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} \frac{\|\dot{u}_{\tau} - v^*\|}{\|\dot{u}_{\tau} - v^*\|} \|v_{\tau} - v^*\| da + \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} \frac{\|\dot{u}_{\tau} - v^*\|^2}{\|\dot{u}_{\tau} - v^*\|} da \\ &= - \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} \|v_{\tau} - v^*\| da + \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} \|\dot{u}_{\tau} - v^*\| da. \end{aligned}$$

Alors, comme  $p_{\nu} = p_{\nu}(u_{\nu} - h - \zeta)$ , on a

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} (u_{\nu} - h - \zeta) \|v_{\tau} - v^*\| da + \int_{\Gamma_3} \mu p_{\nu} (u_{\nu} - h - \zeta) \|\dot{u}_{\tau} - v^*\| da.$$

Si  $\dot{u}_\tau = v^*$ , on a d'après (3.8)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(v_\tau - \dot{u}_\tau) da &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(v_\tau - v^*) da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3} \|\sigma_\tau(v_\tau - v^*)\| da \\ &\geq \int_{\Gamma_3} -\|\sigma_\tau\| \|v_\tau - v^*\| da \\ &\geq \int_{\Gamma_3} -\mu p_\nu \|v_\tau - v^*\| da. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(v_\tau - \dot{u}_\tau) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu (u_\nu - h - \zeta) \|v_\tau - v^*\| da + \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu (u_\nu - h - \zeta) \|\dot{u}_\tau - v^*\| da.$$

Enfin, en utilisant (3.27), il résulte, d'après la définition (3.29) de la fonction  $j$ , pour  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} (\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(u(t), \dot{u}(t), v, \zeta(t)) - j(u(t), \dot{u}(t), \dot{u}(t), \zeta(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Pour la formule variationnelle dépendante des deux variables électriques, la formule de Green (2.19) permet de donner, pour  $D \in H$

$$(D, \nabla \phi)_H + (\operatorname{div} D, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \phi da, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Or pour le dire

$$\int_{\Omega} D \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \phi dx = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \phi da, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega), \quad (3.33)$$

où

$$\int_{\Gamma} D \cdot \nu \phi da = \int_{\Gamma_a} D \cdot \nu \phi da + \int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \phi da + \int_{\Gamma_3} D \cdot \nu \phi da.$$

Pour  $\phi \in W$  on a

$$\phi = 0 \text{ sur } \Gamma_a.$$

Alors, il résulte selon (3.11) et (3.12)

$$\int_{\Gamma} D \cdot \nu \phi da = \int_{\Gamma_b} q_2 \phi da + \int_{\Gamma_3} \psi((u_\nu - \varphi - \zeta) \phi_L (\varphi - \varphi_0)) da.$$

Donc d'après (3.5), l'équation (3.33) devient

$$\int_{\Omega} D \nabla \phi dx + \int_{\Omega} q_0 \phi dx = \int_{\Gamma_b} q_2 \phi da + \int_{\Gamma_3} \psi((u_\nu - \varphi - \zeta) \phi_L (\varphi - \varphi_0)) da.$$

Ou encore

$$\int_{\Omega} D \nabla \phi dx = - \int_{\Omega} q_0 \phi dx + \int_{\Gamma_b} q_2 \phi da + \int_{\Gamma_3} \psi((u_\nu - \varphi - \zeta) \phi_L (\varphi - \varphi_0)) da.$$

Il vient, d'après la définition (3.28) et (3.30) pour  $t \in [0, T]$

$$(D(t), \nabla \phi)_H = (\gamma(u(t), \varphi(t), \zeta(t), \phi)_W - (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W.$$

Pour la formulation variationnelle dépendante de la fonction source d'endommagement, en utilisant (3.3)

$$\partial \Psi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta) - \dot{\beta} + k_e \Delta \beta \quad \text{dans } \Omega \times (0, T).$$

Nous utilisons la définition (2.27) de la fonction de sous-différentiel

$$\begin{aligned} (S(\varepsilon(u), \beta) - \dot{\beta} + k_e \Delta \beta, \xi - \beta)_{L^2(\Omega)} &= (S(\varepsilon(u), \beta), \xi - \beta)_{L^2(\Omega)} - (\dot{\beta}, \xi - \beta)_{L^2} \\ &\quad + k_e (\Delta \beta, \xi - \beta)_{L^2(\Omega)} \leq 0, \end{aligned}$$

la formule de Green (2.8) donne

$$(\Delta \beta, \xi - \beta) = - \int_{\Omega} \nabla \beta \nabla (\xi - \beta) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \beta}{\partial \nu} (\xi - \beta) da.$$

Finalement, on a d'après (3.9) et (3.26)

$$\begin{aligned} \beta(t) &\in K, (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ &\geq (S(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \forall \xi \in K \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Enfin, on obtient la formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}$ .

**Problème  $\mathcal{PV}$ .** Trouver un champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow V$ , un champ des contraintes  $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ , un champ de potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ , un champ des déplacements électriques  $D : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$ , un champ d'endommagement  $\beta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  et une fonction d'usure  $\zeta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ , telle que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\sigma(t) = \mathcal{A} \varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) + \int_0^t M(t-s) \varepsilon(u(s)) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} (\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(u(t), \dot{u}(t), v, \zeta(t)) - j(u(t), \dot{u}(t), \dot{u}(t), \zeta(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$D(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B \nabla \varphi(t), \quad (3.36)$$

$$(D(t), \nabla \phi)_H = (\gamma(u(t), \varphi(t), \zeta(t), \phi)_W - (q(t), \phi)_W) \quad \forall \phi \in W, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} & \beta(t) \in K, (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ & \geq (S(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \forall \xi \in K_{p.p.} \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\dot{\zeta} = k_1 \mu(\zeta, |\dot{u}_\tau - v^*|) p_\nu(u_\nu - h - \zeta) R^*(|\dot{u}_\tau - v^*|), \quad (3.39)$$

$$u(0) = u_0, \beta(0) = \beta_0, \zeta(0) = 0. \quad (3.40)$$

On remarque que le problème variationnel  $\mathcal{PV}$  est formulé en termes de champ des déplacements, de champ des contraintes, de champ de potentiel électrique, de champ des déplacements électriques, de champ d'endommagement et d'une fonction d'usure. Les fonctions  $u, \sigma, \varphi, D, \beta$  et  $\zeta$  qui satisfont (3.34)-(3.40) sont appelées solution faible du problème de contact  $\mathcal{P}$ . L'existence de la solution unique au problème  $\mathcal{PV}$  est énoncée et prouvée dans la section suivante.

### 3.3 Existence et unicité de la solution

L'objectif principal de cette section est de prouver l'existence et l'unicité.

#### Théorème 3.3.1

D'après les hypothèses (3.14)-(3.25) et (3.31) sont vérifiées. Alors si  $c_0^2 p_\nu^* L_\mu < m_A$  et  $N_\psi < \frac{m_{BCF}}{a_0^2}$ , il existe une solution unique  $\{u, \sigma, \varphi, D, \beta, \zeta\}$  au problème  $\mathcal{PV}$ . De plus la solution satisfait

$$u \in C^1(0, T; V), \quad (3.41)$$

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (3.42)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (3.43)$$

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}), \quad (3.44)$$

$$\beta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.45)$$

$$\zeta \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)). \quad (3.46)$$

Nous concluons que sous les hypothèses (3.14)-(3.25) et si  $c_0^2 p_\nu^* L_\mu < m_{\mathcal{A}}$  et  $N_\psi < \frac{m_{BCF}}{a_0^2}$  le problème mécanique  $\mathcal{P}$  admet une unique solution faible  $(u, \sigma, \varphi, D, \beta, \zeta)$  vérifiant (3.41)-(3.46). La preuve du théorème 3.3.1 s'effectue en plusieurs étapes, que nous démontrerons dans ce qui suit. Ci dessous,  $c$  désigne une constant positive générique qui peut dépendre de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, M, B, \psi, p_\nu, \mu$  et  $T$  mais ne dépend pas de  $t$  ni du reste des données d'entrée et dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

### Première étape

Soient  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ ,  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ ,  $g \in C(0, T; V)$  et  $w \in C(0, T; V)$  de données. On considère le problème variationnel suivant :

**Problème**  $\mathcal{P}_{\zeta\eta gw}$  : Trouver le champ de déplacements  $v_{\zeta\eta gw} : [0, T] \rightarrow V$  et un champ de contraintes  $\sigma_{\zeta\eta gw} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\sigma_{\zeta\eta gw}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(v_{\zeta\eta gw}(t)) + \eta(t), \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_{\zeta\eta gw}(t), \varepsilon(v - v_{\zeta\eta gw}(t)))_{\mathcal{H}} + j(g(t), w(t), v, \zeta(t)) - j(g(t), w(t), v_{\zeta\eta gw}(t), \zeta(t)) \\ & \geq (f(t), v - v_{\zeta\eta gw}(t))_V \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pour étudier le problème  $\mathcal{P}_{\zeta\eta gw}$  on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.3.1.** *Le problème  $\mathcal{P}_{\zeta\eta gw}$  a une unique solution  $(v_{\zeta\eta gw}, \sigma_{\zeta\eta gw})$  telle que*

$$v_{\zeta\eta gw} \in C(0, T; V), \quad \sigma_{\zeta\eta gw} \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (3.49)$$

**Preuve :**

Nous définissons l'opérateur  $A : V \rightarrow V$  par

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (3.50)$$

D'après (3.50), on a

$$(Au - Av, Au - Av)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(Au - Av))_{\mathcal{H}}.$$

Alors, selon (3.14)(a), on trouve

$$\|Au - Av\|_V^2 \leq \|(\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v))\|_{\mathcal{H}} \|\varepsilon(Au - Av)\|_{\mathcal{H}}$$

$$\leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(u) - \varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \|\varepsilon(Au - Av)\|_{\mathcal{H}},$$

donc, d'après (2.11)

$$\leq L_{\mathcal{A}} \|u - v\|_V \|Au - Av\|_V,$$

d'où

$$\|Au - Av\|_V \leq L_{\mathcal{A}} \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V. \quad (3.51)$$

Ce qui montre que  $A : V \rightarrow V$  est un opérateur de Lipschitz. Ainsi, d'après (3.50) et (3.14)(b) on trouve

$$\begin{aligned} (Au - Av, u - v)_V &= (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(u) - \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &\geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(u) - \varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

selon (2.11), il résulte

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m_{\mathcal{A}} \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (3.52)$$

alors  $A : V \rightarrow V$  est un opérateur fortement monotone sur  $V$ .

De plus, en utilisant le théorème de représentation de Riesz 2.5.1, nous pouvons définir un élément  $F \in C(0, T; V)$  par

$$(F(t), v)_V = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}.$$

Comme  $A$  est un opérateur fortement monotone et lipschitzien sur  $V$  et comme la fonctionnelle  $v \mapsto j(g(t), w(t), v, \zeta)$  est semi-continue inférieurement, convexe et propre, alors il découle du théorème 2.4.4 qu'il existe une unique fonction  $v_{\zeta\eta gw}(t) \in V$  qui vérifie

$$\begin{aligned} (Av_{\zeta\eta gw}(t), v - v_{\zeta\eta gw}(t))_V + j(g(t), w(t), v, \zeta(t)) - j(g(t), w(t), v_{\zeta\eta gw}(t), \zeta(t)) \\ \geq (F(t), v - v_{\zeta\eta gw}(t))_V, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Nous utilisons la relation (3.47), l'hypothèse (3.14) et les propriétés du tenseur de déformation pour obtenir que  $\sigma_{\zeta\eta gw}(t) \in \mathcal{H}$ . Avec l'hypothèse de régularité (3.23) sur  $f_0$  on voit que  $\text{Div } \sigma_{\zeta\eta gw}(t) \in H$ . Donc  $\sigma_{\zeta\eta gw}(t) \in \mathcal{H}_1$ .

Soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , notons  $v_{\zeta\eta gw}(t_i) = v_i, g(t_i) = g_i, w(t_i) = w_i, \zeta(t_i) = \zeta_i, \eta(t_i) = \eta_i, \sigma(t_i) = \sigma_i, f(t_i) = f_i$  pour  $i = 1, 2$ . En utilisant la relation (3.53) on trouve que

$$(Av_1, v_2 - v_1)_V \geq -j(g_1, w_1, v_2, \zeta_1) + j(g_1, w_1, v_1, \zeta_1) + (f_1, v_2 - v_1(t))_V - (\eta_1, \varepsilon(v_2 - v_1))_{\mathcal{H}},$$

et

$$(Av_2, v_1 - v_2)_V \geq -j(g_2, w_2, v_1, \zeta_2) + j(g_2, w_2, v_2, \zeta_2) + (f_1, v_1 - v_2(t))_V - (\eta_1, \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}},$$

alors

$$(-Av_1, v_1 - v_2)_V + (Av_2, v_1 - v_2)_V = (Av_2 - Av_1, v_1 - v_2)_V,$$

donc

$$\begin{aligned} -(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2)_V &\geq -j(g_1, w_1, v_2, \zeta_1) + j(g_1, w_1, v_1, \zeta_1) \\ &\quad - j(g_2, w_2, v_1, \zeta_2) + j(g_2, w_2, v_2, \zeta_2) \\ &\quad - (f_1 - f_2, v_1 - v_2)_V - (\eta_2 - \eta_1, \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (Av_1 - Av_2, v_1 - v_2)_V &\leq j(g_1, w_1, v_2, \zeta_1) - j(g_1, w_1, v_1, \zeta_1) + j(g_2, w_2, v_1, \zeta_2) - j(g_2, w_2, v_2, \zeta_2) \\ &\quad + (f_1 - f_2, v_1 - v_2)_V + (\eta_2 - \eta_1, \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

De la définition de la fonctionnelle  $j$  donnée par (3.29) et comme est convexe, propre et semi-continue inférieurement sur  $V$  on a

$$\begin{aligned} &j(g_1, w_1, v_2, \zeta_1) - j(g_1, w_1, v_1, \zeta_1) + j(g_2, w_2, v_1, \zeta_2) - j(g_2, w_2, v_2, \zeta_2) \\ &= \int_{\Gamma_3} [(p_\nu(g_{1\nu} - h - \zeta_1) - p_\nu(g_{2\nu} - h - \zeta_2))(v_{2\nu} - v_{1\nu})] da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} [\mu p_\nu(g_{1\nu} - h - \zeta_1) - \mu p_\nu(g_{2\nu} - h - \zeta_2)] (\|v_{2\tau} - v_2^*\| - \|v_{1\tau} - v_1^*\|) da, \end{aligned}$$

L'estimation (3.52) et les hypothèses (3.18), (3.19) et (2.21) nous donnent

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} \|v_1 - v_2\|_V &\leq L_\nu (1 + \mu^*) c_0^2 \|g_1 - g_2\|_V + c_0^2 p_\nu^* L_\mu \|w_1 - w_2\|_V \\ &\quad + (L_\nu + L_\mu p_\nu^2 + L_\nu \mu^*) c_0 \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}} + \|f_1 - f_2\|_V. \end{aligned} \quad (3.55)$$

L'inégalité (3.47) et la régularité des fonctions  $f, g, w, \zeta$  et  $\eta$  montrent que

$$v_{\zeta\eta gw} \in C(0, T; V).$$

D'après l'hypothèse (3.14) et la relation (3.49) on a

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathcal{H}} \leq c(\|v_1 - v_2\|_V + \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}}), \quad (3.56)$$

et selon (3.53) on a

$$\text{Div } \sigma_{\zeta\eta gw(t)} + f_0(t) = 0. \quad (3.57)$$

La régularité des fonctions  $\eta, v, f_0$  et les relations (3.56) et (3.57) montrent que

$$\sigma_{\zeta\eta gw} \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \quad \square$$

Soient  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ ,  $g \in C(0, T; V)$  et  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$  des données. On considère l'opérateur suivant

$$\Lambda_{\zeta\eta g} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V),$$

défini par

$$\Lambda_{\zeta\eta g} w = v_{\zeta\eta gw}. \quad (3.58)$$

**Lemme 3.3.2.** *Soient les hypothèses (3.17)-(3.27) vérifiées. Alors l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta g}$  admet un point fixe unique  $w_{\zeta\eta g} \in C(0, T; V)$ .*

**Preuve :**

Soient  $w_1, w_2 \in C(0, T; V)$ . On utilise la notation  $v_i = v_{\zeta\eta gw_i}$  pour  $i = 1, 2$ . De la définition (3.58) on a

$$\|\Lambda_{\zeta\eta g} w_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta g} w_2(t)\|_V = \|v_1(t) - v_2(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.59)$$

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.55) telle que :  $g, \zeta, \eta$  et  $f$  sont fixes, on trouve

$$m_{\mathcal{A}} \|v_1(t) - v_2(t)\|_V \leq c_0^2 p_{\nu}^* L_{\mu} \|w_1(t) - w_2(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.60)$$

Cela montre que pour  $c_0^2 p_{\nu}^* L_{\mu} < m_{\mathcal{A}}$ ,  $\Lambda_{\zeta\eta g}$  est un opérateur contractant dans l'espace de Banach  $C(0, T; V)$ . On suppose  $w_{\zeta\eta g}$  est le point fixe unique donné au lemme 3.3.2, soit  $v_{\zeta\eta g} \in C(0, T; V)$  la fonction définie par  $v_{\zeta\eta g} = v_{\zeta\eta gw_{\zeta\eta g}}$ . Nous avons  $\Lambda_{\zeta\eta g} w_{\zeta\eta g} = w_{\zeta\eta g}$

et  $\Lambda_{\zeta\eta g} w_{\zeta\eta g} = v_{\zeta\eta g} w_{\zeta\eta g}$ , donc en choisissant  $w = w_{\zeta\eta g}$  dans (3.53) et pour tout  $v \in V, t \in [0, T]$ , on voit que  $v_{\zeta\eta g}$  satisfait

$$(Av_{\zeta\eta g}(t), v - v_{\zeta\eta g}(t))_V + j(g(t), v_{\zeta\eta g}(t), v, \zeta(t)) - j(g(t), v_{\zeta\eta g}(t), v_{\zeta\eta g}(t), \zeta(t)) \geq (F(t), v - v_{\zeta\eta g}(t))_V \quad (3.61)$$

On note  $u_{\zeta\eta g} \in C^1(0, T; V)$  la fonction

$$u_{\zeta\eta g}(t) = u_0 + \int_0^t v_{\zeta\eta g}(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.62)$$

Et définissons l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$  par

$$\Lambda_{\zeta\eta} g = u_{\zeta\eta g}. \quad (3.63)$$

**Lemme 3.3.3.** *Soient les hypothèses (3.17)-(3.27) vérifient. Alors l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta}$  admet un point fixe unique  $g_{\zeta\eta} \in C(0, T; V)$ .*

**Preuve :**

Soient  $g_1, g_2 \in C(0, T; V)$ . Pour simplifier l'écriture on utilise la notation  $v_i = v_{\zeta\eta g_i}$  et  $u_i = u_{\zeta\eta g_i}$  pour  $i = 1, 2$ . En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans (3.62), on obtient pour tout  $s \in [0, T]$

$$(m_{\mathcal{A}} - c_0^2 p_{\nu}^* L_{\mu}) \|v_1(s) - v_2(s)\|_V \leq c_0^2 L_{\nu} (1 + \mu^*) \|g_1(s) - g_2(s)\|_V.$$

On utilisant or (3.61)-(3.62)

$$\|\Lambda_{\zeta\eta} g_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta} g_2(t)\|_V \leq \frac{c_0^2 L_{\nu} (1 + \mu^*)}{(m_{\mathcal{A}} - c_0^2 p_{\nu}^* L_{\mu})} \int_0^t \|g_1(s) - g_2(s)\|_V dr ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.64)$$

En réitérant  $n$  fois cette inégalité, telle que on pose  $C = \frac{c_0^2 L_{\nu} (1 + \mu^*)}{(m_{\mathcal{A}} - c_0^2 p_{\nu}^* L_{\mu})}$

$$\|\Lambda_{\zeta\eta}^2 g_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta}^2 g_2(t)\|_V \leq C \int_0^t C \int_0^s \|g_1(s) - g_2(s)\|_V dr ds$$

$$\|\Lambda_{\zeta\eta}^2 g_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta}^2 g_2(t)\|_V \leq C^2 \int_0^t \int_0^s \|g_1(s) - g_2(s)\|_V dr ds$$

$$\|\Lambda_{\zeta\eta}^3 g_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta}^3 g_2(t)\|_V \leq C^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^r \|g_1(s) - g_2(s)\|_V dl dr ds$$

.

.

.

$$\|\Lambda_{\zeta\eta}^n g_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta}^n g_2(t)\|_V \leq C^n \underbrace{\int_0^t \int_0^s \dots \int_0^h}_{n \text{ integrals}} \|g_1(s) - g_2(s)\|_V dk \dots dldrds.$$

$$\|\Lambda_{\zeta\eta}^n g_1 - \Lambda_{\zeta\eta}^n g_2\|_{C(0,T;V)} \leq C^n \|g_1 - g_2(s)\|_{C(0,T;V)} \underbrace{\int_0^t \int_0^s \dots \int_0^h}_{n \text{ integrals}} dk \dots dldrds.$$

On sait que :

$$\int_0^r ds = r, \quad r \in [0, T]$$

et que

$$\int_0^s \int_0^r drds = \int_0^s r dr = \frac{s^2}{2},$$

et que

$$\int_0^t \int_0^s \int_0^r dlldrds = \frac{t^3}{6} = \frac{t^3}{3!},$$

$$\int_0^t \int_0^s \dots \int_0^h dk \dots dldrds = \frac{t^n}{n!},$$

nous déduisons :

$$\|\Lambda_{\zeta\eta}^n g_1 - \Lambda_{\zeta\eta}^n g_2\|_{C(0,T;V)} \leq \frac{(CT)^n}{n!} \|g_1 - g_2\|_{C(0,T;V)}.$$

On obtient qu'une puissance de  $\Lambda_{\zeta\eta}$  est un opérateur contractante dans l'espace de Banach  $C(0, T; V)$ . ce qui conclut la preuve.

Considérons maintenant le problème suivant :

**Problème**  $\mathcal{P}V_{\zeta\eta}$ . Trouver un champ des déplacements  $u_{\zeta\eta} : [0, T] \rightarrow V$  tels que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{\zeta\eta}(t)), \varepsilon(v - \dot{u}_{\zeta\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), \varepsilon(v - \dot{u}_{\zeta\eta}(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j(u_{\zeta\eta}(t), \dot{u}_{\zeta\eta}(t), v, \zeta(t)) - j(u_{\zeta\eta}(t), \dot{u}_{\zeta\eta}(t), \dot{u}_{\zeta\eta}(t), \zeta(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_{\zeta\eta}(t))_V \quad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$u_{\zeta\eta}(0) = u_0. \tag{3.66}$$

**Lemme 3.3.4.** *Le problème  $\mathcal{P}V_{\zeta\eta}$  admet une solution unique qui satisfait la régularité (3.41).*

**Preuve :**

Pour chaque  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ , on note  $g_{\zeta\eta} \in C(0, T; V)$  le point fixe obtenu au lemme 3.3.3 et soit  $u_{\zeta\eta}$  la fonction définie par (3.62), alors, nous avons  $\Lambda_{\zeta\eta}g_{\zeta\eta} = g_{\zeta\eta}$ , d'après (3.62) et (3.63) il s'ensuit que

$$u_{\zeta\eta} = g_{\zeta\eta}. \quad (3.67)$$

Par conséquent, en prenant  $g = g_{\zeta\eta}$  dans (3.61) et en utilisant (3.50) et (3.62) on voit que  $u_{\zeta\eta}$  est une solution unique du problème  $\mathcal{P}V_{\zeta\eta}$  satisfaisant la régularité exprimée en (3.41).

## Deuxième étape

Dans la deuxième étape, soit  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ , on utilise la champ de déplacement  $u_{\zeta\eta}$  défini en (3.62) et considérons la variationnelle suivante problème.

**problem**  $QV_{\zeta\eta}$  : Trouver le champ de potentiel électrique  $\varphi_{\zeta\eta} : [0, T] \rightarrow W$  tel que  $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} (B\nabla\varphi_{\zeta\eta}(t), \nabla\phi)_H + (\gamma(u_{\zeta\eta}(t), \varphi_{\zeta\eta}(t), \zeta(t), \phi)_W \\ - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\zeta\eta}(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \end{aligned} \quad (3.68)$$

**Lemme 3.3.5.**  *$QV_{\zeta\eta}$  a une unique solution  $\varphi_{\zeta\eta}$  qui satisfait la régularité exprimée en (3.43)(3.44). De plus, si  $\varphi_{\zeta\eta_1}$  et  $\varphi_{\zeta\eta_2}$  sont les solutions de (3.67) correspondant à  $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$  alors, il existe  $c > 0$ , tel que*

$$\|\varphi_{\zeta\eta_1}(t) - \varphi_{\zeta\eta_2}(t)\|_W \leq c\|u_{\zeta\eta_1}(t) - u_{\zeta\eta_2}(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.69)$$

**Preuve :**

Soit  $t \in [0, T]$ . Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz 2.5.1 pour définir l'opérateur  $A_{\zeta\eta}(t) : W \rightarrow W$  par

$$(A_{\zeta\eta}(t)\varphi, \phi)_W = (B\nabla\varphi, \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\zeta\eta}(t), \nabla\phi)_H + (\gamma(u_{\zeta\eta}(t), \varphi, \zeta(t)), \phi)_W \quad \forall \varphi, \phi \in W.$$

Soit  $\varphi_1, \varphi_2 \in W$ . D'après (3.20)–(3.22) et la définition (3.30) on trouve

$$(A_{\zeta\eta}\varphi_1 - A_{\zeta\eta}\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W = (B\nabla\varphi_1 - B\nabla\varphi_2, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H + (\gamma(u_{\zeta\eta}(t), \varphi_1 - \varphi_1, \zeta(t)), \varphi_1 - \varphi_2)_W$$

d'après (3.20) et l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (2.17) on a

$$\begin{aligned} (B\nabla\varphi_1 - B\nabla\varphi_2, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H &\geq m_B \|\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\geq m_B c_F^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2, \end{aligned}$$

donc

$$(B\nabla\varphi_1 - B\nabla\varphi_2, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H \geq m_B c_F^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2. \quad (3.70)$$

D'autre part et d'après (3.30) on a

$$(\gamma(u_{\zeta\eta}(t), \varphi_1 - \varphi_1, \zeta(t)), \varphi_1 - \varphi_2)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_{\zeta\eta} - h - \varepsilon) \phi_L(\varphi_1 - \varphi_2), \varphi_1 - \varphi_2 da,$$

selon (3.22)(b) et (2.18)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \psi(u_{\zeta\eta} - h - \varepsilon) \phi_L(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2) da &\geq -N_\psi \int_{\Gamma_3} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 da \\ &= -N_\psi \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\geq -N_\psi a_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2. \end{aligned}$$

Donc

$$(A_{\zeta\eta}\varphi_1 - A_{\zeta\eta}\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq c \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2,$$

où  $c = m_B c_F^2 - N_\psi a_0^2$ .

Il est facile de démontrer que  $\Lambda_{\zeta\eta}(t)$  est de Lipschitz. Alors  $A_{\zeta\eta}(t)$  est un opérateur fortement monotone et lipschitzien sur  $W$ .

D'après le théorème 2.4.1 il existe un unique élément  $\varphi_{\zeta\eta}(t) \in W$  tel que  $A_{\zeta\eta}(t)\varphi_{\zeta\eta}(t) = q(t)$ .

Nous concluons que  $\varphi_{\zeta\eta}$  est l'unique solution de  $QV_{\zeta\eta}$ . on va démontrer que  $\varphi_{\zeta\eta} \in C(0, T; W)$ . Soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , notons  $\varphi_{\zeta\eta}(t_i) = \varphi_i$ ,  $u_{\zeta\eta}(t_i) = u_i$ ,  $q(t_i) = q_i$ ,  $\zeta(t_i) = \zeta_i$  pour  $i = 1, 2$ , d'après le problème  $QV_{\zeta\eta}$ , on a

$$\begin{aligned} (B\nabla\varphi_1 - B\nabla\varphi_2, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H + (\gamma(u_1, \varphi_1, \zeta_1) - \gamma(u_2, \varphi_2, \zeta_2), \varphi_1 - \varphi_2)_W \\ + (\mathcal{E}\varepsilon(u_2 - u_1), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H = (q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W. \end{aligned}$$

On utilise la définition 3.30 de la fonction  $\gamma$ , (3.22)(a), (1.23), (2.14) et (2.18) et comme  $|\phi_L(s)| \leq L$ , alors

$$\begin{aligned} (\gamma(u_1, \varphi_1, \zeta_1) - \gamma(u_2, \varphi_2, \zeta_2), \varphi_1 - \varphi_2)_W &\leq LL_\psi c_0 a_0 \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \\ &\quad + LL_\psi a_0^2 \|\zeta_1 - \zeta_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W, \end{aligned}$$

d'après (3.21)

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}\varepsilon(u_2) - \mathcal{E}\varepsilon(u_1), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H &\leq \|\mathcal{E}\varepsilon(u_2) - \mathcal{E}\varepsilon(u_1)\|_H \|\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)\|_H \\ &\leq c_\mathcal{E} \|\varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1)\|_\mathcal{H} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \\ &\leq c_\mathcal{E} \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W, \end{aligned}$$

où  $c_\mathcal{E}$  est une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$ . et que

$$(q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \leq \|q_1 - q_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W.$$

D'après le résultat (3.70), donc

$$m_B c_F^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq (c_\varepsilon + LL_\psi c_0 a_0) \|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W + LL_\psi a_0 \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}. \quad (3.71)$$

Il découle de l'inégalité (3.71)

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq c(\|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W + \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}). \quad (3.72)$$

Puisque  $u \in C^1(0, T; V)$ ,  $q \in C(0, T; W)$ ,  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  l'inégalité (3.72) implique que  $\varphi_{\zeta\eta} \in C(0, T; W)$ .

Soit  $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$  et notons  $\varphi_{\zeta\eta_i} = \varphi_i$ ,  $u_{\zeta\eta_i} = u_i$  pour  $i = 1, 2$ . On utilise (3.68) et des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.72) pour obtenir

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq c\|u_1 - u_2\|_V$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .  $\square$

### Troisième étape

Dans la troisième étape, on pose  $\theta \in C(0, T; L^2(\Omega))$  être donné et considérer la problème variationnel suivant pour le champ d'endommagement.

**Problem  $\mathcal{PV}_\theta$**  : Trouver  $\beta_\theta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{aligned} \beta_\theta(t) &\in K, (\dot{\beta}_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)) \\ &\geq (\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, p.p. \ t \in (0, T), \\ \beta_\theta(0) &= \beta_0 \end{aligned} \tag{3.73}$$

.

**Lemme 3.3.6.** *Le problème  $\mathcal{PV}_\theta$  admet une solution unique  $\beta_\theta$  qui satisfait*

$$\beta_\theta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

**Preuve :**

L'inclusion de  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$  dans  $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$  est continue et dense. On note  $(H^1(\Omega))'$  l'espace dual de  $H^1(\Omega)$  et identifier le dual de  $L^2(\Omega)$  avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation  $\langle \beta, \xi \rangle_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$  pour l'appariement de la dualité entre  $(H^1(\Omega))'$  et  $H^1(\Omega)$ . nous avons

$$\langle \beta, \xi \rangle_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\beta, \xi)_{L^2(\Omega)}, \quad \beta \in L^2(\Omega), \xi \in H^1(\Omega)$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles  $K$  est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans  $H^1(\Omega)$  ainsi, le champ d'endommagement initial  $\beta_0 \in K$ . Maintenant, en utilisant la définition 3.26 de la forme bilinéaire  $a$ , pour tout  $\varphi, \xi \in H^1(\Omega)$ , on a

$$a(\varphi, \xi) = a(\xi, \varphi),$$

et

$$\begin{aligned} |a(\varphi, \xi)| &\leq k_e \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla \xi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq k_e \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\xi\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donc,  $a$  est continue et symétrique. Ainsi, pour tout  $\varphi \in H^1(\Omega)$  nous avons

$$a(\varphi, \varphi) = k_e \|\nabla \varphi\|_H^2,$$

alors

$$a(\varphi, \varphi) + (k_e + 1) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq k_e (\|\nabla \varphi\|_H^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème 2.5.2 sont vérifiées. Alors, pour tout  $\beta_0 \in K$  et  $\theta \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , il existe une fonction unique  $\beta_\theta$  satisfait  $\beta_\theta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .  $\square$

Enfin, on considère l'opérateur  $\Lambda_\zeta : C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega)) \rightarrow C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  défini par

$$\Lambda_\zeta(\eta, \theta)(t) = (\Lambda_\zeta^{(1)}(\eta, \theta)(t), \Lambda_\zeta^{(2)}(\eta, \theta)(t)) \in \mathcal{H} \times L^2(\Omega), \quad (3.74)$$

$$\Lambda_\zeta^{(1)}(\eta, \theta)(t) = \mathcal{F}(\varepsilon(u_{\zeta\eta}), \beta_\theta) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_{\zeta\eta}(t) + \int_0^t M(t-s) \varepsilon(u_{\zeta\eta}(s)) ds, \quad (3.75)$$

$$\Lambda_\zeta^{(2)}(\eta, \theta)(t) = S(\varepsilon(u_{\zeta\eta}(t)), \beta_\theta(t)). \quad (3.76)$$

Ici, pour tout  $(\eta, \theta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ ,  $u_{\zeta\eta}$ ,  $\varphi_{\zeta\eta}$  et  $\beta_\theta$  représentent les champs de déplacements, le champ de potentiel électrique et le champ d'endommagement obtenus en lemmes 3.3.4-3.3.6 respectivement.

**Lemme 3.3.7.** *L'opérateur  $\Lambda_\zeta$  admet un point fixe unique  $(\eta_\zeta, \theta_\zeta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ .*

**Preuve.**

Soit  $(\eta_{\zeta 1}, \theta_{\zeta 1}), (\eta_{\zeta 2}, \theta_{\zeta 2}) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ . On utilise la notation :  $\eta_{\zeta i} = \eta_i$ ,  $\theta_{\zeta i} = \theta_i$ ,  $u_{\eta i} = u_i$ ,  $\dot{u}_{\eta i} = v_{\eta i} = v_i$ ,  $\varphi_{\eta i} = \varphi_i$  et  $\beta_{\theta i} = \beta_i$  pour  $i = 1, 2$ . On utilise les hypothèses (3.15), (3.17) et (3.21)

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\zeta^{(1)}(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_\zeta^{(1)}(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \|\mathcal{F}(\varepsilon(u_1), \beta_1) - \mathcal{F}(\varepsilon(u_2), \beta_2)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \int_0^t \|M(t-s) \varepsilon(u_1(s) - u_2(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\quad + \int_0^t \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 dt + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2. \end{aligned}$$

Rappelons que  $u_{\eta\nu}$  et  $u_{\eta\tau}$  désignent la normale et la composante tangentielle de la fonction  $u_\eta$  respectivement. Par un argument similaire de (3.76) et (3.16) il résulte que

$$\|\Lambda_\zeta^{(2)}(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_\zeta^{(2)}(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.77)$$

donc

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\zeta(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_\zeta(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &+ \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2. \end{aligned} \quad (3.78)$$

D'après (3.62) on a

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V &\leq \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds \\ &\leq \left( \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds.$$

On utilise (3.69), il résulte du lemme 3.3.5

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq C\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2, \quad (3.79)$$

selon (3.73), on conclut

$$\begin{aligned} &(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \\ &\leq (\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} \quad p.p. \ t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.80)$$

on utilise les conditions initiale  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0$ , l'inégalité  $a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0$  et la théorème 2.3.4 on a

$$\frac{1}{2}\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds,$$

ce qui implique

$$\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

d'après l'inégalité de Gronwall (2.7.1), il résulte

$$\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.81)$$

Les inégalités (3.78) et (3.79) donne

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\zeta(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_\zeta(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds) \\ &\leq C(\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2), \end{aligned}$$

on utilise (3.55) et (3.81)

$$\|\Lambda_\zeta(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_\zeta(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)} \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 ds.$$

En réitérant  $m$  fois cette inégalité ( en utilisant la même méthode de lemme 3.3.3)

$$\|\Lambda_\zeta^m(\eta_1, \theta_1) - \Lambda_\zeta^m(\eta_2, \theta_2)\|_{C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2.$$

Ainsi, pour  $m$  suffisamment grand,  $\Lambda_\zeta^m$  est une contraction sur l'espace de Banach  $C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ , donc  $\Lambda_\zeta$  a unique point fixe.  $\square$

## Quatrième étape

Soit  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ . Dans cette étape, on considère le problème variationnel suivant.

**Problème  $\mathcal{PV}_\zeta$ .** Trouver un champ de déplacements  $u_\zeta : [0, T] \rightarrow V$ , un champ de contraintes  $\sigma_\zeta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ , un champ de potentiel électrique  $\varphi_\zeta : [0, T] \rightarrow W$  et un champ de déplacements électriques  $D_\zeta : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$  et un champ d'endommagement  $\beta_\zeta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\sigma_\zeta = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\zeta(t)) + \mathcal{F}(\varepsilon(u_\zeta(t), \beta_\zeta(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_\zeta(t) + \int_0^t M(t-s) \varepsilon(u_\zeta(s)) ds, \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} &(\sigma_\zeta(t), \varepsilon(v - \dot{u}_\zeta(t)))_{\mathcal{H}} + j(u_\zeta(t), \dot{u}_\zeta(t), v, \zeta(t)) - j(u_\zeta(t), \dot{u}_\zeta(t), \dot{u}_\zeta(t), \zeta(t)) \\ &\geq (f(t), v - \dot{u}_\zeta(t))_V \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$D_\zeta(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u_\zeta(t)) - B\nabla \varphi_\zeta(t), \quad (3.84)$$

$$(D_\zeta(t), \nabla \phi)_H = (\gamma(u_\zeta(t), \varphi_\zeta(t), \zeta(t)), \phi)_W - (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \beta_\zeta(t) &\in K, (\dot{\beta}_\zeta(t), \xi - \beta_\zeta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\zeta(t), \xi - \beta_\zeta(t)) \\ &\geq (S(\varepsilon(u_\zeta(t)), \beta_\zeta(t)), \xi - \beta_\zeta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$u_\zeta(0) = u_0, \beta_\zeta(0) = \beta_0 \quad (3.87)$$

**Lemme 3.3.8.** *Le problème  $\mathcal{PV}_\zeta$  a une solution unique  $(u_\zeta, \sigma_\zeta, \varphi_\zeta, D_\zeta, \beta_\zeta)$  satisfaisant (3.41)-(3.45).*

**Preuve.**

Soit  $(\eta_\zeta, \theta_\zeta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  le point fixe de  $\Lambda_\zeta$  défini par (3.74)-(3.76) et notons  $u_\zeta = u_{\zeta\eta_\zeta}$ ,  $\varphi_\zeta = \varphi_{\zeta\eta_\zeta}$ ,  $\beta_\zeta = \beta_{\theta_\zeta}$  les solutions aux problèmes  $\mathcal{PV}_{\zeta\eta}$  et  $QV_{\zeta\eta}$  obtenues dans les lemmes 3.3.4-3.3.6 respectivement pour  $(\eta, \theta) = (\eta_\zeta, \theta_\zeta)$ .

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\zeta(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u_\zeta(t), \beta_\zeta(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_\zeta(t) \\ &\quad + \int_0^t M(t-s) \varepsilon(u_\zeta(s)) ds, \forall t \in [0, T], \\ D_\zeta(t) &= \mathcal{E}\varepsilon(u_\zeta(t)) - B \nabla \varphi_\zeta(t), \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

L'équation  $\Lambda_\zeta^{(1)}(\eta_\zeta, \theta_\zeta) = \eta_\zeta$  et  $\Lambda_\zeta^{(2)}(\eta_\zeta, \theta_\zeta) = \theta_\zeta$ , combinée à (3.75) et (3.76) montre que  $(u_\zeta, \sigma_\zeta, \varphi_\zeta, D_\zeta, \beta_\zeta)$  vérifie (3.84)-(3.86). Ensuite, (3.86) et les régularités (3.41)-(3.42) découle des lemmes 3.3.4 - 3.3.6 et les hypothèses sur  $\mathcal{A}, \mathcal{F}, M$  et  $\mathcal{E}$  qui conclut de la partie d'existence du lemme 3.3.8.

La partie unicité du lemme 3.3.8 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda_\zeta$  défini par (3.75)-(3.82) et l'unique solvabilité des problème  $\mathcal{PV}_{\zeta\eta_\zeta}$  et  $QV_{\zeta\eta_\zeta}$  et  $\mathcal{PV}_{\theta_\zeta}$ .

## Cinquième étape

Considérons maintenant l'opérateur  $\mathcal{T} : C(0, T; L^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  défini par

$$\mathcal{T}\zeta(t) = k_1 \int_0^t \mu(\zeta, \|\dot{u}_\tau - v^*\|) p_\nu(u_\nu - h - \zeta) R^*(\|\dot{u}_\tau - v^*\|) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.88)$$

Pour la démonstration du théorème 3.3 dans cette dernière étape, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.3.9.** *L'opérateur  $\mathcal{T}$  admet un point fixe unique  $\zeta^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ .*

**Preuve.**

Soient  $\zeta_1, \zeta_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et notons  $(u_i, \sigma_i, \varphi_i, D_i), i = 1, 2$  les solutions du problème  $\mathcal{PV}_\zeta$  pour  $\zeta = \zeta_i$ , i.e.  $u_i = u_{\zeta_i}$ ,  $v_i = \dot{u}_{\zeta_i}$ ,  $\sigma_i = \sigma_{\zeta_i}$ ,  $\varphi_i = \varphi_{\zeta_i}$  et  $D_i = D_{\zeta_i}$ . De plus, on désignera dans la suite par  $c$  diverses constantes positive qui peuvent dépendre de  $k_1$  et  $v^*$ . On utilise des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de la relation (3.55) pour trouver

$$\|v_1(s) - v_2(s)\|_V \leq c \left( \|u_1(s) - u_2(s)\|_V + \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right). \quad (3.89)$$

En utilisant l'inégalité  $2ab \leq a^2 + b^2$  et on intègre cette inégalité par rapport au fil du temps, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \\ \leq c \left( \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Puisque  $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 &\leq c \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \\ &\leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + c \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \end{aligned} \quad (3.91)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on en déduit que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (3.92)$$

Il découle de (3.90), (3.91) et (3.92)

$$\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \leq c \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (3.93)$$

D'autre part, depuis

$$\mathcal{T}\zeta_i(t) = k_1 \int_0^t \mu(\zeta_i(s), \|\dot{u}_{i\tau}(s) - v^*\|) p_\nu(u_{i\nu}(s) - h - \zeta_i(s)) \mathcal{R}^*(|\dot{u}_{i\tau}(s) - v^*|) ds.$$

pour  $i = 1, 2$ , la relation (3.69) pour obtenir pour  $s \in [0, T]$

$$\|\mathcal{T}\zeta_1(t) - \mathcal{T}\zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t \left( \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 + \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right) ds.$$

Réitérer cette inégalité  $m$  fois ( en utilisant la même méthode de lemme 3.3.3) nous déduisons :

$$\|\mathcal{T}^m \zeta_1 - \mathcal{T}^m \zeta_2\|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} \int_0^t \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))}^2 ds. \quad (3.94)$$

Cela implique pour  $m$  suffisamment grand,  $\mathcal{T}^m$  est un opérateur contractante sur l'espace de Banach  $C(0,T;L^2(\Gamma_3))$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{T}$  a un point fixe unique  $\zeta^* \in C(0,T;L^2(\Gamma_3))$ .  $\square$

### Démonstration du théorème 3.3.1

Soit  $\zeta^* \in C(0,T;L^2(\Gamma_3))$  le point fixe de l'opérateur  $\mathcal{T}$  donné par (3.88), en utilisant (3.82)-(3.85) et (3.86) pour vérifier que  $(\sigma^*, u^*, \varphi^*, D^*, \beta^*)$  est la solution unique du problème  $\mathcal{PV}$ , où  $\sigma^* = \sigma_{\zeta^*}$ ,  $u^* = u_{\zeta^*}$ ,  $\varphi^* = \varphi_{\zeta^*}$ ,  $D^* = D_{\zeta^*}$  et  $\beta^* = \beta_{\zeta^*}$  satisfont la régularité (3.41)-(3.46).

## CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de ce mémoire est d'étudier un problème quasi-statique décrivant le contact avec frottement, et usure entre un corps piézoélectrique et une fondation en mouvement. Le matériau est modélisé par une loi de comportement électro-viscoélastique à mémoire longue et endommagement. L'usure de la surface de contact due au frottement est prise en compte et est décrite par la condition différentielle d'Archard. Le contact est modélisé avec la condition de compliance normale et la loi de frottement associée. Dans notre travail on a présenté une formulation variationnelle du problème puis on a établi l'existence et l'unicité de la solution sous des hypothèses sur les données. La démonstration est basée sur des arguments d'inéquation évolutive parabolique, d'inégalité variationnelle elliptique et du point fixe de Banach.

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, (1975).
- [2] Y. Ayyad, Analyse Variationnelle de Problèmes Dynamiques, Presses Academiques Francophones, (2013).
- [3] A. Azeb Ahmed, Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement, Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas, Sétif (2015).
- [4] M. Barboteu, J. R. Fernandez, Y. Ouafik, Numerical Analysis of A Frictionless Viscoelastic Piezoelectric Contact Problem, Mathematical Modelling and Numerical Analysis 42 (2008), 667-682.
- [5] M. Barboteu, M. Sofonea, Modelling and analysis of the unilateral contact of a piezoelectric body with a conductive support, Journal of Mathematical Analysis and Applications 358 (2009), 110-124.
- [6] M. Barboteu, M. Sofonea, Analysis and numerical approach of a piezoelectric contact problem, Annals of the Academy of Romanian Scientists, Series on Mathematics and its Applications 1 (2009) 7-31.
- [7] M. Barboteu, M. Sofonea, Solvability of a dynamic contact problem between a piezoelectric body and a conductive foundation, Applied Mathematics and Computation 215 (2009), 2978-2991.
- [8] V. Barbu, and T. Precupanu, Convexity and optimisation in Banach spaces, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1986).

- 
- [9] P. Bisegna, F. Lebon, F. Maceri, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support, in : J.A.C. Martins, Manuel D.P. Monteiro Marques (Eds.), *Contact Mechanics*, Kluwer, Dordrecht, (2002), 347-354.
  - [10] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, (1987).
  - [11] M. Campo, J. R. Fernández, Á. D. Rodríguez-Arós, J. M. Rodríguez, Analysis of a dynamic viscoelastic-viscoplastic piezoelectric contact problem, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 51 (2017), 565-586.
  - [12] O. Chau, J. R. Fernández, W. Han, M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a dynamic frictionless contact problem with adhesion, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 156 (2003), 127-157.
  - [13] M. Dalah, M. Sofonea. Antiplane frictional contact of electro-viscoelastic cylinders. *Electronic Journal of Differential Equations* (EJDE, 161 (2007), 1–14.
  - [14] B. Douib, Contribution à l'étude de quelques problèmes piézoélectriques, Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, (2022).
  - [15] B. Douib, T. Hadj Ammar, Frictional contact problem between thermoelastic piezoelectric bodies with damage, adhesion and normal compliance, *Palestine Journal of Mathematics*, 9(1) (2020), 493–510.
  - [16] B. Douib, T. Hadj Ammar, A. Azeb Ahmed, Analyse of a dynamic contact problem for electro-viscoelastic materials with Tresca's friction, *TWMS J. App. and Eng. Math.*, 12(4) (2022), 1490-1505.
  - [17] G. Duvaut, J.L.Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer Science , Business Media, 219 (2012).
  - [18] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland, Amsterdam, (1976).
  - [19] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I* 5 (1964), 91–140.
  - [20] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane, S. Drabla, Frictional contact problem for electro-viscoelastic materials with long-term memory, damage and adhesion, *Elect. J. Diff. Equ.*, 222 (2014), 1–21.

- [21] W. Han, M. Sofonea. Evolutionary variational inequalities arising in viscoelastic contact problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(2), (2000) 556–579.
- [22] I. R. Ionescu, M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).
- [23] N. Kikuchi, J.T. Oden, Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media, *Int. J. Engng. Sci.*, 18 (1982), 1173-1284.
- [24] Z. Lerguet, M. Shillor, M. Sofonea, A frictional contact problem for an electro-viscoelastic body, *Electronic Journal of Differential Equations*, 170 (2007) 1-16.
- [25] F. Maceri, P. Bisegna, The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support, *Math. Comp. Modelling*, 28 (1998) 19-28.
- [26] M.S. Mesai Aoun, M. Selmani, A. Azeb Ahmed, Variational analysis of a frictional contact problem with wear and damage, *Math. Modelling and Analysis*, 26(2) (2021), 170-187.
- [27] J. Nečas, I. Hlavacek, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies, An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, (1981).
- [28] M. Selmani, Frictional contact problem with wear for electro-viscoelastic materials with long memory, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, 10 (2009), 6-19.
- [29] M. Sofonea, A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, Cambridge University Press, New York, (2012).
- [30] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Taylor and Francis Group, New York, (2006).
- [31] N. Stromberg, Continuum thermodynamics of contact, friction and wear, Thesis No. 491, Department of Mechanical Engineering, Linköping Institute of Technology, Linköping, Sweden, (1995).
- [32] N. Stromberg, L. Johansson, A. Klarbring, Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear *Int. J. Solids Structures* 33 (1996), 1817-1836.
- [33] W. Voigt, *Lehrbuch der kristall-physik*, Teubner, Leipzig, (1966).