



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

# MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

## Thème

Application des ondelettes de Haar pour  
résoudre quelque types des équations  
différentielles partielles

Présenté par: Didi Assia

Zerzour Zineb Baraa

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Beggas Mohamed

Dehda Bachir

Ben ali Brahim

.  
MCA.

.

Président

Rapporteur

Examineur

Univ. El Oued

Univ. El Oued

Univ. El Oued

Année universitaire 2019 – 2020



## Dédicaces



.... Je dédie ce travail :

A

Papa le compatissant , merci pour ta confiance  
Allah vous guérit  
Maman la parfaite , merci pour ton amour  
Pour tous leurs sacrifices, leurs encouragements  
Et leurs amours qui ont été la raison de ma réussite.  
Que dieu leur présente à une bonne santé et une longue vie.

A

Mes soeurs et Mes chers frères  
Mouna tu me manques les gentils Maroua et Imane ,le beau Ahmed  
La belle Rahma et l'ange Rahaf , le généreuse Djamel.K  
Mon bonheur dans cette vie le petit Amine  
Merci pour vos encouragements constants et votre soutien moral  
pour moi .

A

Ma grande famille et mes amies  
Surtout ma copine et ma soeur Thouraia.D

A

Tous mes professeur,  
En particulier, mon premier professeur Salma .Z  
Pour tout ce qu'ils m'ont donné ,Merci beaucoup  
Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués

A

Nous dédions ce travail au Dieu  
Tout-puissant pour trouver l'acceptation et le succès.

ASSIA DIDI



## Dédicaces



.... Je dédie ce travail :

*A*

Mes chers parents  
Pour leur soutien et leurs encouragements.

*A*

Mes chers frères  
Taher , Bashir , Ayoub et Riyad .

*A*

Mes chères soeurs  
Yakin , Amina et ses enfants.

*A*

Ma chère grand-mère Maryame  
Pour ce qu'elle m'a prié Dieu.

*A*

L'ensemble du personel de l'université Echahid Hamma Lakdar d'El  
Oued

Et spécialement les professeurs et plus en particulier le professeur  
encadreur Dr. Bachir Dehda.

*A*

Tous ceux qui n'ont pas été mentionnés  
Et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail  
vous nos .

Zineb Baraá Zerzour



## Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier "Allah" le tout puissant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Comme nous tenons à remercier vivement, encadreur de mémoire Dr. Dehda Bachir maître de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de ce travail.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Nous remercions vivement nos parents et nos frères pour l'aide et le soutien moral qu'ils nous ont prodigués

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également à nos camarades de la promotion 2020 de Mathématiques et nos amis surtout Thouria , Nour , Sana et Khadija pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal .

Que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.

Enfin ,Nous remercions tous nos Personnel universitaires qui nous accueillent chaque matin avec le sourire

---

# Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'effet pratique de deux méthodes numériques pour résoudre les équations aux dérivées partielles. On commence par un rappel sur les équations aux dérivées partielles, généralités et des propriétés principales, puis on présente la méthode classique de Différences Finies pour résoudre ces équations. Ensuite, on introduit des autre méthodes numériques pour résoudre les EDPs basées sur les ondelettes de Haar bidimensionnelle et unidimensionnelle, où chaque méthode est caractérisée par des exemples illustratifs. Les résultats expérimentaux montre bien l'efficacité et la robustesse de ces dernières méthodes par rapport à la méthode de Différences Finies.

**Mots-clés :** Equations aux dérivées partielles , Méthode de Différences Finies , Ondelette de Haar bidimensionnelle , Ondelette de Haar unidimensionnelle.

---

# Abstract

This work is devoted to the study of the practical effect of two numerical methods for solving partial differential equations. We begin with an overview of PDEs, generalities and main properties, then we present the classical Finite Difference method to solve these equations. Next, we introduce other numerical methods to solve PDEs based on two-dimensional and one-dimensional Haar wavelets, where each method is characterized by illustrative examples. The experimental results clearly show the efficiency and robustness of these latter methods compared to the Finite Difference method.

**Keywords :** Partial differential equations, Finite Difference method, two-dimensional and one-dimensional Haar wavelets.

---

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions et Des exemples	3
1.2 Conditions initiales et conditions au bord	4
1.3 Équations aux dérivées partielles du 1 <sup>er</sup> ordre	8
1.4 Équations aux dérivées partielles du 2 <sup>ème</sup> ordre	10
1.4.1 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre	13
1.5 Approximation de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 1 par différences finies	15
1.5.1 Principe de la méthode	15
1.5.2 Le maillage, les conditions initiales et les conditions au bord	15
1.5.3 Le schéma explicite à trois points pour la dérivée seconde	16
1.5.4 Le schéma implicite à trois points pour la dérivée seconde	17
1.5.5 Consistance, Stabilité et Convergence du schéma	18
<b>2 Méthode Numérique basée sur l'ondelette de Haar bidimensionnelle pour résoudre EDPs</b>	<b>22</b>
2.1 Définitions et quelques exemples	22
2.1.1 Qu'est ce qu'une ondelette	22
2.1.2 Propriétés des ondelettes	24
2.2 La base d'ondelette de Haar sur $L^2([a, b])$	24
2.2.1 Principe de La Méthode D'ondelettes de Haar	25
2.2.2 Explication de la méthode D'ondelettes de Haar	25
2.2.3 Méthode de solution des équation aux dérivées partielle à l'aide d'ondelettes de Haar bidimensionnelles [9]	27
<b>3 Méthode Numérique basée sur l'ondelette de Haar unidimensionnel pour résoudre EDPs</b>	<b>36</b>
3.1 Équation du télégraphe [10]	36
3.1.1 Méthode de solution	37
3.1.2 Exemple numérique	40
3.2 Solution numérique d'EDP paraboliques à l'aide de la méthode de collocation par ondelettes de Haar à une grille adaptative [11]	43

3.2.1	Grilles adaptatives . . . . .	43
3.2.2	Méthode de solution . . . . .	43
3.2.3	Exemple numérique . . . . .	45
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>

---

# Table des figures

2.1	Certains types d'ondelettes . . . . .	23
2.2	Solution de Haar du problème de Poisson pour $J = 3$ . . . . .	32
2.3	Solution exacte du problème de Poisson pour $y = 0.5$ . . . . .	32
2.4	Solution exacte du problème de Poisson pour $x = 0.5$ . . . . .	32
2.5	Solution de Haar du problème de Diffusion pour $J = 3$ . . . . .	35
3.1	Comparaison entre la solution de haar et la solution exacte du problème de télé- graphe à $t = 0.1$ . . . . .	42
3.2	Comparaison entre la solution de haar et la solution exacte du problème de télé- graphe à $t = 0.2$ . . . . .	42
3.3	Comparaison entre la solution de haar et la solution exacte du problème de télé- graphe à $t = 0.3$ . . . . .	42
3.4	Comparaison de la solution de Haar ( AGHWCM ) avec la solution exacte du pro- blème eq. (3.43) pour $M = 4$ . . . . .	46

---

# Introduction Générale

Les équations aux dérivées partielles sont omniprésentes dans les sciences et de l'ingénierie puisqu'elles apparaissent bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Aussi Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des équations aux dérivées partielles. Et l'un des sept problèmes du prix du millénaire consiste à montrer l'existence et la continuité par rapport aux données initiales d'un système d'équation aux dérivées partielles appelé équations de Navier-Stokes.

La résolution plus généralement des équations aux dérivées partielles occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. La solution analytique d'équation aux dérivées partielles, cependant, soit n'existe pas ou est difficile à trouver. ces dernières années, la plus grande importance a été déplacée des techniques analytiques aux méthodes numériques. où Le principal attrait des méthodes numériques est que des solutions pourraient être obtenues pour de nombreux problèmes qui ne sont pas prêts pour un traitement analytique. C'est précisément en raison de ce fait que plusieurs méthodes efficaces et précises ont été développées pour trouver la solution numérique des équations aux dérivées partielles comme méthodes sans maillage , méthodes des différences finies et méthode des éléments finis , méthode D'ondelettes etc.

Les ondelettes sont une théorie mathématique remarquablement nouvelle fondée à la fin des années 1980 et c'est aussi un outil mathématique courant pour diviser, analyser et intégrer une fonction. Ces dernières années, les ondelettes a trouvé un grand nombre d'applications dans le domaine de la science et de l'ingénierie comme dans l'analyse du signal, l'analyse numérique et la compression d'images etc. Il existe différents types d'ondelettes comme Daubechies, Coiflet , Battle-Lemarie, Ondelettes B-spline et Chebyshev , Mathieu , Legendre et Ondelettes de Haar. etc. Elles sont séparées en fonction de leurs propriétés comme le support compact, l'orthogonalité et le nombre de moments nuls et autres. Beaucoup de travaux ont été consacrés par de nombreux auteurs comme U. Lepik, G. Hariharan, N. M. Bujurke. et A.P. Reddy afin de trouver la solution approximative des différents types d'équations comme équations intégrales et l'intégration numérique, les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles et les équations aux dérivées partielles fractionnaires linéaires et non linéaires qui jouent un rôle très important

dans divers phénomènes physiques utilisant différents types d'ondelettes. Les algorithmes d'ondelettes pour résoudre les équations aux dérivées partielles sont basés sur les techniques de Galerkin ou sur la méthode de collocation.

En raison de leur simplicité, les ondelettes de Haar ont retenu l'attention de nombreux chercheurs. En 1909, le mathématicien hongrois Alfréd Haar définit une fonction composée d'une courte impulsion négative suivie d'une courte impulsion positive, appelé par l'ondelette de Haar ou fonction de Rademacher. On considère que c'est la première ondelette connue. Il s'agit d'une fonction constante par morceaux, ce qui en fait l'ondelette la plus simple à comprendre et à implémenter et mathématiquement est les ondelettes orthonormées les plus simples avec un support constant. Les techniques basées sur les ondelettes de Haar ont été utilisées avec succès dans diverses applications telles que l'analyse temps-fréquence, la suppression du bruit du signal, l'approximation non linéaire et la résolution de différentes classes de PDE par divers auteurs (Chen et Hsiao, Lepik, Bujurke et al., Shiralashetti). Une bonne caractéristique des ondelettes de Haar est également la possibilité d'intégrer ces ondelettes de manière analytique à des moments arbitraires. Un inconvénient de ces ondelettes est leur discontinuité; comme les dérivées n'existent pas dans les points de rupture, il n'est pas possible d'appliquer ces ondelettes directement pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

Pour calculer les coefficients d'ondelettes, nous devons résoudre un système linéaire d'équations algébriques. Dans la plupart des cas, les coefficients d'ondelettes ont été calculés par la méthode de Galerkin ou de collocation. Nous utilisons également de simulation Ordinateur pour calculer les coefficients d'ondelettes. En particulier, nous utilisons le programme Matlab.

Notre mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres :

Dans le premier chapitre : Nous sommes intéressés à donner quelques concepts élémentaires d'équations aux dérivées partielles et certaines de leurs propriétés nous donnons également des classifications d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2. Ensuite, nous examinons quelques méthodes classiques et les plus couramment utilisées pour résoudre des équations aux dérivées partielles, telles que la méthode des différences finies.

Dans le second chapitre : Nous étudions une nouvelle méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles basée sur les ondelettes de Haar. Nous mentionnons le principe de cette méthode et la méthode de solution, puis nous appliquons la méthode proposée à des exemples numériques simples. Dans ce chapitre, nous utilisons les ondelettes de Haar bidimensionnelles.

Dans le troisième chapitre : Ce chapitre sera un chapitre purement appliqué où nous appliquerons la méthode HAAR à plusieurs exemples numériques bien connus. Nous comparerons également la méthode proposée avec d'autres méthodes en termes d'erreur.

Finalement, nous complétons ce mémoire par une conclusion générale et des références principales.

# Généralités sur les équations aux dérivées partielles

## 1.1 Définitions et Des exemples

**Définition 1.1.1** [3] : *les équations aux dérivées partielles*

Soit  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , une équation aux dérivées partielles pour la fonction  $u$  est une relation entre  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et un nombre fini de dérivées partielles.

Autrement dit, une équation aux dérivées partielles est sous la forme :

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}, \dots, \partial x_n^{k_n}}\right) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

Où  $k_1, k_2, \dots, k_n$  sont des entiers positifs tels que  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ .

et  $f \in C^k$  est une fonction de plusieurs variables réelles définie sur un ouvert du plan  $\mathbb{R}^n$  et  $m \leq k$ .  
L'équation eq. (1.1) considérée dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 1.1.1** [13] si  $n = 1$  alors l'équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation différentielle ordinaire (EDO).

**Remarque 1.1.2** [3] si  $f = 0$  on dit que l'équation est homogène. sinon on dit que l'équation est non homogène.

**Remarque 1.1.3** [3] On dit que  $g = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une solution de l'équation aux dérivées partielles dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  si après substitution de  $g$  et ses dérivées partielles eq. (1.1) est vérifiée pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ .

**Définition 1.1.2** [3] Une équation aux dérivées partielles est **linéaire** si  $F$  est linéaire par rapport  $u$  et ses dérivées partielles et **non linéaire** dans le cas contraire.

**Exemple 1.1.1**  $\diamond$  L'équation  $\frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$  est une équation aux dérivées partielles non linéaire et non homogène.

$\diamond$  L'équation  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \cos(x + y)$  est une équation aux dérivées partielles linéaire et non homogène.

◇ L'équation  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -x^2 \frac{\partial u}{\partial y}$  est une équation aux dérivées partielles linéaire et homogène .

**Définition 1.1.3** [3] L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation .

**Définition 1.1.4** [3]

1. Dans l'équation aux dérivées partielles d'ordre  $m$  , La solution qui contenant  $m$  fonctions arbitraire à  $n - 1$  variables est appelé **la solution générale** .
2. la solution extraite de solution générale avec des options spécifiques pour les fonctions arbitraire est appelé **la solution spéciale** .

**Exemple 1.1.2** ◇ L'équation  $y \frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 6x - 4y$  est une équation aux dérivées partielles linéaire et non homogène , d'ordre 1

Leur solution générale est donnée par  $u(x, y) = y^2 G(x) - 3x + 4y$  .

où  $G$  est une fonction à variable unique et continue .

◇ Si nous choisissons  $G(x) = x^2 + 3$  , Donc la solution spéciale de l'équation est donne par  $u(x, y) = y^2(x^2 + 3) - 3x + 4y$  .

**Définition 1.1.5** [13] Le degré d'équation aux dérivées partielles c'est le degré de la dérivée partielle la plus élevée présente dans l'équation .

**Définition 1.1.6** [1] La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes de la fonction inconnue  $u$  .

**Exemple 1.1.3** ◇ L'équation  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  est une équation aux dérivées partielles non linéaire et homogène , d'ordre 3 et de dimension 2 , et du degré 1.

## 1.2 Conditions initiales et conditions au bord

Pour trouver les solutions spéciales à partir de la solution générale , on va imposer les conditions respectives sur l'ensemble des solutions.

Les contraintes les plus fréquentes sont :

**a) Condition initiale :** [3] Si  $u$  une fonction de  $(x, t) \in \Omega \times [t_0, +\infty[ \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , on donne les conditions initiales de la forme  $u(x, t_0) = \Phi_0(x)$  où  $D_2^n u(x, t_0) = \Phi_n(x)$   
On parle aussi de conditions de cauchy.

**b) Condition aux bord :** [1, 3] soit  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et une équation aux dérivées partielles valide dans un ouvert  $\Omega$

Les quatre conditions principales sont :

1. [1, 3] On appelle **condition de Dirichlet** une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord  $\partial\Omega$  .

c-à-d , on impose la valeur de  $u$  sur  $\partial\Omega$  C'est la condition de Dirichlet i.e  $u|_{\partial\Omega} = g$

2. [1, 3] On appelle **condition de Neumann** une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord  $\partial\Omega$ .  
c'est-à-dire sur  $\Omega$  et sa frontière, et d'admettre en tout point de la frontière de  $\Omega$  une dérivée  $\frac{\partial u}{\partial n}$  suivant le vecteur normal  $\vec{n}$  orienté vers l'extérieur de la frontière de  $\Omega$  (supposée suffisamment régulière) égale à une fonction donnée.  
c-à-d, on impose la valeurs de  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sur  $\partial\Omega$  C'est la condition de Neumann .  
i.e  $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{grad}(u) \cdot \vec{n}$
3. [13] On impose les deux condition (1) et (2) sur  $\partial\Omega$  C'est la **condition de Cauchy** .
4. [1] On appelle **condition de Fourier-Robin** une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord .

**Exemple 1.2.1**      $\diamond$  Pour une équation aux dérivées partielles  $\Delta u = 0$  , où  $\Delta$  est le Laplacien

la condition aux limites de **Dirichlet** sur un domaine  $[0, 1] \times ]0, 1[ \subset \mathbb{R}^2$  s'exprime par :

$$\begin{cases} u(0, y) = \alpha \\ u(1, y) = \beta \\ u(x, 0) = \gamma \\ u(x, 1) = \eta \end{cases}$$

$\diamond$  Pour une équation aux dérivées partielles  $\Delta u + u = 0$  , où  $\Delta$  est le Laplacien .  
la condition aux limites de **Neumann** sur un domaine  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  s'exprime par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n}(0, y) = a_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + b_1 \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = \alpha' \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, y) = a_2 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) + b_2 \frac{\partial u}{\partial y}(1, y) = \beta' \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, 0) = a_3 \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) + b_3 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \gamma' \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1) = a_4 \frac{\partial u}{\partial x}(x, 1) + b_4 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \eta' \end{cases}$$

$\diamond$  Pour la même équation dans l' exemples précédent.  
la condition aux limites de **Fourier-Robin** sur un domaine  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  s'exprime par :

$$\begin{cases} a_1 u(0, y) + b_1 \frac{\partial u}{\partial n}(0, y) = \alpha'' \\ a_2 u(1, y) + b_2 \frac{\partial u}{\partial n}(1, y) = \beta'' \\ c_1 u(x, 0) + d_1 \frac{\partial u}{\partial n}(x, 0) = \gamma'' \\ c_2 u(x, 1) + d_2 \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1) = \eta'' \end{cases}$$

◇ Pour une équation aux dérivées partielles  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , la condition aux limites de **Cauchy** sur un domaine  $[0, 1] \times [t_0, +\infty[ \subset \mathbb{R}^2$  s'exprime par :

$$\begin{cases} a'_1 u(t, 0) = \delta \\ a'_2 u(t, 1) = \varepsilon \\ a'_3 \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \zeta \\ a'_4 \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = \xi \end{cases}$$

**Remarque 1.2.1** [1]

- i. Un problème du **premier type** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Dirichlet.
- ii. Un problème du **deuxième type** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Neumann.
- iii. On appelle problème du **troisième type** un problème où les conditions sont de types différents sur des portions du bord.

**Définition 1.2.1** [14] On appelle problème aux limites, l'équation aux dérivées partielles eq. (1.1) munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière ou bord du domaine sur lequel elle est posée.

**Notation 1.2.1** On note le symbole (P) au problème aux limites.

**Définition 1.2.2** [1] Supposons que l'équation aux dérivées partielles eq. (1.1) est complétée par des conditions sur le bord de  $\partial\Omega$  du type :

$$\varphi \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}} \right) = 0 \tag{1.2}$$

pour  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial\Omega$

Ces conditions peuvent être de nature très différentes et influent fortement sur l'existence et la forme des solutions.

- i. Quand les conditions portent sur le bord complet du domaine, on parle de **problème aux frontières**.
- ii. Quand le domaine est d'extension infinie autour d'un obstacle compact (par exemple lors de l'étude de la signature radar d'un objet), on parle de **problème extérieur**.
- iii. Quand les conditions ne portent que sur une partie du bord du domaine sur lequel on connaît la valeur de la fonction et de ses dérivées de degré inférieur à l'ordre de l'équation, on parle de **problème de Cauchy**.

**Exemple 1.2.2**     $\diamond$  *Le problème aux limites suivant est un **problème extérieur***

$$\begin{cases} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \forall (x, t) \in ]0, l[ \times ]0, +\infty[ \\ u(0, t) = u_0 e^{-\alpha t} & \forall y \in ]0, +\infty[ \\ u(l, t) = u_0 e^{-\beta t} & \forall y \in ]0, +\infty[ \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0 & \forall x \in ]0, l[ \end{cases} \quad (1.3)$$

$\diamond$  *Le problème aux limites suivant est un **problème aux frontières***

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(x, y) & \forall x, y \in ]0, 1[ \\ u(0, y) = u(1, y) = 0 & \forall y \in ]0, 1[ \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0 & \forall x \in ]0, 1[ \end{cases} \quad (1.4)$$

**Remarque 1.2.2** [1] *Les équations de la physique sont fréquemment posées sur des domaines **spatio-temporels** du type  $\Omega = \mathbf{w} \times [t_0, +\infty[$ ; où  $\mathbf{w}$  est un ouvert de l'espace  $\mathbb{R}^{n-1}$  et  $[t_0, +\infty[$  est l'intervalle temporel d'étude,  $t_0$  est l'instant initial (souvent pris égal à 0).*

*On a alors le plus souvent un problème aux frontières en espace et un problème de Cauchy en temps que l'on appelle également **problème aux conditions initiales**.*

**Remarque 1.2.3** [1]

1. *Dans le cas d'un problème extérieur, L'EDP est généralement complétée par un comportement asymptotique à l'infini ( voir eq. (1.3)).*
2. *Le concept même de recherche de solution(s) d'une équation aux dérivées partielles n'est pas forcément très clair, et nécessite d'être précisé pour chaque problème.*

**Définition 1.2.3 : types de problèmes** [13]

*On distingue a priori deux types de problèmes :*

1. *ceux dans lesquels n'intervient pas la variable temps  $t$ , et qui ne dépendent donc que des variables spatiales  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ils sont appelés **problèmes stationnaires** par exemple eq. (1.4).*
2. *ceux dans lesquels intervient, en plus des variables spatiales  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la variable temps  $t$ , ils sont appelés **problèmes d'évolution** par exemple eq. (1.3).*

**Définition 1.2.4** [3] *Soit une équation aux dérivées partielles valide dans un domaine  $\Omega$  muni de conditions aux frontières.*

*On appelle le problème (P) est problème **bien posé** si les conditions suivantes sont remplies :*

1. *L'équation aux dérivées partielles admet une solution satisfait le condition aux frontières ( Condition d'existence ).*
2. *La solution doit être unique ( Condition d'unicité ).*

3. La solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées ( Condition de stabilité ) .

[1] D'une autre manière, nous disons que le problème est bien posé au sens de Hadamard s'il existe une unique solution qui dépend des données de façon continue.

**Remarque 1.2.4** [1]

1. Les trois conditions préalables sont appelées conditions de **Hadamard** .
2. Si l'une des trois conditions précédentes n'est pas remplie , nous disons que le problème (P) est problème mal posé .

**Exemple 1.2.3** Pour la simplicité ,supposent que le problème de **Cauchy** suivant dans la dimension 1

$$\begin{cases} u''(x) = 0 & \forall x \in ]a, b[ \subset \mathbb{R} \\ u'(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases} \quad (P) \quad (1.5)$$

La solution est donnée directement comme  $u(x) = c_1x + c_2$  , Donc  $u' = c_1$  et par le condition de Cauchy on a

$$\begin{cases} u'(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = \alpha \\ c_1 = \beta \end{cases}$$

On distingue deux cas

1. Si  $\alpha \neq \beta$  Le problème eq. (1.5) n'admet pas solution ( La condition d'existence n'est pas vérifié ) .
2. Si  $\alpha = \beta$  , Donc  $u(x) = \alpha + c_2$  et le problème eq. (1.5) admet une infinité des solutions ( La condition d'unicité n'est pas vérifié ) .  
Enfin ,Nous concluons le problème eq. (1.5) est une problème **mal posé**

## 1.3 Équations aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre

**Définition 1.3.1** [14] soit  $\Omega$  un ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  .

Une équation dans laquelle figure une fonction  $v$  de plusieurs variables indépendantes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et des dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre de  $v$  par rapport à ces variables. c'est-à-dire une équation de la forme

$$F\left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (1.6)$$

tel que  $f$  est une fonction continue de plusieurs variables réelles définie sur un ouvert du plan  $\mathbb{R}^n$  et  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ .

**Remarque 1.3.1 : Un cas spécial** [1]

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire du 1<sup>er</sup> ordre dans la dimension deux (D2) est la forme :

$$A(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} + C(x, y) v = D(x, y) \quad (1.7)$$

tel que  $A, B, C$  et  $D$  sont fonctions continues de deux variables réelles ; et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  .

**Remarque 1.3.2** [14] La solution générale d'une équation aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre dépend d'une fonction arbitraire.

**Exemple 1.3.1** Nous considérons l'équation différentielle partielle d'ordre un avec la condition initiale suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + 2v = 0 \\ v(x, 0) = \sin x \end{cases} \quad (1.8)$$

L'équation précédente est une équation aux dérivées partielles à coefficients constants et d'ordre un .

Pour résoudre ce problème nous utiliserons la **méthode des caractéristiques** , Nous allons essayer d'expliquer brièvement le principe de cette méthode.

**Principe général de la méthode des caractéristiques :** Objectifs de cette méthode pour convertir une équation différentielle partielle d'ordre un en une équation différentielle ordinaire , et cela par utilisation d'un changement de variables .

Donc , on considère l'équation suivant

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) u = 0 \quad (1.9)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont fonctions continues .

Soit  $s$  un variable dans  $[0, +\infty[$  . et soit ainsi  $\mu$  tel que  $x(0) = \mu$  et  $t(0) = 0$  .

On pose  $\Gamma = \{x(s), t(s) ; 0 \leq s \leq +\infty\}$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = a(x, t) \\ \frac{\partial t}{\partial s} = b(x, t) \end{cases}$$

Donc , on a

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s}$$

Alors

$$1.9 \iff \frac{\partial u}{\partial s} + c(x, t) u = 0$$

Et c'est une équation différentielle ordinaire sur  $\Gamma$  .

Revenir à l'exemple 1.3.1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = 1 \\ \frac{\partial t}{\partial s} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x(s) = s + c_1 \\ t(s) = s + c_2 \end{cases}$$

À travers les deux conditions  $x(0) = \mu$  et  $t(0) = 0$  on a

$$\begin{cases} x(0) = c_1 = \mu \\ t(0) = c_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(s) = s + \mu \\ t(s) = s \end{cases}$$

$$\implies x(s) - t(s) = \mu$$

Donc ,

$$\text{eq. (1.8)} \implies \frac{\partial v}{\partial s} + 2v = 0$$

Directement , sa solution est donnée par la forme  $v(\mu, s) = ke^{-2s}$

Maintenant , on a la condition  $k = v(\mu, 0) = \sin \mu$

$$\implies v(\mu, s) = \sin \mu e^{-2s}$$

$$\implies v(x, t) = \sin(x - t) e^{-2t}$$

## 1.4 Équations aux dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre

**Définition 1.4.1** [14] soit  $\Omega$  un ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  .

Une équation dans laquelle figure une fonction  $u$  de plusieurs variables indépendantes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et des dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre de  $u$  par rapport à ces variables. c'est-à-dire une équation de la forme

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (1.10)$$

tel que  $f$  est une fonction continue de plusieurs variables réelles définie sur un ouvert du plan  $\mathbb{R}^n$  et  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ .

**Remarque 1.4.1** : *Un cas spécial* [14]

Soit  $u$  une fonction de deux variables  $x$  et  $y$ . On appelle équation aux dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre, une relation de la forme

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = f \quad (1.11)$$

tel que  $f$  est fonction continue de deux variables réelles ; et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  .

**Définition 1.4.2** [13] *L'équation aux dérivées partielles linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre aux Coefficients Constantes dans la dimension deux (D2) elle est donnée par la relation suivante :*

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \quad (1.12)$$

tel que  $a, b$  et  $c$  sont des Constantes réelles pas nul en même temps , et  $d, e, f$  et  $g$  sont des Constantes réelles .

**Exemple 1.4.1** *L'équation*

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 \quad (1.13)$$

est une équation aux dérivées partielles linéaire et non homogène d'ordre 2.

**Remarque 1.4.2** [14] *La solution générale d'une équation aux dérivées partielles d'ordre 2<sup>ème</sup> dépend de deux fonctions arbitraires.*

**Exemple 1.4.2** *Dans l'équation eq. (1.13) , Nous trouverons une solution générale à elle . Nous utilisons une équation différentielle ordinaire , on pose*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v(x) \quad (1.14)$$

Nous dérivons l'équation eq. (1.14) par rapport  $x$  on obtient

$$v'(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (1.15)$$

on remplace eq. (1.14) et eq. (1.15) dans eq. (1.13) on obtient

$$xv' + 2v = y^2 \quad (1.16)$$

On divise eq. (1.16) sur  $x$  , et on a

$$v' + \frac{2}{x}v = \frac{y^2}{x} \quad (1.17)$$

Et c'est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 de la forme  $\frac{\partial y}{\partial x} + p(x)y = q(x)$

Directement , Sa solution est  $y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + c \right]$  Donc , on a

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[ \int \frac{y^2}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + c(y) \right] \\ &= c(y) e^{-\int \frac{2}{x} dx} + \left( \int \frac{y^2}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right) \int \frac{y^2}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \\ &= \frac{c(y)}{x^2} + \frac{y^2}{2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \implies u(x, y) &= \int v(x) dy + F(x) \\ &= \frac{1}{x^2} \int c(y) dy + \frac{1}{6} y^3 + F(x) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Donc , la solution générale est donnée par

$$u(x, y) = \frac{1}{x^2}G(y) + F(x) + \frac{1}{6}y^3 \quad (1.20)$$

où  $F$  et  $G$  sont fonctions à variable unique  $x$  et  $y$  respectivement et continue.

**Nous allons maintenant fournir une classification des équations aux dérivées partielles en termes de linéarité**

**Définition 1.4.3** [1] Cette classification est illustrée dans le cas d'équations du **second ordre** :

1. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **linéaire** si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire :

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y) u = G(x, y) \quad (1.21)$$

2. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **semi-linéaire** si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé est linéaire . c-à-d, Tout cela est une équation de forme

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y) \quad (1.22)$$

où  $A, B, C$  désignent des fonctions des variables  $x, y$  et  $F$  une fonction définie dans un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  ; et  $f$  est une fonction continue de plusieurs variables réelles définie sur un ouvert du plan  $\mathbb{R}^2$  .

3. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **quasi-linéaire** si elle est de la forme :

$$A\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y) \quad (1.23)$$

où  $A, B, C$  sont des fonctions définies dans un ouvert de  $\mathbb{R}^5$  ; et  $F$  une fonction définie dans un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  ; et  $f$  est une fonction continue de plusieurs variables réelles définie sur un ouvert du plan  $\mathbb{R}^2$  .

4. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **complètement non linéaire** Si elle ne rpond à aucune des trois définitions précédentes ( i.e , non linéaire et non semi-linéaire, non quasi-linéaire ) .

**Exemple 1.4.3**     $\diamond$  *L'équation suivante :*

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.24)$$

*C'est une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire .*

$\diamond$  *L'équation suivante :*

$$4x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.25)$$

*C'est une équation aux dérivées partielles semi-linéaire .*

$\diamond$  *L'équation suivante :*

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + xu \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0 \quad (1.26)$$

*C'est une équation aux dérivées partielles complètement non linéaire .*

### 1.4.1 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre

Soit l'équation aux dérivées partielles linéaires du second ordre dans la dimension deux ( $D_2$ ) suivante :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = G(x, y) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.27)$$

où  $a, b, c$  étant trois fonctions définies dans un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et  $F$  une fonction définie dans un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  .

**Définition 1.4.4** [1] *Soit l'équation eq. (1.27) dans un domaine  $\Omega$  , On dit que l'équation eq. (1.27) est **hyperbolique** dans ce domaine si et seulement si atteint :*

$$b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (1.28)$$

**Exemple 1.4.4** *Équation des ondes :*

*Soit l'équation des ondes suivante définie sur  $\Omega = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.29)$$

*où  $c$  étant un réel strictement positif .*

*L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles hyperbolique.*

*Car  $\Delta = 4c^2 > 0$  quel que ce soit  $c \in \mathbb{R}_+$  .*

**Exemple 1.4.5** *Équation de télégraphe :*

Soit l'équation de Télégraphique suivante définie sur  $\Omega = [a, b] \times [0, +\infty[$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + 2\beta^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1.30)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients constants connus ; et  $f$  c'est une fonction continue .

L'équation de Télégraphique est une équation aux dérivées partielles hyperbolique. Car  $\Delta = 4 > 0$ .

**Définition 1.4.5** [1] Soit l'équation eq. (1.27) dans un domaine  $\Omega$  , On dit que l'équation eq. (1.27) est **parabolique** dans ce domaine si et seulement si atteint :

$$b^2(x, y) - 4a(x, y) c(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (1.31)$$

**Exemple 1.4.6** *Équation de la chaleur :*

Soit l'équation de la chaleur suivante définie sur  $\Omega = [0, L] \times [0, +\infty[$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.32)$$

où  $k$  c'est une constante connue.

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique. Car  $\Delta = 0$ .

**Définition 1.4.6** [1] Soit l'équation eq. (1.27) dans un domaine  $\Omega$  , On dit que l'équation eq. (1.27) est **elliptique** dans ce domaine si et seulement si atteint :

$$b^2(x, y) - 4a(x, y) c(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (1.33)$$

**Exemple 1.4.7** *Équation de Laplace :*

Soit l'équation de Laplace suivante définie sur  $\Omega = [a, b] \times [a, b]$  tell que  $a, b \in \mathbb{R}$  .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.34)$$

L'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles elliptique , Car  $\Delta = -4 < 0$  .

**Exemple 1.4.8** *Équation de Poisson :*

Soit l'équation de Poisson suivante définie sur  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1.35)$$

où  $f$  c'est une fonction continue .

L'équation de Poisson est une équation aux dérivées partielles elliptique , Car  $\Delta = -4 < 0$  .

**Remarque 1.4.3** [15] On posse  $\Delta = b^2(x, y) - 4a(x, y) c(x, y)$  , et s'appeler  $\Delta$  est le discriminant de l'équation aux dérivées partielles .

**Remarque 1.4.4** La classe d'équation aux dérivées partielles eq. (1.27) peut être changé d'un point à un autre sur  $\Omega$  .

**Exemple 1.4.9** Soit l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy \quad (1.36)$$

On a ,  $\Delta = 4x^2y^2$  on distingue deux cas :

a) Si  $x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

Donc , l'équation eq. (1.36) c'est une équation aux dérivées partielles parabolique .

b) Si  $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow \Delta > 0$

Donc , l'équation eq. (1.36) c'est une équation aux dérivées partielles hyperbolique .

## 1.5 Approximation de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 1 par différences finies

L'une des méthodes classiques les plus importantes pour résoudre les équations aux dérivées partielles on retrouve la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis . Comme ces méthodes classiques garantissent le passage d'un problème continu où la solution est exacte, à un problème approximatif ou " discrete " où la solution est approximative Dans ce section il suffira d'étudier la méthode des différences finies sulment . Il convient de noter que cette méthode remonte aux travaux de plusieurs mathématiciens du XVIIIe siècle, tels qu'Euler, Taylor, Leibniz et autres. Les avantages de cette méthode sont la facilité de calcul, la simplicité et ne prend pas beaucoup de temps .

### 1.5.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode des différences finies est de remplacer les dérivées incluses dans l'équation étudiée par des différences finies en des points spécifiques et fini appelés points de discrétisation du maillage par utilisant les formules de Taylor ( ou développement de Taylor ) où le reste est négligé. [12]

Nous nous limiterons dans cette étude au problème de l'évolution seulement .

On considère le problème parabolique suivant " C'est le même problème que nous étudierons au chapter 3 du section 3.2 " .

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos(x) & 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0 & 0 \leq x < 1 \\ u(0, t) = 1 - e^{-t}, \quad u(1, t) = \cos(1)(1 - e^{-t}) & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

Il s'agit de l'équation de la chaleur en dimension 1 (d'espace), qui est un problème parabolique en dimension 2 (temps et espace). On distingue deux grandes familles d'approximations par différences finies : les **schémas explicites** et les **schémas implicites**.

### 1.5.2 Le maillage, les conditions initiales et les conditions au bord

Soit  $T$  une constante positive . On va chercher à calculer une solution approchée en un nombre fini de points  $(x_i, t_n)$  du domaine espace-temps  $[0, 1] \times [0, T]$  , On va se limiter au cas le plus simple du **maillage régulier** : soient  $M, N$  deux entiers fixés . On pose

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, M+1\} \quad \text{où } \Delta x = \frac{1}{M+1} \\ t_n &= n\Delta t \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad \text{où } \Delta t = \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (1.38)$$

En particulier,  $x_0 = 0, x_{M+1} = 1, t_0 = 0$  et  $t_N = T$ . Les points  $(x_i, t_n)$  sont alors les points d'intersection d'une grille régulière en espace-temps. L'approximation par différences finies consiste alors à chercher une approximation, notée  $u_i^n$  de  $u(x_i, t_n)$ .

Les valeurs approchées aux points de maillage au bord du domaine et en  $t = 0$  sont données par la valeur exacte donnée de la fonction  $u$  par la condition initiale et les conditions aux bord

$$\begin{cases} u_0^n = 1 - e^{t_n}, & u_{M+1}^n = \cos 1 (1 - e^{t_n}) \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \\ u_i^0 = 0 & \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, M+1\} \end{cases} \quad (1.39)$$

Ceci laisse  $M \times N$  inconnues à déterminer les  $u_i^n$  pour  $1 \leq i \leq M$  et  $1 \leq n \leq N$ . Ces inconnues sont obtenues en approchant les dérivées partielles dans l'EDP eq. (1.37) par la différences finies. La seconde dérivée par rapport à la variable  $x$  est approximée à l'aide de le développement du Taylor. Alors on trouve

$$\frac{\partial^2 u_{\text{ex}}}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (1.40)$$

et s'appelle **schéma à trois points pour la dérivée seconde**, Quant à l'approximation de la dérivée en temps il existe plusieurs choix pour cela sont représentés dans l'équation suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,n} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} & \text{Schéma Centré ou de Richardson} \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,n} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} & \text{Schéma Décentré Avant ou d'Euler progresdif} \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,n} = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} & \text{Schéma Décentré Arrier ou d'Euler rétrograde} \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Le Schéma résultant de le Schéma Décentré Avant c'est appelé Le Schéma d'Euler **explicite**, et Le Schéma résultant de le Schéma Décentré Arrier c'est appelé Le Schéma d'Euler **implicite**. Chacun de ces choix conduit à une famille de schémas distincte. Commençons d'abord par le schéma explicite.

### 1.5.3 Le schéma explicite à trois points pour la dérivée seconde

Pour l'obtenir de ce schéma on utilise l'approximation décentrée à Avant pour la dérivée première du temps qui apparaît dans eq. (1.41)

$$\frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (1.42)$$

Par la substitution de eq. (1.40) et eq. (1.42) dans eq. (1.37), on obtient alors le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \cos(x_i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (1.43)$$

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N-1\}$$

Après simplification, nous trouvons le système suivant

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^n + \left(1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1}^n + \Delta t \cos(x_i), & i = \overline{1, M}, \quad n = \overline{1, N-1} \\ u_0^n = 1 - e^{t^n}, \quad u_{M+1}^n = \cos(1)(1 - e^{t^n}), & n = \overline{1, N} \\ u_i^0 = 0, & i = \overline{1, M} \end{cases} \quad (1.44)$$

Donc on a  $M \times N$  équations pour  $M \times N$  inconnues. les conditions aux limites doivent être connues pour résoudre ces équations, Noter que l'indice de temps  $n$  doit varier entre 0 et  $N - 1$ . Pour plus de simplicité, il est préférable de réécrire le système précédent eq. (1.44) comme un **système matriciel**, pour cela on introduit la notation suivant

$$U^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_M^n)^T, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N\} \quad (1.45)$$

Où Le vecteur  $U^0$  est donné par les conditions initiales, et le schéma précédent eq. (1.44) s'écrit :

$$U^{n+1} = (I_d - \Delta t A_h) U^n + \Delta t B^n, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (1.46)$$

Où on utilise la notation  $I_d$  pour la matrice d'identité et

$$\begin{aligned} B^n &= \left( \cos(x_1) + \frac{u_0^n}{(\Delta x)^2}, \cos(x_2), \dots, \cos(x_M) + \frac{u_{M+1}^n}{(\Delta x)^2} \right)^T \\ &= \left( \cos(x_1) + \frac{1 - e^{-t^n}}{(\Delta x)^2}, \cos(x_2), \dots, \cos(x_M) + \frac{\cos(1)(1 - e^{t^n})}{(\Delta x)^2} \right)^T \end{aligned} \quad (1.47)$$

Aussi, La matrice  $A_h$  est donnée par la relation suivante

$$A_h = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Cette équation justifie le nom explicite pour ce schéma, puisqu'il permet de calculer la valeur approchée  $U^{n+1}$  au temps  $t_{n+1}$  par simple produit de matrice  $A_h$  avec la valeur approchée  $U^n$  au temps  $t_n$ . En particulier, aucune inversion de matrice ou résolution de système linéaire n'est nécessaire pour le calcul.

Une fois que nous avons le système matriciel pour schéma, nous faisons généralement une étude la consistance, la stabilité et la convergence pour cet le schéma, Mais avant ça nous allons faire une étude du schéma implicite pour le même problème.

#### 1.5.4 Le schéma implicite à trois points pour la dérivée seconde

dans ce cas, on utilise l'approximation décentrée à Arrière pour la dérivée première du temps qui apparaît dans eq. (1.41) :

$$\frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \approx \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \quad (1.49)$$

On obtient alors le schéma suivant :

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \cos(x_i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (1.50)$$

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Couplé aux memes conditions initiales que le schéma explicite ,noter que cette fois l'indice  $n$  varie de 1 à  $N$ .Donc vectoriellement , on obtient

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} - A_h U^n = B^n, \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (1.51)$$

où  $A_h$  et  $B$  sont définis comme plus haut, ce qui se réécrit :

$$(\text{I}_d + \Delta t A_h) U^n = U^{n-1} + \Delta t B^n, \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (1.52)$$

**Proposition 1.5.1** [17] *La matrice  $A_h$  est symétrique définie positive,Donc inversible.*

**Démonstration 1.5.1** *La propriété de symétrie est claire , et pour vérifier que la matrice est définie positive, on applique la définition :  $\forall Z \in \mathbb{R}^M$  telle que  $Z \neq \vec{0}$  on a  $Z^T A_h Z > 0$  .*

Alor, On remarque que la matrice  $(\text{I}_d + \Delta t A_h)$  est symétrique définie positive et donc inversible , puisque  $A_h$  est symétrique définie positive aussi . Donc on obtient

$$U^n = (\text{I}_d + \Delta t A_h)^{-1} U^{n-1} + \Delta t (\text{I}_d + \Delta t A_h)^{-1} B^n, \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (1.53)$$

Ce schéma est dit implicite puisque, contrairement au schéma explicite, sa résolution nécessite la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps ou le calcul de l'inverse de la matrice  $(\text{I}_d + \Delta t A_h)$  utilisé ensuite à chaque pas de temps , La résolution du schéma implicite est donc plus couteuse que le schéma explicite. Cependant, ce cout en temps de calcul est largement compensé par la meilleure stabilité du schéma.

**Remarque 1.5.1** [17] *Le schéma centré ou schéma de Richardson ou ce appelé schéma saute-mouton , il est toujours instable et donc numériquement inutilisable.*

### 1.5.5 Consistence, Stabilité et Convergence du schéma

Les deux schémas précédents peuvent s'écrire sous la forme générale suivante

$$C_1 U^{n+1} + C_0 U^n + C_{-0} U^{n-1} = B^n \quad (1.54)$$

Tell que pour le schéma explicite , on a

$$C_1 = \frac{1}{\Delta t} \text{I}_d \quad C_0 = -\frac{1}{\Delta t} \text{I}_d + A_h \quad C_{-1} = 0 \quad (1.55)$$

Pour le schéma implicite , on a

$$C_1 = 0 \quad C_0 = \frac{1}{\Delta t} \text{I}_d + A_h \quad C_{-1} = -\frac{1}{\Delta t} \text{I}_d \quad (1.56)$$

L'étude de la convergence de ces schémas est basée sur les propriétés de consistance et stabilité, définies ci-dessous pour le schéma général eq. (1.55) , Dans la définition suivante nous expliquerons la méthode d'étude de la consistance théoriquement .

## La Consistance

**Définition 1.5.1** On appelle *erreur de consistance* à l'instant  $t^n$  du schéma eq. (1.55) le vecteur  $\varepsilon_h(u)^n$  de  $\mathbb{R}^M$  défini par

$$\varepsilon_h(u)^n = C_1(\pi_h(u))(t^{n+1}) + C_0(\pi_h(u))(t^n) + C_{-1}(\pi_h(u))(t^{n-1}) - B \quad (1.57)$$

où  $\pi_h(u)(t) = (u(x_1, t), u(x_2, t), \dots, u(x_M, t))^T$

On dit que le schéma est consistant pour la norme  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{R}^M$  si

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|\varepsilon_h(u)^n\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad h \rightarrow 0 \quad (1.58)$$

Si de plus il existe  $C > 0, p > 0$  et  $q > 0$  indépendants de  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tels que

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|\varepsilon_h(u)^{(n)}\| \leq C [(\Delta t)^p + (\Delta x)^q] \quad (1.59)$$

Donc , on dit que **le schéma est consistant d'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace** pour la norme  $\|\cdot\|$  .

**Proposition 1.5.2** [17] Supposons que la solution exacte  $u$  au problème comme eq. (1.37) est de  $C^2$  par rapport à la variable  $t$  et  $C^4$  par rapport à la variable  $x$ . Alors les schémas explicites et implicites sont consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espace .

Essayons maintenant la méthode numérique pour prouver la consistance du schéma explicite eq. (1.44) " de la même manière pour le schéma implicite " , De les équations eq. (1.39) et eq. (1.42) on a

$$\frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c_1 \Delta t \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial^2 u_{\text{ex}}}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + c_2 (\Delta x)^2 \quad (1.61)$$

On pose

$$R_h = \left( \frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial t}(x_i, t_n) - \frac{\partial^2 u_{\text{ex}}}{\partial x^2}(x_i, t_n) - \cos(x_i) \right) - \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \cos(x_i) \right) \quad (1.62)$$

$$\implies \|R_h\|_{\infty} = \|c_1 \Delta t + c_2 (\Delta x)^2\|_{\infty} \leq c_3 (\Delta t + (\Delta x)^2) \quad (1.63)$$

où  $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$  , Donc le schéma explicites eq. (1.44) est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  .

## La Stabilité et La Convergence

**Définition 1.5.2** [17] *On dit que le schéma eq. (1.55) avec les conditions au bord non nulles*

$$u(0, t) = g_0(t), \quad u(1, t) = g_1(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

*est stable pour la norme  $\| \cdot \|$  dans  $\mathbb{R}^M$  s'il existe deux constantes positives  $d_1(T)$  et  $d_2(T)$  indépendantes de  $\Delta t$  et  $\Delta x$  telles que*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq n \leq N} \| U^n \| \leq d_1(T) \left[ \| U^0 \| + \max_{0 \leq n \leq N} (|g_0(t^n)| + |g_1(t^n)|) \right] \\ + d_2(T) \max_{0 \leq n \leq N} \| B^n \| \end{aligned} \quad (1.64)$$

*En particulier, si  $C_1 = 0$  ou  $C_{-1} = 0$ , ou bien*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq n \leq N} \| U^n \| \leq d_1(T) \left[ \| U^0 \| + \| U^1 \| + \max_{0 \leq n \leq N} (|g_0(t^n)| + |g_1(t^n)|) \right] \\ + d_2(T) \max_{0 \leq n \leq N} \| B^n \| \end{aligned} \quad (1.65)$$

Pour étudier la convergence de schéma, nous présentons le théorème suivant qui est très importante dans l'étude de la convergence de schéma. C'est le **théorème de Lax**.

**Théorème 1.5.1 (Théorème de Lax)** [17]

*Le schéma eq. (1.55) est convergent si et seulement s'il est consistant et stable.*

Quant au numériquement, nous étudions la convergence par la relation suivante : on pose

$$e^n = u_{\text{ex}}^n - u_{\text{app}}^n \quad (1.66)$$

Où on note  $u_{\text{ex}}^n \doteq u(x_i, t^n)$  et  $u_{\text{app}}^n \doteq u_i^n$  pour tout  $i = 0, 1, \dots, M+1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . On a

$$\frac{u(x_i, t^{n+1}) - u(x_i, t^n)}{\Delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t^n) - 2u(x_i, t^n) + u(x_{i-1}, t^n)}{\Delta x^2} - \cos(x_i) = 0 \quad (1.67)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \cos(x_i) = R_h(u) = c_3(\Delta t + \Delta x^2) \quad (1.68)$$

Par La soustraction, on obtient

$$\text{eq. (1.67)} - \text{eq. (1.68)} \iff \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} - \frac{e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n}{\Delta x^2} = R_h(u) = c_3(\Delta t + \Delta x^2) \quad (1.69)$$

Donc

$$e_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n) + e_i^n + \Delta t c_3 (\Delta t + \Delta x^2) \quad (1.70)$$

On pose  $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ , Alors on obtient

$$e_i^{n+1} = r e_{i+1}^n + (1 - 2r) e_i^n + r e_{i-1}^n + c_3 \Delta t (\Delta t + \Delta x^2) \quad (1.71)$$

Pour que nous puissions étudier la convergence, la condition suivante doit être remplie  $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$  et ce s'appelle condition de C.F.L (Courant, Friedrichs, Lewy,1928).  
 Donc ,Sous la condition précédente on a

$$\begin{aligned}
 \| e^{n+1} \|_{\infty} &= (1 - 2r + r + r) \| e^n \|_{\infty} + c_3 \Delta t (\Delta t + \Delta x^2) \\
 &\leq \| e^n \|_{\infty} + c_3 \Delta t (\Delta t + \Delta x^2) \\
 &\leq \| e^{n-1} \|_{\infty} + 2c_3 \Delta t (\Delta t + \Delta x^2) \\
 &\vdots \\
 &\leq \| e^0 \|_{\infty} + c_3 T (\Delta t + \Delta x^2)
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

Puisque ,  $e^0 = u_{\text{ex}}^0 - u_{\text{app}}^0 = 0$  selon la condition initiale , Donc on a

$$\| e^n \|_{\infty} \leq c_3 T (\Delta t + \Delta x^2) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \Delta t \rightarrow 0 \text{ et } \Delta x^2 \rightarrow 0 \tag{1.73}$$

Alors ,Le schéma explicite est convergent vers la solution exacte  $u_{\text{ex}}(x, t) = \cos(x)(1 - e^{-t})$

---

# Méthode Numérique basée sur l'ondelette de Haar bidimensionnelle pour résoudre EDPs

La notion d' "Ondelettes" ou "Wavelets" a été utilisée pour la première fois au début des années 80 par le géophysicien français J.Morlet pour désigner des fonctions mathématiques utilisées dans la représentation des données sismiques.

Les ondelettes sont des fonctions de base de variation multi-échelles, ou multirésolutions, utilisées dans le but de l'approximation ou de la compression des données.

La théorie des ondelettes n'est pas en fait tout à fait nouvelle, mais le support mathématique, contenu déjà dans les recherches des années 30, a été développé considérablement dans les dernières 20 années, après que ces fonctions ont été utilisés dans le traitement numérique du signal et en particulier dans l'analyse et la compression des images.

## 2.1 Définitions et quelques exemples

### 2.1.1 Qu'est ce qu'une ondelette

**Définition 2.1.1** Une ondelette est une fonction oscillante (ce qui explique le mot "onde") de moyenne nulle, appelée  $\psi$ , possédant un certain degré de régularité et dont le support est fini (ce qui explique le mot "ondelette", qui veut dire petite onde).

**Définition 2.1.2** Une ondelette est une fonction de base que l'on peut translater et dilater pour recouvrir le plan temps-fréquences et analyser un signal. L'ondelette doit être une fonction de moyenne nulle, en d'autres termes, doit être une onde. Ce qui s'écrit mathématiquement par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \, dx = 0 \quad (2.1)$$

**Définition 2.1.3** Une ondelette  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  vérifiant la condition d'admissibilité ssi :

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{w} dw < \infty \quad (2.2)$$

où  $\widehat{\psi}(w)$  est la transformée de Fourier de  $\psi(w)$ .

**Exemple 2.1.1** L'ondelette de Haar :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ -1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

**Exemple 2.1.2** L'ondelette de Morlet (complexe) :

$$\psi(x) = e^{-\pi x^2} e^{10i\pi x} \quad (2.4)$$

maintenant, Nous allons montrer les ondelettes les plus importantes avec leurs courbes graphiques

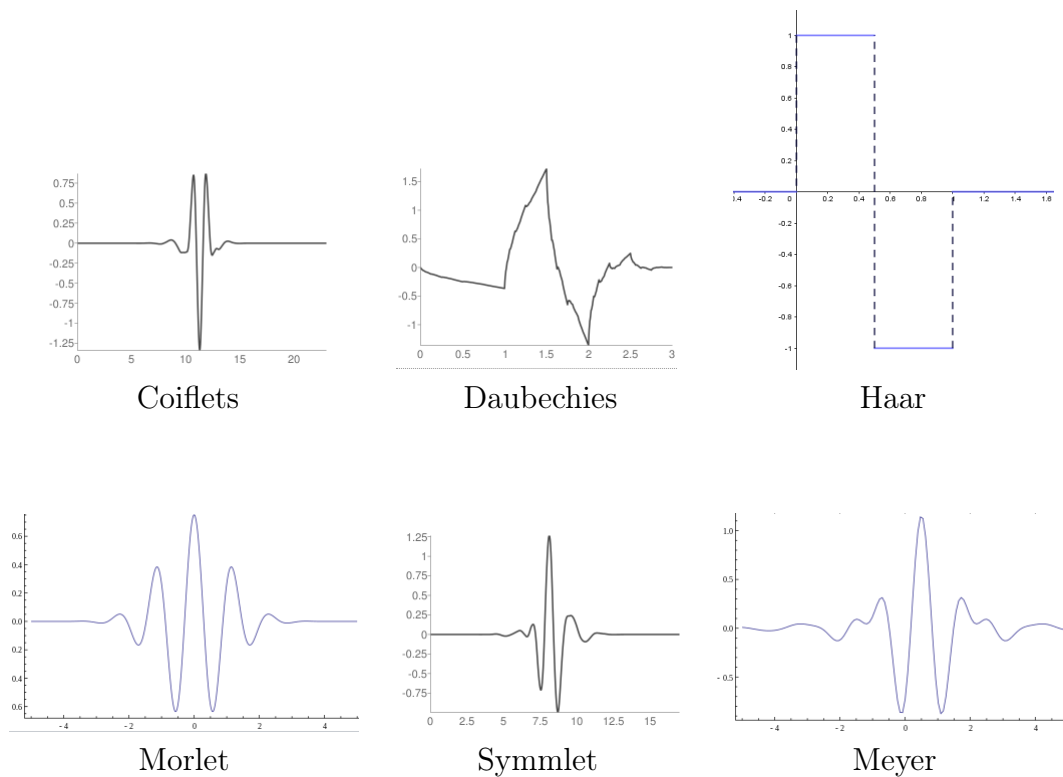


FIGURE 2.1 – Certains types d'ondelettes

### 2.1.2 Propriétés des ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions qui peuvent être caractérisées par certaines propriétés remarquables, ces dernières pouvant être incompatibles entre elles, cela implique des choix à faire suivant l'application souhaitée. Nous donnons des propriétés d'ondelettes [4].

- **Décroissance rapide** : une ondelette sera dite à décroissance rapide si

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0 \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R}, |\psi(x)| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m} \quad (2.5)$$

- **Orthogonalité** : une ondelette  $\psi$  est dite orthogonale si pour tout  $(j, j', n, n') \in \mathbb{Z}^4$  on a

$$\langle \psi_{jn}, \psi_{j'n'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{nn'} \quad (\delta_{jj'} = 0 \text{ si } j \neq j' \text{ et } \delta_{jj} = 1) \quad (2.6)$$

- **Nombre de moments nuls** : pour  $n \in \mathbb{N}$ , une ondelette admet  $n$  moments nuls si

$$\forall k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) \, dx = 0 \quad (2.7)$$

- **Support compact** : Autant l'ondelette a moins de moments nuls autant son support est compact, et une analyse plus exacte des hautes fréquences est possible.

## 2.2 La base d'ondelette de Haar sur $L^2([a, b])$

**Définition 2.2.1** [7] La fonction d'échelle définie sur l'intervalle  $[a, b]$  est :

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [a, b] \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.8)$$

Cette fonction s'appelle l'ondelette père [12].

**Définition 2.2.2** [7] L'ondelette de Haar est définie sur l'intervalle  $[a, b]$ , est donné par :

$$h_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ -1 & \text{si } x \in [\frac{a+b}{2}, b) \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.9)$$

Cette fonction s'appelle l'ondelette mère [12].

Toutes les autres fonctions des ondelettes de Haar sont définies sur des sous-intervalles de  $[a, b]$  et sont générés à partir de  $h_2(x)$  par les opérations de dilatation et de translation.

Chaque fonction des ondelettes de Haar définie pour  $x \in [a, b]$  sauf la fonction d'échelle peut être exprimée comme :

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\alpha, \beta) \\ -1 & \text{si } x \in [\beta, \gamma) \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.10)$$

où

$$\alpha = a + (b - a) \frac{k}{m} \text{ et } \beta = a + (b - a) \frac{k + 0.5}{m}, \quad \gamma = a + (b - a) \frac{k + 1}{m}, \quad i = 3, 4, \dots, 2M.$$

Le entier  $m = 2^j$  indique le niveau de l'ondelette où  $j = 0, 1, 2, \dots, J$  et  $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ .

Le entier  $j$  est le paramètre de dilatation et  $k$  est le paramètre de translation. Le niveau maximal de résolution est l'entier  $J$ . La relation entre  $i, m$  et  $k$  est donné par :  $i = m + k + 1$ , Dans le cas de valeurs minimales  $m = 1$  et  $k = 0$ , on a  $i = 2$ . La valeur maximale de  $i$  est  $i = 2^{J+1} = 2M$ . Les fonctions des ondelettes de Haar sont orthogonales les uns aux autres car

$$\int_a^b h_j(x) h_k(x) dx = \begin{cases} (b - a) 2^{-j} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (2.11)$$

toute fonction  $f$  qui est carrée intégrable dans l'intervalle  $[a, b]$  " i . e  $f \in L^2([a, b])$ " peut être exprimée sous la forme d'une somme infinie d'ondelettes de Haar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(x). \quad (2.12)$$

**Remarque 2.2.1** La série ci-dessus se termine par des termes finis si  $f$  est constante par morceaux ou peut être approchée comme constante par morceaux pendant chaque sous-intervalle.

**Remarque 2.2.2** Lors de l'application de la méthode D'ondelettes de Haar, L'intervalle  $[a, b]$  sera divisé en  $2M + 1$  sous-intervalles, d'où  $\Delta x = \frac{b - a}{2M}$ , les points de colocalisation

$$x_l = a + (b - a) \frac{l - 0.5}{2M}$$

où  $l = 1, 2, \dots, 2M$  et la matrice de Haar  $(H(i, l))_{il}$  est de la dimension de  $2M \times 2M$ , telle que  $H(i, l) = h_i(x_l)$ . Nous expliquerons cela plus tard.

## 2.2.1 Principe de La Méthode D'ondelettes de Haar

Le principe de cette méthode est de réduire le problème à un ensemble d'équations algébriques en développant d'abord les termes, qui a une dérivée maximale, est donné sous une forme de la somme de fonctions de Haar et aussi les coefficients de Haar inconnus [10]. Pour calculer les coefficients de Haar, nous devons résoudre un système linéaire d'équations algébriques, et d'autres dérivés et la fonction elle-même sont obtenus par intégration [9].

## 2.2.2 Explication de la méthode D'ondelettes de Haar

Avant de commencer d'application de la méthode D'ondelettes de Haar sur certaines équations aux dérivées partielles, Nous introduisons les notations suivantes :

$$P_{i,1}(x) = \int_0^x h_i(x) dx \quad (2.13)$$

où  $h_i$  est définie par eq. (2.10), on définit aussi

$$P_{i,v}(x) = \int_0^x P_{i,v-1}(x) dx \quad v = 2, 3, \dots \quad (2.14)$$

Ces intégrales peuvent être calculées en utilisant l'équation eq. (2.10), et les deux premières d'entre elles sont données par

$$P_{i,1}(x) = \begin{cases} x - \alpha & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ \gamma - x & \text{si } x \in [\beta, \gamma] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$P_{i,2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 & \text{si } \alpha \leq x < \beta \\ \frac{(b-a)^2}{4m^2} - \frac{1}{2}(x - \gamma)^2 & \text{si } \beta \leq x < \gamma \\ \frac{(b-a)^2}{4m^2} & \text{si } x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.16)$$

De même, on peut trouver d'autres intégrales  $P_{i,v}(x)$   $v = 3, 4, \dots$ . Intégration les fonctions de Haar eq. (2.10) pour  $\lambda$  fois. Pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\begin{aligned} p_{i,\lambda}(x) &= \underbrace{\int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x h_i(s) ds}_{\lambda \text{ times}} \\ &= \frac{1}{(\lambda - 1)!} \int_a^x (x - s)^{\lambda-1} h_i(s) ds, \quad \lambda = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, 2M \end{aligned} \quad (2.17)$$

Le cas  $\lambda = 0$  correspond à la fonction  $h_i(x)$ .

Toutes ces intégrales peut être calculées analytiquement et présentées directement. Quand  $i = 1$  l'équation eq. (2.17) donne

$$p_{1,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda!} (x - a)^\lambda \quad (2.18)$$

Et pour  $i \geq 2$  dans l'équation eq. (2.17), on obtient

$$p_{i,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda!} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a, \alpha) \\ (x - \alpha)^\lambda & \text{si } x \in [\alpha, \beta) \\ [(x - \alpha)^\lambda - 2(x - \beta)^\lambda] & \text{si } x \in [\beta, \gamma) \\ [(x - \alpha)^\lambda - 2(x - \beta)^\lambda + (x - \gamma)^\lambda] & \text{si } x \in [\gamma, b) \end{cases} \quad (2.19)$$

Pour résoudre les problèmes aux limites dans certains exemples, nous avons besoin des valeurs  $p_{i,\lambda}(b)$ , qui peuvent être calculées à partir de eq. (2.19). Dans des cas particuliers  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = 2$ , on trouve

$$q_1(i) = p_{i,1}(b) = \begin{cases} b - a & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$q_2(i) = p_{i,2}(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}(b-a)^2 & \text{si } i = 1 \\ \frac{(b-a)^2}{4m^2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.21)$$

Sur l'intervalle  $[0, 1)$  on définit aussi ,

$$Ch_i(x) = \int_0^1 P_{i,1}(x) dx \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2M \quad (2.22)$$

Donc,

$$Ch_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 & \text{si } x \in [\alpha, \beta) \\ \frac{1}{4m^2} - \frac{1}{2}(\beta-1)^2 & \text{si } x \in [\beta, \gamma) \\ \frac{1}{4m^2} & \text{si } x \in [\gamma, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.23)$$

Maintenant, après avoir rappelé certains symboles et relations nous commencerons par méthode de solution et expliquer la méthode des ondelettes de Haar en l'appliquant à EDP .

### 2.2.3 Méthode de solution des équation aux dérivées partielle à l'aide d'ondelettes de Haar bidimensionnelles [9]

Des ondelettes de Haar bidimensionnelles sont appliquées pour la résolution des équations aux dérivées partielles (PDE). La méthode proposée est mathématiquement simple et rapide. Pour démontrer l'efficacité de la méthode, nous discuterons deux problèmes de test problème de Diffusion et de Poisson [9].

**Remarque 2.2.3** [9] Les points de collocation que nous utiliserons ici sont  $x'_l = \frac{\tilde{x}'_{l-1} + \tilde{x}'_l}{2}$   $l = 1, 2, \dots, 2M$  où le symbole  $\tilde{x}'_l$  désigne le  $l^{\text{ème}}$  point de grille  $\tilde{x}'_l = a + l\Delta x$ ,  $l = 1, 2, \dots, 2M$

**Remarque 2.2.4** les équations eq. (2.10) et eq. (2.19) sont discrétisés par remplaçant  $x \rightarrow x'_l$  . Il est commode d'introduire les matrices de Haar  $H(i, l) = h_i(x'_l)$ ,  $P_\nu(i, l) = p_{i,\nu}(x'_l)$ .

Maintenant. Nous commençons par la méthode de la solution , considérons l'équation aux dérivées partielle linéaire suivante

$$\sum_{\eta=0}^{\Gamma} \sum_{\mu=0}^{\Lambda} D_{\eta\mu} \frac{\partial^{\eta+\mu} u}{\partial x^\eta \partial y^\mu} = f(x, y) \quad (2.24)$$

où  $\Gamma, \Lambda$  sont des constantes données et  $D_{\eta\mu}, f$  sont des fonctions prescrites. Les variables indépendantes  $x, y$  appartiennent à un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , qui a la frontière  $\sigma$ .

Nous devons calculer la fonction  $u(x, y)$  , qui satisfait les conditions aux limites requises. Pour simplifier nous limitons aux problèmes, où le domaine  $\Omega$  est un rectangle  $x \in [0, L_1]$ ,  $y \in [0, L_2]$  et il divise les intervalles  $[0, L_1]$  et  $[0, L_2]$  en  $2M_1$  et  $2M_2$  parties de longueur égale respectivement .

Approximons la dérivée la plus élevée de l'équation 2.24 , selon la méthode des ondelettes de Haar, la solution est recherchée sous la forme

$$\frac{\partial^{\Gamma+\Lambda} u}{\partial x^{\Gamma} \partial y^{\Lambda}} = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} a_{ij} h_i(x) h_j(y) \quad (2.25)$$

où  $a_{ij}$  sont les coefficients de Haar et  $h_i(x), h_j(y)$  sont les fonctions de Haar.

Laissez-nous déterminer les inconnues  $\frac{\partial^{\eta} u}{\partial x^{\eta}}(x, y), \frac{\partial^{\mu} u}{\partial y^{\mu}}(x, y), \frac{\partial^{\eta+\mu} u}{\partial x^{\eta} \partial y^{\mu}}(x, y)$  et  $u(x, y)$  pour tout  $\eta = 1, 2, \dots, \Gamma, \mu = 1, 2, \dots, \Lambda$  Par intégration multiple l'équation eq. (2.25), . Dans cette étape, les fonctions inconnues  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{\Gamma-1}(x), \psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_{\Lambda-1}(y)$  apparaissent , elles sont calculées à partir des conditions aux limites.

On vérifie eq. (2.25) aux points de collocation  $x_r, y_s$  où  $r \in [1, 2M_1], s \in [1, 2M_2]$ . En faisant cela, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} R_{ijrs} = f(x_r, y_s) \quad (2.26)$$

à partir duquel les coefficients d'ondelettes  $a_{ij}$  peuvent être calculés. Puisque nous ne possédons pas d'algorithmes pour traiter les matrices du quatrième ordre, nous devons transformer le système en une forme, où seules les matrices du deuxième ordre apparaissent. Cela peut être fait en introduisant de nouveaux indices

$$\xi_1 = 2M_1(i-1) + j, \quad \xi_2 = 2M_2(r-1) + s \quad (2.27)$$

Maintenant à l'eq. (2.27) on obtient la forme

$$\sum_{\xi_1=1}^{2M_1} \sum_{\xi_2=1}^{2M_2} B(\xi_1) S(\xi_1, \xi_2) = F(\xi_2) \quad (2.28)$$

Ici,  $B$  et  $F$  sont des vecteurs et  $S$  est une matrice bidimensionnelle  $(2M_1)^2 * (2M_2)^2$ . On obtient donc la matrice suivante

$$BS = F \quad (2.29)$$

Après avoir évalué les coefficients  $B(\xi_1)$  de eq. (2.29), il n'est pas difficile de restaurer la matrice d'origine de la matrice de coefficients de Haar  $a_{ij}$  .

D'après eq. (2.27), nous avons  $\xi_1 / (2M_1) = i - 1 + j / (2M_1)$  .

Par intégrale de l'eq. (2.25)  $\Gamma$ - fois par rapport à la variable  $x$  et  $\Lambda$ - fois par rapport à la variable  $t$ , on obtient

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} a_{ij} p_{\Gamma}(x) p_{\Lambda}(y) + \Psi(x, y) \quad (2.30)$$

**Remarque 2.2.5** Dans la formule précédente, les intégrales  $p_{\Gamma}(x)$  et  $p_{\Lambda}(y)$  sont calculées selon eq. (2.19) . la fonction  $\Psi(x, y)$  incorpore les fonctions  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{\Gamma-1}(x), \psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_{\Lambda-1}(y)$  apparaissant au cours de l'intégration de eq. (2.25).

**Théorème 2.2.1** [19] : On suppose que  $\Gamma, \Lambda \geq 2$  et  $K = \frac{\partial^{\Gamma+\Lambda} u}{\partial x^\Gamma \partial y^\Lambda}$  est continue sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ , et  $\left| \frac{\partial K}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial K}{\partial y} \right|$  et  $\left| \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \right|$  sont bornées sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ , alors

$$\|u - u_{J_1, J_2}\|_{L^2([0,1] \times [0,1])} = O(2^{-2 \min(J_1, J_2)}) \quad (2.31)$$

où  $u_{J_1, J_2}$  est définie dans eq. (2.30) et  $M_1 = 2^{J_1}, M_2 = 2^{J_2}$ .

**Démonstration 2.2.1** La preuve est en la référence [19].

Les détails de cette méthode sont expliqués en résolvant deux problèmes différents dans ce qui suit.

Le problème que nous allons étudier maintenant est un problème très bien connu et mathématiquement simple, qui est le problème de **Poisson** sur un rectangle.

### Équation de Poisson [9]

En analyse vectorielle, l'équation de Poisson ainsi nommée en l'honneur du mathématicien et physicien français Siméon Denis Poisson [13], est l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante :

$$\Delta u = f \quad (2.32)$$

Définie sur un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  et de frontière régulière, où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien et  $f$  est une distribution généralement donnée.

Dans cet exemple, nous étudierons l'équation de Poisson en dimension deux, Considérons l'équation de Poisson suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.33)$$

Définie sur le carré  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0, y) = 0 & \forall y \in [0, 1] \\ u(1, y) = g(y) & \forall y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0 & \forall x \in [0, 1] \end{cases} \quad (2.34)$$

Limitons-nous au cas  $M_1 = M_2 = M$ . selon la méthode des ondelettes de Haar, Supposons que la solution soit écrite à partir de la forme

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} h_i(x) h_j(y) \quad (2.35)$$

En intégrant cette équation deux fois par rapport à la variable  $x$  on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} p_{i,2}(x) h_j(y) + x\psi_1''(y) + \psi_2''(y) \quad (2.36)$$

Aussi par l'intégration l'équation eq. (2.35) deux fois par rapport à la variable  $y$  on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} h_i(x) p_{j,2}(y) + y \phi_1''(x) + \phi_2''(x) \quad (2.37)$$

Nous choisissons maintenant l'eq. (2.36) ou l'eq. (2.37) et en intégrant deux fois par rapport l'autre variable, Donc on choisit l'eq. (2.37) et en intégrant deux fois par rapport à la variable  $x$  on obtient

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} p_{i,2}(x) p_{j,2}(y) + y \phi_1(x) + \phi_2(x) + x \psi_1(y) + \psi_2(y) \quad (2.38)$$

Ensuite, nous utilisons des conditions aux limites

i) La condition  $u(x, 0) = 0$  donne

$$\phi_2(x) = -x \psi_1(0) - \psi_2(0) \quad (2.39)$$

ii) La condition  $u(0, y) = 0$  donne

$$\psi_2(y) = -y \phi_1(0) - \phi_2(0) \quad (2.40)$$

iii) En remplissant la condition  $u(x, 1) = 0$  on obtient

$$\phi_1(x) = - \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} p_{i,2}(x) q_2(j) + \phi_1(0) - x [\psi_1(1) - \psi_1(0)] \quad (2.41)$$

iv) Et de la condition  $u(1, y) = g(y)$  on obtient

$$\psi_1(y) = - \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} q_2(i) [y q_2(j) - p_{j,2}(y)] + \psi_1(0) + y [\psi_1(1) - \psi_1(0)] + g(y) \quad (2.42)$$

on remplace les equations eq. (2.39), eq. (2.40), eq. (2.41) et eq. (2.42) dans les équations eq. (2.36) et eq. (2.37) on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} h_i(x) [p_{j,2}(y) - y q_2(j)] \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} [p_{i,2}(x) - x q_2(i) h_j(y)] + x g''(y) \quad (2.44)$$

En substituant ce résultat à eq. (2.33) et en satisfaisant l'équation obtenue aux points de collocation, nous trouvons

$$\sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} R_{ijrs} = F(r, s) \quad (2.45)$$

où

$$\begin{aligned}
 R_{ijrs} &= H(i, r) P_2(j, s) + P_2(i, r) H(j, s) - H(i, r) q_2(j) y_s - q_2(j) x_r H(j, s) \\
 F(r, s) &= f(x_r, y_s) - x_r g''(y_s)
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Pour résoudre à nouveau ce système, appliquée la technique de la sous section 2.2.3 . Le résultat final est

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} [p_{i,2}(x) (p_{j,2}(y) - yq_2(j)) + xq_2(i) (yq_2(j) - p_{j,2}(y))] + g(y) \tag{2.47}$$

**Applications 2.2.1** *Considérons l'équation eq. (2.33) avec  $g = 0$  et*

$$f(x, y) = 6xy [y^2 (1 - 2x) (1 - y) + x^2 (1 - 2y) (1 - x)]$$

*La solution exacte au problème de Poisson dans ces conditions est*

$$u_{ex}(x, y) = x^3 y^3 (1 - x) (1 - y) \tag{2.48}$$

*On pose  $\delta(2) = \| u - u_{ex} \|_2$  où  $u$  c'est une la solution de Haar et  $u_{ex}$  c'est une la solution exacte du problème .*

*Dans le tableau suivant. Nous avons simulé un ordinateur à l'aide du programme MATLAB pour essayer d'estimations d'erreur*

**Tableau 1 :** *Estimations d'erreur du problème de Poisson par rapport la norme  $\delta(2)$  à des valeurs différentes pour  $J$*

$J$	$\delta(2) / M$
2	$9.4E - 5$
3	$2.4E - 5$
4	$6.0E - 6$

**Applications 2.2.2** *Dans cet exemple considéron  $g = a \sin(\pi y)$  et  $f(x, y) = 3x^2$ .*

*Dans le cas présent, nous ne connaissons pas la solution exacte mais la solution de Haar pour  $J = 3$  est représentée sur la figure suivante*

*Puisqu'il n'est pas possible de spécifier ici une solution exacte au problème , donc pour estimer la précision de la solution nous utilisons les courbes suivantes*

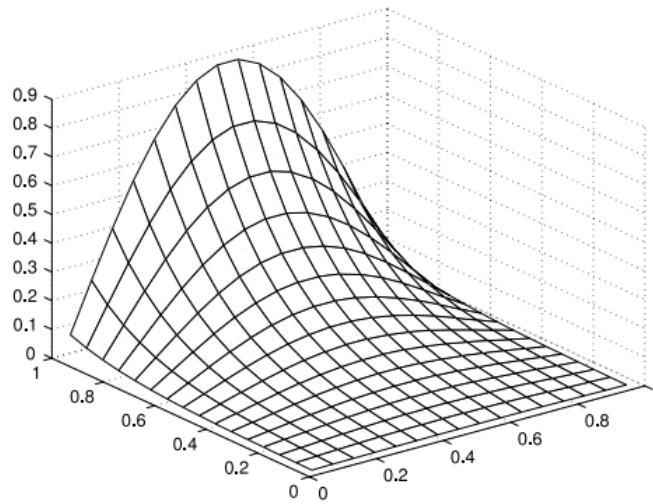


FIGURE 2.2 – Solution de Haar du problème de Poisson pour  $J = 3$

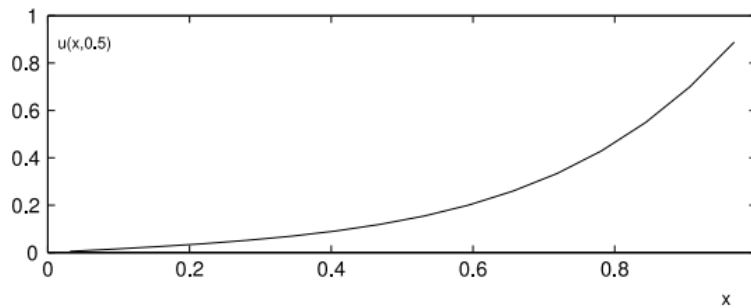


FIGURE 2.3 – Solution exacte du problème de Poisson pour  $y = 0.5$

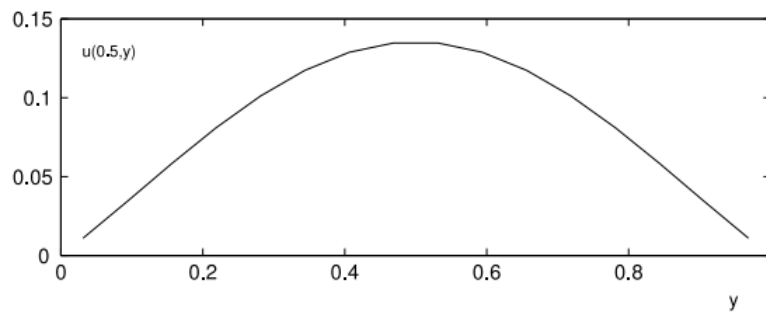


FIGURE 2.4 – Solution exacte du problème de Poisson pour  $x = 0.5$

**Remarque 2.2.6** *Après cette étude complète du problème de Poisson en utilisant la méthode d'ondelettes de Haar bidimensionnelles, Nous avons trouvé que c'était un moyen très efficace de trouver une approximation précise pour résoudre un problème . On Remarquons également que l'estimation d'erreur est très faible, comme le montre le tableau 1, ce qui signifie que la méthode proposée est très efficace .*

### Équation de Diffusion [9]

L'équation de Diffusion est une équation aux dérivées partielles. En physique, elle décrit le comportement du déplacement collectif de particules (molécules, atomes, photons, neutrons, etc.) ou de quasi-particules comme les phonons dans un milieu causé par le mouvement aléatoire de chaque particule lorsque les échelles de temps et d'espace macroscopiques sont grandes devant leurs homologues microscopiques [13].

Il existe plusieurs équations qui relèvent de l'équation de diffusion comme l'équation de la chaleur proposée par Fourier en 1822 a été pensée pour décrire l'évolution de la température dans un matériau , et aussi le mouvement brownien en 1827 .

Le problème de Diffusion que nous allons étudier est de la forme suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (2.49)$$

Avec la condition initiale et les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

Limitons-nous au cas  $M_1 = M_2 = M$  , La solution de Haar est recherchée sous la forme

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} h_i(x) h_j(t) \quad (2.51)$$

En intégrant cette équation eq. (2.51) une fois par rapport à la variable  $t$  et en utilisant la condition initiale on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial^3 u}{\partial s \partial x^2} ds &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) \\ &= \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} h_i(x) \int_0^t h_j(s) ds \end{aligned} \quad (2.52)$$

Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} h_i(x) p_{j,1}(t) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (2.53)$$

Aussi, en intégrant cette équation eq. (2.51) deux fois par rapport à la variable  $x$  et en utilisant la condition aux limites on trouve directement

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} p_{i,2}(x) h_j(t) + x \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) \quad (2.54)$$

Par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(1, t) = 0 \quad (2.55)$$

En posant  $x = 1$  dans eq. (2.54) on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0, t) = - \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} q_2(i) h_j(t) \quad (2.56)$$

En remplaçant ce résultat dans eq. (2.54), nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} [p_{i,2}(x) - x q_2(i)] h_j(t) \quad (2.57)$$

Ces résultats sont remplacés par eq. (2.49), en satisfaisant l'équation obtenue aux points de collocation  $x \rightarrow x_r$  et  $t \rightarrow t_s$  on obtient le système

$$\sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} R_{ijrs} = g''(x_r) \quad (2.58)$$

où

$$R_{ijrs} = [P_2(i, r) - x_r q_2(i)] H(j, s) - A H(i, s) P_1(j, s) \quad (2.59)$$

Après avoir calculé les deux indices  $\xi_1, \xi_2$  selon eq. (2.27) ce résultat obtient la forme eq. (2.28) ou eq. (2.29).

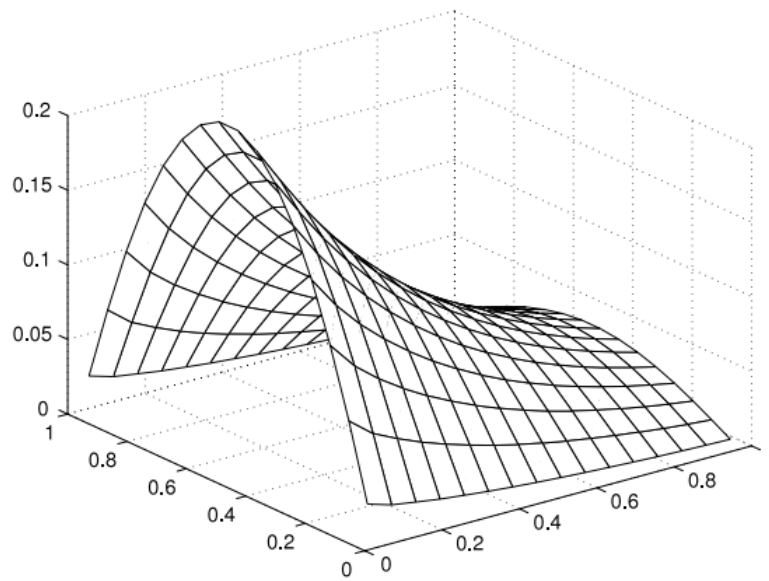
Après cela les coefficients de Haar  $a_{ij}$  sont calculés de la manière indiquée dans la section 2.2.3. On calcule  $u(x, t)$  à travers l'intégrale d'équation eq. (2.57) une fois par rapport à la variable  $t$  on trouve

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} a_{ij} [p_{i,2}(x) - x q_2(i)] p_{j,1}(t) + g(x) \quad (2.60)$$

**Applications 2.2.3** *Considérons eq. (2.49) avec  $A = 0.2$  et  $g(x) = x(1-x)$ , La solution analytique à ce problème et dans les conditions précédentes est*

$$u(x, t) = \sum_n d_n \exp^{-A\pi^2 n^2 t} \sin(n\pi x) \quad (2.61)$$

tellq que  $d_n = \left[ \frac{2}{n\pi} \right]^3$ ,  $n = 1, 3, 5 \dots$

FIGURE 2.5 – Solution de Haar du problème de Diffusion pour  $J = 3$ 

**Remarque 2.2.7** *Si nous calculons la différence entre la solution analytique et la solution de Haar au problème de Diffusion aux plusieurs points de collocations. Nous remarquerons que la différence est très très petite .*

*Cela signifie que la méthode proposée est très efficace pour trouver une approximation de la solution*

# Méthode Numérique basée sur l'ondelette de Haar unidimensionnel pour résoudre EDPs

Dans le chapitre précédent, nous avons examiné la méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles à l'aide d'ondelettes de Haar bidimensionnelles. Mais maintenant, dans ce chapitre, nous allons étudier la méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles en utilisant des ondelettes de Haar unidimensionnelles ou ordinaires.

**Tous les symboles et relations utilisés dans ce chapitre sont expliqués dans le chapitre 2 section 2.2 .**

## 3.1 Équation du télégraphe [10]

L'équation du télégraphe est apparue dans de nombreux domaines de l'ingénierie, tels que la modélisation du phénomène de diffusion anormale et de propagation des ondes ... etc [13].

Dans cette section, nous utilisons une équation du télégraphe hyperbolique linéaire du second ordre donnée par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) & a \leq x \leq b \\ \dot{u}(x, 0) = f_1(x) & a \leq x \leq b \end{cases} \quad (3.2)$$

et les conditions de Dirichlet

$$u(a, t) = g_0(t), \quad u(b, t) = g_1(t) \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

Où  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont des coefficients constants connus, pour  $\alpha_1 > 0$  et  $\beta_1 = 0$  l'équation eq. (3.1) représente une équation des ondes amorties, et pour  $\alpha_1 > \beta_1 > 0$  on parle d'équation du télégraphe [10]. Nous supposons que les deux fonctions  $f, f_1$  et leurs dérivés sont des fonctions

continues pour  $x$ , et les deux fonctions  $g_0, g_1$  et leurs dérivés sont des fonctions continues pour  $t$  [10].

La tension électrique et le courant dans un double conducteur satisfont à l'équation du télégraphe, où  $x$  est la distance et  $t$  est le temps. Équations de la forme eq. (3.1) apparaissent dans l'étude de la propagation des signaux électriques dans un câble de ligne de transmission et des phénomènes d'ondes [10].

### 3.1.1 Méthode de solution

Dans tous les exemples suivants. On note les dérivées partielles comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \doteq u', & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteq u'' \\ \frac{\partial u}{\partial t} \doteq \dot{u}, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteq \ddot{u} \end{cases}$$

**Remarque 3.1.1** Dans cet exemple, Pour la simplicité nous trouvons l'intervalle  $[a, b] = [0, 1]$ .

En termes d'ondelette de Haar,  $\ddot{u}''(x, t)$  peut être écrit comme

$$\ddot{u}''(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (3.4)$$

Le coefficient d'ondelette de Haar est constant dans le sous-intervalle  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ . Par l'intégration de l'équation eq. (3.4) deux fois par rapport à la variable  $t$  de  $t_n$  à  $t$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^t \ddot{u}''(x, t) dt &= \dot{u}''(x, t) - \dot{u}''(x, t_n) \\ &= \int_{t_n}^t \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) dt = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \int_{t_n}^t dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\implies \dot{u}''(x, t) = (t - t_n) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \dot{u}''(x, t_n) \quad (3.6)$$

Donc, Par l'intégration de l'équation eq. (3.6) par rapport à la variable  $t$  de  $t_n$  à  $t$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^t \dot{u}''(x, t) dt &= u''(x, t) - u''(x, t_n) \\ &= \int_{t_n}^t (t - t_n) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) dt + \int_{t_n}^t \dot{u}''(x, t_n) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \implies u''(x, t) &= \frac{1}{2} (t^2 - 2tt_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \\ &\quad + (t - t_n) \dot{u}''(x, t_n) + u''(x, t_n) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Maintenant, nous faisons de même pour la variable  $x$ , Veux dire intégration de l'équation eq. (3.8) deux fois par rapport à la variable  $x$  de 0 à  $x$ , Directement on obtient

$$\begin{aligned}
 u'(x, t) &= \frac{1}{2} (t^2 - 2tt_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) \\
 &+ (t - t_n) [\dot{u}'(x, t_n) - \dot{u}'(0, t_n)] + u'(x, t_n) - u'(0, t_n) + u'(0, t)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2} (t^2 - 2tt_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) \\
 &+ (t - t_n) [\dot{u}(x, t_n) - \dot{u}(0, t_n) - x\dot{u}'(0, t_n)] \\
 &+ u(x, t_n) - u(0, t_n) - x[u'(0, t_n) - u'(0, t)] + u(0, t)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Maintenant, On dérive l' eq. (3.10) par rapport à la variable  $t$  :

$$\begin{aligned}
 \dot{u}(x, t) &= (t - t_n) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) \\
 &+ [\dot{u}(x, t_n) - \dot{u}(0, t_n) - x\dot{u}'(0, t_n)] + x\dot{u}'(0, t) + \dot{u}(0, t)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Encore une fois, On dérive l' eq. (3.11) par rapport à la variable  $t$  on obtient directement

$$\ddot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + x\ddot{u}'(0, t) + \ddot{u}(0, t) \tag{3.12}$$

À partir des conditions initiales et aux limites, nous avons les équations suivantes comme

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= f(x), & u(0, t) &= g_0(x), & u(1, t) &= g_1(x) \\
 u(0, t_n) &= g_0(t_n), & u(1, t_n) &= g_1(t_n), & \dot{u}(0, t_n) &= g'_0(t_n) \\
 \dot{u}(1, t_n) &= g'_1(t_n), & \ddot{u}(0, t_n) &= g''_0(t_n), & \ddot{u}(1, t_n) &= g''_1(t_n)
 \end{aligned}$$

On pose  $x = 1$  dans l'équation eq. (3.10) et en utilisant la condition précédente, nous avons

$$\begin{aligned}
 u(1, t) &= \frac{1}{2} (t^2 - 2tt_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \\
 &+ (t - t_n) [\dot{u}(1, t_n) - \dot{u}(0, t_n) - \dot{u}'(0, t_n)] \\
 &+ u(1, t_n) - u(0, t_n) - [u'(0, t_n) - u'(0, t)] + u(0, t) = g_1(t)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 u'(0, t) - u'(0, t_n) &= -\frac{1}{2} (t^2 - 2tt_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \\
 &- (t - t_n) [g'_1(t_n) - g'_0(t_n) - \dot{u}'(0, t_n)] \\
 &+ g_1(t) - g_1(t_n) + g_0(t_n) - g_0(t)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Aussi, on pose  $x = 1$  dans l'équation eq. (3.12) et en utilisant la condition précédente, nous avons

$$\begin{aligned} \ddot{u}(1, t) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + \dot{u}'(0, t) + \ddot{u}(0, t) \\ &= g_1''(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Donc

$$\dot{u}'(0, t) = - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) - g_0''(t) + g_1''(t) \quad (3.16)$$

Si les équations eq. (3.14) et eq. (3.16) sont substituées dans les équations de eq. (3.8) à eq. (3.12) et que les résultats sont discrétisés en supposant  $x \rightarrow x_l$ ,  $t \rightarrow t_{n+1}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} u''(x_l, t_{n+1}) &= \frac{1}{2} (t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) \\ &\quad + (t_{n+1} - t_n) \dot{u}''(x_l, t_n) + u''(x_l, t_n) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} u'(x_l, t_{n+1}) &= \frac{1}{2} (t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x_l) \\ &\quad + (t_{n+1} - t_n) \dot{u}'(x_l, t_n) + u'(x_l, t_n) - (t_{n+1} - t_n) \dot{u}'(0, t_n) \\ &\quad - \frac{1}{2} (t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \\ &\quad - (t_{n+1} - t_n) [g_1'(t_n) - g_0'(t_n) - \dot{u}'(0, t_n)] \\ &\quad + g_1(t_{n+1}) - g_1(t_n) + g_0(t_n) - g_0(t_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donc

$$\begin{aligned} u'(x_l, t_{n+1}) &= \frac{1}{2} (t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x_l) \\ &\quad + (t_{n+1} - t_n) \dot{u}'(x_l, t_n) + u'(x_l, t_n) \\ &\quad - \frac{1}{2} (t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \\ &\quad - (t_{n+1} - t_n) [g_1'(t_n) - g_0'(t_n)] \\ &\quad + g_1(t_{n+1}) - g_1(t_n) + g_0(t_n) - g_0(t_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Maintenant, nous présentons les résultats directement après la substitution :

$$\begin{aligned}
 u(x_l, t_{n+1}) &= \frac{1}{2} (t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) \\
 &+ (t_{n+1} - t_n) [\dot{u}(x_l, t_n) - \dot{u}(0, t_n)] \\
 &+ u(x_l, t_n) - u(0, t_n) \\
 &- \frac{x_l}{2} (t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \\
 &- x_l (t_{n+1} - t_n) [g'_1(t_n) - g'_0(t_n)] \\
 &- x_l [g_1(t_n) - g_0(t_n) + g_0(t_{n+1}) - g_1(t_{n+1})] + g_0(t_{n+1})
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{u}(x_l, t_{n+1}) &= (t_{n+1} - t_n) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) \\
 &+ [\dot{u}(x_l, t_n) - \dot{u}(0, t_n)] - x_l (t_{n+1} - t_n) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \\
 &- x_l [g'_1(t_n) - g'_0(t_n)] - x_l [g'_0(t_{n+1}) - g'_1(t_{n+1})] + g'_0(t_{n+1})
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}(x_l, t_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i [P_{i,2}(x_l) - x_l P_{i,2}(1)] \\
 &- x_l [g''_0(t_{n+1}) - g''_1(t_{n+1})] + g''_0(t_{n+1})
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Et de l'équation 3.4 , nous obtenons

$$P_{i,2}(1) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{4m^2} & \text{si } i > 1 \end{cases} \tag{3.23}$$

**Théorème 3.1.1** [18] : On suppose que  $u_t(x) \in L^2([0, 1])$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est bornée sur  $[0, 1]$  , on a

$$\| u - u_J \|_{L^2([0,1])} = O\left(2^{-\frac{3}{2}J}\right) \tag{3.24}$$

Où  $u_J$  est définie dans la relation eq. (3.10) .

**Démonstration 3.1.1** La preuve est en la référence [18] .

### 3.1.2 Exemple numérique

Considérons l'équation eq. (3.1) avec  $\alpha_1 = 6, \beta_1 = 2$  et  $0 \leq x \leq 1$  , et les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x \\
 f_1(x) &= 0 \\
 g_0(t) &= 0 \\
 g_1(t) &= \cos(t) \sin(1) \\
 f(x, t) &= -2\alpha_1 \sin(t) \sin(x) + \beta_1^2 \cos(t) \sin(x)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

La solution exacte de cet exemple est  $u(x, t) = \cos(t) \sin(x)$ .

Après avoir substitué les valeurs des équations eq. (3.17) et de eq. (3.20) à eq. (3.22) dans l'équation eq. (3.1) et en utilisant les conditions, nous avons

$$\begin{aligned}
 u(x_l, t_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i [P_{i,2}(x_l) - x_l P_{i,2}(1) + 12(t_{n+1} - t_n) P_{i,2}(x_l) \\
 &\quad - 12x_l(t_{n+1} - t_n) P_{i,2}(1) + 2(t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) P_{i,2}(x_l) \\
 &\quad - 2x_l(t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) P_{i,2}(1)] \\
 &= -\sin(x_l) - 12\sin(t_{n+1})\sin(x_l) + 4\cos(t)\sin(x_l) - 12x_l\sin(t_n)\sin(1) + 12\sin(t_{n+1})\sin(1) \\
 &\quad 4u(x_l, t_n) - 4x_l(t_{n+1} - t_n)\sin(t_n)\sin(1) - 4x_l[\cos(t_n)\sin(1) - \cos(t_{n+1})\sin(1)] \\
 &\quad + x_l\cos(t_{n+1})\sin(1)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

L'équation eq. (3.26) est la forme algébrique de l'équation télégraphe eq. (3.1). Après avoir résolu ces équations algébriques, nous pouvons calculer les coefficients de Haar  $a_i$ . Ensuite, à partir de l'équation eq. (3.20), nous obtenons la valeur de  $u$ , qui est très proche de la solution exacte. Ce processus de solution démarre avec

$$\begin{aligned}
 u(x_l, 0) &= f(x_l) \\
 u'(x_l, 0) &= f'(x_l) \\
 u''(x_l, 0) &= f''(x_l)
 \end{aligned}$$

Dans tous les résultats donnés ci-dessous,  $J$  est pris égal à 3.

Après simulation à l'aide du programme Matlab, nous obtenons le tableau suivant :

**Tableau 2** : l'erreur absolue pour les différentes valeurs de  $x$  et  $t$

$x/32$	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.2$	$\Delta t = 0.3$
1	2.66106E - 06	2.15080E - 04	4.271600E - 04
3	7.98322E - 06	6.44370E - 04	1.279750E - 03
5	1.33055E - 05	1.07105E - 03	2.127200E - 03
7	1.86280E - 05	1.49340E - 03	2.966080E - 03
9	2.39509E - 05	1.90969E - 03	3.793030E - 03
11	2.92741E - 05	2.31826E - 03	4.604710E - 03
13	3.45979E - 05	2.71743E - 03	5.397840E - 03
15	3.99222E - 05	3.10559E - 03	6.169230E - 03
17	4.52472E - 05	3.48116E - 03	6.915780E - 03
19	5.05729E - 05	3.84261E - 03	7.634440E - 03
21	5.58994E - 05	4.18847E - 03	8.322330E - 03
23	6.12269E - 05	4.51733E - 03	8.976660E - 03
25	6.65553E - 05	4.82783E - 03	9.594750E - 03
27	7.18847E - 05	5.11872E - 03	1.017411E - 02
29	7.72152E - 05	5.38878E - 03	1.071237E - 02
31	8.25469E - 05	5.63691E - 03	1.120731E - 02

La courbe de la solution numérique de  $u(x, t)$  à la valeur différente de  $t$  est indiquée dans les figures suivantes :

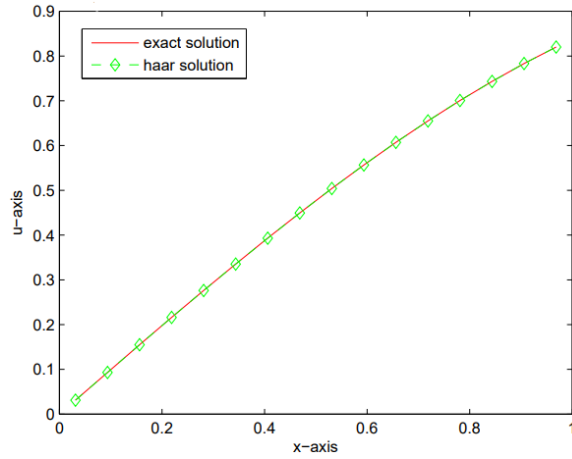


FIGURE 3.1 – Comparaison entre la solution de haar et la solution exacte du problème de télégraphe à  $t = 0.1$  .

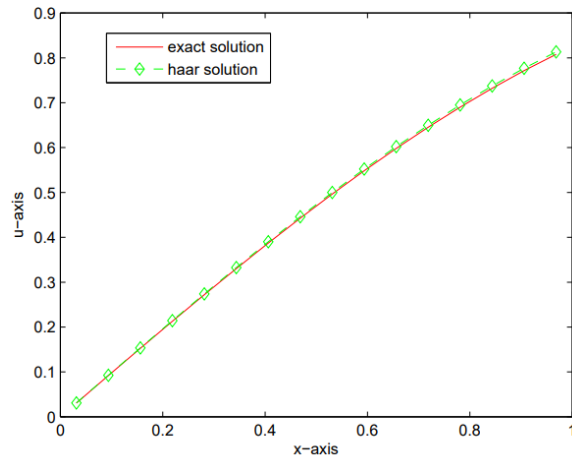


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la solution de haar et la solution exacte du problème de télégraphe à  $t = 0.2$  .

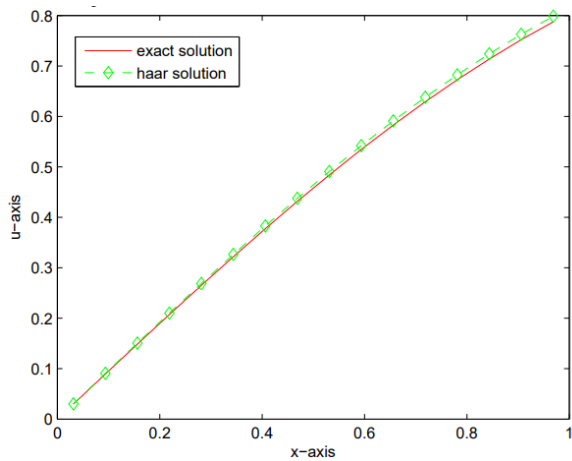


FIGURE 3.3 – Comparaison entre la solution de haar et la solution exacte du problème de télégraphe à  $t = 0.3$  .

## 3.2 Solution numérique d'EDP paraboliques à l'aide de la méthode de collocation par ondelettes de Haar à une grille adaptative [11]

### 3.2.1 Grilles adaptatives

La raison de l'ajout de la Grille adaptative est d'augmenter les noeuds sur le domaine de calcul, où l'approximation numérique est requise pour plus de précision. Ceci est clairement différent des noeuds uniformes sur le domaine de calcul.

En conséquence, cette approche convient à divers types de problèmes survenant dans la dynamique des fluides. Les adaptations de grille se produisent naturellement dans les méthodes d'ondelettes et sont définies sur un intervalle fermé. Pour les  $M$  points de collocation sont

$$\{x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < \dots < x_{2M-1} < x_{2M}\}, \quad k, M \in \mathbb{Z} \quad (3.27)$$

ces points de collocation sont générés uniformément par la définition de  $x_l$ , c'est-à-dire  $x_l = \frac{l-0.5}{2M}$  dans la direction de  $x$ ,  $x_k$  désigne le  $k^{\text{ème}}$  point des points de collocation après la génération de la grille. Maintenant, nous générons les points de grille adaptatifs en utilisant la formule

$$x_k = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, 2M - 1 \quad (3.28)$$

En ajoutant ces points de grille dans ce qui précède, nous obtenons un nouvel espace de grille. Par exemple  $J = 2 \Rightarrow 2M = 8$ , alors nous avons un espace de grille dont la longueur d'intervalle  $\frac{1}{8}$  est

$$\left\{ \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16} \right\} \quad (3.29)$$

À partir de ces points, nous obtenons des points médians comme  $\frac{2}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{8}{16}, \frac{10}{16}, \frac{12}{16}, \frac{14}{16}$ , En ajoutant ces points médians dans l'espace de grille ci-dessus, nous obtenons un nouvel espace de grille comme

$$\left\{ \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{5}{16}, \frac{6}{16}, \frac{7}{16}, \frac{8}{16}, \frac{9}{16}, \frac{10}{16}, \frac{11}{16}, \frac{12}{16}, \frac{13}{16}, \frac{14}{16}, \frac{15}{16} \right\} \quad (3.30)$$

avec une longueur d'intervalle de  $\frac{1}{16}$ .

Maintenant, nous obtenons la solution numérique sur ces points. dont la méthode de solution et l'implémentation numérique sont données par les sous sections suivantes

### 3.2.2 Méthode de solution

Considérons l'équation aux dérivées partielles parabolique générale de second ordre de la forme

$$u_t = \alpha' u_{xx} + \beta' u + \phi(x, t) \quad (3.31)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x < 1 \quad (3.32)$$

et la condition aux limites

$$\begin{cases} u(0, t) = g_0(t) & t > 0 \\ u(1, t) = g_1(t) & t > 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

où  $\phi(x, t)$ ,  $f(x)$ ,  $g_0(t)$  et  $g_1(t)$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  sont des fonctions de variables ou de constantes indépendantes ou dépendantes.

Selon le principe de Haar, supposons que :

$$\dot{u}''(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (3.34)$$

Maintenant, on intègre l'éq. (3.34) une fois par rapport la variable  $t$  de  $t_s$  à  $t$ . Alors on obtient

$$u''(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + u''(x, t_s) \quad (3.35)$$

où  $t_s$  est le temps initial et  $\Delta t = t - t_s$  est l'intervalle de temps.

Aussi, on intègre l'éq. (3.35) une fois par rapport la variable  $x$  de 0 à  $x$ . on obtient

$$u'(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + u'(x, t_s) + u'(0, t) - u'(0, t_s) \quad (3.36)$$

et encore une fois on intègre l'éq. (3.36) une fois par rapport la variable  $x$  de 0 à  $x$ .

$$u(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + u(x, t_s) + u(0, t) - u(0, t_s) + x [u'(0, t) - u'(0, t_s)] \quad (3.37)$$

Dans l'éq. (3.37) on pose  $x = 1$ , et en utilisant les conditions aux limites eq. (3.33), on obtient

$$\begin{aligned} u(1, t) &= (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + u(1, t_s) + u(0, t) - u(0, t_s) + [u'(0, t) - u'(0, t_s)] \\ &= g_1(t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Donc

$$u'(0, t) - u'(0, t_s) = g_1(t) - (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i C h_i(x) - g_1(t_s) - g_0(t) + g_0(t_s) \quad (3.39)$$

On remplaçons eq. (3.39) dans l'éq. (3.37), Donc l'équation eq. (3.37) est devint

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + u(x, t_s) + u(0, t) - u(0, t_s) \\ &\quad + x \left[ g_1(t) - (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i C h_i(x) - g_1(t_s) - g_0(t) + g_0(t_s) \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nous dérivons l'équation eq. (3.40) une fois par rapport à la variable  $t$ , on obtient

$$\dot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + \dot{g}_0(t) + x \left[ \dot{g}_1(t) - \sum_{i=1}^{2M} a_i C h_i(x) - \dot{g}_0(t) \right] \quad (3.41)$$

En remplaçant les équations eq. (3.35), eq. (3.40) et eq. (3.41) dans l'équation eq. (3.31), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + \dot{g}_0(t) + x \left[ \dot{g}_1(t) - \sum_{i=1}^{2M} a_i C h_i(x) - \dot{g}_0(t) \right] \\ &= \alpha' \left[ (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + u''(x, t_s) \right] \\ &+ \beta' \left[ \begin{aligned} & (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + u(x, t_s) + u(0, t) - u(0, t_s) \\ & + x \left[ g_1(t) - (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i C h_i(x) - g_1(t_s) - g_0(t) + g_0(t_s) \right] \end{aligned} \right] \\ &+ \phi(x, t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

En résolvant eq. (3.42) à l'aide de MATLAB, nous obtenons les coefficients d'ondelettes de Haar  $a_i$ .

En substituant ces valeurs de  $a$  dans eq. (3.40), nous obtenons la solution numérique basée sur HWCM du problème donné eq. (3.31).

Et pour améliorer la précision de la solution basée sur **HWCM**, nous interpolons la solution obtenue aux points de grille adaptative comme expliqué dans la sous section 3.2.1, ce qui donne la solution **AGHWCM** requise.

Afin de connaître la précision d'AGHWCM pour les problèmes de test, nous utilisons la mesure d'erreur, c'est-à-dire l'erreur absolue maximale. L'erreur absolue maximale sera calculée par

$$E_{\max} = \max | u_{ex}(x, t) - u_{Haar}(x, t) |$$

où  $u_{ex}(x, t)$  et  $u_{Haar}(x, t)$  sont des solutions exactes et solutions de Haar respectivement.

### 3.2.3 Exemple numérique

Considérons l'équation aux dérivées partielles parabolique non homogène

$$u_t = u_{xx} + \cos(x) \quad (3.43)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < 1 \quad (3.44)$$

et la condition aux limites

$$\begin{cases} u(0, t) = 1 - e^{-t} & t > 0 \\ u(1, t) = (1 - e^{-t}) \cos(1) & t > 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

La solution exacte au problème eq. (3.43) sous conditions eq. (3.44) , eq. (3.45) est

$$u(x, t) = (1 - e^{-t}) \cos(x) \quad (3.46)$$

A raccourci les étapes ,pour résoudre eq. (3.43) par la méthode expliquée dans la sous section 3.2.2, nous obtenons les coefficients de Haar  $a_i$  en utilisant MATLAB. nous obtenons la solution numérique du problème basée de **HWCM**. Pour améliorer la précision de la solution HWCM, nous interpolons la solution obtenue aux points de grille adaptatifs comme expliqué dans la méthode de solution, ce qui donne la solution **AGHWCM** requise.

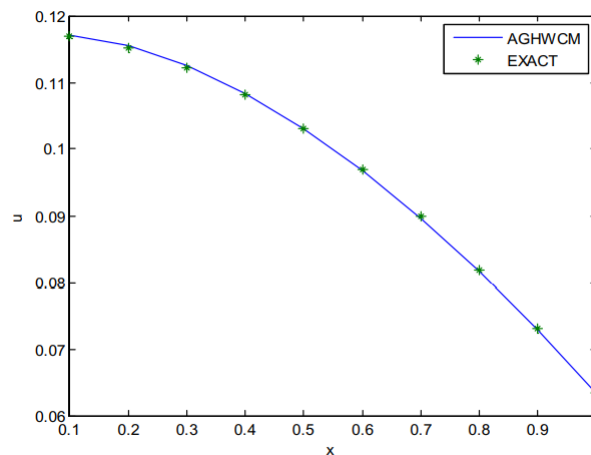


FIGURE 3.4 – Comparaison de la solution de Haar ( AGHWCM ) avec la solution exacte du problème eq. (3.43) pour  $M = 4$

**Tableau 3** : Analyse des erreurs du problème eq. (3.43)

$M$	$E_{\max}$ ( FDM )	$E_{\max}$ ( HWCM )	$E_{\max}$ ( AGHWCM )
2	$7.7262E - 03$	$5.9886E - 04$	$5.7025E - 04$
4	$3.3537E - 03$	$2.8294E - 04$	$1.8637E - 04$
8	$1.1947E - 03$	$1.0919E - 04$	$4.3689E - 05$
16	$3.7099E - 04$	$3.7447E - 05$	$8.7566E - 06$
32	$1.0431E - 04$	$1.1756E - 05$	$2.3859E - 06$

---

## Conclusion Générale

Dans ce mémoire nous avons présenté d'une part, une étude approfondie et détaillée sur les équations différentielles partielles de premier et de deuxième ordre. D'une autre part, deux nouvelles méthodes numériques pour résoudre en général les équations différentielles partielles, où la première est basée sur les ondelettes de Haar bidimensionnelles et la deuxième est basée sur les ondelettes de Haar unidimensionnelles. Ces deux dernières méthodes sont caractérisées par des avantages par rapport aux méthodes classiques. À partir de ces avantages, les résultats expérimentaux ont justifié la meilleure performance de celles-ci. En conséquence, nous pouvons adopter ces dernières méthodes pour résoudre les EDPs.

---

# Bibliographie

- [1] Claire David , Pierre Gosselet . **équation aux dérivées partielles** , Cours et exercices corrigés . DUNOD . août 2015 .
- [2] Brigitte Lucquin . **Equations aux dérivées partielles et leurs approximations** (Maître de conférences à l'Université Pierre et Marie Curie ) . Ellipses . 15 janvier 2004 .
- [3] Siham Lahlou koubi . **La résolution de certaines EDP et la théorie de Sturm-Liouville** , MEMOIRE DE FIN D'ETUDES Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques . UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH . 11 Juin 2016 .
- [4] S. Mallat. **A wavelet tour of signal processing**. Academic Press . 1998 .
- [5] F.Keinert. **Wavelets and Multiwavelets**. Chapman Hall . 2004
- [6] S.Mallat. **Une exploration des signaux en ondelettes**. Ecole polytechnique . 2000.
- [7] Siraj-ul-Islam, Imran Aziz, Fazal Haq. **A comparative study of numerical integration based on Haar wavelets and hybrid functions** . ELSEVIER . Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 2026-2036.
- [8] Imran Aziz<sup>ab</sup> , Siraj-ul-Islam<sup>bc</sup> , Božidar Šarler<sup>c</sup> . **Wavelets collocation methods for the numerical solution of elliptic BV problems** . ELSEVIER . 13 March 2012
- [9] Ü. Lepik . **Solving PDEs with the aid of two-dimensional Haar wavelets** . ELSEVIER. 10 February 2011
- [10] Naresh Berwal . **Haar wavelet method for numerical solution of telegraph equations** . Italian Journal of Pure and Applied Mathematics · May 2013
- [11] S. C. Shiralashetti\* , L. M. Angadi\* , M. H. Kantli\* , A. B. Deshi\* . **Numerical solution of parabolic partial differential equations using adaptive gird Haar wavelet collocation method** . World Scientific . August 16, 2016
- [12] Virginie Ehrlacher . **Méthode des différences finies** . 26 mai 2020
- [13] Wikipedia site

- 
- [14] A. Lesfari . **Introduction aux équations aux dérivées partielles (EDP),(Master Maths)** . Département de Mathématiques Faculté des Sciences Université Chouaïb Doukkali . El-Jadida, Maroc . 2014 , 2017
- [15] Pedro Ferreira , Sylvie Mas-Gallic . **Equations aux Dérivées Partielles** . 11 décembre 2001
- [16] Allaoua Mehri . **Méthode des différences finies pour les équations aux dérivées partielles** . University May 8th 1945, Guelma . Algeria . 17 Février 2020
- [17] Nicolas Champagnat . **Différences finies et analyse numérique matricielle : cours d'harmonisation en IMAFA** . 15 octobre 2010
- [18] A. Pirkhedri et al. **Numerical Algorithm Based on Haar-Sinc Collocation Method for Solving the Hyperbolic PDEs.** the Scientific World Journal. Hindawi . Volume 2014 . Article ID 340752 . 9 pages
- [19] Narongpol Wichailukkana et al. **A convergence analysis of the numerical solution of boundary-value problems by using two-dimensional Haar wavelets** . ScienceAsia 42(2016)