N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Présenté par : GUENNAS Kheira
NEFTIA Saïda
ZAIZ Khaoula

Thème

Les différents types d'équivalences entre les espaces métriques et normés

Soutenu juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. Miloudi Madjda	MA (A) Univ. El Oued	Président
Mr. Said Amer Meziane	MC (B) Univ. ElOued	examinateur
Mr. Nisse Khadidja	MA (A) Univ. ElOued	Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier ALLAH nos créateur pour nous avoir donne la force pour accomplir ce travail.

Nous tenons à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué a notre formation de mathématique, en particulier, notre encadreur pédagogique Mme NISSE Khadidja.

Nous vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de prés on de loin à la réalisation de ce travail en particulier: Dr. MANSSOUR Abd Elouhab,les profs: LTOUFA Yassine et MEDAKHEL Hamza et TOUATI BRAHIM Saïd.Qui y compris nos amis pour leurs soutien.

Nous tenons a remercie tous les étudiants de La promotion 2013/2014 de Math de l'université d'El-oued.

Sans oublier un grand merci à tous les membres de l'Association de l'Alkhawayrismia pour la science à son soutenir permanent.

En fin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période préparation.

Table des matières

Notations **1**

Introduction générale **1**

1 Notions et propriétés topologiques préliminaires **2**

1.1 Espace métrique 2

1.1.1 Définitions 2

1.1.2 Propriétés de distance 3

1.1.3 Notions topologiques 4

1.1.4 Les grandes notions topologique 7

1.2 Applications continues 11

1.2.1 Applications continues 11

1.2.2 Homéomorphisme 12

1.2.3 Continuité uniforme 12

1.2.4 Application Lipschitzienne 13

1.3 Espace normé 14

2 Différentes types d'équivalences entre les distances **15**

2.1 Equivalence topologique 15

2.1.1 Définitions et propriètés équivalentes 15

2.1.2 Les caractères présèrvés par l'équivalence topologique 18

2.2 Equivalence uniforme 20

2.2.1 Définitions et propriètés équivalentes 20

2.2.2 Relations avec l'équivalence topologique 20

2.2.3 Caractères préservés par uniformément équivalente 23

2.3 Equivalence Lipschitzienne 26

2.3.1 Définitions et propriètés équivalentes 26

2.3.2 Relations avec l'équivalence uniforme 27

2.3.3 Caractères préservés par l'équivalence Lipschitzienne 28

3 les types d'équivalences entre les Espaces metriques et normés 29

3.1 Equivalence des normes 29

3.2 Les types d'équivalences entre les Espaces Metriques 31

3.2.1 Equivalence topologique 31

3.2.2 Equivalence uniforme 32

3.2.3 Equivalence Lipschitzienne 33

3.3 Les exemples de l'équivalence des distances 34

Bibliographie 37

Notations

$\bar{A}$	adhérence
f	application
f^{-1}	application inverse
$\bar{B}\,(x,r)$	boule fermée
$\overset{o}{B}\,(x,r)$	boule ouverte
$X\backslash A$	complémemtaire de A
$g\circ f$	composition de deux application
$Diam(A)$	diamètre
$d(x,y)$	distance entre deux points
$d(x,A)$	distance entre point et un ensemble
(X,d)	espace métrique
$(X,\Vert.\Vert)$	espace vectoriel normé
$Ex(A)$	exétrieur
$Fr(A)$	frontière
$\mathring{A}$	intérieur
$acc(S)$	Point accumulation
$g\vert_A$	restriction
d_S	restriction de distance
$S\,(x,r)$	sphère

Introduction générale

Etant donné un ensemble X muni de deux distances d, d' qui donnent naissance à deux espaces métriques $(X,d), (X,d')$, une application bijective f de (X,d) dans (X,d') à inverse continue, pour tout ouvert O de (X,d) correspand un ouvert $U = f(O)$ de (X,d') et reciproquement. Par consèquent, toutes les notions dont la dèfinition ne depend que des ouverts seront les mêmes pour les deux espaces métriques. Ces notions, telles que: les fermès, les voisinages, les ensembles denses, la continuitè ou la discontinuité, sont dites topologiques ou invariantes par homéomorphisme.

D'autre part un certain nombre de notions dèpendent de manière essentielle de la structure métrique: distance entre point, distance d'un point à un ensemble, diamètre... Elles sont toute fois invariantes par isométrie.

Un certain nombre de notions appartiennent à une autre catégorie, ce sont des notions qui ne sont pas invariantes sous l'effet d'un homèomorphisme, mais qui sont invariantes sous l'homèomorphisme plus particuliers, ceux qui sont uniformément continues ainsi que leurs inverses.

Parmis ces notions: les applications uniformément continues, suite de Cauchy, espaces localement compacts.

Nous proposons dans ce travail d'introduire les différents types d'èquivalences entre les distances et les espaces mètriques ainsi que les espaces normés, qui nous permetterons d'affiner l'idée de classification introduite ci-dessus.

Le premier chapitre est consacré aux notions topologiques preliminaires conserant les espaces métriques et les espaces normés, qui fournissent un outil indispensable dans notre étude .

Dans le deuxiéme chapitre, aprés avoir exposé les différents types d'équivalences entre les distances sur le même espace, on propose de spécifier les caractéres préservés par chaque type.

Dans la premiére partie du troisiéme chapitre nous allons étendre ces types d'équivalence entre deux espaces métriques et comme cas particulier entre deux espaces normés dont nous verons qu'il n'exite qui un seul type d'équivalence, Nous terminons dans la deuxiéme partie du troiséme chapitre par quelques exemples consernant chaque type d'équivalence.

Chapitre 1

Notions et propriétés topologiques préliminaires

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à donner quelques notations et définitions principales des espaces métriques et des espaces normés. Aussi, nous allons cité les différents types de continuité dans l'espaces métriques et les espaces normés.

1.1 Espace métrique

1.1.1 Définitions

Distance

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application d:$X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous x, y, z dans X:*

i)$\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
ii)$\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$; *(symétrique)*
iii)$\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; *(inégalité traingulaire)*.

Espace métrique

Définition 1.1.2 *Un espace métrique est un ensemble X sur lequel est définie une distance d et on note (X, d).*

Restriction

Définition 1.1.3 *Soient* (X, d) *un espace métrique et* S *un sous-ensemble de* X*. On définit* d_s*:* $S \times S \to \mathbb{R}_+$ *par* $d_S(x, y) = d(x, y)$ *pour tout* $x, y \in S$ *(c'est-à-dire* d_S *est la restriction de* d *sur le sous-ensemble* S*).* d_S *est une distance sur* S*, appelée la distance induite sur* S *par* d*.*

Surespace

Définition 1.1.4 *Suppossons que* (X, d) *et* (X', d') *sont des espaces métrique. On dit que* X *est un sous-espaces métriques de* X'*, et que* X' *est un surespace métrique de* X *si, et seulement si,* X *est un sous-ensemble de* X'*et* d *est une restriction de* d'*. Nous notons souvent à condition qu'elle ne conduit à aucune confusion, par la même lettre pour désigner la distance sur un sous-espace et la distance sur son surespace.*

1.1.2 Propriétés de distance

(X, d) est un espace métrique

Les boules

La boule ouverte

Définition 1.1.5 *On appelle boule ouverte de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$\overset{o}{B}(x_{0,}r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

La boule fermée

Définition 1.1.6 *On appelle boule fermée de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$B(x_{0,}r) = \{x \in X \mid d(x_{0,}x) \leq r\}$$

Sphère

Définition 1.1.7 *On appelle sphère de centre x_0 et de rayon r l'ensemble*

$$S\left(x_{0,}r\right)=\left\{x\in X\mid d\left(x_0,x\right)=r\right\}$$

Distance d'une partie

Définition 1.1.8 *Pour tout $x\in X$ et A une partie non vide de X. On appelle distance de x à A et on note $d(x,A)$ le nombre réel défini par:*

$$\inf\left\{d(x,y);y\in A\right\}.\text{ On pose }d(x,\phi)=+\infty$$

Diamètre

Définition 1.1.9 *Soient (X,d) un espace métrique et A une partie non vide de X. Le diamètre de A noté par $Diam(A)$ est la quantité défini par:*

$$\sup\left\{d(x,y);(x,y)\in A\times A\right\}\in[0,+\infty]$$

Par convention le diamètre de l'ensemble vide (ϕ) est 0.

1.1.3 Notions topologiques

Ouverts

Définition 1.1.10 *Une partie A de X est appelée ouvert si toutes fois qu'elle contient un point x de X, elle contient au moins une boule ouverte centrée en x c-à-d:*

$$\left(\forall x\in A\right)\left(\exists r>0\right)\overset{o}{B}\left(x,r\right)\subset A$$

Théorème 1.1.1 *Soit (X,d) espace métrique· On a les affirmations suivantes:*

$i)$ O est un ouvert.

$ii)$ Une réunion d'ouverts est un ouvert.

$iii)$ Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

$iv)$ ϕ et X sont ouverts. (**Voir** [1] ,**Voir** [4])

Théorème 1.1.2 *Soient X un espace métrique et O un sous-ensemble non vide de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

$i)$ O est ouvert dans X;

$ii)$ Pour chaque $x \in X$, O inclus une boule ouverte de X centrée en X;

$iii)$ O est une union des boules ouvertes de X.**voir** [9]

Fermée

Définition 1.1.11 *Soit (X, d) un espace métrique. On appelle fermé, toute partie A de X, son complémentaire $X \diagdown A$ est ouvert.*

Théorème 1.1.3 *Les affirmations suivantes sont vrais dans un espace métrique (X,d):*

$i)$ ϕ, X sont fermé.

$ii)$ L'intersection d'une famille arbitraire d'ensemble fermé est fermé.

$iii)$ La réunion d'une famille finie des fermés est fermé$\cdot$ (**Voir** [3] , **Voir** [7])

Voisinage

Définition 1.1.12 *On appelle V un voisinage d'un élément a de X, toute partie V de X contenant un ouvert qui contient a, $\{a \in O \subset V\} \cdot$*

Intérieur

Définition 1.1.13 *On appelle intérieur d'une partie A d'un espace métrique (X, d) et on note $\mathring{A}$ la réunion de tous les ouverts de X contenue dans A.*

Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X tel que

$$\mathring{A} = \{x \in A, \exists\ r > 0\ B\left(x, r\right) \subset A\}$$

Extérieur

Définition 1.1.14 *On appelle extérieur d'une partie A d'un espace métrique (X, d) et on note $Ex(A)$ l'intérieur de $X \backslash A$.*

Frontière

Définition 1.1.15 *On appelle frontière de A et noter $Fr(A) = \bar{A} - \mathring{A}$, l'ensemble des points de X qui n'appartiennent ni à son intérieur ni à son extérieur.*

Remarque 1.1.1 *Pour qu' un point a appartient à la frontière de A, il faut et il suffit que tout voisinage de a contient des points de A et de son complémentaire.*

Adhérence

Définition 1.1.16 *On appelle adhérence de A, et on note $\bar{A}$ l'intersection de toutes les parties fermées de X qui contiennent A. Elle est donc fermée et c'est alors évidemment la plus petite partie fermée de X qui contienne A.*

Remarque 1.1.2 *On peut définir l'adhérence de A par :*

$i)$ La réunion de son intérieur et sa frontière, autrement dit le complémentaire de son extérieur;

$ii)$ L'ensemble des points de X dont tout voisinages rencontre $A\cdot$

Point Adhérence

Définition 1.1.17 *Soit $A \subset X$; un point $x \in X$ est un point adhérent de A si tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et on note $\bar{A}\cdot$*

Point d'accumulation

Définition 1.1.18 *Soit (X, d) un espace métrique, $z \in X$ et S est un sous-ensemble de X, on dit que z est un point d'accumulation si, seulement si, $inf d(z, y) = 0$, $y \in S \setminus \{z\}$. L'ensemble des points de S d'accumulation dans X est notée par $acc(S)$.*

Partie dense

Définition 1.1.19 *Soit (X, d) un espace métrique, A et B deux partie non vide de X; A est dite dense par rapport à B si:*

$$\forall b \in B,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a = a_\varepsilon \in A \text{ tel que } d(a_\varepsilon, b) \leq \varepsilon$$

Si A est dense par rapport à l'espace X tout entier, on dit que A est partie dense dans X (on se contente parfois de dire A est dense dans X).

Théorème 1.1.4 *Supposons que X est un espace métrique et A est un ensemble de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) Pour tout $x \in X$, $d(x, A) = 0$;
ii) $\bar{A} = X$;
iii) $A \cap U \neq \phi$ tel que U est un ouvert sur X.**Voir** [2]

1.1.4 Les grandes notions topologique

Espace métrique complet

Suite

Définition 1.1.20 *Soit (X, d) est espace métrique. Une suite attribue à chaque $n \in \mathbb{N}$ un élément uniquement déterminé dans X. Si $f(n) = x_n$, il est d'usage de désigner la suite par le symbôle $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Sous-Suite

Définition 1.1.21 *Soit (x_n) une suite de X.On dit qu'une suite (y_n) est une sous-suite de (x_n) s'il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $y_n = x_{\phi(n)}$,* $\forall n \in \mathbb{N}$. *On notera que $\phi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

La limite

Définition 1.1.22 *Soit d une distance de X, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $X\cdot$ On dit que x est la limite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 :\ d(x_n, x) < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$$

On dit que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* x, *et on écrit* $x_n \to x$ *si, et seulement si:*

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$$

Si (x_n) *converge vers* l, *alors toute sous-suite de* (x_n) *converge aussi vers* l.

Suite de Cauchy

Définition 1.1.23 *Soit* (X, d) *un espace métrique. Soit* $(x_n)_{n\in A}$ *une suite de* X.

.On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de Cauchy dans (X, d) si:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 > 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N};\ m \geq n_0 \text{ et } n \geq n_0 :\ d(x_{n,}x_m) \leq \varepsilon$$

Théorème 1.1.5 *Supposons que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite convergente dans un espace métrique* (X, d) *alors:*

$i)$ La limite $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ est unique.
$ii)$ Toute sous-suite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
$iii)$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. **Voir** [5]

Proposition 1.1.1 *Soit* (X, d) *un espace métrique.*

(x_n) est une suite de Cauchy si, et seulement si, pour tout $r > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in X$ telle que:

$$\{x_n :\ n \geq m\} \subset B_0(x, r)$$

Espace complet

Définition 1.1.24 *On dit que* (X, d) *est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente·*

Ensemble borné

Définition 1.1.25 *Supposons que* (X, d) *est un espace métrique et* $S \subseteq X$*, on dit que* S *est borné s'il existe un nombre* $b > 0$ *tel que* $d(x, y) < b$ *pour tout* $x, y \in S$.

Théorème 1.1.6 *On suppose que* (X, d) *est un espace métrique non-vide,* $x \in X$ *et* $S \subseteq X$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

$i)$ $diam(S) < \infty$;

$ii)$ Il existe une boule de X centré à x qui inclut S;

$iii)$ Il existe une boule de X qui inclut $S \cdot$ **Voir** [9]

Ensemble Totalement bornée

Définition 1.1.26 *On suppose que* (X, d) *est un espace métrique,* S *un sous-ensemble de* X. *On dit que* S *est totalement borné de* X *si, et seulement si,* $\forall\ r \in \mathbb{R}_+$, *il existe un ensemble finit des boules de* S *de rayon* r *qui couvre* $S \cdot$.

Théorème 1.1.7 *Soient* (X, d) *un espace métrique non vide,* $x \in X$ *et* $S \subseteq X$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

$i)$ Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, il existe un ensemble finit des boules de S de rayon r qui couvre S;

$ii)$ Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, il existe un ensemble finit des boules de X de rayon r qui couvre S;

$iii)$ Chaque suite dE S a une sous-suite de Cauchy.**Voir** [8]

Théorème 1.1.8 *Soient* (X, d) *un espace métrique,* $x \in X$ *et* $S \subseteq X\cdot$ *Les affiramations suivantes sont équivalentes:*

$i)$ X admet un point x vérifie: $\forall s \in X'$ $d(x, s) = d(x, X')$ dans chaque surespace métrique X' de X;

$ii)$ Chaque suite borné dans X a une sous-suite convergente en X;

$iii)$ X est complet et chaque sous-ensemble bornée de X est totalement borné. **Voir** [10]

Espace métrique Compact

Définition 1.1.27 *Un recouvrement ouvert d'un espace métrique X est une famille d'ouverts O_i de X, $i \in I$, dont la réunion est X. Le recouvrement est dit fini (resp. dénombrable) lorsque l'ensemble I est fini (resp. dénombrable).*

Proposition 1.1.2 *Soit (X, d) un espace mérique. X est compact s'il vérifie pour tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un recouvrement fini.*

Remarque 1.1.3 *On peut définir l'espace compact d'autre façon: pour qu'un espace métrique (X, d) compact si, et seulement si, il est borné et X est un sous-ensemble de X'qui admet un point x tel que $d(s, x) = d(s, X)$ $\forall s \in X'$.*

Théorème 1.1.9 *Soit (X, d) un espace métrique. Les affermations suivantes sont équivalentes:*

1. (X, d) est compact;
2. (X, d) est fermé;
3. (X, d) est complet et totalement borné;
4. Chaque ensemble infini X a au moins un point accumulation;
5. Toute suite dans X contient une suite convergente. **Voir** [7]

Localement compact

Définition 1.1.28 *Un espace métrique (X, d) est dit localement compact si chaque point $x \in X$ a un voisinage $\overset{o}{B}(x, r)$ de telle sorte que la fermeture $\bar{B}(x, r)$ est compact.*

Sous-ensemble compact

Définition 1.1.29 *Un sous-ensemble S d'espace métrique (X, d) est dite un sous-ensemble compact si, et seulement si, le sous-espace (S, d_s) est compact.*

Espace métrique connexe

Définition 1.1.30 *On dit que X est un espace métrique connexe si, et seulement si, X ne peut pas être exprimé comme l'union de deux sous-ensembles non vides ouverts disjoints de lui-même·*

1.2 Applications continues

1.2.1 Applications continues

Définition 1.2.1 *Soient (X, d), (X', d') deux espaces métriques*

1. L'application $f : X \to X'$ est continue en $a \in X$ si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{tel que } f\left(\overset{o}{B}(a, \delta)\right) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

2. L'application $f : X \to X'$ est dite continue si elle est continue en tout point de X.

Remarque 1.2.1 *On peut exprimer la définition précédente à l'aide des distances comme suite:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } x \in X \text{ et vérifie } d(a, x) < \delta \text{ alors } d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

Théorème 1.2.1 *Soient $(X, d), (X', d')$ et (X'', d'') des espaces métriques, $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ des applications. Si f et g sont continues sur X et $f(X) = X'$ respectivement, alors $g \circ f$ est continue en X.*~**Voir** [1] .

Théorème 1.2.2 *Soient $(X, d), (X', d')$ deux espaces métriques, $f : X \to X'$ une application. Les propriètés suivante sont équivalentes:*

$i)$ Pour tout ouvert O de X', l'image inverse $f^{-1}(O)$ est ouvert de X;

$ii)$ Pour tout ensemble F fermé de X', l'image inverse $f^{-1}(F)$ est fermé en X;

$iii)$ Pour toute boule ouvert B de X', l'image inverse $f^{-1}(B)$ est un ouvert en X;

$iv)$ La fonction f est continue pour touts les points de X;

$v)$ Pour toute suite (x_n) de X qui est convergente en X, la suite $(f(x_n))$ est convergente en X' vers $f\left(\lim_{x \to +\infty} x_n\right)$. **Voir** [6]

Remarque 1.2.2 *Il est faux de croire que l'image directe d'une suite de Cauchy par une application continue est une suite de Cauchy.*

Théorème 1.2.3 *Supposons X et X' sont des espaces métriques, X est connexe et $f : X \to X'$ est continue:*

Toute les images de X par f sont connexe. **Voir** [9]

1.2.2 Homéomorphisme

Définition 1.2.2 *Soit $(X, d), (X', d')$ deux espaces métriques, une application $f : X \to X'$ est dite un homéomorphisme si elle est bijective et bicontinue c-à-dire $(f$ et f^{-1}sont continue$)$.*

Définition 1.2.3 *Soit (X, d), (X', d') deux espaces métriques,une application $f : X \to X'$ est dite une isométrie si:*

$$\forall x, y \in X, \ d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

Proposition 1.2.1 *Une isométrie est un homéomorphisme.*

1.2.3 Continuité uniforme

Définition 1.2.4 *Soient $(X, d), (X, d')$ sont deux espaces métriques et $f : X \to X'$une application, on suppose que $S \subseteq X$. On dit que f est uniformément continue sur S si, et seulement si:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x, z \in S \text{ pour lequel } d(z, x) < \delta \Rightarrow d'(f(z), f(x)) < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.4 *Soient (X, d), (X', d') et (X'', d'') des espaces métriques et $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ des applications. Si f et g sont uniformément continue sur X et $f(X)$ respectivement, alors $g \circ f$ est uniformément continue en X.* **Voir** [6]

Théorème 1.2.5 *Soient $(X, d), (X', d')$ des espaces métriques et $S \subset X$, $f : X \to X'$.*

i) Si f est uniformément continue sur S alors $f|_s$ est continue.

ii)Si f est uniformément continue sur X alors $f|_s$ est uniformément continue en S. **Voir**[**1**]

Théorème 1.2.6 *Supposons X et X' sont des espaces métriques, X est compact et $f : X \longrightarrow X'$ est continue. Alors f est uniformément continue sur X et le sous-espace $f(X)$ de X'est compact.* (**Voir** [1] , **Voir** [7])

Théorème 1.2.7 *Supposons X et X' sont des espaces métriques et X est compact.*

Supposons $f : X \to X'$ est injective et continue. Alors $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to X$ est uniformément continue.**Voir** [6]

Théorème 1.2.8 *Soit $(X, d), (X, d')$ deux espaces métrique, (X, d) complet.*

Il existe une application bijective $f : X \to X'$ tel que f est continue et f^{-1}est uniformément continue. Donc X'est complet.**Voir** [7]

1.2.4 Application Lipschitzienne

Définition 1.2.5 *Soient $(X, d), (X', d')$ deux espaces métriques et $f : X \to X'$ une application, s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que:* $d'(f(a), f(b)) \leq kd(a, b)$ *pour tout $a, b \in X$*

donc f est dite une application Lipschitzienne sur X de rapport k.

Théorème 1.2.9 *Soient $(X, d), (X', d')$et $(X", d")$ des espaces métriques, $f : X \to X'$ et $g : X' \to X"$ des applications. Si f et g sont Lipschitziennes sur X et $f(X)$ de rapport k et l réspectivement,alors $g \circ f$ est une application Lipschitzienne sur X de rapport kl.* **Voir** [5]

Théorème 1.2.10 *Soient $(X, d), (X', d')$ des espaces métriques, $f : X \to X'$ est une application:*

f application Lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue·**Voir** [7]

1.3 Espace normé

Définition 1.3.1 *Une espace vectoriel normé* $(X, \|.\|)$ *est un espace vectoriel* X *sur* $\Bbbk = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *muni d'une application* $\|.\|$*:* $X \times X \to \Bbbk$*, appellée norme, qui satisfait, pour tout* x *et* $y \in X$*, les propriètes suivantes :*

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$; (*séparation*)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ \forall \ \lambda \in \Bbbk$; (*homogènété*)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; (*inégalité triangulaire*)

Théorème 1.3.1 *Soit* f *une application linèaire entre deux* $\Bbbk$*-espaces vectoriel normés* $(X, \|.\|)$ *et* $(X\prime, \|.\|')$ *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. f est continue;
2. f est continue en zéro;
3. f est bornée sur la boule d'unite fermée :$B_f \ (0_X, 1)$;
4. f est Lipschitzienne. **Voir** [3]

Théorème 1.3.2 *Supposons* X *est un espace vectoriel normé. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. X est de dimension finie;
2. X est localement compact;
3. La boule d'unité fermée de X est compact. **Voir** [2]

Chapitre 2

Différentes types d'équivalences entre les distances

Concernant ce chapitre, nous allons examiner les différents types d'équivalences entre les distances, comme un cas particulier de ce que nous allons aborder dans le troisiéme chapitre, définies sur le même ensemble qui sont topologiquement équivalente, uniformément équivalente et Lipschitz-équivalente.

En outre, nous allons spécifié les propriétés de chaque type d'équivalence et déterminé la relation entre ces types.

2.1 Equivalence topologique

2.1.1 Définitions et propriètés équivalentes

Définition 2.1.1 *On suppose que X est un ensemble, d et d' sont des distances sur X. On dit que:*

1. d est topologiquement plus fine que d' et que d' est topologiquement moins fine que d si, et seulement si, chaque ouvert de (X, d') est un ouvert de (X, d).

2. d et d' sont topologiquement équivalentes si, et seulement si, d est à la même fois plus fine et moins fine que d'.

3. d et d' ne sont pas comparable si, et seulement si, d est ni topologiquement plus fine ni topologiquement moins fine que d'.

Théorème 2.1.1 *Soient X un ensemble, d et d' deux distances sur X, donc les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. Chaque boule ouverte de (X, d) est inclus dans une boule ouverte de $(X, d^{'})$ du même centre;

2. Chaque ouvert de (X, d') est un ouvert de (X, d);

3. Chaque fermé de (X, d') est un fermé de (X, d);

4. L'application identité de (X, d) dans (X, d') est continue;

5. Chaque suite qui est convergente dans (X, d) est convergente dans (X, d') et converge vers la même limite. **Voir** [**8**]

Preuve. Pour montrer que (**1**) implique (2) de théorème(2.1.1):

On suppose que (**1**) est vérifié;

Soit U un ouvert dans (X, d') et, soit C l'ensemble de toutes les boules ouvertes de (X, d) qui sont inclu dans U;

Il est claire que $\cup C \subset U$;

Soit maintenant $x \in U$, d'aprés la définition (**1.1.10**) il existe alors une boule ouverte dans (X, d') de centre x inclus dans U;

D'aprés (1) il existe alors une boule ouverte dans (X, d) de centre x inclus dans cette boule donc $x \in \cup C$ ce qui implique $U = \cup \{x\} \subset \cup C$;

ainsi d'aprés le théorème (**1.1.2**) U est ouvert dans (X, d);

et par suite 2 est vérifié.

(**3**) est un conséquence directe de (**2**) (vu la définition (**1.1.11**));

L'équivalence entre (**3**) et (**4**) découle immédiatement du théorème (**1.2.2**)

Dans le but de la démonstration de l'implication de (4) sur (**5**)

Supposons que (x_n) est une suite qui est convergente dans (X, d) de limite z.

Si l'application identité de (X,d) dans (X,d') est continue, alors (x_n) converge vers z dans (X,d'), d'aprés le théorème $(\mathbf{1.2.2})$;

pour montrer que la proposition $(\mathbf{4})$ implique la proposition (5):

Est un résultat immédiatement du théorème $(\mathbf{1.2.2})$. Alors $(\mathbf{4})$ et $(\mathbf{5})$ sont équivalentes;

On suppose que $(\mathbf{4})$ est vérifié, alors on a l'application $f = I_{d,d'}$ est continue;

Soit $\overset{o}{B}(x_0,r)$ une boule ouverte de (X,d');

D'aprés le théorème $(\mathbf{1.2.2})$ $f^{-1}\left(\overset{o}{B}(x_0,r)\right) = \overset{o}{B}(x_0,r)$ est une ouverte dans (X,d);

aussi d'aprés le théorème $(\mathbf{1.1.2})$ $\overset{o}{B}(x_0,r)$ est inclus dans une boule ouverte de même centre;

par suite (1) est vérifié. ■

Du théorème $(\mathbf{2.1.1})$ résulte le corollaire suivant:

Corollaire 2.1.1 *Soient d et d' deux distances sur l'ensemble X. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. d et d' sont topologiquement équivalentes;
2. Les topologies de (X,d) et (X,d') sont identiques;
3. Tout fermés de (X,d) est fermé dans (X,d');
4. L'application identité de (X,d) dans (X,d') de (X,d') dans (X,d) sont continues;
5. Chaque suite convergente de (X,d) est convergente dans (X,d') et converge vers la même limite.

Théorème 2.1.2 *Supposons que X est un ensemble. L'équivalence topologique est une relation d'équivalence dans l'ensemble de toutes les distances sur X.* **Voir** [**8**]

Preuve. Il est claire que l'équivalence topologique est réflexive, symétrique;

donc il suffit démontrer qu'elle est transitive:

Supposons que d, d', d'' sont des distances sur X, et que d est topologiquement plus fine que d' et d' est topologiquement plus fine que d''. Donc l'application identité

$$I_{d,d'} : (X,d) \to (X,d')$$

et $I_{d',d''} : (X, d') \to (X, d'')$ sont des applications continues, alors leur composition est aussi continue d'aprés le théorème (**1.2.5**) ce que signifie que d est topologiquement plus fine que d'', le même, si d est topologiquement moins fine que d' et d' est topologiquement moins fine que d". Alors d est topologiquement moins fine que d''; donc l'équivalence topologique est transitive;

Donc l'équivalence topologique est une relation d'équivalence. ■

2.1.2 Les caractères présèrvés par l'équivalence topologique

Théorème 2.1.3 *X est un ensemble, et d, d' sont deux distances sur X. Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

1.Chaque application de X dans un espace métrique qui est continue par rapport à d' est continue par rapport à d, l'espace de retour est supposé muni de la même distance.

2.Chaque application d'un espace métrique dans X qui est continue par rapport à d est continue par rapport à d', l'espace de départ est supposé muni de la même distance.**Voir** [**8**]

Preuve. Soit W est un espace métrique.

1.On suppose que (**1**) est vérifié; $f : (W, \delta) \to X$ une application est continue par rapport à d;

Soit l'application I:$(X, d') \to (X, d')$ est continue;

ainsi d'aprés (**1**) (avec $(W, \delta) = (X, d')$), l'application I':$(X, d) \to (X, d')$ est continue;

par suite, d'aprés le théorème (**1.2.1**) l'application $I' \circ f \; (W, \delta) \to (X, d')$ est continue;

donc f est continue par rapport à d';

2.On suppose que (**2**) est vérifié;

$f : X \to (W, \delta)$ une application est continue par rapport à d';

Soit l'application I:$(X, d) \to (X, d)$ est continue;

ainsi d'aprés (**2**) (avec $(W, \delta) = (X, d)$), l'application I':$(X, d') \to (X, d)$ est continue;

puis, d'aprés le théorème (**1.2.1**) l'application $I' \circ f \; (X, d) \to (W, \delta)$ est continue;

donc f est continue par rapport à d;

Finalement en déduit que (**1**) et (**2**) sont équivalentes. ■

Théorème 2.1.4 *Supposons que (X,d); (X,d') des espaces métrique. L'équivalence topologique produisent les mêmes:*

1. Ouverts.
2. Fermés.
3. Sous-ensembles compacts.
4. Sous-ensembles localement compacts.
5. Sous-ensemble connexes.
6. Les mêmes ensembles dense. **Voir** [**8**]

Preuve. (**1**) et (**2**) résultat du théorème (**2.1.1**) ;

(**3**) Il découle immédiatement du théorème (**1.2.7**);

(**4**)Suppose que $x \in S$, puisque S est localement compact par rapport à d, il existe un ouvert O de (S,d) et un sous-ensemble compact K de (S,d) tel que $x \in O \subseteq K$. Donc K est compact sur (X,d) et il existe un ouvert V de (X,d) tel que $O = S \cap V$. D'aprés le théorème (**2.1.1**) l'équivalence topologique préserve l'ouvert et d'aprés l'affirmation (**3**) de ce théorème l'équivalence topologique préserve la compacité. Donc V est un ouvert sur (X,d') et K est un compact sur (X,d') ainsi O est un ouvert dans (S,d') et K étant un sous-ensemble de (X,d') est compact dans (S,d'). Puisque x est arbitraire dans X, il résulte que (S,d') est localememt compact.

(**4**) Il est un résultat immédiatement de le théorème (**1.2.3**);

Supposons que S est dense dans (X,d) et O est ouvert dans (X,d'). Alors O est ouvert dans (X,d) d'aprés (**1**). Ainsi $S \cap U \neq \phi$ d'aprés le théorème (**1.1.3**) et puisque O est un ouvert arbitraire de (X,d'), S est dense (X,d') l'inverse est prouvé de la même manière. ∎

2.2 Equivalence uniforme

2.2.1 Définitions et propriètés équivalentes

Définition 2.2.1 *On suppose que X est un ensemble, d et d' sont deux distances sur X. On dit que d est uniformément plus fine que d' et d'est uniformément moins fine que d si, et seulement si, $I_d : (X, d) \to (X', d')$ est uniformément continue. Alors d et d' sont uniformément équivalentes.*

Théorème 2.2.1 *X est un ensemble. L'équivalence uniforme des distances est une relation d'équivalence en X.* **Voir** [8]

Preuve. Il est claire que l'équivalence uniforme est réflexive et symétrique;

donc il suffit démontrer qu'elle est transitive:

Soient d, d' et d'' des distances sur X; d est uniformément plus fine que d'et d' est uniformément plus fine que d''. Les applications identité suivantes $I_{d,d'} : (X, d) \to (X, d')$ et $I_{d',d''}(X, d') \to (X, d'')$ sont uniformément continue.d'aprés le théorème (**1.2.5**)

$$I_{d,d'} \circ I_{d',d''}(X, d) \to (X, d'')$$

est uniformément continue, donc l'équivalence uniforme est transitive.

donc l'équivalence uniforme est une relation d'équivalence· ■

2.2.2 Relations avec l'équivalence topologique

Théorème 2.2.2 *Soient X est un ensemble, d et d' des distances en X. La topologie induite muni par les distances d et d' :*

1) Si d est uniformément plus fine que d', donc d est topologiquement plus fine que d'.

2) Si d et d' sont uniformément équivalentes, donc elles sont topologiquement équivalentes. **Voir** [10]

Preuve. **1**)Si d est uniformément plus fine que d', alors l'application identité $I_{d,d'}$: $(X, d) \to (X, d')$ est uniformément continue alors il est continue. donc d est topologiquement plus fine que d'.

2) Si d et d' sont uniformément équivalentes, alors d est uniformément plus fine que d'.

D'aprés (1) d est topologiquement plus fine que d', donc elles sont topologiquement équivalentes. ■

Corollaire 2.2.1 *Ainsi on déduit du théorème* (**2.2.5**) *que: l'équivalence uniforme préserve les mêmes caractères préservé par l'équivalence topologique.*

Remarque 2.2.1 *Soient X un ensemble, d et d' deux distances dans X. d et d' sont topologiquement équivalentes n'implique pas qu'ils sont uniformément équivalentes.*

Exemple 2.2.1 *Soient $d(x,y) = |x-y|$ et $d'(x,y) = |x^3 - y^3|$ des distances.*

On montre que d et d' sont topologiquement équivalentes:

Nous établissons tout d'abord l'encadrement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 1/2(x^2+y^2)\,|x-y| \leq \left|x^3-y^3\right| \leq 3/2(x^2+y^2)\,|x-y| \tag{2.2.1}$$

On écrit

$$\left|x^3-y^3\right| = \left|(x-y)(x^2+xy+y^2)\right| = |x-y|\left|x^2+xy+y^2\right|$$

donc

$$(x^2-|xy|+y^2)\,|x-y| \leq \left|x^3-y^3\right| \leq (x^2+|xy|+y^2)\,|x-y|$$

comme on sait que $|xy| \leq 1/2(x^2+y^2)$, on obtient le résultat.

Supposons maintenant que O est un ouvert pour d, alors

$$\forall x \in O, \exists r > 0 \text{ tel que } \overset{o}{B}_d(x,r) =]x-r, x+r[\subset O$$

Si $x = 0$ alors la boule de rayon δ de centre x pour d' est exactement

$$\mathring{B}_{d'}(x,\delta) = \left]-\delta^{1/3}, \delta^{1/3}\right[$$

Donc, en prenant $\delta = r^3$, on obtient que $\mathring{B}_{d'}(x,\delta) \subset O$.

Si maintenant $x \neq 0$; alors (2.2.1) implique que $|x-y| \leq 2\left|x^3-y^3\right|/x^2$, donc

$$\mathring{B}_{d'}(x, rx/2) \subset B_d(x,r) \subset O$$

Ainsi, O est également un ouvert pour d'.

Réciproquement, si O est un ouvert pour d', alors

$$\forall x \in O, \exists r > 0 \text{ tel que } \mathring{B}_{d'}(x,r) \subset U$$

Si $x = 0$,alors

$$B_0^{d'}(x,r) = \left]-r^{1/3}, r^{1/3}\right[= B_d(x, r^{1/3})$$

donc $\mathring{B}_d(x, r^{1/3}) \subset O$. Si $x \neq 0$, alors l'inégalité (2.2.1) implique que

$\forall \delta > 0$ et $\forall y$ tel que

$$|x-y| < \delta,\ \left|x^3-y^3\right| \leq 3/2(x^2+(|x|+\delta)^2)\,|x-y| \leq 3/2(x^2+(|x|+\delta)^2)\delta$$

pour $\delta > 0$ assez petit, ce majorant est plus petit que r. Donc

$$\mathring{B}_{d'}(x,\delta) \subset \mathring{B}_d(x,r) \subset O$$

Ainsi, U est un ouvert pour d.on a donc prouvé que d etd' définissent les mêmes ouverts.

Supposons maintenant que d et d' sont uniformément équivalentes. Ceci implique que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-y| < \delta \Rightarrow \left|x^3-y^3\right| < \varepsilon$$

Fixons $y = x + \delta/2$,on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x+\delta/2)^3 - x^3 < \varepsilon$$

or

$$(x+\delta/2)^3 - x^3 = 3/2x^2\delta + 3/4x\delta^2 + 1/8\delta^3 \geq 3/2x^2\delta$$

Ainsi, en prenant $x > 0$, on obtient $\forall x > 0, 3x^2\delta < 2\varepsilon$

ceci est contradictoire, il suffit pour le voir de choisir $x = \sqrt{2\varepsilon/(3\delta)}$.

pour $\delta > 0$ assez petit, ce majorant est plus petit que r. Donc

$$\mathring{B}_{d'}(x,\delta) \subset \mathring{B}_d(x,r) \subset O$$

Ainsi O est un ouvert pour d, on a donc prouvé que d et d' définissent les mêmes ouverts.

Donc d et d' sont topologiquement équivalentes·

Supposons maintenant que d et d' sont uniformément équivalentes

Ceci implique que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \ |x - y| < \delta \Rightarrow \left|x^3 - y^3\right| < \varepsilon$$

Fixons $y = x + \delta/2$,on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x + \delta/2)^3 - x^3 < \varepsilon$$

or

$$(x + \delta/2)^3 - x^3 = 3/2x^2\delta + 3/4x\delta^2 + 1/8\delta^3 \geq 3/2x^2\delta$$

Ainsi, en prenant $x > 0$, on obtient $\forall x > 0, 3x^2\delta < 2\varepsilon$ ceci est contradictoire;

Il suffit pour le voir de choisir $x = \sqrt{2\varepsilon/(3\delta).}$

Donc d et d' ne sont pas uniformément équivalentes.

2.2.3 Caractères préservés par uniformément équivalente

On va spécifier les caractères préservés par uniformément équivalente. En plus (Vu le corollaire (2.2.1) de ceux cités dans les théorèmes (**2.1.3**) , (**2.1.4**)).

Théorème 2.2.3 *Soit* $(X, d), (X', d')$ *deux espaces métriques* $f : X \to X'$ *est uniformément continue alors:*

i) f fait correspondre chaque suite de Cauchy de X sur une suite de Cauchy de X'.

ii) f fait correspondre que sous-ensemble totalement borné de X sur un sous-ensemble totalement borné de X'.

iii) f correspondre que chaque sous-ensemble compact de X sur un sous-ensemble compact de X'.**voir** [8]

Preuve. **i**) On suppose que (x_n) est suite de Cauchy dans (X, d) ;

Soit $\varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0,\ \forall a,\ b \in X : d(a, b) < \varepsilon \Rightarrow d'(f(a), f(b)) < \delta;$

Puisque que (x_n) est suite de Cauchy, il existe une boule ouverte de X de rayon inférieur à $\delta/2$;

(d'aprés la proposition (**1.1.1**)) ainsi on a:

$$\exists x \in X,\ \forall m \in \mathbb{N}^* \ \{x_n | n \in \mathbb{N} : n \geq m\} \subset \mathring{B}_d\left(x, \delta/2\right)$$

Alors

$$f\left(\{x_n | n \in \mathbb{N} : n \geq m\}\right) = \{f\left(x_n\right) | n \in \mathbb{N} :\ n \geq m\} \subset f\left(\mathring{B}_d\left(x, \delta/2\right)\right) \tag{2.2.2}$$

puisque

$$\forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_d\left(x, \delta/2\right) : d\left(x_1, x_2\right) \leq d\left(x_1, x\right) + d\left(x, x_2\right) \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

par suite

$$\forall y_1 = f\left(x_1\right), y_2 = f\left(x_2\right) \in f\left(\mathring{B}_d\left(x, \delta/2\right)\right) : d'(y_1, y_2) \leq \varepsilon$$

Donc il existe une boule ouverte $\mathring{B}_{d'}\left(z, \varepsilon\right)$ dans (X', d') telle que

$$f\left(\mathring{B}_d\left(x, \delta/2\right)\right) \subset \mathring{B}_{d'}\left(z, \varepsilon\right) \tag{2.2.3}$$

d'aprés (2.2.2) et (**2.2.3**) $\{f\left(x_n\right) | n \in \mathbb{N} : n \geq m\} \subset \mathring{B}_{d'}\left(z, \varepsilon\right)$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$;

Donc d'aprés la proposition (**1.1.1**) $f\left(x_n\right)$ est une suite de Cauchy.

ii) On suppose que S est sous-ensemble totalement borné en X.

Soit (y_n) une suite dans $f(S), \forall n \in \mathbb{N}$: l'ensemble $S \cap f^{-1}(\{y_n\})$ de X non vide. On choisit une suite (x_n) avec $x_n \in S \cap f^{-1}(\{y_n\})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $f\left(x_n\right) = (y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

D'aprés le théorème (**1.1.7**), (x_n) admet une sous-suite de Cauchy (x_{m_n});

Donc d'aprés (**i**), $f\left(x_{m_n}\right)$ qu'on note (y_{m_n}) est une sous-suite de Cauchy de (y_n);

Puisque (y_n) est une suite arbitraire de $f\left(S\right)$, (**ii**) découle du théorème(**1.1.7**)

iii) On suppose que S est compact, S est borné et admet un point $s \in S$, $\forall z \in X$ telle que $d(z, s) = d(z, S)$ d'aprés la remarque (1.1.3);

donc d'aprés le théorème (1.1.8) S est totalement borné d'où $f(S)$ est totalement borné (d'aprés (**ii**)) et par suite S est borné;

Soit (y_n) une suite arbitraire en $f(S)$, et (on utilise les mêmes étapes dans (**ii**)), on choisit une suite (x_n) dans S telle que $f(x_n) = (y_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

maintenant x_n est borné parce que S est borné;

donc d'aprés le théorème $(\mathbf{1.1.8})$ il existe une sous-suite de (x_n) convergente, l'image: f de cette sous-suite est donc sous-suite convergente de (y_n), d'aprés le théorème $(\mathbf{1.2.2})$, puisque f est continue d'aprés le théorème $(\mathbf{1.2.5})$ puisque (y_n) est arbitraire en $f(X)$. Cela signifie que $f(X)$ satisfait d'aprés le théorème $(\mathbf{1.1.8})$ et il admet par suite un point $s \in f(S)$, $\forall z \in X$ telle que $d(z,s) = d(z, f(S))$ donc $f(X)$ est compact d'aprés la remarque $(\mathbf{1.1.2})$. ■

Théorème 2.2.4 *Supposons que X est un ensemble et d, d' sont des distances uniformément équivalentes sur X. alors (X,d) et (X,d') admettent les mêmes:*

1. Suites de Cauchy.

2. Ensembles totallement borné.

3. Ensembles complets.

4. Application uniforemément continue d'espace métrique (W,δ) dans (X,d').

5. Application uniforemément continue d'espace métrique (X,d) dans (W,δ). **Voir** [8]

Preuve. Les conditions $(\mathbf{1}), (\mathbf{2})$ découlent immédiatement du théoréme $(\mathbf{2.2.3})$;

3) Soit X est un ensemble complet par rapport à d l'équivalence uniforme admet les mêmes suites convergente et les mêmes suites de Cauchy. Ainsi le résultat découle du théorème $(\mathbf{1.2.8})$

4) $f : (W,\delta) \to X$ une application est uniformément continue par rapport à d;

Soit l'application I:$(X,d') \to (X,d')$ est uniformément continue;

et (avec $(W,\delta) = (X,d')$), l'application I':$(X,d) \to (X,d')$ est uniformément continue;

par suite, d'aprés le théorème $(\mathbf{1.2.5})$ l'application $I' \circ f\ (W,\delta) \to (X,d')$ est uniformément continue;

donc f est uniformément continue par rapport à d';

5)Soit $f : X \to (W,\delta)$ une application est uniformément continue par rapport à d';

(avec $(W,\delta) = (X,d)$) l'application I':$(X,d') \to (X,d)$ est uniformément continue;

puis, d'aprés le théorème (**1.2.5**) l'application $I' \circ f\ (X,d) \to (W,\delta)$ est uniformément continue;

donc f est uniformément continue par rapport à d; ■

2.3 Equivalence Lipschitzienne

2.3.1 Définitions et propriètés équivalentes

Définition 2.3.1 *Soient X est un ensemble, d et $d^{'}$ des distances sur X.*

.On dit que d est Lipschitzienne plus fine que d', et d' est Lipschitzienne moins fine que d.si,et seulement si l'application identité de (X,d) dans $(X',d^{'})$ est une application Lipschitzienne.

.On dit que d et d' sont Lipschitz-équivalentes si, et seulement si chacune de d et $d^{'}$ est Lipschitzienne plus fine que l'autre.

Remarque 2.3.1 *On peut définir l'équivalence Lipschitzienne par un autre façon:*

Il existe deux constantes $M \geq m > 0$ telle que

$$md(x,y) \leq d'(x,y) \leq Md(x,y),\ \forall x,y \in X$$

et on dit que d et d' sont Lipschitz-équivalentes.

Théorème 2.3.1 *Soit X un ensemble. L'équivalence Lipschitzienne est une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les distances sur X.* **Voir** [**8**]

Preuve. Il est claire que l'équivalence Lipschitzienne est réflexive, symétrique;

donc il suffit démontrer qu'elle est transitive:

Supposons que d, d' et d'' sont des distances sur X, soient les applications identités suivantes: $I_{d,d'} : (X,d) \to (X,d'')$ et $I_{d',d''} : (X,d') \to (X,d'')$ sont des applications Lipschitzienne, alors d'aprés le théorème (**1.2.9**) leur composition: $I_{d,d''} : (X,d) \to (X,d'')$ est aussi Lipschitzienne; donc l'équivalence Lipschitzienne est transitive·

Donc l'équivalence Lipschitzienne est une relation d'équivalence. ■

Théorème 2.3.2 *Supposons que X est un ensemble, d et d' des distances sur X. Supposons que d est Lipschitzienne plus fine d', alors chaque ensemble borné de (X, d) est borné dans (X, d').* **Voir** [10]

Preuve. Soit $k \in \mathbb{R}^+$, tel que $d'(a, b) \leq k\ d(a, b)$; pour tout $a, b \in X$.

Supposons que A est ensemble de X bornée en (X, d). Puis, pour chaque $a, b \in A$, nous avons $d'(a, b) \leq k\ d(a, b) \leq k\ diam_d(A) < \infty$, de sorte que A est bornée en (X, d'). ■

2.3.2 Relations avec l'équivalence uniforme

Théorème 2.3.3 *Supposons que X est un ensemble, d et $d\prime$ des distances sur X.*

1) Si d est Lipschitzienne plus fine que d', alors d est uniformément plus fine que d'.

2) Si d et $d\prime$ sont Lipschitz-équivalentes, alors elles sont uniformément équivalentes. **Voir** [10]

Preuve. 1) On suppose que d est Lipschitzienne plus fine que d',et soit $k \in \mathbb{R}^+$ telle que $d'(a, b) \leq kd(a, b)$ pour toute $a, b \in X$.

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \varepsilon/k$ alors, pour toute $a, b \in X$ et $d(a, b) < \delta$,on a $d'(a, b) \leq k\delta = \varepsilon$. Donc d est uniformément plus fine que d'.

2) Supposons que d et d' sont Lipschitz-équivalentes, alors d'aprés (**1**) d et d' sont uniformément équivalentes. ■

Remarque 2.3.2 *Soient X un ensemble, d et d' des distances sur X. d et d' sont uniformément équivalentes, mais pas Lipschitz-équivalentes.*

Exemple 2.3.1 *On a d et d' des distances, d et d' sont uniformément équivalentes:*

On prouver que I est uniformément continue, donc que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \text{tel que } |x - y| < \delta \Rightarrow \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} < \varepsilon$$

il suffit pour cela de choisir $\delta = \varepsilon$.En effect, on a alors, si $|x - y| < \delta = \varepsilon$,

$$\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} < \frac{\varepsilon}{1 + |x - y|} \leq \varepsilon$$

Pour démontrer que la réciproque de I est uniformément continue, on doit prouver que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \text{tel que } \frac{|x-y|}{1+|x-y|} < \delta \Rightarrow |x-y| < \varepsilon$$

Pour cela, on choisit $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{2})$.on a alors, si $d'(x,y) < \delta$

$$|x-y| < \delta(1+|x-y|) \leq \frac{\epsilon}{2}(1+|x-y|) \leq \frac{\varepsilon}{2}(1+1) = \varepsilon$$

Supposons maintenant que d et d' sont Lipschitz-équivalentes. Alors $\exists M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ |x-y| \leq M\frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

On fixe alors $y = 0$, et on obtient alors que $|x|\,(1+|x|) \leq M\,|x|$, donc

$$\forall x > 0, 1 + x \leq M$$

Ce qui est contradictoire (on peut par exemple prendre $x = M$). Donc d et $d\prime$ ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

2.3.3 Caractères préservés par l'équivalence Lipschitzienne

Théorème 2.3.4 *Supposons que X est un ensemble, d et d' sont des distances Lipschitzienne sur X. Alors (X,d) et (X,d') admettent les mêmes:*

$i)$ Sous-ensemble S qui possède la propiété suivante:

X admet un point x vérifie: $\forall s \in S\ d(x,s) = d(x,S)$.

$ii)$ Application Lipschitzienne d'espace métrique (W,δ) dans (X,d').

$iii)$ Application Lipschitzienne d'espace métrique (X,d) dans (W,δ) .**Voir** [10]

Preuve. **i**) il est claire d'aprés le théoréme (**1.1.8**).

ii) et **iii**) se démontre de la même façon interprété dans le cas de l'équivalence uniforme.

■

Chapitre 3

les types d'équivalences entre les Espaces metriques et normés

Et pour ce dernier chapitre, nous allons premièrement examiné l'équivalence des normes comme un cas particulier des équivalences cités dans le deuxième chapitre. Ensuite, nous allons travaillé sur les différents types d'équivalences entre les espaces métriques.

Enfin, nous avons cité quelques exemples appliqués afin de montrer la relation entre ces types d'équivalences.

3.1 Equivalence des normes

Définition 3.1.1 *Soient X est un espace vectoriel normé muni de deux normes $\|.\|$, $\|.\|'$, d et d' les distances induites par ces normes respectivement:*

On dit que $\|.\|$, $\|.\|'$ sont topologiquement (uniformément, Lipschitzienne respectivement) équivalentes si, et seulement si, les distances d, d' sont topologiquement (uniformément, Lipschitzienne respectivement) équivalentes.

Théorème 3.1.1 *On suppose que X est un espace vectoriel normé. Deux normes sont topologiquement équivalentes si, et seulement si, elles sont Lipschitz-équivalentes.* **Voir** [8]

Preuve. Si les normes sont topologiquement équivalentes alors il existe deux applications identité sont continue depuis que l'identités sont linéaire et d'aprés le théorème(**1.3.1**) alors les deux applications sont Lipschitzienne;

Si les normes sont Lipschitz-équivalents alors elles sont uniformément équivalentes et topologiquement équivalentes. ■

Remarque 3.1.1 *Vu le théorème* (**3.1.1**), *les différents types d'équivalences entre les normes sont confondu, et par suite, on ne parle que de deux normes équivalentes (non topologiquement ou uniformément ou Lipschizienne équivalentes).*

Théorème 3.1.2 *Soit X un espace vectoriel normé de dimension finie tout les normes sur X sont équivalentes*·**voir** [5]

Preuve. Soit S une base de X, chaque vecteur V de X est représenté uniquement comme une somme $\sum\limits_{s\in S} \lambda_{v,s} s$ pour certains scalaire $\lambda_{v,s}$ vérifie que l'application

$$v \longmapsto \sum_{s\in S} |\lambda_{v,s}|$$

est une norme sur$X$. qu'on note par $\|.\|_1$:

i)

$$\forall \lambda \in X \;\; \|\lambda\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0_E$$

$$\|\cdot\|_1 = \sum_{s\in S} |\lambda_{v,s}| = 0 \Leftrightarrow |\lambda_{v,s}| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0;$$

ii)

$$\forall \lambda \in X \; \forall \alpha \in K \; \|\alpha\lambda\|_1 = |\alpha| \, \|\lambda\|_1$$

$$\|\alpha\lambda\|_1 = \sum_{s\in S} |\alpha\lambda_{v,s}| = \sum_{s\in S} |\alpha| \, |\lambda_{v,s}| = |\alpha| \sum_{s\in S} |\lambda_{v,s}| = |\alpha| \, \|\lambda_{v,s}\|_1$$

iii)

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in X^2 \;\; \|\lambda_1 + \lambda_2\|_1 \leq \|\lambda_1\|_1 + \|\lambda_2\|_1$$

$$\|\lambda_1 + \lambda_2\|_1 = \sum_{s\in S} |\lambda_1 + \lambda_2| \leq \sum_{s\in S} (|\lambda_{1v,s}| + |\lambda_{2v,s}|)$$

$$\leq \sum_{s\in S}(\left|\lambda_{1_{v,s}}\right| + \sum_{s\in S}\left|\lambda_{2_{v,s}}\right|)$$

$$\leq \|\lambda_1\|_1 + \|\lambda_2\|_1$$

Donc $\|.\|_s$ est une norme.

On suppose $\|.\|$ est une norme sur X.l'ensemble $\{\|S\|_1, s \in S\}$ est fini et a un élément maximum;

Soit m le maximum de cet ensemble, par l'inégalité triangulaire de $\|.\|$ pour chaque $v \in X$ on a:

$$\|v\|_1 = \left\|\sum_{s\in S}\lambda_{v,s}S\right\|_1 \leq m\sum_{s\in S}|\lambda_{v,s}| = m\|v\|_1$$

donc $\|.\|_s$ est Lipschitzienne plus fine que $\|.\|$ et $\|.\| : (X, \|.\|_1) \to \mathbb{R}^+$ est Lipschitzienne alors continue;

Soit $C = \{x \in X \backslash \|x\|_1 = 1\}$ est fermé parce qu'elle est le frontière de boule d'unité de $(X, \|.\|_1)$ donc elle est compact d'après (le théorème $(\mathbf{1.1.10}), (\mathbf{1.1.9})$) alors d'après le théorème $(\mathbf{1.2.7})$ l'ensemble$\{\|x\|; x \in C\}$ est compact dans $\mathbb{R}^+$. Il ne contient pas 0; donc il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $k \leq \|x\|$ pour tout $x \in C$ il est résultat des propriétés des normes que

$$\|v\|_1 \leq k^{-1}\|v\| \, \forall v \in X$$

Depuis que $\|.\|_1$ est moins fine que $\|.\|$ donc ces normes arbitraire sur X .il est résultat de (théorème $\mathbf{2.3.1}$) que toutes les normes sur X sont équivalentes. ■

3.2 Les types d'équivalences entre les Espaces Metriques

3.2.1 Equivalence topologique

Définition 3.2.1 *On dit que (X, d) et (X', d') sont homéomorphes ou topologiquement équivalentes si, et seulement s'il existe une application bijective $f : X \longrightarrow X'$ qui est continue et possède inverse continue, une telle application est appellée un homéomorphisme.*

Théorème 3.2.1 *On suppose que* (X, d)*et* (X', d') *sont des espaces métriques.*

Si X et X' sont homéomorphes, alors tout homéomorphisme entre eux préservent:

1. Les ouvets.
2. Les fermés.
3. Les ensembles denses.
4. Les ensembles connexes.
5. Les suites convergentes et leur limites.
6. Les applications continues.**voir** [10]

Preuve. Puisque toutes les caractères cités dans le théorème sont definies par les ouverts, il suffit de montrer que l'homéomorphisme préserve les ouverts.

En effet, si O est un ouvert de (X, d) alors l'image de O par f, qu'on note par U est $U = (f^{-1})^{-1}(O)$;

C'est à dire l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, il est donc ouvert d'aprés le théorème $(\mathbf{1.2.2})$ ■

3.2.2 Equivalence uniforme

Définition 3.2.2 *soient* (X, d) *et* (X', d') *deux espaces métriques*

On dit que (X, d), (X', d') sont uniformément équivalentes si, et seulement s'il existe une application bijective $f : X \to X'$ appelée équivalence uniforme que f est uniformément continue ainsi que son inverse.

Remarque 3.2.1 *D'aprés que l'application uniformement continue implique qu'il est continue, donc on a que tout les caractères préservés par l'équivalente topologique est préservés par l'équivalence uniforme.*

Vu la remarque $(\mathbf{3.2.1})$,on va cité les caractères préservés par l'équivalence uniforme, en plus de ceux énnoncé dans le théorème $(\mathbf{3.2.2})$, dont la démonstration resemble à celle du théorème $(\mathbf{2.2.3})$.

Théorème 3.2.2 *Supposons que* (X, d) *et* (X, d') *sont deux espaces métriques uniformément équivalentes· Alors* (X, d) *et* (X', d') *admettent les mêmes:*

1. Suites de Cauchy.
2. Ensembles totalement bornées.
3. Sous-espaces complet.
4. Applications uniformément continue·**voir** [8]

3.2.3 Equivalence Lipschitzienne

Définition 3.2.3 *Supposons que* (X, d) *et* (X', d') *sont deux espaces métriques;*

On dit que (X, d), (X', d') sont Lipschitz-équivalentes si,et seulement s'il existe une application bijective $f : X \to X'$ telle que f et f^{-1} sont des applications Lipschitzienne·

Remarque 3.2.2 *D'aprés que l'application Lipschitzienne implique qu'il est uniformément continue, donc on a que tout les caractères préservés par l'équivalence uniforme est présèrvés par l'équivalence Lipschitzienne.*

Vu la remarque (**3.2.2**),on va cité les caractères préservés par l'équivalence uniforme, en plus de ceux énnoncé dans le théorème (**3.2.3**), dont la démonstration resemble à celle du théorème (**2.3.4**).

Théorème 3.2.3 (X, d) *et* (X, d') *sont deux espaces métriques; L'équivalence Lipschitzienne entre* (X, d) *et* (X, d') *préservent les affirmations suivantes:*

1. Sous-ensemble S qui possède la propiété suivante:

   X admet un point x vérifie: $\forall s \in S \; d(x, s) = d(x, S)$.

1. Les ensembles bornées.
2. Les applications Lipschitzienne·**voir** [10]

Remarque 3.2.3 *Soient* (X, d) *et* (X, d') *deux espaces métriques;*

Les differentes types d'équivalence entre les distances sont des cas particulièr de l'équivalence entre les espaces métriques ·

3.3 Les exemples de l'équivalence des distances

Exemple 3.3.1 *Soit* $X =]0, +\infty[$. *On définit deux distances sur* X *par:*

$$d(x, y) = |x - y| \;\; et \; d'(x, y) = |1/x - 1/y|$$

On affirme que les deux distances sont topologiquement équivalentes.

En fait, on devrait montrer que l'application $f = I_d : (X, d) \to (X', d')$ est continue en tout point $a \in X$,

or ceci est vérifié puisque l'application $x \longmapsto 1/x$ est continue en a, ce qui s'écrit:

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \delta > 0, \forall x > 0 : \;\; |x - a| < \delta \Longrightarrow |1/x - 1/a| < \varepsilon$$

Pour ce qui est de la continuité de l'application inverse:

$f^{-1} = I_d : (X, d\prime) \longrightarrow (X, d)$, remarquons que l'application $x \longmapsto 1/x$ est continue en $1/a$, ce qui s'écrit:

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \rho > 0, \;\; \forall x > 0 : \;\; |x - 1/a| < \rho \Longrightarrow |1/x - a| < \varepsilon$$

En posant $t = 1/x$

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \rho > 0, \;\; \forall t > 0 : \;\; |1/t - 1/a| < \rho \Longrightarrow |t - a| < \varepsilon$$

D'òu, la continuité de l'application inverse $f^{-1} = I_d : (X, d') \to (X, d)$.

Exemple 3.3.2 *Soit* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *tel que* $\phi(t) = \min(1, t)$,

$$0 \le d(x, y) \le 1 \tag{3.3.1}$$

Soient d et d' des distances sur X, avec $d' = \phi \circ d$;

On montre que d et d' sont uniformément équivalentes;

Montrons que $I_{d,d'}$ est continue uniformément:

$$\forall r > 0 \exists s > 0 \text{ tel que } d'(x, y) < s \Rightarrow \phi \circ d\,(x, y) < s \Rightarrow \min(1, d(x, y)) < s \Rightarrow d(x, y) < s = r$$

Aprés on montre que la réciproque de $I_{d,d'}$ est uniformément continue;
On a d'aprés(3.3.1) $d'(x,y) = \min(1, d(x,y) = d(x,y)$

$$\forall r' > 0 \exists s' > 0 \text{ tel que } d(x,y) < s' \Rightarrow \min(1, d(x,y)) < s' \Rightarrow d(x,y) < s' = r'$$

Donc d et d' sont uniformément équivalentes·

Exemple 3.3.3 *Soient* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *distances décroissantes: et bornées,* $d(x,y) = \sum 2^{-n} d_n(x,y)$ *distance sur* X.

On montre que d et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont Lipschitz-équivalentes:
Supposons que n fixée de $\mathbb{N}$, alors

$$d(x,y) = 2^{-n} d_n(x,y) + \sum 2^{-k} d_k(x,y)$$

de sorte que

$$2^{-n} d_n(x,y) \leq d(x,y)$$

donc

$$d_n(x,y) \leq 2^n d(x,y) \tag{3.3.2}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{k\leq n} 2^{-k} d_k(x,y) + \sum_{k>n} 2^{-k} d_k(x,y) \\ &\leq \sum_{k\leq n} 2^{-k} \alpha_k d_k(x,y) + \sum_{k>n} 2^{-k} d_k(x,y) \\ &\leq \left(\sum_{k\leq n} 2^{-k} \alpha_k\right) d_n(x,y) + \left(\sum_{k>n} 2^{-k}\right) d_n(x,y) \\ &\leq \left(\sum_{k\leq n} 2^{-k} \alpha_k + \sum_{k>n} 2^{-k}\right) d_n(x,y) \end{aligned}$$

En posant $\beta = \sum_{k \leq n} 2^{-k} \alpha_k + \sum_{k>n} 2^{-k}$ on obtient

$$d(x, y) \ \leq \beta d_n(x, y)$$

$$\Longrightarrow 1/\beta d(x, y) \leq d_n(x, y) \tag{3.3.3}$$

Alors, d'aprés (3.3.2) et (3.3.3) nous déduisons que d et d_n sont Lipschitz-équivalentes.

Bibliographie

[1] **Aziz El Kacimi**: Analyse 5: Topologique métrique; Université de Valenciennes; Valenciennes; 2009-2010.

[**2**] **D.Chatterjee**: Topology general and Algébraic; New Age International(p) Linited Published; New Delhi; 2007.

[**3**] **E.Ramis**: Cours mathématique spéciales; Masson; Paris Milan Barcelone; 1991·

[**4**] **Francis Nier et Dragoş Iftimie**: Introduction à la topologie; Université de Rennes 1; Rennes; 1999.

[**5**] **Gilles Christol et Anne Cot et Charles-Michel Marle**: Topologie; Ellipses; Paris; 1997.

[**6**] **Houcine Chebli et Lotfi Lassoued**: Topologie ; Université Virtuelle de Tunis; Tunis ; 2009.

[**7**] **Jean SAINT RAYMOND**: Topologie et calcul différentiel; Université de Pierre et Marrie Curie; France; 2005.

[**8**] **Rysizard Enelking**: General Topology; Heldermann Verlag Berlin; Berlin; 1989.

[**9**] **Satish Shirali and Harkrishan L.Vasudeva**: Metric Spaces; Spring; London; 2006.

[**10**] **William G. Faris**: Real Analysis; Spring; Arizona; 2006.

Résumé

De ce travail, aprés avoir introduit les différents types d'équivalences entre les distances et les espaces métriques aussi que les espaces normés: équivalence topologique, uniforme et Lipschitzienne, nous allons examiner les caractères préservés par chaque type d'équivalence aussi que la relation entre eux. On terminera ce travail par l'exposition de quelques exemples.

Les mots clé

Espace métrique- espace normé- distance- équivalence Topologique - équivalence Uniforme - équivalence Lipschitzienne.

Abstract

In this work, after having introduced the different types of equivalences between metric spaces and distances as the normed spaces: topological equivalence, uniform and Lipschitz, we will examine the characters preserved by each type of equivalence as the relation between them. This work will be completed by the exposure of a few examples.

The key words

Metric space- normed space- distance- Topological equivalent - Uniform equivalent-Lipchitz-equivalent.

ملخص

في هذا العمل, و بعد تقديم مختلف أنواع التكافؤات بين المسافات و الفضاءات المترية وكذا الفضاءات النظيمية: التكافؤ الطوبولوجي, المنتظم و الليبشتزي, سندرس الخصائص التي يحفظها كل نوع من هذه التكافؤات و العلاقة فيما بينها. كما سيتم إنهاء هذا العمل من خلال التعرض لبعض الأمثلة.

الكلمات المفتاحية

الفضاء المتري- الفضاء النظيمي- المسافة- التكافؤ الطوبولوجي- التكافؤ المنتظم- التكافؤ الليبشتزي.