

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Présenté par : Allag Maroua

Derki Sara

Gaid Zieneb

Thème

***Quelques théorèmes du point fixe et
Applications***

Soutenu le ...juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. Beggas Mohammed

Mr. Beloul Said

Mlle. Zaouche Elmehdi

MC (B) Univ. El Oued

MA (B) Univ. El Oued

MA(A) Univ. El Oued

Président

examinateur

Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

Remerciements

*Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.
Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de Mr "ELMEHEDI ZAOUCHE", à l'université
d' **El-Oued**, a qui nous voudrions exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités,
leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.*

*Ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'**El-oued** .*

*Nous remercions vivement nos familles surtout mes parent pour l'aide et le soutien
moral.*

Notations

V_x	: voisinage de x .
$(\cdot \mid \cdot)$	: produit scalaire.
$B(x_0, r)$	: la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r .
$\bar{B}(x_0, r)$	: la boule fermée centrée en x_0 et de rayon r .
S_+^n	: hémisphère supérieur.
S_-^n	: hémisphère inférieur.
B^n	: la boule unité fermée dans $\mathbb{R}^n$.
S^{n-1}	: la sphère dans $\mathbb{R}^n$.
$S(x_0, r)$	: la sphère de centre x_0 et de rayon r .
P_C	: la projection sur C .
$C^0(X, Y)$	: l'ensemble des fonctions continues des X dans Y .
$C_b^0(X, Y)$	: l'ensemble des fonctions continues et bornées de X dans Y .

Table des matières

Introduction générale	2
1 Rappels en tous genres	3
1.1 Espace métrique	3
1.2 Espace Topologique	4
1.3 Applications contractantes	4
1.4 Applications continues	5
1.5 Norme et espace vectoriel normé	5
1.6 Espace de Banach	5
1.7 Produit scalaire	6
1.8 Ensemble convexe	6
1.9 Homéomorphisme	6
2 Théorèmes du point fixe	7
2.1 Théorème du point fixe de Picard	7
2.2 Un autre Théorème du Point Fixe	9
2.2.1 Rétractions	10
2.2.2 Le cas $K=\bar{B}(0,1)$	13
2.3 Théorème de Schauder	15
3 Applications	17
3.1 Application du théorème de picard	17
3.2 Le théorème de Cauchy-Arzela	22

Bibliographie	25
----------------------	-----------

Introduction générale

Dans ce travail, on étudie quelques théorèmes du point fixe, et quelques unes de leurs applications (aux équations différentielles). Etant donné un ensemble E et une application $f : E \rightarrow E$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles f admet un point fixe dans E . Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car il y a plusieurs applications, par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles.

Le Théorème du Point Fixe de Picard dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le Théorème du Point Fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est pas donc nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité.

Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le Théorème de Picard (par exemple, l'identité). Par contre, ce théorème ne donne aucun des avantages du théorème précédent.

On applique dans ce rapport ces théorèmes au Problème de Cauchy : étant données une condition initiale (x_0, t_0) et une équation différentielle $\frac{d}{dt}x = f(x, t)$, existe-il une solution, et est-elle unique ? Les réponses à ces questions sont données par le théorème de Cauchy-Lipschitz et de Cauchy-Arzelà (si f est seulement continue). On retrouve que ces

comportements différents résultent des différences entre les théorèmes du point fixe de Picard et de Schauder.

Chapitre 1

Rappels en tous genres

1.1 Espace métrique

Définition 1.1.1 Soit E un ensemble non vide, une distance sur E est une fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie $E \times E$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, vérifiant les propriétés suivantes:

- * $\forall x, y \in E : d(x, y) \geq 0$ [positive]
- * $\forall x \in E : d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ [séparation]
- * $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$ [symétrique]
- * $\forall x, y, z \in E : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ [inégalité triangulaire]

Pour $x, y \in E$ donné, le nombre réel positif $d(x, y)$ est appelé distance de x à y .

Définition 1.1.2 Soit (E, d) un espace métrique et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E . On dit que $(u_n)_n$ converge vers l si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies d(u_n, l) < \varepsilon;$$

ce qu'on note par $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$

Définition 1.1.3 Soit (E, d) un espace métrique et soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E . On dit que "la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy" si l'on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \geq n \geq N \implies d(u_m, u_n) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.4 On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet lorsque toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .

Définition 1.1.5 (Fonction de Lipschitz) On dit que la fonction f vérifie la condition de Lipschitz par rapport à y sur l'intervalle U si

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in U : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$$

k : est appelé le constant de Lipschitz.

1.2 Espace Topologique

Définition 1.2.1 On appelle espace topologique E . la donnée d'un ensemble E et d'une famille de parties appelées les parties ouvertes de la topologie vérifiant les propriétés suivantes:

- E lui-même et la partie vide $\emptyset$ sont ouvertes.
- Toute intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est ouverte.
- Toute réunion d'une famille quelconque d'ensembles ouverts est ouverte.

Définition 1.2.2 (Voisinage)

Soit E un espace topologique. Un voisinage V de $x \in E$ est un ensemble tel qu'il existe un ouvert U avec $x \in U \subset V$.

On note par $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x .

1.3 Applications contractantes

Définition 1.3.1 Une application f d'un espace métrique (E, d) dans un autre espace métrique (F, δ) est dite contractante si elle est Lipschitzienne de rapport $k < 1$, c'est-à-dire s'il existe un réel $k < 1$, tel que pour tous x et $y \in E$

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$$

On écrit F est k -contractante.

1.4 Applications continues

Définition 1.4.1 Soient E et F deux espaces métriques, on dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est continue en un point $a \in E$ si " $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a " autrement dit si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, d(x, a) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$$

on dit que l'application f est continue sur E si elle est continue en tout point de E

Proposition 1.4.1 Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et h une fonction de classe C^1 définie de $[a, b]$ dans lui-même vérifiant

$$|h'(x)| \leq k < 1, \forall x \in [a, b].$$

Alors, h est une application contractante sur $[a, b]$.

Preuve. Pour tous x et y contenus dans l'intervalle $[a, b]$ et distincts, on sait qu'il existe un réel c strictement compris entre x et y tel que

$$|h(x) - h(y)| = |h'(c)| |x - y|,$$

d'où le résultat. ■

1.5 Norme et espace vectoriel normé

Définition 1.5.1 Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. On appelle norme sur l'espace E toute fonction $(\|\cdot\|)$ définie sur E à valeur dans $\mathbb{R}$, vérifiant les propriétés suivantes :

* $\forall x \in E : \|x\| \geq 0$ [positivité]

* $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ [séparation]

* $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ [homogénéité]

* $\forall x \in E, \forall y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ [inégalité triangulaire ou inégalité de convexité]

Pour $x \in E$ donné, le nombre réel $\|x\| \geq 0$ est appelé norme de x .

1.6 Espace de Banach

Définition 1.6.1 On appelle espace de Banach tout un espace vectoriel normé complet.

1.7 Produit scalaire

Définition 1.7.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur E est une fonction $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant les cinq propriétés:

$$1-\forall x \in E, \forall y \in E, \forall w \in E: f(x+y, w) = f(x, w) + f(y, w)$$

[additivité par rapport à la première variable, la seconde étant fixée quelconque].

$$2-\forall x \in E, \forall y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) \text{ [homogénéité par rapport à la première]}.$$

$$3-\forall x \in E, \forall y \in E : f(x, y) = f(y, x) \text{ [symétrie]}.$$

$$4-\forall x \in E : f(x, x) \geq 0 \text{ [positivité]}.$$

$$5-f(x, x) = 0 \implies x = 0 \text{ [séparation, mais on dit plutôt que } f \text{ est définie]}.$$

Pour $x \in E, y \in E$ donnés le nombre réel ($> 0, < 0$, ou $= 0$) $f(x, y)$ s'appelle le produit scalaire de x et y (ou bien de x par y).

Définition 1.7.2 Soit E un espace vectoriel réel et soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E . On associe au produit scalaire une norme (dite associée) en posant

$$\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{(x | x)} = [(x | x)]^{1/2}.$$

1.8 Ensemble convexe

Définition 1.8.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et soit $A \subset E$. On dit que A est convexe si:

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

1.9 Homéomorphisme

Définition. On appelle homéomorphisme d'un espace topologique E sur un autre espace topologique F une application $f : E \rightarrow F$ bijective, continue et dont l'inverse $f^{-1} : F \rightarrow E$ est continue.

Chapitre 2

Théorèmes du point fixe

2.1 Théorème du point fixe de Picard

Théorème 2.1.1 Soient (E, d) un espace métrique complet, et $f : E \rightarrow E$ une application contractante, i.e. Lipchitzienne de rapport $k < 1$.

Alors, f admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a .

Preuve. 1-Existence

Soit x_0 un point initial quelconque et (x_n) la suite itérée associée.

On a

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$$

On va montrer par récurrence sur n que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1) \tag{2.1.1}$$

-Initialisation: Evident pour $n = 0$

-Généralisation: Supposons que pour un certain entier n

quelconque mais fixé on ait la propriété (2.1.1). Alors

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(f(x_n), f(x_{n+1})) \\ &\leq kd(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq kk^n d(x_0, x_1) \\ &\leq k^{n+1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On a alors $\forall m > n$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{l=n}^{m-1} d(x_l, x_{l+1}) \leq \left(\sum_{l=n}^{m-1} k^l \right) d(x_0, x_1)$$

De plus, pour tout $n > m$, $\sum_{l=n}^{m-1} k^l \leq \sum_{l=n}^{+\infty} k^l = \frac{k^n}{1-k}$, d'où.

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

On en déduit alors que (x_n) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_n) converge vers un point limite $a \in E$.

De plus on a $f(x_n) \rightarrow f(a)$ quand $n \rightarrow \infty$ car f est continue et $f(x_n) = x_{n+1}$. Or $x_{n+1} \rightarrow a$ quand $n \rightarrow \infty$, d'où par unicité de la limite on a $f(a) = a$.

2-Unicité

Soit $\bar{x}$ et $\bar{y}$ deux points fixe de f , qui satisfait donc $\bar{x} = f(\bar{x})$ et $\bar{y} = f(\bar{y})$. Alors

$$d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = d(\bar{x}, \bar{y}) \leq kd(\bar{x}, \bar{y}) \iff (1-k)d(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0,$$

d'où: $(1-k)d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, or $1-k > 0$. Comme $k < 1$, donc

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{y}$$

■

Contre-exemples. Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1. X n'est pas stable par $f : f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $x = [0, 1]$.

Or X est fermé donc $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. de plus, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x \in X} |f'(x)| < 1 \Rightarrow f$ est contractante. Mais f n'a pas de point fixe car $f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}]$, i.e X n'est pas stable par f .

2. f n'est pas cotratcante: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0, \infty[$.

Or $f : X \rightarrow X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet. Mais $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

3. X n'est pas complet: $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ sur $x =]0, \frac{\pi}{4}]$.

Or $f(]0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$, et $\sup_{x \in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$; donc, f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc pas complet.

Corollaire 2.1.1 *Une application d'un espace métrique complet dans lui-même dont une itérée est contractante possède un point fixe unique.*

Preuve. Soit (E, d) un espace métrique complet, et $f : E \rightarrow E$ une application. On suppose qu'une itérée de f est contractante, c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f^n = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$ (n facteurs) soit Lipschitzienne de rapport $k < 1$. D'après le théorème précédent, f^n possède un point fixe unique $\bar{x}$. On a

$$f(\bar{x}) = f(f^n(\bar{x})) = f^{n+1}(\bar{x}) = f^n(f(\bar{x})),$$

donc $f(\bar{x})$ est un point fixe de f^n . Mais, comme $\bar{x}$ est l'unique point fixe de f^n , on a $f(\bar{x}) = \bar{x}$ ce qui exprime que $\bar{x}$ est un point fixe de f . Supposons que $\bar{y}$ soit un autre point fixe de f . On voit immédiatement que $\bar{y}$ est aussi un point fixe de f^n . Donc, en raison de l'unicité du point fixe de f^n , $\bar{x} = \bar{y}$. ■

2.2 Un autre Théorème du Point Fixe

Le théorème suivant donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur convexe compact dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.2.1 *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \rightarrow K$ une fonction continue. Il existe $x \in K$ tel que*

$$f(x) = x.$$

Remarque 2.2.1 Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante:

Théorème 2.2.2 Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = x.$$

Preuve. Si f est continue de $[a, b]$ dans lui-même, la fonction $g : x \rightarrow f(x) - x$ continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0 tel que : $g(x_0) = 0$ donc $f(x_0) - x_0 = 0$, que est un point fixe de f .

Afin de démontrer le théorème(2.2.1), on va d'abord le réduire dans le cas où $K = \bar{B}(0, 1)$.

■

2.2.1 Rétractions

Définition 2.2.1 Un ensemble A d'un espace topologique E est une rétracte de E s'il existe une application continue $r : E \rightarrow A$ tel que $r(a) = a$; pour tout $a \in A$.

L'application r est dite une rétraction.

Définition 2.2.2 On dit qu'un espace topologique E a la propriété du point fixe si toute fonction continue $f : E \rightarrow E$ admet un point fixe.

Théorème 2.2.3 Si E a la propriété du point fixe et A est une rétraction de E alors A a la propriété de point fixe.

Preuve. Soit $f : A \rightarrow A$ une application continue et $r : E \rightarrow A$ une rétraction. Montrons que f a un point fixe dans A . Remarquons d'abord que

$$f \circ r : E \rightarrow A \subseteq E.$$

Comme E a la propriété de point fixe, il existe $x_0 \in E$ avec

$$(f \circ r)(x_0) = x_0.$$

Ce pendant, $f(r(x_0)) \in A$ et par conséquent $x_0 \in A$. Mais comme $x_0 \in A$ et $r : E \rightarrow A$ une rétraction, alors $r(x_0) = x_0$. Par conséquent, $f(x_0) = x_0, x_0 \in A$. ■

Théorème 2.2.4 (Brouwer) *Si E a la propriété de point fixe et E est homéomorphe à F , alors F a la propriété de point fixe.*

Preuve. Soit $h : E \rightarrow F$ un homéomorphisme et supposons que $g : F \rightarrow F$ est continue. Montrons que g a un point fixe dans F . Remarquons que

$$h^{-1} \circ g \circ h : E \rightarrow E$$

est continue. Comme E a la propriété du point fixe, il existe $x_0 \in E$ avec

$$(h^{-1} \circ g \circ h)(x_0) = x_0.$$

Donc, $g(y_0) = y_0$ où $y_0 = h(x_0)$. ■

Définition 2.2.3 *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. L'application $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dit non nulle si $f(x) \neq 0, \forall x \in A$, et normé si*

$$\|f(x)\| = 1, \forall x \in A,$$

le champ $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dit tangent à S^{n-1} si

$$\langle x, f(x) \rangle = 0, \forall x \in S^{n-1}.$$

La sphère unité $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ peut-être divisé en hémisphère supérieur

$$S_+^n := \{(x, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\},$$

et hémisphère l'inférieur

$$S_-^n := \{(x, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}.$$

Soit la sphère unité

$$S^{n-1} := S_+^n \cap S_-^n$$

et soit $e_{n+1} := (0, \dots, 0, 1)$ (pôle nord) et $-e_{n+1} := (0, \dots, 0, -1)$ (pôle sud).

Théorème 2.2.5 [8] *La boule fermé B^n dans $\mathbb{R}^n$ a la propriété du point fixe. Considérons le produit scalaire*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

et la norme

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Aussi, B^n et S^{n-1} désignent respectivement, la boule unitée fermée et la sphère dans $\mathbb{R}^n$

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \text{ et } S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

Théorème 2.2.6 Soit C un sous ensemble non vide, fermé et convexe dans $\mathbb{R}^n$. Alors C est retract dans $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $y = P_C(x) \in C$ avec

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - u\|, u \in C\}.$$

Où, P_C est la projection sur C . ■

Théorème 2.2.7 Il n'existe pas de rétraction $\bar{B}(0, 1)$ sur $S(0, 1)$.

Preuve. ($\Rightarrow$)

Si une telle rétraction F existe alors $-F : \bar{B}(0, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 1)$ n'a pas de point fixe. En effet, s'il existe $x \in \bar{B}(0, 1)$ tel que $F(x) = -x$. alors $x \in S(0, 1)$ et donc $x = -F(x) = -x$, ce qui est impossible.

($\Leftarrow$)

Si $f : \bar{B}(0, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 1)$ est continue et n'a pas de point fixe, alors

$$F : \bar{B}(0, 1) \rightarrow S(0, 1)$$

$$x \rightarrow x + t_x(x - f(x))$$

où t_x est le seul $t > 0$ tel que

$$\|x - t(x - f(x))\|^2 = 1 = \|x\|^2 + 2t \langle x, x - f(x) \rangle + t^2 \|x - f(x)\|^2$$

On trouve

$$t_x = \frac{-\langle x, x - f(x) \rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2 (1 - \|x\|^2)}}{\|x - f(x)\|^2}$$

donc F est continue. De plus, si $x \in S(0, 1)$, alors $\|x\| = 1$, donc

$$t_x = \frac{-\langle x, x - f(x) \rangle + |\langle x, x - f(x) \rangle|}{\|x - f(x)\|^2}$$

Or

$$\langle x, x - f(x) \rangle = \|x\|^2 - \langle x, f(x) \rangle \geq 1 - \|x\| \cdot \|f(x)\| \geq 0$$

d'où $t_x = 0$ et $\forall x \in S(0, 1)$, $F(x) = x$. ■

Contre-exemples. De la même façon que pour le théorème(2.1) nous allons voir que chaque hypothèse du théorème a également son importance ici :

1. Partie K convexe et compacte de $\mathbb{R}$, $f : K \rightarrow K$ sans point fixe :

$$K = [0, 2];$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Partie ε convexe non compacte de $\mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow E$ continue sans point fixe :

$$E = [0, 2[; f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

3. Partie K compacte non convexe de $\mathbb{R}$ et $f : K \rightarrow K$ continue sans point fixe :

$$K = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2];$$

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

2.2.2 Le cas $K = \bar{B}(0, 1)$

On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute fonction continue $f : E \rightarrow E$ possède un point fixe. Nous allons prouver que la boule $\bar{B}(0, 1)$ a la propriété du point fixe en toute dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note ici B_n (resp. S_n) la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ (resp. la sphère unité de $\mathbb{R}^n$). notre preuve est basée sur l'études des champs de vecteurs sur S_n .

Définition 2.2.4 On appelle champ de vecteurs sur la sphère S_{n-1} toute fonction continue V : telle que, pour tout $x \in S_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit tangent en x à S_{n-1} , c'est-à-dire orthogonal à x .

Lemme 2.2.1 S'il existe une rétraction de B_{2n} sur S_{2n-1} , il existe un champ de vecteurs partout non nul sur S_{2n} .

Preuve. On suppose que p est la rétraction de B_{2n} sur S_{2n-1} et on note

$$\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$$

qui envoie S_{2n} sur B_{2n} . Il existe un champ de vecteurs $V : S_{2n-1} \mapsto S_{2n-1}$ (partout non nul).

En effet, si on pose

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \mapsto (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2n}, -x_{2n-1})$$

on a que V est continue, $\|V(x)\|^2 = \|x\|^2 = 1$ et $\langle V(x), x \rangle = 0$.

La fonction $f : y \rightarrow V \circ p \circ \pi(y)$ est alors continue sur S_{2n} à valeurs dans $S_{2n-1} \subset S_{2n}$. Si, pour un $y \in S_{2n}$, $f(y) = \pm y$, alors $y \in S_{2n}$ donc $\pi(y) = y$, et $p \circ \pi(y) = p(y)$, d'où $f(y) = V(y) = \pm y$, ce qui contredit le fait que $\langle V(y), y \rangle = 0$, et on en déduit alors que $\forall y \in S_{2n}$, $f(y) \notin \{y, -y\}$, f étant une fonction continue de S_{2n} dans S_{2n} , la fonction V' définie par

$$V'(y) = f(y) - \langle f(y), y \rangle \cdot y$$

Est continue et vérifie, $\forall y \in S_{2n}$

$$\langle V'(y), y \rangle = \langle f(y), y \rangle \|y\|^2 = 0$$

Donc V' est bien un champ de vecteurs sur S_{2n} . Et il est partout non nul car si on avait $V'(x) = 0$, $f(x)$ serait colinéaire à x et appartiendrait à S_{2n} , i.e. $f(x) = \pm x$, ce qui est impossible.

Le théorème suivant, dont la preuve se trouve en annexe, achève la preuve du théorème de Brouwer en dimension paire d'après les théorèmes (2.1.1) et (2.2.7). ■

Théorème 2.2.8 [7] *Sur la sphère S_{2n} tout champ de vecteurs s'annule en au moins un point.*

Théorème 2.2.9 (Brouwer). *La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Comme ce théorème est déjà démontré pour n pair, il ne reste plus qu'à montrer que si B_{n+1} a la propriété du point fixe, alors B_n l'aussi.

Soient la fonction $f : B_n \mapsto B_n$ continue et π la projection définie par

$$\pi : (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

On a alors $\pi(B_{n+1}) = B_n$, et de plus $f \circ \pi$ est continue de B_{n+1} dans $B_n \subset B_{n+1}$. Donc, il existe $y \in B_{n+1}$ tel que $(f \circ \pi)(y) = y$. Alors $y \in B_n$ donc $\pi(y) = y$. On en déduit que y est un point fixe de f sur B_n . ■

2.3 Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.3.1 (Schauder). Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \rightarrow K$ possède un point fixe.

Preuve. Soit $f : K \rightarrow K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue; donc, si on $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$, dès que $\|x - y\| \leq \delta$.

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, \dots, x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K ; i.e. $K \subset \cup_{1 \leq j \leq p} B(x_i, \delta)$. Si on désigne $L := \text{Vect}(f(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\Psi_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on voit que Ψ_j est strictement positive sur $B(x_i, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^p \Psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions

continues positives φ_j par

$$\varphi_j(x) = \frac{\Psi_j(x)}{\sum_{k=1}^p \Psi_k(x)}$$

pour lesquelles on a $\sum_{j=1}^p \Psi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$, $g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x)f(x_j)$, g est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans K^* ($g(x)$ car est un barycentre des $f(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g|_{K^*} : K^* \rightarrow K^*$, par le théorème (2.2.9) possède un point fixe $y \in K^*$.

De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)f(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et donc $\|f(y) - f(x_j)\| < \varepsilon$. Donc, on a, pour tout j , $\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\| < \varepsilon\varphi_j(y)$, et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^p \|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\| \leq \sum_{j=1}^p \varepsilon\varphi_j(y) = \varepsilon$$

Donc, pour tout entier m , on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|f(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$.

Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite y_{m_k} qui converge que $f(y^*) = y^*$, i.e. est un point fixe de $f \in K$. ■

Chapitre 3

Applications

3.1 Application du théorème de picard

Ce théorème est une application du théorème(2.1.1). En effet, nous verrons qu'une façon de le démontrer est d'appliquer le théorème précédent avec(3.1.1) un ensemble de fonctions et φ une application bien choisie

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Question. Comment peut-on trouver la condition de Lipchitz

Si la dérivée f'_y (dérivée par rapport à y) existe et vérifie (M un nombre réel positif)

$$|f'_y(x, y)| < M$$

Alors f est satisfait la condition de Lipschitz.

Preuve. On a

$$\forall x, y \in U : |f'_y(x, y)| < M$$

En appliquant le théorème des accroissements finis pour les deux point (x, y_1) et (x, y_2) on trouve

$$\begin{aligned} f(x, y_1) - f(x, y_2) &= f'_y(x, \zeta)(y_1 - y_2) \text{ telle que } y_1 < \zeta < y_2 \\ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |f'_y(x, \zeta)| |y_1 - y_2| \\ &< M |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Donc f verifie la condition de Lipshitz avec $k = M$ ■

Proposition 3.1.1 Soit L'équation différentielle $y' = f(x, y)$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Où f est une fonction continue.

est équivalent à l'équation intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.1.3)$$

Preuve. ($\implies$)

Supposons maintenant que y est une solution de (3.1.2). On a alors $y'(x) = f(x, y(x))$ et $y(x_0) = y_0$ On peut intégrer y' par rapport à t car $y'(t) = f(t, y(t))$ et $t \rightarrow f(t, y(t))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur le même segment. Alors, on obtient

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = [y(t)]_{t=x_0}^{t=x} = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$$

Donc, on a bien

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

($\impliedby$)

Par dérivation de l'équation intégrale (3.1.3), on obtient

$$y'(x) = \left[\int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right]' = f(x, y(x))$$

L'équation (3.1.3) satisfait aussi la condition initiale

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t)) dt = y_0, \text{ car } \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t)) dt = 0$$

■

Résumer

Toute solution du problème de Cauchy (3.1.2) est une solution de l'équation intégrale.

Théorème 3.1.1 (*Cauchy*)

Soit U un domaine défini comme suit

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$$

où (x_0, y_0) un point fixe de $\mathbb{R}^2$, si la fonction $f(x, y)$ est continue et vérifie la condition de Lipschitz par rapport à y , on a

$$|f(x, y(x)) - f(x_0, y_0)| \leq k |y - y_0|$$

k : appelé le constant de Lipschitz.

Alors l'équation (3.1.1) admet une seule solution $y = \varphi(x)$ sur l'intervalle $[x_0 - T, x_0 + T]$ ou $T = \min \{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$ vérifiant la condition unitiale $y(x_0) = y_0$.

Preuve. On utilise la méthode des approximations successives. On a

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.1.4)$$

On cherche à trouver la solution approchée de l'équation (3.1.4). Nous prenons l'approximation de degré 0 de la fonction y , $\varphi(x_0) = y_0$ si $x \in [x_0 - T, x_0 + T]$ Cela signifie que $y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t)) dt$ est bien définie en fonction de x , On définit φ_1 par

$$\varphi_1(t) = y_0 + \int_{x_0}^t f(t, \varphi_0(t)) dt$$

telle que $\varphi_1(x)$ est continue sur l'intervalle $[x_0 - T, x_0 + T]$ et vérifie $\varphi_1(x_0) = y_0$.

Définissons par récurrence

$$\varphi_n(t) = y_0 + \int_{x_0}^t f(t, \varphi_{n-1}(t)) dt \quad (3.1.5)$$

Cette dernière relation représente une suite de fonctions $\{\varphi_n(x)\}_{n \geq 0}$ continues sur l'intervalle $[x_0 - T, x_0 + T]$, vérifiant la condition initiale $\varphi_n(x_0) = y_0$. ■

Alors il faut montrer que :

- 1-La suite $\varphi_n(x)$ converge uniformément vers la solution exacte.
- 2-La limite de la suite $\varphi_n(x)$ est une solution de l'équation intégrale 3.1.4.
- 3-La solution est unique (la limite de la série $\varphi_n(x)$ unique).
- 1-Pour montrer la convergence uniforme

Preuve. on construie la serie

$$S_n = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \dots + (\varphi_n - \varphi_{n-1})$$

on a

$$S_n = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n (\varphi_i - \varphi_{i-1})$$

$$S_n(x) = \varphi_n(x), \forall x \in [x_0 - T, x_0 + T]$$

Cela signifie que la série et la suite convergent vers la même limite.

Comme $|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| < M|x - x_0|$. Alors, en appliquant la condition de Lipschitz, on trouve

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t))] dt \right| \\ &< k \int_{x_0}^x |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| dt \\ &< kM \int_{x_0}^x |t - x_0| dt = kM \frac{|x - x_0|^2}{2} = kM \frac{|x - x_0|^2}{2!} \end{aligned}$$

Comme $|x - x_0| < T$, $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| < \frac{kMT^2}{2!}$. Par récurrence

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < \frac{Mk^{n-1}T^n}{n!}$$

$$S_n = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \dots + (\varphi_n - \varphi_{n-1})$$

$$\begin{aligned} &\leq \varphi_0 + MT + \frac{kMT^2}{2!} + \frac{k^2MT^3}{3!} + \dots + \frac{k^{n-1}MT^n}{n!} \\ &= y_0 + \frac{M}{k}(kT) + \frac{M}{k} \frac{(kT)^2}{2!} + \frac{M}{k} \frac{(kT)^3}{3!} + \dots + \frac{M}{k} \frac{(kT)^n}{n!} \\ &= y_0 + \frac{M}{k} \left[(kT) + \frac{(kT)^2}{2!} + \frac{(kT)^3}{3!} + \dots + \frac{(kT)^n}{n!} - 1 \right] \end{aligned}$$

converge vers $y_0 + \frac{M}{k}(\exp(kT) - 1)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc la série est uniformément convergente, alors la suite $\varphi_n(x)$ est uniformément convergente sur l'intervalle $[x_0 - T, x_0 + T]$. Comme $\varphi_n(x)$ est une suite des fonctions continues. Donc, la limite est une fonction continue sur l'intervalle $[x_0 - T, x_0 + T]$. ■

2- Montrons que $\varphi(x)$ est la solution de l'équation intégrale (3.1.4).

Preuve. Comme la fonction $f(x, y)$ est continue sur U . Alors, $f(x, \varphi(x))$ converge vers $f(x, \varphi(x))$ quand n tend vers $+\infty$. Par passage à la limite pour les deux nombres de l'équation (3.1.5). On trouve

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (3.1.6)$$

Alors $\varphi(x)$ est une solution de l'équation intégrale (3.1.6), donc une solution du problème de Cauchy. Comme $|\varphi_n(x) - y_0| < b, \forall n = 0, 1, 2, \dots$, alors $|\varphi(x) - y_0| < b$ Donc, la fonction $\varphi(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$, reste dans le domaine U et réalise la condition suivant

$$y_0(x_0) = y_0 \quad (y = \varphi(x, x_0, y_0)).$$

■

3-L'unicité de la limite

Preuve. Soit $\varphi^*(x)$ une autre solution de l'équation intégrale (3.1.4), $y = \varphi^*(x, x_0, y_0)$ sur l'intervalle $[x_0 - T^*, x_0 + T^*]$ telle que $T^* < T, \varphi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi^*(t)) dt$ On a

$$|\varphi_n(x) - \varphi^*(x)| \leq \int_{x_0}^x [f(t, \varphi_{n-1}(t)) - f(t, \varphi^*(t))] dt \text{ pour tout } n = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\leq \int_{x_0}^x |\varphi_{n-1}(t) - \varphi^*(t)| dt$$

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x) - \varphi^*(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi^*(t))| dt \\ &\leq M |x - x_0| \end{aligned}$$

De la relation (3.1.4), on trouve

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - \varphi^*(x)| &\leq k \int_{x_0}^x |\varphi_0(t) - \varphi^*(t)| \\ &\leq Mk \frac{|x - x_0|^2}{2} \end{aligned}$$

par récurrence, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi^*(x)| &\leq M k^{n-1} \frac{|x - x_0|^2}{n!} \\ &= \frac{M (k |x - x_0|)^n}{k n!} \end{aligned}$$

converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, quelque soit $x \in [x_0 - T, x_0 + T]$. Enfin, $|\varphi_n(x) - \varphi^*(x)|$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $\varphi(x) - \varphi^*(x) = 0$, alors $\varphi(x) = \varphi^*(x)$. ■

3.2 Le théorème de Cauchy-Arzela

On reprend maintenant le problème de Cauchy pour l'équation $y' = F(t, y(t))$, mais ici on ne sait pas si F est lipchitzienne. le théorème de schauder nous donnera l'existence d'une solution, mais pas nécessairement l'unicité.

Théorème 3.2.1 [6] Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques avec Y complet. Alors l'ensemble $C_b^0(X, Y)$ est complet pour la distance uniforme $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \{d_Y(f(x), g(x))\}$.

Théorème 3.2.2 (Ascoli)[6]. Soient (X, d_X) un espace métrique compact et (Y, d_Y) un espace métrique. On se donne un sous ensemble F de $C^0(X, Y)$ tel que:

1. $\forall x \in X, \left\{ \overline{f(x), f \in F} \right\}$ est compact dans Y
 2. La famille F est équicontinue, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x, x' \in X, \forall f \in F$ on a $d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$
- Alors $\bar{F}$ est compact dans $C^0(X, Y)$ (muni de la distance uniforme).

Théorème 3.2.3 (Cauchy-Arzela).

Soient :

- E un espace vecteur normé de dimension finie;
- U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$;
- F une fonction continue de U dans E ;
- (t_0, x_0) un point de U ;

Alors l'équation différentielle $x' = F(t; x)$ a une solution au voisinage de (t_0, x_0) , i.e. il existe un nombre $\rho > 0$ et une fonction $f : [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \rightarrow E$ de classe C^1 avec $f(t_0) = x_0$, telle que pour $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$;

$$1. (t, f(t)) \in U$$

$$2. f'(t) = F(t, f(t))$$

Preuve. Soit $M > \|F(t_0, x_0)\|$. Quitte à remplacer U par l'ensemble ouvert $\{(t; x) \in U : \|F(t; x)\| < M\}$ on peut supposer que F est majorée en norme par M sur U . Il existe donc $r > 0$ et $h > 0$ tels que $U \supset [t_0 - h, t_0 + h] \times \bar{B}(x_0, r)$, et on choisit $\rho = \min(h, \frac{r}{M}) > 0$.

On considère l'ensemble K des fonctions M -Lipschitziennes de l'intervalle $J = [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ dans E qui valent x_0 en t_0 , que l'on munit de la norme uniforme. Si f et g sont dans K et $s \in [0, 1]$, alors $sf + (1 - s)g \in K$ donc K est convexe. Si $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de K pour la norme uniforme, alors d'après le théorème(3.2.1), il existe une fonction continue $f : J \rightarrow E$ telle que f_i converge uniformément vers f .

On a alors

$$f_0 = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_i(t_0) = x_0$$

et $\forall t, t' \in J$,

$$\|f(t), f(t')\| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \|f_i(t), f_i(t')\| \leq M |t - t'|$$

et donc $f \in K$. On en déduit que K est fermé pour la norme uniforme dans $C^0(J, E)$.

De plus, pour tout $t \in J$ et tout $f \in K$, on a

$$\|f(t) - x_0\| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \|f_i(t), f_i(t_0)\| \leq M |t - t_0| \leq M\rho \leq r$$

ce qui montre que $K(t) = \{f(t) : f \in K\}$ est contenu dans la boule $\bar{B}(x_0, r)$, et donc $K(t)$ est relativement compact. Et puisque K est uniformément équicontinu, il résulte du théorème(3.2.2) que K est compact.

On peut alors définir une application $\Phi : K \rightarrow C^1(J, E)$, en posant

$$\Phi(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, f(s)) ds$$

En effet, si $f \in K$, alors $f(s) \in \bar{B}(x_0, r)$ pour tout $s \in J$, ce qui montre que la fonction $s \rightarrow F(s, f(s))$ est bien définie et continue sur J , à valeurs dans E , et possède une primitive $\Phi(f)$ de classe C^1 , valant x_0 en t_0 . Puisque la fonction $g = \Phi(f)$ vérifie $g'(t) = F(t, f(t))$,

on a que $\|g'(t)\| \leq M$, c'est-à-dire que g est M -Lipschitzienne sur J . De plus, $g(t_0) = x_0$. Donc, $\Phi(K) \subset K$. Enfin, comme F est uniformément continue sur le compact $J \times \bar{B}(x_0, r)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout (s, x) et (s', x') appartenant à $J \times \bar{B}(x_0, r)$, on ait

$$\max(|s - s'|, \|x - x'\|) < \delta \Rightarrow \|F(s, x) - F(s', x')\| < \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Alors, si f et f_1 appartiennent à K et si

$$\|f - f_1\| < \delta$$

on a $\forall s \in J$,

$$\|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

Donc,

$$\|\Phi(f)(t) - \Phi(f_1)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t F(s, f(s)) - F(s, f_1(s)) ds \right\|$$

$$\leq |t - t_0| \sup_{s \in J} \|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| \leq \rho \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon$$

pour tout $t \in J$. Ceci montre que $\|\Phi(f) - \Phi(f_1)\| \leq \varepsilon$, i.e. $\Phi : K \rightarrow K$ est une application continue. Donc, d'après le Théorème(2.4.1), il existe un point fixe $f \in J$ de Φ , c'est-à-dire que f est une solution au problème de Cauchy. ■

Bibliographie

- [1] R. AGARWAL, M.MEHAN & D.O'REGAN; Fixed Point Theory And Applications; © Cambridge University Press 2004.
- [2] H. BOMAZA, B. COLAS, S. COLLION, M. DELLINGER, Z. FAGET, L.LAZZARINI, F. SCHFFHAUSER; Mathématique L3 Analyse, Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés; PERON Education, 10 Juin 2009.
- [3] G. CHRISTOL, A. GOT, Charles-Michel MARLE; Topologie; © ellipses/ édition marketing S. Arrigues, 1997.
- [4] J-P. Demailly Analyse numérique et équations différentielles; collection Grenoble Sciences, presses universitaires de Grenoble, Grenoble (1996).
- [5] S. DJEBALI; Le degré topologique : Théorie et applications; Version : 14 mars 2007; Kouba, le 22 mars 2006.
- [6] J. Dixmier Topologie générale collection Puf, presses universitaires de France, Paris (1981)
- [7] R. HERBIN; Licence de mathématiques, Cours d'Analyse Numérique 2003-2004; 8 juillet 2004.
- [8] J. Saint Raymond Topologie, calcul différentiel et variable complexe; Calvage et Mounet Paris (2007).
- [9] L. SCHWARTZ; Analyse, Deuxième partie, Topologie générale et analyse fonctionnelle; Hermann, Paris 1970.

- [10] Y. SONNTAG; Topologie et analyse fonctionnelle, Cours de licence avec 240 exercices et 30 problèmes corrigés; ellipses; Juille 1997.

Résumé

On étudie dans ce travail quelques théorèmes du point fixe et quelques une de leurs applications aux équations différentielles.

Mots de clés:

Point fixe- continuité - contractante - équation différentielle- équation intégrale

Abstract

Through this work we tackled some theories of the fixed point and some of its practices as well to solve the problems of differential equations

Keywords:

The fixed point- continuity - contraction - Differential Equations – Integral Equations

: □ □ □ □ □ □

تطرقنا من خلال هذا العمل إلى بعض نظريات النقطة الثابتة و بعض تطبيقاتها في حل مشاكل المعادلات التفاضلية .

مفتاحية: □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ - الاستمرارية- التقليل - معادلات تفاضلية - معادلات تكاملية .