

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR
-EL OUED-
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES



Mémoire de fin d'étude
MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Problème de Contact Entre Deux Corps
Électro-élastiques avec Adhésion**

Présenté par : Greid Ibtissam
Kordi Souad Rim

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Mesai Aoun Med Saleh	MAA	Président	Univ.El Oued
Said Ameer Meziane	MCB	Rapporteur	Univ.El Oued
Tedjani Hadj Ammar	PROF	Examineur	Univ.El Oued

Année universitaire 2021 – 2022

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, nous remercions à Dieu qui nous donne la force, la volonté et le courage pour accomplir notre humble travail.

*Nous tenons à remercier notre encadreur Dr **Said Ameur Meziane** qui suggérait le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses orientations dès le début jusqu'à la fin de ce travail.*

nous remercions notre collègues qu'ont nous accompagnés en notre voyage d'étude. nous remercions nos parents qui étaient toujours derrière nous et qui ont nos poussé à aller de l'avant, à nos frères, à nos soeurs et à nos professeurs de l'école primaire jusqu'à l'université ainsi qu'à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail

Dédicace :

*Je dédie ce travail à ma grande force dans la vie
de ma mère, mon père, mes frères et ma soeur et
mes amies ...*

Gried ibrissam

*Je dédie ce travail à la source de la force, de la
lumière dans ma vie mon frère Aimen.
Je dédie ce travail à ma grande force dans la vie
de ma mère, mon père, mes frères et mes soeurs
et mes amies ...*

Kordi souad rim

Table des matières

Introduction générale	vi
Notations générales	vii
1 Outils Mathématiques et Modélisation	1
1.1 Outils Mathématiques	1
1.1.1 Contraction	1
1.1.2 Espaces de Hilbert	2
1.1.3 Les espaces $L^p(\Omega)$	3
1.1.4 Espaces de Sobolev	3
1.1.5 Espaces fonctionnels	5
1.1.5.1 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	7
1.1.5.2 Opérateur fortement monotone	7
1.1.5.3 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution	8
1.1.5.4 Sous différentiabilité	10
1.1.5.5 Équation différentielle ordinaire	11
1.1.5.6 Inégalités variationnelle paraboliques	11
1.1.5.7 lemme de Gronwall	11
1.2 Modélisation	13
1.2.1 Cadre physique	13
1.2.1.1 Modèle mathématique	15
1.2.2 Lois de comportements	16
1.2.3 Conditions aux limites	17

1.2.3.1	La condition aux limites de déplacement	17
1.2.3.2	La condition aux limites de traction.	18
1.2.3.3	Les conditions aux limites électriques.	18
1.2.3.4	Conditions aux limites de contact.	18
1.2.3.5	Conditions aux limites de contact de Signorini	19
1.2.3.6	Contact avec compliance normale.	19
1.2.3.7	Contact sans frottement	20
1.2.3.8	Loi de frottement de type Coulomb.	20
1.2.3.9	Lois de contact avec frottement et adhésion	21
2	<i>Problème de Contact Entre Deux Corps Électro- élastiques avec Adhésion</i>	24
2.1	Formulation du problème	24
2.2	Formulation variationnelle	29
2.3	Existence et unicité de la solution	36

Introduction générale

Dans cette mémoire, nous considérons un modèle mathématique dans un processus quasi-statique d'un problème de contact avec compliance normale et adhésion entre deux corps électro-élastiques, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements u^ℓ , les champs des contraintes σ^ℓ , les potentiels électriques φ^ℓ , un champ d'adhésion β , et les champs des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ , avec la loi de comportement électro-élastiques non linéaire. Pour ce problème le contact est modélisé par l'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. En utilisant les formules de Green, on propose une formulation variationnelle au problème électro-mécanique puis nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Les démonstrations sont basées sur des arguments d'inégalités quasi-variationnelles dépendant du temps du type elliptiques, ainsi la théorie des équations d'évolutions du premier ordre avec des opérateurs non linéaires, et de point fixe.

Notations générales

\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels,
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	identiquement égale,
$\partial_i \psi$	dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante x : $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application ψ : $\nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
\mathbb{S}^d	Espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$),
$\text{Div} \psi$	Divergence de l'application, ψ : $\text{Div} \psi = \partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi$,
$(\cdot, \cdot)_X$	Produit scalaire de X,
$\ \cdot \ _X$	Norme de X,
p.p.	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de \mathbb{R}^d ,
$\bar{\Omega}^\ell$	Adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	Frontière de Ω^ℓ : $\Gamma^\ell = \partial \Omega^\ell$,
Γ_i^ℓ	Parties de frontière Γ^ℓ , ($i = 1, 2, 3$),
$mes \Gamma_i^\ell$	Mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
ν^ℓ	Normale unitaire sortante à Γ^ℓ ,
$\nu_\nu^\ell, \nu_\tau^\ell$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel ν^ℓ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot \ _{L^2(\Omega^\ell)}$	Norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell \ _{L^2(\Omega^\ell)} = (\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que, $\exists c > 0 : u^\ell < c$, p.p., sur Ω^ℓ ,

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	Espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	Espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^d$,
H'_{Γ^ℓ}	Espace dual de H_{Γ^ℓ} .
$C([0, T]; H)$	Espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1([0, T]; H)$	Espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p([0, T]; H)$	Espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p([0, T]; H)}$	Norme de $L^p([0, T]; H)$,
$W^{k,p}([0, T]; H)$	Espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}([0, T]; H)}$	Norme de $W^{k,p}([0, T]; H)$,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ Composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	Normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	Composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ ,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
β	Vecteurs d'adhésion sur la surface de contact Γ_3 ,
D^ℓ	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u^\ell)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$.

Chapitre 1

Outils Mathématiques et Modélisation

1.1 Outils Mathématiques

Ce partie est consacré à la disription des espaces utilisés dans cette mémoire.

Nous supposons que Ω^ℓ est un domaine borné et de lipschitzien de \mathbb{R}^d , ($d = 2, 3$), c'est à dire que sa frontière Γ^ℓ est présentable comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} avec une partitions de trois parties mesurables disjointes $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ d'un coté et une partition de $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$, en deux parties ouvertes Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ d'un autre coté, telles que $mes\Gamma_1^\ell > 0$ et $mes\Gamma_a^\ell > 0$.

1.1.1 Contraction

Le principe de contraction de Banach est le résultat le plus élémentaire dans la théorie du point fixe ,qui donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe.

Définition 1.1.1 Soit (X, d) un espace métrique, une application $f : X \longrightarrow X$ si;

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

l'application f est dite :

1. lipschitzienne si $k \geq 0$ (k constante de Lipschitz.)
2. 1- lipschitzienne et non expansive si $k = 1$

3. non expansive si $k \leq 1$,

4. contraction si $0 < k < 1$.

k est dite constante de Lipschitz.

Théorème 1.1.1 Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une contraction avec k sa constante de Lipschitz. Alors f admet un unique point fixe $u \in X$. En outre, pour tout $x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = u \quad , \quad d(f^n(x), u) \leq k^{n-1} d(x, f(x)).$$

1.1.2 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\| \cdot \|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\| u \|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1}$$

et on rappelle que $\| \cdot \|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \| u \|_H \| v \|_H, \quad \forall u, v \in H. \tag{1.2}$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (1.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\| v \|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 1.1.2 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\| \phi \|_{H'} = \| f \|_H .$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

1.1.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.2 (*Espace de Lebesgue*). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. l'ensemble ,
 $L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ lebesgue integrable sur } \Omega\}$.

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable.

Alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par :

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf\{c; |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Théorème 1.1.3 . Pour tout p , les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes ;

- 1) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
- 2) Pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, toute $v \in L^q(\Omega)$ l'inégalité de Hölder est vérifiée ;i.e

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \text{ avec } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

- 3) les espaces $L^2(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $[1, +\infty[$.
- 4) L'espace $L^2(\Omega)$ munit de produit scalaire $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \forall u, v \in L^2(\Omega)$, est un espace de Hilbert.

1.1.4 Espaces de Sobolev

$H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 1.1.4 (Rellich) $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte.

Théorème 1.1.5 (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Définition 1.1.3 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u \}.$$

Remarque 1.1.1 Nous avons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)}^p = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

1.1.5 Espaces fonctionnels

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques \mathbf{u}^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}^\ell$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H^\ell = \{ \mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) ; u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \} = (L^2(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \{ \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) \quad | \quad \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \} = (L_s^2(\Omega^\ell))^{d \times d}, \\ H_1^\ell = \{ \mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) \quad | \quad u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \} = (H^1(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{ \boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}^\ell \quad | \quad \sigma_{ij,j}^\ell \in H^\ell \}. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell v_i^\ell dx \quad | \quad (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell dx, \\ (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H_1^\ell} = (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad | \quad (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \text{Div} \boldsymbol{\tau}^\ell)_{H^\ell}, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell), \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell).$$

Puisque la frontière Γ^ℓ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}^\ell$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation \mathbf{v}^ℓ pour désigner la trace $\gamma \mathbf{v}^\ell$ de \mathbf{v}^ℓ sur Γ^ℓ .

Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1^\ell \rightarrow L^2(\Gamma^\ell)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective.

Désignons par H'_{Γ^ℓ} le dual de H_{Γ^ℓ} et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ} . Pour tout $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ tel que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (1.5)$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ est assez régulier nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell \quad (1.6)$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell, \\ (\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \mathbf{D}^\ell, \psi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi^\ell \in H_1^\ell \end{cases} \quad (1.7)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1^ℓ

$$\mathbf{V}^\ell = \{ \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell \mid \mathbf{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell \}. \quad (1.8)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur \mathbf{V}^ℓ ; alors, il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que

$$\| \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) \|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \| \mathbf{v}^\ell \|_{H_1^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.9)$$

Nous considérons sur l'espace \mathbf{V}^ℓ , le produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{\mathbf{V}^\ell} = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \quad (1.10)$$

et soit $\| \cdot \|_{\mathbf{V}^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\| \mathbf{v}^\ell \|_{\mathbf{V}^\ell} = \| \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) \|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.11)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\| \cdot \|_{H_1^\ell}$ et $\| \cdot \|_{\mathbf{V}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur \mathbf{V}^ℓ et ainsi $(\mathbf{V}^\ell, \| \cdot \|_{\mathbf{V}^\ell})$ est un espace de Hilbert.

De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (1.7) et (1.8), il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\| \mathbf{v}^\ell \|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \| \mathbf{v}^\ell \|_{\mathbf{V}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.12)$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Q} = \{ \beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3 \}. \quad (1.13)$$

On introduit également les espaces suivants :

$$\mathbf{W}^\ell = \{ \boldsymbol{\xi}^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \mid \boldsymbol{\xi}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell \},$$

$$\mathcal{W}^\ell = \{\mathbf{D}^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), D_{i,i}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\},$$

où $\operatorname{div} \mathbf{D}^\ell = (D_{i,i}^\ell)$. Ces espaces \mathbb{W}^ℓ et \mathcal{W}^ℓ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi^\ell, \xi^\ell)_{\mathbb{W}^\ell} = (\nabla \varphi^\ell, \nabla \xi^\ell)_{\mathbb{H}^\ell}, \quad (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathbb{H}^\ell} + (\operatorname{div} \mathbf{D}^\ell, \operatorname{div} \mathbf{E}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad (1.14)$$

soient $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\ell}$ les normes associées ; c'est-à-dire

$$\|\xi^\ell\|_{\mathbb{W}^\ell} = \|\nabla \xi^\ell\|_{\mathbb{H}^\ell}, \quad \|\mathbf{D}^\ell\|_{\mathcal{W}^\ell}^2 = \|\mathbf{D}^\ell\|_{\mathbb{H}^\ell}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{D}^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2. \quad (1.15)$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrich-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\|\nabla \xi^\ell\|_{\mathbb{H}^\ell} \geq c \|\xi^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in \mathbb{W}^\ell. \quad (1.16)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré trouvé dans [5].

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits :

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}^1 \times \mathbb{V}^2, \quad \mathbb{H} = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^2, \quad \mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_1^1 \times \mathbb{H}_1^2,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \quad \mathbb{W} = \mathbb{W}^1 \times \mathbb{W}^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

Nous notons par $C([0, T], X)$ et $C^1([0, T], X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes :

$$\|f\|_{C([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{f}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c([0, T], X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

1.1.5.1 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

1.1.5.2 Opérateur fortement monotone

Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non-linéaire. L'opérateur A est dit

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X; \quad (1.17)$$

(2) fortement monotone si il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X; \quad (1.18)$$

(3) Lipschitzien si il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (1.19)$$

1.1.5.3 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution

Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non-linéaire et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasi-variationnelle suivante :

$$(Au, u - v)_X + j(u, v) + j(u, u) \geq (f, u - v)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.20)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A fortement monotone et Lipschitzien, c'est à dire A , satisfait à (1.17), (1.18) et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X, \\ (b) \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_1) - j(u_1, v_2) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (1.20) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.1.6 *Supposons que les hypothèses (1.18), (1.19), (1.21) sont satisfaites. Alors $\alpha < m$, pour tout $f \in X$, il existe une solution unique $u \in X$ au problème (1.20). La démonstration du Théorème se trouve dans [8].*

Dans le deuxième chapitre dans cette mémour, nous utiliserons un résultat concerne les problèmes du type suivant.

Trouver, $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que

$$(A\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))_X + (Bu(t), v - \dot{u}(t))_X + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X, \quad (1.22)$$

$\forall v \in X, t \in [0, T].$,

$$u(0) = u_0. \quad (1.23)$$

La différence entre le problème (1.20) et le problème (1.21)-(1.22) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps.

Supposons que ;

$$f \in C([0, T], X), \quad (1.24)$$

$$u_0 \in X. \quad (1.25)$$

Théorème 1.1.7 Soient (1.18), (1.19) , (1.21) et (1.24)-(1.25) satisfaites avec l'opérateur non linéaire B soit Lipschitzien. Alors :

1) Il existe unique solution $u \in C^1([0, T]; X)$ au problème (1.22)-(1.23).

2) Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (1.22)-(1.23) correspondantes aux données $f_1, f_2 \in C([0, T]; X)$, alors il existe $c > 0$ tel que ;

$$\| \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \|_X \leq c (\| f_1(t) - f_2(t) \|_X + \| u_1(t) - u_2(t) \|_X) \quad \forall t \in [0, T].$$

Théorème 1.1.8 (Théorème de point fixe de Banach) Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \| \cdot \|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\| \Lambda(u) - \Lambda(v) \|_X \leq c \| u - v \|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$; i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

Définition 1.1.4 Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\| b(u, v) \|_X \leq M \| u \|_X \| v \|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.1.5 Une forme bilinéaire $b : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$b(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 1.1.9 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $b : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercitive.

Soit $l : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait :

$$b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H. \quad (1.26)$$

De plus, si $b(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}b(u, u) - l(u) \leq \frac{1}{2}b(v, v) - l(v), \quad \forall v \in X. \quad (1.27)$$

1.1.5.4 Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous ensemble de l'espace X .

Définition 1.1.6 On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par

$$\Psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Définition 1.1.7 Soit une fonction $j : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u), \forall v \in K\}. \quad (1.28)$$

Le crochet (\cdot, \cdot) désignant la dualité entre X' et X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial\Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide.

$$\partial\Psi_K = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0, \forall v \in K\}. \quad (1.29)$$

1.1.5.5 Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.1.10 (Cauchy-Lipschitz) : Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes : il existe $L_F > 0$ tel que

$$\|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in [0, T];$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}([0, T]; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad p.p. t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

1.1.5.6 Inégalités variationnelles paraboliques

Soit V et H deux espaces de Hilbert tel que V est dense dans H et son injection est continue.

Nous écrivons $V \subset H \subset V'$ et on dit que les inclusions ci-dessus définissent un triple de Gelfand. Nous utilisons $V \times V'$ pour l'appariement de dualité entre V et V' . Notez que si $f \in H$ alors $\langle f, v \rangle_{V \times V'} = (f, v)_H, \quad \forall v \in H$. Ce qui suit est un résultat standard pour les inégalités variationnelles paraboliques.

Théorème 1.1.11 Soit $V \subset H \subset V'$ un triple de Gelfand, soit K un non-vide ensemble fermé et convexe de V . Supposons que $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est continue forme bilinéaire symétrique telle que pour certaines constantes $\alpha > 0$ et c_0 ,

$$a(v, v) + c_0 \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T, H)$, il existe une fonction unique $u \in H^1(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ tel que $u(0) = u_0$ et $u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T]$ et pour presque tout $t \in (0, T)$.

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K.$$

1.1.5.7 lemme de Gronwall

Il est utilisé pour montrer l'unicité de la solution.

Lemme 1.1.1 Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T],$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{at} \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.1.1 Soient $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds + \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient,

Corollaire 1.1.2 Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $a \geq 0$ et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que ;

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds) \quad \forall t \in [0, T],$$

alors.

$$\psi(t) \leq (a) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

1.2 Modélisation

Ce représente un bref rappel de la mécanique où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette mémoire.

1.2.1 Cadre physique

Cadre physique n⁰¹ (Problème mécanique). Nous considérons deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$), avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$, tel que $mes\Gamma_1^\ell > 0$. Nous notons que ν la normale unitaire sortante à Γ^ℓ les corps est encastres sur $\Gamma_1^\ell, \ell = 1, 2$ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité $f_2^\ell, \ell = 1, 2$ et dans Ω^ℓ agissent des forces volumiques de densités $f_0^\ell, \ell = 1, 2$. Nous supposons f_2^ℓ et $f_0^\ell, \ell = 1, 2$ varient très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasi-statique. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question (voir Fig 1.1)

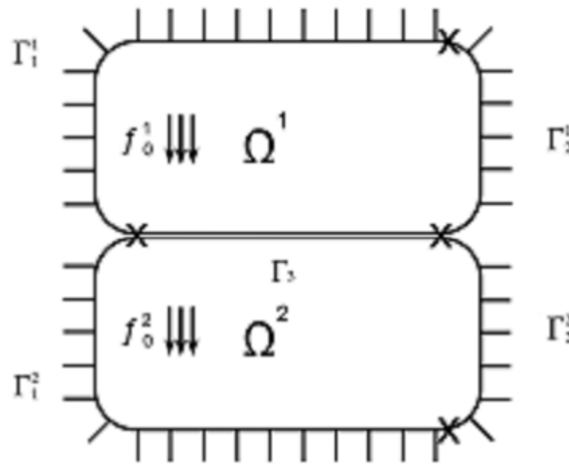


Figure 1.1. Cadre Physique 1

Cadre physique n⁰² (Problème électro-mécanique.)

Inclure ce qui est mentionné dans **Cadre physique n⁰²**

En plus de l'action des forces des tractions, le corps est soumis à l'action des chaleurs électriques de densité volumiques $q_0^\ell, \ell = 1, 2$ et de chaleurs électriques surface. Pour les décrire, nous considérons une partition de la frontière $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ en deux parties mesurables, Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ telles que $mes\Gamma_a^\ell > 0$. Les corps est en contact avec frottant avec

adhésion sur la partie Γ_3^ℓ , le potentiel électrique s'annule sur Γ_a^ℓ , et la charge électrique superficielle de densité q_2^ℓ , $\ell = 1, 2$, est prescrite sur Γ_b^ℓ . La différence entre le cadre physique mécanique et le cadre physique électro-mécanique résulte du fait qu'en ce dernier, nous prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques du corps matériels.

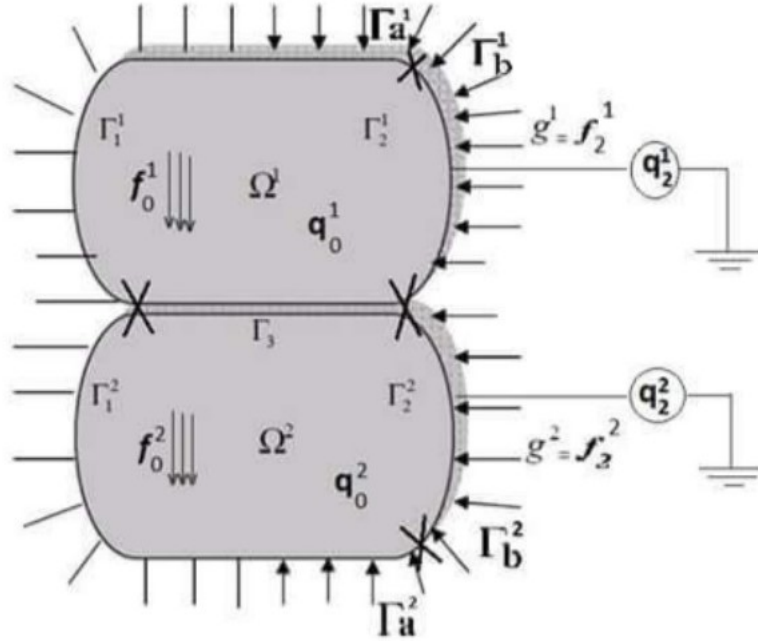


Figure1.2. Cadre Physique 2

Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), " \cdot " et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & \|\mathbf{v}^\ell\| &= (\mathbf{v}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell &= \sigma_i^\ell \cdot \tau_i^\ell, & \|\boldsymbol{\tau}^\ell\| &= (\boldsymbol{\tau}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$, nous notons par v_ν^ℓ et \mathbf{v}_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par :

$$v_\nu^\ell = \mathbf{v}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \mathbf{v}_\tau^\ell = \mathbf{v}^\ell - v_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.30)$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}^\ell(x, t)$, le champ des déplacements et par $\varepsilon(\mathbf{u}^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ nous dénotons par σ_ν^ℓ et σ_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = (\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \sigma_\tau^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell - \sigma_\nu^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.31)$$

En utilisant (1.30) et (1.31), nous obtenons la relation

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \mathbf{v}^\ell = \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell + \sigma_\tau^\ell \cdot \mathbf{v}_\tau^\ell, \quad (1.32)$$

1.2.1.1 Modèle mathématique

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \quad \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2},$$

où \dot{u}^ℓ désigne le champ des vitesses et \ddot{u}^ℓ désigne le champ des accélérations.

\dot{u}^ℓ les notations \dot{u}_ν^ℓ et \dot{u}_τ^ℓ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est à dire $\dot{u}_\nu^\ell = \dot{u}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell$, $\dot{u}_\tau^\ell = \dot{u}^\ell - \dot{u}_\nu^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell$ Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon^\ell(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i^\ell + \partial_i u_j^\ell).$$

Modèle mathématiqueⁿ⁰¹

est décrit l'évolution du corps dans le cadre physique ⁿ⁰¹ (page 13) par l'équation du mouvement de Cauchy :

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.33)$$

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps,

c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell$ peut être négligé (processus quasi statiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient :

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.34)$$

Puisque le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ , le champ des déplacements s'annule

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (1.35)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T). \quad (1.36)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.34)-(1.36) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

Modèle mathématique n^02 . Ce modèle mathématique décrit l'évolution des corps dans le cadre physique n^02 .(page 14). À celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution des corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques :

$$\text{div} \mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.37)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div} \mathbf{D}^\ell = \mathbf{D}_{i,i}^\ell$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ . Rappelons que dans les cadres physiques, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.38)$$

tandis que sur Γ_b^ℓ , une charge électrique de densité q_2^ℓ est prescrite,

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.39)$$

1.2.2 Lois de comportements

Nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique D^ℓ , le champ électrique $E^\ell(\varphi^\ell)$, l'opérateur d'élasticité \mathcal{E}^ℓ , la fonction de viscosité \mathcal{A}^ℓ et la

fonction de relaxation \mathcal{Q}^ℓ ext....

Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ et le vecteur des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{F}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \\ \mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell, \end{cases} \quad (1.40)$$

où \mathcal{F}^ℓ est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur *piézoélectrique* qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul; $\mathcal{B}^\ell = (b_{ij}^\ell)$ est le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif et $\mathbf{E}^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell$, où $\nabla \varphi^\ell = (\varphi_{(.,i)}^\ell)$ représente le champ électrique. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^{\ell,*})$ dénote le transposé du tenseur \mathcal{E}^ℓ , tel que

$$\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{v} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.41)$$

Pour plus des détails sur les lois de comportement (1.40), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [[1], [2]].

1.2.3 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ . (voir Fig.1)

1.2.3.1 La condition aux limites de déplacement

Les Corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements \mathbf{u}^ℓ est par conséquent nul :

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T]. \quad (1.42)$$

1.2.3.2 La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell$ satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T]. \quad (1.43)$$

1.2.3.3 Les conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations :

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.44)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.45)$$

1.2.3.4 Conditions aux limites de contact.

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées condition de frottement. A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (quand le glissement se produit que lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb et de Tresca ; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié. On définit le déplacement normal par relatif d' un corps par rapport à l' autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2, \quad (1.46)$$

et le déplacement tangent par relatif d' un corps par rapport à l' autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[\mathbf{u}_\tau] = \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2. \quad (1.47)$$

. La continuité des contraintes sur l'inter faces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.48)$$

1.2.3.5 Conditions aux limites de contact de Signorini.

La condition de contact *non-pénétration* entre les deux corps est exprimée par la relation suivante :

$$[u_\nu] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (1.49)$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] < 0$, il y' a séparation entre les deux corps. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a :

$$[u_\nu] < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (1.50)$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] = 0$, le contact est maintenu et chaque corps exerce une réaction normale orienté vers l'autre corps et donc nous pouvons écrire

$$[u_\nu] = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (1.51)$$

On dit que le contact entre les deux corps sans frottement si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui traduit par :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (1.52)$$

Pour résumer, les conditions de contact (1.46)-(1.52) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \stackrel{\text{noté}}{\equiv} \sigma_\nu \\ (b) : [u_\nu] \leq 0, \sigma_\nu \leq 0, [u_\nu]\sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \\ (c) : \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.53)$$

Les conditions aux limites de la forme (1.53) sont aussi appelés "*conditions de contact unilatéral*" ou bien "*conditions de contact de Signorini*".

1.2.3.6 Contact avec compliance normale.

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g), \end{array} \right. \quad (1.54)$$

où g représente l'interstice entre les deux corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

Nous considérons l'interstice est nul, $g = 0$. Pour la fonction de compliance normale p_ν , on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.55)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.56)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.54) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

1.2.3.7 Contact sans frottement

Dans un contact sans frottement, l'action mécaniques transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact .

Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle.

1.2.3.8 Loi de frottement de type Coulomb.

Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda [\mathbf{u}_\tau], \end{cases} \quad (1.57)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement .

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.57), par la condition de compliance normale (1.54), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p_\nu([u_\nu] - g), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda[\mathbf{u}_\tau]. \end{cases} \quad (1.58)$$

Dans le chapitre 2 nous utilisons la loi (1.58) avec le cas particulier g , i.e. lorsque l'interstice est nul.

Une version quasi statique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau([u_\nu] - g), \\ [\mathbf{u}_\tau] \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g) \frac{[\mathbf{u}_\tau]}{\|[\mathbf{u}_\tau]\|}, \end{cases} \quad (1.59)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.59), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau([u_\nu] - g)$.

De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers.

1.2.3.9 Lois de contact avec frottement et adhésion

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoie par exemple [4]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.60)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \leq -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.61)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.60) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.60) a été déjà utilisée dans [[3], [7]].

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.60) devient :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.62)$$

qui représente la condition de compliance normale.

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle satisfait la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\mathbf{u}_\tau] \end{array} \right. \quad (1.63)$$

où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement, supposé être positif. $\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est l'opérateur de troncature défini par :

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases} \quad (1.64)$$

Notons que les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.63) ont été considérées dans [6] dans le cas particulier $\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = [\mathbf{u}_\tau]$ et $R_\nu([u_\nu]) = -[u_\nu]$, pour L très

grand.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.65)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.66)$$

Où γ_ν, γ_τ et ϵ_a sont coefficients d'adhérence positifs, et $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, le déplacement tangent relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et β_0 l'adhésion initiale, tel que :

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (1.67)$$

Sous les conditions (1.65)- (1.67), on a la remarque suivante :

Remarque 1.2.1 : *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$, donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.*

Chapitre 2

Problème de Contact Entre Deux Corps

Électro-élastiques avec Adhésion

2.1 Formulation du problème

Nous décrivons le modèle mathématique du processus quasi-statique, nous présentons sa formulation variationnelle, le cadre physique est le suivant : Considérons deux corps électro-élastiques, occupant deux domaines bornés Ω^1, Ω^2 de l'espace \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$). Nous avons mis un super-script ℓ pour indiquer que la quantité est liée au domaine Ω^ℓ , dans ce qui suit l'indice ℓ supérieur est compris entre 1 et 2. Pour chaque domaine Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$), avec une surface frontière régulière Γ^ℓ , partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ , correspondant aux conditions aux limites mécanique, d'un part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ correspondant aux conditions aux limites électrique, d'autre part, telles que $\text{mes } \Gamma_1^\ell > 0$ et $\text{mes } \Gamma_a^\ell > 0$. On note par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Nous noterons par Γ_3^ℓ l'interface de contact du corps Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$); on a $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$, noté par Γ_3 . Le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe et en contact avec frottement, adhésion et compliance normale sur la partie Γ_3 . Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ . De plus, ce milieu est soumis à l'action de potentiel électrique nul sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^ℓ sur la partie Γ_b^ℓ . Nous nous intéressons à l'étude de l'évolution des corps matériels sous l'action des forces volumiques des densités f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0^ℓ . Finalement, Soit T

> 0 et soit $[0, T]$

l'intervalle de temps en question. Nous utilisons une loi de comportement électro-élastique donnés par :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{F}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \quad (2.1)$$

où \mathcal{F}^ℓ est un opérateur non linéaire donné, $E^\ell(\zeta^\ell) = -\nabla \zeta^\ell$ est le champ électrique, \mathcal{E}^ℓ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est sa transposition. Nous présentons par la suite les lois de comportement (2.1), le tenseur de contraintes $\sigma^\ell(t)$ est divisé en deux parties : $\sigma^\ell(t) = \sigma_R^\ell(t) + \sigma_E^\ell(t)$, où $\sigma_R^\ell(t) = \mathcal{F}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t))$ représente la partie purement élastique de la contrainte et $\sigma_E^\ell(t) = (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta^\ell(t)$ représente la partie électrique de la contrainte. Notons qu'il existe le point au-dessus d'une variable représente sa dérivée par rapport au temps t .

Problème \mathcal{P} . Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, les potentiel électrique $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les champs de déplacement électrique $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{F}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.2)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.3)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.4)$$

$$\text{div} \mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T], \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T], \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu]) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]) \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \times [0, T], \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\mathbf{u}_\tau] \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.10)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T], \quad (2.12)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.13)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.14)$$

Les équations (2.2) et (2.3) représentent la loi constitutive électro-élastique, elles font parution dans (1.40), \mathcal{B}^ℓ désigne la permittivité électrique et $\mathbf{D}^\ell = (D_1^\ell, \dots, D_d^\ell)$ est le vecteur de déplacement électrique. Ensuite, les équations (2.4) et (2.5) sont les équations d'équilibre écrites pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, introduits respectivement dans (1.34) et (1.36). Les conditions (2.6) et (2.7) sont les conditions de déplacement-traction. La condition (2.8) décrit le contact avec complaisance normale et adhésion où γ_ν est un coefficient d'adhérence et les conditions (2.9) sont les conditions de frottement et d'adhésion, où les opérateurs de troncation sont donnés par (1.61) et (1.64). L'équation (2.10) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, avec la condition initiale (2.14) où β_0 est un champ d'adhésion donné, tandis que (2.11) et (2.12) représentent les conditions aux limites électriques sur Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ respectivement, que nous avons définies dans (1.44) et (1.45).

On considère maintenant les hypothèses suivantes :

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
(a) \text{ il existe } L_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\
\quad \| \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_2) \| \leq L_{\mathcal{F}^\ell} \| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \|, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\
(b) \text{ il existe } m_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ telle que,} \\
\quad (\mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{F}^\ell} \| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \|^2, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\
(c) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell, \\
\quad \text{pour tout, } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\
(d) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{F}^\ell(x, 0) \in \mathcal{H}^\ell.
\end{array} \right. \tag{2.15}$$

L'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l}
(a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d \\
\text{p.p. } x \in \Omega^\ell, (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d.
\end{array} \right. \tag{2.16}$$

L'opérateur de permittivité $\mathcal{B}^\ell = b_{ij}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l}
(a) \mathcal{B}^\ell(x, \mathbf{E}) = (b_{ij}^\ell(x) E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\
(b) b_{ij}^\ell = b_{ji}^\ell, b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j \leq d, \\
(c) \text{ Il existe } m_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ tel que } b_{ij}^\ell(x) E_i E_j \geq m_{\mathcal{B}^\ell} \| \mathbf{E} \|^2, \\
\quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell.
\end{array} \right. \tag{2.17}$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l}
(a) \text{ il existe } L_\nu > 0 \text{ tels que } |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\
\quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\
(b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\
(c) \text{ l'application } x \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\
(d) p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3.
\end{array} \right. \tag{2.18}$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2)| \leq L_\tau (|r_1 - r_2|) \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) \text{ il existe } m_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r)| \leq m_\tau \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto p_\tau(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto p_\tau(x, 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (2.19)$$

On suppose que les forces volumiques f_0^ℓ et les tractions surfaciques f_2^ℓ , et les charges électriques volumique sont q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont les régularités :

$$f_0^\ell \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad f_2^\ell \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \quad (2.20)$$

$$q_0^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \quad (2.21)$$

$$q_2^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_3, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.22)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ϵ_a satisfont les conditions

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (2.23)$$

tandis que le coefficient de frottement μ vérifie

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (2.24)$$

le champ initial de déplacements satisfait :

$$\mathbf{u}_0^\ell \in V^\ell. \quad (2.25)$$

Finalement, on suppose que le champ initial d'adhésion satisfait :

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.26)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions qu'on utilise dans la suite de ce chapitre.

D'abord, l'application d'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. On définit la fonction $f = (f^1, f^2) : [0, T] \longrightarrow V$ par

$$(f(t), \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \quad (2.27)$$

et la fonction $q = (q^1, q^2) : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \psi)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (2.28)$$

Les conditions (2.20) et (2.21) impliquent

$$f \in W^{1,\infty}([0, T]; V), \quad q \in W^{1,\infty}([0, T]; W). \quad (2.29)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suit $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \cdot [\mathbf{v}_\tau]) da. \quad (2.30)$$

La fonctionnelle de complaisance normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] da, \quad (2.31)$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \parallel [\mathbf{v}_\tau] \parallel da. \quad (2.32)$$

La condition (2.18) entraîne que les intégrales dans (2.31) et (2.32) sont bien définies.

2.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green on voit directement que si \mathbf{u}, φ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.4), (2.6), (2.8) et (2.9) avec (2.30), (2.31) et (2.32) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t))) dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1 (\varepsilon(\mathbf{v}^1) - \varepsilon(\mathbf{u}^1(t))) dx + \int_{\Omega^1} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t)) dx = \int_{\Gamma_1^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t)) da +$$

$$\int_{\Gamma_2^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t)) da + \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^1 \in V^1. \quad (2.33)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2 (\varepsilon(\mathbf{v}^2) - \varepsilon(\mathbf{u}^2(t))) dx + \int_{\Omega^2} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t)) dx = \int_{\Gamma_1^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t)) da + \int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t)) da + \int_{\Gamma_3^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^2 \in V^2. \quad (2.34)$$

à addition (2.33) et (2.34)

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t))) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell,$$

d'après (2.4), et(2.6)-(2.7)on a :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t))) dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

Alors :

$$\sum_{\ell=16}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell,$$

d'après (2.27)

$$(f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da.$$

En suite :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da = ? :$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^1 (\mathbf{v}_\nu^1 - \mathbf{u}_\nu^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 (\mathbf{v}_\nu^2 - \mathbf{u}_\nu^2(t)) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 (\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 (\mathbf{v}_\tau^2 - \mathbf{u}_\tau^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu ([\mathbf{v}_\nu - \mathbf{u}_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da \\ &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da, \end{aligned}$$

alors :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da = \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da. \quad (2.35)$$

Nous supposons que $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$,

où $\Gamma_3^+ = \{x \in \Gamma_3 \mid [\mathbf{u}_\tau] = 0\}$ et $\Gamma_3^- = \{x \in \Gamma_3 \mid [\mathbf{u}_\tau] \neq 0\}$.

Maintenant, en utilisant (2.9).

Pour $[\mathbf{u}_\tau] :$

si $[\mathbf{u}_\tau] = 0$

$$\int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^+} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{u}_\tau\| da,$$

si $[\mathbf{u}_\tau] \neq 0$ a

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\mathbf{u}_\tau] [\mathbf{u}_\tau(t)] da,$$

nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da &= -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \|\mathbf{[u}_\tau]\|^2 da, \\
 &= - \int_{\Gamma_3^-} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \|\mathbf{[u}_\tau]\| da, \\
 &= - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{[u}_\tau]\| da,
 \end{aligned}$$

alors :

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{[u}_\tau]\| da. \quad (2.36)$$

Pour $[\mathbf{v}_\tau]$:

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\mathbf{u}_\tau] [\mathbf{v}_\tau] da,$$

donc

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da \geq -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \|\mathbf{[u}_\tau]\| \|\mathbf{[v}_\tau]\| da \geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{[v}_\tau]\|, \quad (2.37)$$

nous utilisons (2.37) et l'égalité (2.36) pour trouver

$$\int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|\mathbf{[v}_\tau]\| - \|\mathbf{[u}_\tau]\|) da. \quad (2.38)$$

Maintenant, nous utilisons (2.35) et (2.38) pour trouver

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &\geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathbf{V}} - \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\
 &\quad + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|\mathbf{[v}_\tau]\| - \|\mathbf{[u}_\tau]\|) da \\
 &\quad - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da.
 \end{aligned}$$

D'après (2.30)-(2.31) et (2.32), on a

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 &\quad + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \\
 &\quad + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathbf{V}}, \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

et de (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t) \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & \quad + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \\ & \quad + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \end{aligned} \quad (2.40)$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (2.11), (2.5) et la définition (2.28) on a :

$$(\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \mathbf{D}^\ell, \psi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi^\ell \in H_1^\ell, \quad (2.41)$$

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} Div \mathbf{D}^\ell \cdot \psi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.42)$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla \psi^1 dx + \int_{\Omega^1} Div \mathbf{D}^1 \cdot \psi^1 dx = \int_{\Gamma_a^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \psi^1 da + \int_{\Gamma_b^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \psi^1 da, \quad \forall \psi^1 \in H_1^1. \quad (2.43)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla \psi^2 dx + \int_{\Omega^2} Div \mathbf{D}^2 \cdot \psi^2 dx = \int_{\Gamma_a^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \psi^2 da + \int_{\Gamma_b^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \psi^2 da, \quad \forall \psi^2 \in H_1^2. \quad (2.44)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (2.11) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da = 0,$$

à addition (2.43) et (2.44) on a :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} Div \mathbf{D}^\ell \cdot \psi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da.$$

On a d'après (2.5) et (2.12) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \psi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \psi^\ell da, \\ & \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \psi^\ell da = 0. \end{aligned}$$

On a d'après (2.28) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \psi^\ell da = (q(t), \psi)_W.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \psi)_W = 0.$$

De (2.3), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (2.45)$$

De (2.40), (2.14), (2.10) et (2.45), on obtient la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} .

Problème \mathcal{PV} . Trouver les champs de déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow V$, les potentiels électriques $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow W$, et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$, tels que :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \end{aligned}$$

$$+ j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \quad (2.46)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T], \quad (2.47)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([u_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+, \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad (2.48)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (2.49)$$

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} , j_{nc} et j_{fr} qui seront utilisées dans les sections suivantes.

Ci-dessous dans cette section, β, β_1, β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}^\ell$ et \mathbf{v}^ℓ représentent des éléments de V^ℓ , et c est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, p_\nu, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite aux fonctions diverses sur $x^\ell \in \Omega^\ell \cup \Gamma_3$.

D'abord nous faisons remarquer que les fonctionnelles j_{ad} et j_{nc} sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad j_{nc}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (2.50)$$

Ensuite, en utilisant (2.30) et les inégalités,

$$|R_\nu([u_{1\nu}])| \leq L, \quad \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq L, \quad |\beta_1| \leq 1, \quad |\beta_2| \leq 1$$

, nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| da. \quad (2.51)$$

En combinant cette inégalité avec (1.63), nous obtenons

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (2.52)$$

En choisissant $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (2.52), nous trouvons

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0. \quad (2.53)$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzienne des opérateurs R_ν et \mathbf{R}_τ , montrent que :

$$|j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (2.54)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans (2.53), ensuite nous utilisons les égalités $R_\nu(0) = 0$, $\mathbf{R}_\tau(0) = 0$ et (2.52) pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (2.55)$$

Maintenant, nous utilisons (2.31) pour voir que

$$|j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| |[v_\nu]| da, \quad (2.56)$$

ensuite (2.18) et (1.63) impliquent

$$|j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq c_0^2 L_\nu \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (2.57)$$

Nous utilisons encore une fois (2.31), pour obtenir

$$j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \int_{\Gamma_3} (p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])) ([u_{1\nu}] - [u_{2\nu}]) da, \quad (2.58)$$

et alors, (2.18) implique

$$j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \geq 0. \quad (2.59)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans l'inégalité (2.59) et nous utilisons (2.18b) et (2.50) pour obtenir

$$j_{nc}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (2.60)$$

Maintenant, nous utilisons (2.32) pour trouver

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq \int_{\Gamma_3} \mu |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| \| [\mathbf{v}_{1\tau}] - [\mathbf{v}_{2\tau}] \| da. \quad (2.61)$$

Moyennant l'hypothèse (2.18) et gardant en tête (1.40), nous obtenons

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq L_\nu c_0^2 \| \mu \|_{L^\infty(\Gamma_3)} \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_V \| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|_V. \quad (2.62)$$

Les inégalités (2.52)(2.62) combinées avec les égalités (1.40) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste du chapitre.

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **Problème \mathcal{PV}** .

Théorème 2.3.1 .

Supposons que (2.15)-(2.20), (2.23)-(2.26), (2.16)-(2.28) et (1.40) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, \mathcal{F}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et p_ν telle que, si $\| \mu \|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq \mu_0$,

alors le Problème \mathcal{PV} possède une solution unique $(\mathbf{u}, \varphi, \beta)$.

En outre, la solution satisfait ;

$$\mathbf{u} \in W^{1,\infty}([0, T]; V), \quad (2.63)$$

$$\varphi \in W^{1,\infty}([0, T]; W), \quad (2.64)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}. \quad (2.65)$$

Un "quintuple" de fonctions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \beta, \mathbf{D})$ qui satisfait (2.2), (2.3), (2.14)(2.40) est appelée solution faible du problème de contact \mathcal{P} .

Nous concluons par le Théorème (2.3.1) que, sous les hypothèses exposées, le Problème \mathcal{P} possède une solution unique faible. Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que les relations constitutives (2.2) et (2.3), les hypothèses (2.15), (2.16) et (2.27) et les régularités (2.63), (2.64) montrent que ;

$$\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{H}_1),$$

$$\mathbf{D} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{W}_1)$$

il s'ensuit maintenant des régularités (2.20) et (2.21) que

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}([0, T]; H)$$

et

$$\text{div} \mathbf{D} \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega))$$

qui montre que :

$$\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{H}_1), \tag{2.66}$$

$$\mathbf{D} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{W}_1). \tag{2.67}$$

Nous concluons que la solution faible $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \beta, \mathbf{D})$ du problème piézoélectrique de contact avec adhésion et frottement \mathcal{P} possède la régularité (2.63), (2.64), (2.65)(2.67).

Démonstration du Théorème (2.3.1). La démonstration du Théorème (2.3.1) sera effectué dans plusieurs étapes.

A cet effet, nous assumons dans la suite que (2.15)(2.20), (2.23)(2.26) sont satisfaites.

Soit \mathcal{Z} l'ensemble fermé de l'espace $C([0, T]; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\mathcal{Z} = \{\beta \in C([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q} \mid \beta(0) = \beta_0\}, \tag{2.68}$$

et soit $\beta \in \mathcal{Z}$ donné.

Étape i :

Nous fixons $\beta \in \mathcal{Z}$ et nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème \mathcal{PV}^β . Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_\beta = (\mathbf{u}_\beta^1, \mathbf{u}_\beta^2) : [0, T] \rightarrow V$

un potentiel électrique $\varphi_\beta = (\varphi_\beta^1, \varphi_\beta^2) : [0, T] \rightarrow W$ tels que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & \quad + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) \\ & \quad + j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell(t), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (2.70)$$

Pour l'étude de ce problème on a le résultat suivant.

Lemme 2.3.1 *Il existe $\tilde{\mu}_0 > 0$ qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, \mathcal{F}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et p_ν telle que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq \tilde{\mu}_0$, alors le Problème $\mathcal{P}V^\beta$ possède une solution unique. En outre, la solution satisfait $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; V \times W)$.*

Démonstration. Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur $A_\beta(t) : V \rightarrow V$ comme suit :

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v})_V &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}), \quad (2.71) \\ & \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\beta \in \mathcal{Z}$ fixés et soit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$. Nous utilisons (2.71) et l'égalité (2.50) pour trouver

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \\ & \quad j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) - j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Moyennant maintenant (2.15) et les inégalités (2.53) et (2.59), on trouve

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V &\geq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{F}^\ell} \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell}^2 \geq \min(m_{\mathcal{F}^1}, m_{\mathcal{F}^2}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2, \end{aligned}$$

donc

$$(A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2, \quad (2.72)$$

où $m_{\mathcal{F}} = \min(m_{\mathcal{F}^1}, m_{\mathcal{F}^2})$.

Soit $\mathbf{v} \in V$; en utilisant (2.71) nous avons

$$\begin{aligned} (A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}_1^{\ell}) - \mathcal{F}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}_2^{\ell}), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell}))_{\mathcal{H}^{\ell}} + \\ & j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Combinons le égalité précédente avec (2.15b) et les inégalités (2.54)- (2.57), on à

$$\begin{aligned} (A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V &\leq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}_1^{\ell}) - \mathcal{F}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}_2^{\ell}), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell}))_{\mathcal{H}^{\ell}} + c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V \\ &+ L_{\nu}c_0^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \\ &\leq \max(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V \\ &+ L_{\nu}c_0^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \\ &\leq (\max(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}) + L_{\nu}c_0^2 + c) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \end{aligned}$$

d'où

$$(A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V.$$

Mettons ensuite $\mathbf{v} = A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2$ dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\|A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2\|_V \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (2.73)$$

Pour résoudre (2.69) (2.70), nous considérons l'espace produit de Hilbert $V \times W$ muni du produit scalaire

$$(x, y)_X = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + (\varphi, \psi)_W$$

$$\forall x = (\mathbf{u}, \varphi) = ((\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2), (\varphi^1, \varphi^2)), y = (\mathbf{v}, \psi) = ((\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2), (\psi^1, \psi^2)) \in X,$$

et la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Nous définissons l'opérateur : $\tilde{A}_{\beta(t)} : X \rightarrow X$, la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, et l'élément $\mathbf{f}(t) = (\mathbf{f}^1(t), \mathbf{f}^2(t)) \in X$, par les égalités :

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x, y)_X = (A_{\beta}(t)\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^{\ell}\nabla\varphi^{\ell} - \mathcal{E}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}^{\ell}), \nabla\psi^{\ell})_{H^{\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^{\ell})^*\nabla\varphi^{\ell}, \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell}))_{\mathcal{H}^{\ell}}, \quad (2.74)$$

$$\forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X,$$

$$j(x, y) = j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X. \quad (2.75)$$

$$\mathbf{f}(t) = (f(t), q(t)), \quad (2.76)$$

pour tout $t \in [0, T]$, où $A_\beta(t)$ est donné par (2.71). Il est simple de vérifier que le couple $x_\beta = (\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ est une solution du problème (2.69)(2.70) avec la régularité $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; V \times W)$ si et seulement si $x_\beta \in C([0, T]; X)$ et

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X + j(x_\beta(t), y) - j(x_\beta(t), x_\beta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), y - x_\beta(t))_X \quad \forall y \in X, t \in [0, T]. \quad (2.77)$$

Nous obtenons l'inégalité précédent en suivant ce qui suit, en utilisant (2.71) et (2.74) pour trouver

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y)_X &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) \\ &+ j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell, \nabla \psi^\ell - \nabla \varphi_\beta^\ell)_{H^\ell} \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell), \nabla \psi^\ell - \nabla \varphi_\beta^\ell)_{H^\ell}, \end{aligned}$$

combinons cette dernière égalité avec (2.69) et (2.70) pour obtenir

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X &\geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_V - j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) \\ &+ j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t)) + (q(t), \psi - \varphi)_W. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (2.75) et (2.76) nous obtenons

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X + j_{fr}(x_\beta(t), y) - j_{fr}(x_\beta(t), x_\beta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), y - x_\beta(t))_X.$$

Nous définissons la forme bilinéaire $b : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$b(\varphi, \psi) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \varphi, \psi \in W. \quad (2.78)$$

De (2.78), (2.17), (1.16) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$b(\varphi, \psi) = b(\psi, \varphi)$, $|b(\varphi, \psi)| \leq c \|\varphi\|_W \|\psi\|_W$, $b(\varphi, \varphi) \geq c \|\varphi\|_W^2$ pour tout $\varphi, \psi \in W$, c'est-à-dire que la forme bilinéaire b est continue, symétrique et coercive sur W .

Cependant, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut définir une forme linéaire continue $l_\beta : W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$l_\beta(\psi) = (q(t), \psi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T].$$

On applique le théorème de Lax-Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique $\varphi_\beta(t) \in W$ tel que

$$\begin{aligned} b(\varphi_\beta(t), \psi) &= l_\beta(\psi) \\ &= (q(t), \psi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \psi \in W. \end{aligned} \quad (2.79)$$

L'opérateur $\tilde{A}_{\beta(t)}$ est fortement monotone et de Lipschitz sur X . En effet, en utilisant (2.72), (2.73), (1.16) et (2.16)(2.17) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, soient $x_1 = (\mathbf{u}_1, \varphi_1)$, $x_2 = (\mathbf{u}_2, \varphi_2) \in X$, pour tout $y = (\mathbf{v}, \psi)$, on a :

$$\begin{aligned} |(\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2, y)_X| &= |(A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^*(\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell}|, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + c \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell\|_{H^\ell} \|\nabla \psi^\ell\|_{H^\ell} \\ &\quad + c \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell\|_{H^\ell} \|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} + c \sum_{\ell=1}^2 \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell} \|\nabla \psi^\ell\|_{H^\ell}, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + c \sum_{\ell=1}^2 \|\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell\|_{W^\ell} \|\psi^\ell\|_{W^\ell} \\ &\quad + c \sum_{\ell=1}^2 \|\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell\|_{W^\ell} \|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} + c \sum_{\ell=1}^2 \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell} \|\psi^\ell\|_{W^\ell}, \\ &\leq c(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\psi\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\mathbf{v}\|_V \\ &\quad + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\psi\|_W), \\ &\leq c \|x_1 - x_2\|_X \|y\|_X, \end{aligned}$$

et en prenant $y = \tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\| \tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2 \|_X \leq c \| x_1 - x_2 \|_X, \quad (2.80)$$

qui prouve que $\tilde{A}_{\beta(t)}$ est Lipschitz. En outre, pour tout $x_1 = (\mathbf{u}_1, \varphi_1), x_2 = (\mathbf{u}_2, \varphi_2) \in X$, nous avons

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2, x_1 - x_2)_X &= (A_{\beta(t)}\mathbf{u}_1 - A_{\beta(t)}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell), \nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell)_{H^\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^*(\nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{E}^\ell\varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell)_{H^\ell} \\ &\geq m_{\mathcal{F}} \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_V^2 + \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{B}^\ell} \| \nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell \|_{H^\ell}^2 \\ &\geq m_{\mathcal{F}} \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_V^2 + \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{B}^\ell} \| \varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell \|_{W^\ell}^2 \\ &\geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) (\| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_V^2 + \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_W^2) \\ &\geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) \| x_1 - x_2 \|_X^2, \end{aligned}$$

où $m_{\mathcal{B}} = \min(m_{\mathcal{B}^1}, m_{\mathcal{B}^2})$. Alors

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2, x_1 - x_2)_X \geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) \| x_1 - x_2 \|_X^2 \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (2.81)$$

Aussi, en utilisant (2.75) et (2.62), nous pouvons vérifier aisément que, pour $x \in X$ donné, la fonctionnelle $j(x, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe est semi continue inférieurement et satisfait

$$\begin{aligned} j(x_1, y_1) - j(x_1, y_2) + j(x_2, y_2) - j(x_2, y_1) &\leq \\ c_0^2 L_\nu \| \mu \|_{L^\infty(\Gamma_3)} \| x_1 - x_2 \|_X \| y_1 - y_2 \|_X &\quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in X. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Finalement, notons que (2.76) et (2.29) montrent que $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T; X)$.

Soit

$$\tilde{\mu}_0 = \frac{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}})}{c_0^2 L_\nu}, \quad (2.83)$$

et remarquons que $\tilde{\mu}_0$ dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, \mathcal{F}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et p_ν .

Supposons que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \tilde{\mu}_0$.

Alors

$$c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}), \quad (2.84)$$

et, en appliquant le résultat d'existence et d'unicité sur les inégalités quasi-variationnelles Théorème(1.1.6), il s'ensuit l'existence d'un élément unique $x_\beta(t) = (\mathbf{u}_\beta(t), \varphi_\beta(t)) \in \mathbf{X}$, qui vérifie (2.77).

Maintenant, nous montrons que

$$(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; \mathbf{V}) \times C([0, T]; \mathbf{W}).$$

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et on considère les notations $\mathbf{u}_\beta(t_i) = \mathbf{u}_i, \varphi_\beta(t_i) = \varphi_i, \beta(t_i) = \beta_i, q(t_i) = q_i, \mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i$ et $x_\beta(t_i) = (\mathbf{u}_\beta(t_i), \varphi_\beta(t_i)) = x_i$ pour $i = 1, 2$.

Nous utilisons (2.77), pour $t = t_1$

$$(\tilde{\mathbf{A}}_{\beta(t)} x_1, x_2 - x_1)_X + j(x_1, x_2) - j(x_1, x_1) \geq (\mathbf{f}_1, x_2 - x_1)_X,$$

pour $t = t_2$

$$(\tilde{\mathbf{A}}_{\beta(t)} x_2, x_1 - x_2)_X + j(x_2, x_1) - j(x_2, x_2) \geq (\mathbf{f}_2, x_1 - x_2)_X,$$

alors

$$(\tilde{\mathbf{A}}_{\beta(t)} x_1, x_1 - x_2)_X - j(x_1, x_2) + j(x_1, x_1) \leq (\mathbf{f}_1, x_1 - x_2)_X, \quad (2.85)$$

et

$$-(\tilde{\mathbf{A}}_{\beta(t)} x_2, x_1 - x_2)_X - j(x_2, x_1) + j(x_2, x_2) \leq -(\mathbf{f}_2, x_1 - x_2)_X, \quad (2.86)$$

à addition (2.85) et (2.86) on a :

$$(\tilde{\mathbf{A}}_{\beta(t)} x_1 - \tilde{\mathbf{A}}_{\beta(t)} x_2, x_1 - x_2)_X \leq (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, x_1 - x_2)_X + j(x_1, x_2) - j(x_1, x_1) + j(x_2, x_1) - j(x_2, x_2).$$

Combinons maintenant l'inéquation précédente avec les inégalités (2.81), (2.82) et (2.75) pour trouver

$$\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) \|x_1 - x_2\|_X^2 \leq c \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_X \|x_1 - x_2\|_X + c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|x_1 - x_2\|_X^2,$$

ce qui mène à l'inégalité suivante

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq \frac{c}{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) - c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}} \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_X. \quad (2.87)$$

Rappelons que $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}([0, T]; X)$ et sous l'hypothèse de petitesse (2.84), il vient de (2.87) que l'application $t \mapsto x_\beta : [0, T] \rightarrow X$ est continue. C'est à dire

$$\mathbf{u}_\beta \in C([0, T]; V) \quad \text{et} \quad \varphi_\beta \in C([0, T]; W). \quad (2.88)$$

Ce qui termine la preuve du lemme (2.3.1).

Étape ii : Nous supposons dans ce qui suit que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \tilde{\mu}_0$ et pour une fonction donnée $\beta \in \mathcal{Z}$, nous dénotons par $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ la solution du problème $\mathcal{P}V^\beta$ obtenue dans le Lemme(2.3.1), et nous considérons le problème de Cauchy suivant.

Problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$. Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\theta}_\beta(t) = -(\theta_\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{\beta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau\|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{\beta\tau}(t)])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{p.p } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.89)$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0. \quad (2.90)$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 2.3.2 *Il existe une solution unique au Problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ qui vérifie*

$$\theta_\beta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Démonstration. Nous considérons l'application $F_\beta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$F_\beta(t, \theta) = -(\theta_\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{\beta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau\|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{\beta\tau}(t)])\|^2) - \epsilon_a)_+.$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\theta \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et \mathbf{R}_τ que F_β est de Lipschitz par rapport à la seconde variable, uniformément en temps.

De plus, pour tout $\theta \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \mapsto F_\beta(t, \theta)$ appartient à $L^\infty([0, T]; L^2(\Gamma_3))$.

Moyennant maintenant le Théorème (1.1.5), nous obtenons l'existence d'une fonction unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3))$ qui résout le problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$.

Notons que la restriction $0 \leq \beta \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel $\mathcal{P}V$. En effet, la condition (2.26) nous garantit que $\beta(t) \leq \beta_0$ et donc l'hypothèse (2.18) montre que $\beta(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3 .

D'un autre côté, si $\beta(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de(2.24) et (2.26) que $\dot{\beta}(t) = 0$

pour tout $t \geq t_0$ et donc, $\beta(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. sur Γ_3 .

Nous concluons que $0 \leq \beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Il résulte de la définition de l'ensemble \mathcal{Q} , que $\theta_\beta \in \mathcal{Q}$, ce qui conclut la preuve du lemme. Il s'ensuit du Lemme (2.3.2), que pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$ la solution θ_β du problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ appartient à \mathcal{Z} , voir (2.68).

Étape iii : Nous pouvons considérer l'opérateur $\Lambda : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ donné par

$$\Lambda\beta = \theta_\beta. \quad (2.91)$$

Dans la dernière étape, nous allons prouver le résultat suivant.

Lemme 2.3.3 *Il existe un unique élément $\beta^* \in \mathcal{Z}$ tel que $\Lambda\beta^* = \beta^*$.*

Démonstration. Supposons que β_1, β_2 , sont deux fonctions dans \mathcal{Z} .

Nous utilisons les notations $\mathbf{u}_{\beta_i} = \mathbf{u}_i$, $\varphi_{\beta_i} = \varphi_i$ et $\theta_{\beta_i} = \theta_i$ les fonctions obtenues dans les Lemmes (2.3.1) et (2.3.2), respectivement, pour $\beta = \beta_i$, $i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$, nous utilisons des arguments semblables à ceux utilisés dans la preuve de (2.87) et l'inégalité (2.69) pour déduire que

$$\| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \|_{\mathbf{V}} \leq c \| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)}. \quad (2.92)$$

Nous intégrons maintenant (2.89) avec l'état initial (2.90) pour obtenir :

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\theta_i(s)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{i\nu}(s)]))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([u_{i\tau}(s)])\|^2) - \epsilon_a)_+ ds.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \| \theta_1(s)(R_\nu([u_{1\nu}(s)]))^2 - \theta_2(s)(R_\nu([u_{2\nu}(s)]))^2 \|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ &\int_0^t \| \theta_1(s)\|\mathbf{R}_\tau([u_{1\tau}(s)])\|^2 - \theta_2(s)\|\mathbf{R}_\tau([u_{2\tau}(s)])\|^2 \|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de R_ν et \mathbf{R}_τ et écrivant $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$ et après quelques opérations élémentaires, on trouve

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \theta_1(s) - \theta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} ds + c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds.$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall Corollaire (1.1.1), il s'ensuit que

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

et, en utilisant (2.12), nous obtenons

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{\mathbf{V}} ds, \quad (2.93)$$

puis nous introduisons (2.91) dans l'estimation (2.93) pour trouver

$$\| \mathbf{\Lambda} \beta_1(t) - \mathbf{\Lambda} \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{\mathbf{V}} ds. \quad (2.94)$$

Nous combinons maintenant (2.92) avec (2.94) pour déduire

$$\| \mathbf{\Lambda} \beta_1(t) - \mathbf{\Lambda} \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \beta_1(s) - \beta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

la répétition de cette dernière inégalité n fois nous permet de écrire

$$\| \mathbf{\Lambda}^n \beta_1(t) - \mathbf{\Lambda}^n \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c^n \times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} \| \beta_1 - \beta_2 \|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} ds_n \cdots ds_1,$$

où $\mathbf{\Lambda}^n$ désigne le $n^{\text{ième}}$ puissance de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^n$.

La dernière inégalité implique que

$$\| \mathbf{\Lambda}^n \beta_1 - \mathbf{\Lambda}^n \beta_2 \|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{c^n T^n}{n!} \| \beta_1 - \beta_2 \|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}. \quad (2.95)$$

Pour n suffisamment grand, $\mathbf{\Lambda}^n$ est une contraction sur le sous-espace fermé \mathcal{Z} de l'espace de Banach $C([0,T];L^2(\Gamma_3))$. Donc, d'après le théorème du point fixe(1.1.8), $\mathbf{\Lambda}^n$ admet un point fixe unique et par conséquent $\mathbf{\Lambda}$ admet un point fixe unique $\beta^* \in \mathcal{Z}$.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème (2.3.1).

Démonstration.

Existence. Soit $\beta^* \in \mathcal{Z}$ le point fixe de $\mathbf{\Lambda}$ et soit $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\beta^*}, \varphi^* = \varphi_{\beta^*}$ où $(\mathbf{u}_{\beta^*}, \varphi_{\beta^*})$ est la solution du Problème \mathcal{PV}^β pour $\beta = \beta^*$. En utilisant les estimations (2.90), on déduit que.

$$\| x^*(t_1) - x^*(t_2) \|_{\mathbf{X}} \leq \frac{c}{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) - c_0^2 L_\nu \| \mu \|_{L^\infty(\Gamma_3)}} \| \mathbf{f}(t_1) - \mathbf{f}(t_2) \|_{\mathbf{X}}. \quad (2.96)$$

pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$. Et puisque $\theta_{\beta^*} = \beta^*$ et d'après le lemme (2.3.2) nous déduisons que

$$\beta^* \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)).$$

De la régularité de $\mathbf{f} = (f, q)$ donnée par (2.21)-(2.20) et l'estimation (2.96), nous obtenons

$$x^* \in W^{1,\infty}([0, T]; X)$$

i.e $\mathbf{u}^* \in W^{1,\infty}([0, T]; V)$, $\varphi^* \in W^{1,\infty}([0, T]; W)$.

Nous concluons de (2.69), (2.70), (2.89) et (2.90), que $(\mathbf{u}^*, \varphi^*, \beta^*)$ est une solution du problème $\mathcal{P}V$ et satisfait (2.63), (2.64), (2.65).

Unicité. L'unicité est une conséquence de l'unicité des problèmes $\mathcal{P}V^\beta$ et $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$. Soit $(\mathbf{u}, \varphi, \beta)$ est une solution du problème $\mathcal{P}V$ (2.2), (2.49) ayant la régularité (2.63)(2.65).

En utilisant les arguments à la remarque(1.2.1), on obtient $\beta \in \mathcal{Z}$, d'après (2.2) et (2.47), nous trouvons que (\mathbf{u}, φ) est une solution du problème $\mathcal{P}V^\beta$, et du lemme(2.3.1), nous avons $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ est une solution unique du problème $\mathcal{P}V^\beta$.

Donc

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_\beta. \tag{2.97}$$

Nous remplaçons $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta$ dans (2.48), on trouve que β est une solution du Problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ et d'après le lemme(2.3.2), le problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ admet une unique solution notée par θ_β , d'où

$$\beta = \theta_\beta. \tag{2.98}$$

Nous utilisons maintenant (2.98) et la définition de $\mathbf{\Lambda}$, on obtient $\mathbf{\Lambda}\beta = \beta$, c'est-à-dire β est le point fixe de $\mathbf{\Lambda}$ et comme β^* est l'unique point fixe de $\mathbf{\Lambda}$, on conclut

$$\beta = \beta^*. \tag{2.99}$$

L'unicité du théorème (2.3.1) est maintenant une conséquence des égalités (2.97) et (2.99).

Bibliographie

- [1] R.C. Batra and J.S. Yang, Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity, *J. of Elasticity*, **38** (1995), 209-218.
- [2] S. Boutechbak, A dynamic problem of frictionless contact for elastic-thermoviscoplastic materials with damage, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **86** (2013), pp. 173–197.
- [3] H. L. Dai and X. Wang, Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures, *Inter. J. Sol. Struct.*, **42**, (2005), pp. 1151–1171.
- [4] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, 1976.
- [5] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série II **295** (1982), 913916.
- [6] T. Hadj Ammar and B. Benabderrahmane, *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies*, *Stud. Univ. Babe, s-Bolyai Math.* 57 (2012), No. **3**, 427-444.
- [7] T. Hadj Ammar, S. Drabla and B. Benabderrahmane, Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion, *Georgian Math. J.*, **44** (2014), pp. 1–15.
- [8] W. Han and M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **38** (2000), pp. 556–579.
- [9] M. Said Ameer, T. Hadj Amar, L. Maiza, *Analysis of a frictional contact problem for viscoelastic piezoelectric materials*, *Aust. J. Anal. App.*, Vol17 (2020)N¹ Art. **6**, 20 pp, AJMAA.

- [10] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006
- [11] Zhor Lerguet. *Analyse de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et Adhésion*.2008

Résumé

Dans mécanique en contact cet mémoire, on a étudié le problème de avec adhésion pour les lois constitutives électro-élasticité. On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. On a montré l'existence et l'unicité de la solution de problème précédent par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, de la théorie des inégalités variationnelles d'évolutives, des inégalités paraboliques et de la théorie des points fixes.

Mots-clés : Electro-élastique, adhésion, inégalité variationnaire évolutive, la théorie point fixe.

Abstract

In this memory , we studied the problem of mechanics in contact with adhesion for the electro-elasticity constitutive laws. We used Green's formula to obtain the variational formulation of this problem. We have shown the existence and uniqueness of the solution from the previous problem by using the following arguments: time-dependent variational equation, the theory of evolutionary . variational inequalities, parabolic inequalities and fixed point theory

Key words :Electro-elasticity, adhesion, evolutionary variational inequality fixed point theory .

ملخص

في هذه المذكرة ، درسنا مشكلة التلامس الميكانيكي مع الالتصاق . تم استخدام صيغة جرين للحصول على الصيغة المتغيرة لهذه المشكلة . أظهرنا وجود الحل و وحدانيته للمسألة السابقة باستخدام الحجج التالية : المعادلة المتغيرة المعتمدة على الوقت ، نظرية عدم المساواة التفاضلية القابلة للقياس ، من عدم المساواة في القطع المكافئ و نظرية النقطة الثابتة

الكلمات المفتاحية: الالتصاق ، التفاوت التطوري المتغير ، نظرية النقطة الثابتة .