République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude
En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Théorie de l'homologie et applications

Présenté par : Brahim Ghrissi

Soutenu publiquement devant le jury composé de

……	MCA/Prof	Président	Univ. El Oued
Hacen Zelaci	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
……	MCA/MC	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2019 – 2020

Remerciements

Je remercie en premier lieu le grand DIEU qui m'a dooné le courage, la volonté, la force et la patience durant les moments difficiles pour accomplir ce travail.

J'exprimons également mes profondes gratitudes et respectueuses reconnaissances à mon encadreur : Dr. **Hacen ZELACI** pour sa bonne volonté d'accepter m'encadrer. Je lui réserve aussi mon respect absolu pour tout le temps qu'il a consacré pour me diriger et me permettre de mener à bien travail.

J'adresse également mes remerciements à tout l'ensemble des membres de Jury pour le temps qu'il ont consacré pour apprécier ce travail. Tous mes enseignant du département de mathématique et informatique, ont aussi le métrite d'être remerciés pour leurs précieux aides et engagements pour nous donner les bases des sciences mathématique.

Merci à mes camarades de la promotion 2020 de Mathématiques et mes amis surtout **Younes BEN AMOR**, **Basset TERKI**, **Youcef BEN MEBAREK**, **Maouaheb BOUROGA** et mon professeur : Dr.**Khaled HABITA** pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de ma famille. Mes remerciements les plus chaleureux sont aussi transmis pour tous ceux qui de prés ou de loin ont contribué à l'accomplissement de ce modeste travail.

Table des matières

INTRODUCTION

Un des buts de la topologie algébrique est de fournir des outils algébriques pour l'étude des espaces topologiques. Plus exactement, elle cherche à associer de manière naturelle des invariants algébriques aux structures topologiques associées, en particulier, nous avons la théorie de l'homologie, où le groupes de homologies sont des invariants topologiques.

La théorie d'homologie a été un outil très efficace dans l'étude des invariants d'homotopie pour les espaces topologiques. Une raison importante à cela est le fait qu'il est souvent facile de calculer des groupes d'homologie.

Il existe des plusieurs théories différentes d'homologie, même une structure particulière peut avoir de nombreux groupes d'homologie associés...

Le présent mémoire est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux définitions et aux notions préliminaires dont on fait usage dans la suite du mémoire.

Le deuxième chapitre, est dédié aux définitions élémentaires des notions d'homologie et de cohomologie avec des démonstrations de certaines propriétés, illustrent de façon intéressantes certaines manipulations que l'on peut faire sur des complexes différentiels et plus particulièrement des bicomplexes.

Le troisième chapitre introduit les homologies et cohomologies les plus courantes définies sur les espaces topologiques. Historiquement , la topologie a été un moteur dans l'élaboration des concepts de l'homologie algébrique.

Dans le chapitre quatre, comme application aux notions précédentes, nous présentons quelques ap-

plications classiques.

CHAPITRE

I

RAPPELS D'ALGÈBRE ET DE TOPOLOGIE

I.1 Préliminaires algébriques

I.1.1 Structures algébriques

I.1.1.1 Groupe

:

Définitions

Un **groupe** $(G, \cdot)$ est un ensemble G auquel est associé une opération $\cdot$ (la loi de composition) vérifiant les quatre axiomes suivantes :

• pour tout $x, y \in G, \quad x \cdot y \in G \quad (\cdot$ est une loi de composition interne $)$

• pour tout $x, y, z \in G, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (la loi est associative)

• il existe $e \in G$ tel que $\forall x \in G, x \cdot e = x$ et $e \cdot x = x$ (e est l'élément neutre)

• pour tout $x \in G$ il existe $x' \in G$ tel que $x \cdot x' = x' \cdot x = e \quad (x')$ est l'inverse de x et est noté $\left(x^{-1}\right)$.

Si de plus l'opération vérifie

$$\text{pour tous } x, y \in G, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

on dit que G est un groupe commutatif (ou abélien).

Un **morphisme de groupes** ou **homomorphisme de groupes** est une application entre deux groupes qui respecte la structure de groupe. Plus précisément, c'est un morphisme de magmas d'un groupe $(G, *)$ dans un groupe $(G', \cdot)$, c'est-à-dire une application $f : G \to G'$ telle que

$$\forall x, y \in G \quad f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$$

et l'on en déduit alors que $f(e) = e'$ (où e et e' désignent les neutres respectifs de G et G) et $\forall x \in G \quad f\left(x^{-1}\right) = [f(x)]^{-1}$.

Un groupe abélien de type fini est un groupe abélien engendré par une partie finie.

I.1.1.2 Sous-groupe normal

:

Définition

Un sous groupe K d'un groupe G est **normal** si

$$g^{-1}kg \in K; \forall g \in G; \forall k \in K.$$

Dans cette situation, on peut former le quotient G/K des classes d'équivalence dans G pour la relation : $g \sim g'$ s'il existe $k \in K$ tel que $g = g'k$ Parce que K est normal dans $G, G/K$ est un groupe pour la multiplication $[g_1]\,[g_2] = [g_1 g_2]$, où $[g]$ désigne la classe dans G/K de $g \in G$. C'est le groupe quotient de G par K. Il faut noter qu'on peut aussi considérer la relation d'équivalence $g = kg'$. On note le groupe quotient obtenu $K\backslash G$.

I.1.1.3 Anneau

:

Définition

Soit A un ensemble muni de deux lois notées $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un **anneaux** lorsque :

• $(A, +)$ est un groupe abélien.

• $\times$ est associative et distributive sur $+$.

Un élément neutre pour cette structure multiplicative est appelée l'unité de A. Si A admet une unité, on dit que l'anneau est unital. Si la loi de multiplication est commutative, on dit que l'anneau est commutatif (ou abélien). $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire.

I.1.1.4 Module à gauche

:

Définitions

Soit A un anneau (unitaire), dont la multiplication sera notée par simple juxtaposition. Un **A-module à gauche** (ou encore un module à gauche sur A) est la donnée $(M, +, \cdot)$ d'un ensemble M, d'une loi de composition interne + dans M qui fait de M un groupe abélien et d'une loi externe $\cdot$ de $A \times M$ dans M vérifiant, pour tous éléments a et b de A et x, y de M :

• $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ (distributivité de $\cdot$ par rapport à l'addition dans M).

• $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ (distributivité de $\cdot$ par rapport à l'addition dans A).

• $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$.

• $\cdot 1 \cdot x = x$.

Une application linéaire f entre deux modules M et N sur un même anneau A est une fonction qui conserve la structure de module, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall(\alpha, \beta) \in A^2, \forall(x, y) \in M^2, f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y).$$

Autrement dit, une application linéaire est un morphisme de modules. Si f est bijective, on dit de plus que f est un isomorphisme.

I.1.1.5 algèbre

:

Définition

Une **algèbre** associative A sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, encore appelée $\mathbb{K}$ -algèbre associative, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une multiplication bilinéaire $A \times A \to A$ telle que :

$$(xy)z = x(yz),$$

pour tous x, y et z dans A où l'image de (x, y) est notée xy. Si A contient une unité, i.e. un élément 1 tel que $1x = x = x1$ pour tout x dans A, alors A est appelée algèbre associative unifère ou unitaire.

I.1.2 Constructions usuelles

I.1.2.1 Structures libres

:

Définition

Soit E un ensemble quelconque. On définit le**groupe abélien libre** engendré par E comme le groupe dont les éléments sont de la forme $\sum_{v \in F} m_v v$ où F est un sous ensemble fini de E et les $m_v \in \mathbb{Z}$. L'élément neutre est donné par $0v$ pour n'importe quel $v \in E$. On note $\mathbb{Z}\langle E \rangle$ ce groupe abélien.

En remplaçant les m_v ci-dessus par des éléments d'une algèbre **A**, on obtient le **module libre** engendré par l'ensemble E, noté $\mathbf{A}\langle E \rangle$.

• Si G est un groupe abélien libre engendré par E alors pour toute application f de E dans un groupe abélien G', il existe un unique morphisme de groupes de G dans G' qui prolonge f.

• Tout groupe abélien libre est sans torsion, et tout groupe abélien de type fini sans torsion est un groupe abélien libre.

• Tout sous-groupe d'un groupe abélien libre est abélien libre.

I.1.2.2 Somme directe

:

Définition

Á deux groupes abéliens G_1 at G_2 on associe la **somme directe** $G_1 \oplus \mathrm{G}_2$ dont les éléments sont de la forme $g_1 \oplus g_2$ pour tous les $g_1 \in \mathrm{G}_1$ et $g_2 \in \mathrm{G}_2$. La loi interne de groupe sur $G_1 \oplus G_2$ est définie par

$$(g_1 \oplus g_2) + (g_1' \oplus g_2') = (g_1 + g_1') \oplus (g_2 + g_2')\,.$$

Cette loi fait de $G_1 \oplus G_2$ un groupe abélien d'élément neutre $0 \oplus 0$.

La **somme directe de la famille** $\{\mathrm{G}_i\}_{i\in I}$, qu'on note $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$, est un sous groupe abélien du **produit direct de la famille** $\{\mathrm{G}_i\}_{i\in I}$, constituée des éléments $(g_i)_{i\in I}$ pour lesquels un nombre fini de g_i sont non nuls.

De la même façon, on définit la somme directe d'une famille quelconque de modules, ainsi que d'anneaux.

I.1.2.3 Produit tensoriel

Définition

Soient M et N deux modules sur un anneau A. On définit le **produit tensoriel** $M \otimes_{\mathrm{A}} N$ comme le module sur A engendré par les éléments de la forme $m \otimes n$ pour tout $m \in M$ et tout $n \in N$ avec les relations

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n,$$

$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2,$$

$$a(m \otimes n) = (am) \otimes n = m \otimes (an),$$

pour tous $m, m_1, m_2 \in \boldsymbol{M}, n, n_1, n_2 \in \boldsymbol{N}$ et $a \in \mathbf{A}$.

I.1.3 Suite exacte

Définition

On dit que la suite (finie ou infinie) de groupes et de morphismes de groupes

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

est **exacte** si pour tout entier naturel n on a $\mathrm{Im}\,(f_n) = \mathrm{Ker}\,(f_{n+1})$. Dans ce qui précède, $G_0, G_1, \ldots$ sont des groupes et $f_0, f_1, \ldots$ des morphismes de groupes avec $f_n : G_n \to G_{n+1}$. **Cas simples** Dans la suite, 0 dénote le groupe trivial.

- La suite $0 \to G_1 \to G_2$ est exacte si et seulement si f est injective.

- La suite $G_2 \to G_3 \to 0$ est exacte si et seulement si g est surjective.

- La suite $0 \to G_1 \to G_2 \to 0$ est exacte si et seulement si f est bijective.

I.2 Préliminaires topologique

I.2.1 Espaces topologiques

Dans cette section, ainsi d'ailleurs que dans tout ce mémoire, tous les espaces topologiques sont séparés, c'est à dire que pour tous points x, y de cet espace, il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que $U \cap V = \varnothing$. On dit aussi que l'espace est de Hausdorff.

Si X est un ensemble et $Y \subset X$ est une partie de X. Dans tout ce qui suit, on note $I = [0, 1]$ l'intervalle unité et $*$ l'espace réduit à un point.

I.2.1.1 Notions d'homotopie

:

Définitions

Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont **homotopes** s'il existe une application continue $H : X \times I \to Y$ telle que $f = H(\cdot, 0) : X \to Y$ et $g = H(\cdot, 1) : X \to Y$. L'application continue H est **l'homotopie** entre f et g. On utilise la notation $f \simeq g$ pour indiquer que deux applications f et g sont homotopes.

Deux espaces topologiques X et Y seront dit **homotopes** s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$, où $\mathrm{Id}_X : X \to X$ est l'application identité. On utilise la notation $X \simeq Y$ pour indiquer que deux espaces X et Y sont homotopes.

On dit que X est **contractile** si $X \simeq *$.

I.2.1.2 Homéomorphisme

:

Définition

Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \to Y$ est un **homéomorphisme** si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

• f est continue

• f est une bijection

• L'application $f^{-1} : Y \to X$ est continue.

On dit que les espace topologiques X et Y sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme $f : X \to Y$.

Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est un **plongement** de X dans Y si elle induit un homéomorphisme de X dans $f(X)$ (muni de la topologie induite)

I.2.1.3 compactifié d'Alexandrov

:

Définition

Soit X un espace topologique localement compact. On peut, en ajoutant un point a X, obtenir un espace compact. Pour cela, on considère $X^+ = X \cup \{\infty\}$ où $\infty \notin X$, et on définit une topologie de la manière suivante.

L'ensemble des ouverts de X^+ est constitué par :

• les ouverts de X,

• les sous-ensembles de la forme $\{\infty\} \cup K^c$, où K^c est le complémentaire dans X d'un compact K de X.

On vérifie que l'on définit bien ainsi une topologie sur X^+, et que la topologie initiale sur X est identique à la topologie induite sur X par cette topologie sur X^+.

On vérifie enfin que X^+ muni de cette topologie est un espace compact.

L'espace X^+ s'appelle alors le **compactifié d'Alexandrov** de X ou le **compactifié par un point** de X, ∞ s'appelle le point à infini.

Dans le cas $X = \mathbb{R}^n$, on obtient $(\mathbb{R}^n)^+ = \mathbb{S}^n$.

I.2.1.4 Topologie quotient

:

Définition

Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On notera p la projection de X dans $X/\sim$ qui associe à un élément de X sa classe d'équivalence. La **topologie quotient** sur X est la plus petit topologie qui rende p continue.

Soit $Y \subset X$ une partie non vide de X. On définit sur X la relation d'équivalence pour laquelle les classes d'équivalence sont d'une part l'ensemble Y lui même et d'autres part les ensembles $\{x\}$ pour tous les points $x \in X - Y$. Le **quotient** $X/\sim$, qu'on note aussi X/Y, est l'espace topologique obtenu en réduisant Y à un point dans X.

Le **cône de l'espace topologique** X est l'espace quotient

$$CX = X \times I/X \times \{1\}.$$

L'idée de cette construction est d'introduire un point extérieur à X et de lier ce point unique à tous les points de X par un segment. Ce point extérieur est l'image de $X \times \{1\}$ dans le quotient. On peut facilement vérifier que $CX \simeq *$ puisqu'il suffit de contracter CX le long des segments qui relient les points de X à l'unique point au sommet du cône. Dans le cas où $X = \mathbb{S}^1$, l'espace $C\mathbb{S}^1$ est le cône ordinaire qu'on a l'habitude de manipuler...

La **suspension de l'espace topologique** X est l'espace quotient

$$SX = X \times I/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\}) = CX/X \times \{0\}.$$

Contrairement à CX, SX n'est pas homotope à un point. La suspension du cercle $\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. Plus généralement

$$S\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{n+1}.$$

I.2.1.5 Connexité par arcs

:

Définition

Un espace topologique X est dit **connexe par arcs** lorsque pour tout $(a, b) \in X^2$, il existe une application $\gamma : [0, 1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Lorsque l'espace topologique X considéré (ou une de ses parties) n'est pas a priori connexe par arcs, il est toujours possible de se ramener à des espaces connexes par arcs en considérant les **composantes connexes par arcs** de X.

La **composante connexe par arcs** d'un point $x \in X$ est le plus grand connexe par arcs contenant x :

$$C(x) = \bigcup_{\substack{x \in C \\ C \text{ connexe}}} C.$$

• $C(x)$ est bien connexe par arcs et fermé.

I.2.2 paire d'espaces topologiques

Définition

Une **paire d'espaces topologiques** est un couple (X, Y) tel que Y soit un sous espace topologique d'un espace topologique X.

Un **morphisme de paires d'espaces topologiques** $f : (X, Y) \to (X', Y')$ est une application continue $f : X \to X'$ telle que $f(Y) \subset Y'$.

Une inclusion de la forme $(X, Z) \hookrightarrow (X, Y)$ où Z est un fermé, permet de construire la paire quotient $(X/Z, Y/Z)$.

I.2.2.1 Homotopie de pairs

:

Définitions

Soient (X, Y) et (X', Y') deux pairs d'espaces topologiques. Deux morphismes $f, g : (X, Y) \to (X', Y')$

sont **homotopes** s'il existe une application continue $H : X \times I \to X'$ telle que il est **homotopie** entre l'application continues f et $g : X \to X'$ et

$$\forall t \in [0,1], \forall y \in Y, H(y,t) \in Y'.$$

L'application continue H est **l'homotopie** entre deux morphismes f et g. On utilise la notation $f \simeq g$ pour indiquer que deux morphismes f et g sont **homotopes**.

Deux pairs d'espaces topologiques (X, Y) et (X', Y') seront dit **homotopes** s'il existe deux morphismes de paires $f : (X, Y) \to (X', Y')$ et $g : (X', Y') \to (X, Y)$ telles que $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{(X,Y)}$ et $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{(X',Y')}$. On utilise la notation $(X, Y) \simeq (X', Y')$ pour indiquer que deux espaces (X, Y) et (X', Y') sont **homotopes**.

I.2.2.2 Rétraction

:

Définitions

• Une **rétraction** d'une paire d'espaces topologiques (X, Y) est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f_{|Y} = \mathrm{Id}_Y$.

• Une **rétraction par déformation** de X sur Y est une homotopie entre une rétraction de X sur Y et l'application identité de X, c'est-à-dire une application continue

$$H : X \times [0,1] \to X,$$

telle que

$$\forall x \in X, H(x,0) = x \text{ et } H(x,1) \in Y \quad \text{ et } \quad \forall y \in Y, H(y,1) = y.$$

On dit que Y est un rétract par déformation de X s'il existe une rétraction par déformation de X sur Y.

• Une **rétraction forte par déformation** est une telle application F vérifiant de plus

$$\forall t \in [0,1], \forall y \in Y, H(y,t) = y.$$

On dit que Y est un **rétract fort par déformation** de X s'il existe une rétraction forte par déformation de X sur Y.

CHAPITRE

II

HOMOLOGIES ET COHOMOLOGIES

II.1 Définitions

II.1.1 Homologie de modules différentiels

Définitions

Soit A un anneau (abélien). Un module différentiel sur A est un module à gauche M sur A muni d'un morphisme de modules à gauche $d : M \to M$ tel que $d^2 = 0$, appelé la différentielle sur M. On note (M, d) un tel module différentiel.

On peut associer à d deux sous modules de M :

$$B(\boldsymbol{M}) = \operatorname{Im} d = \{x \in \boldsymbol{M} / \exists y \in \boldsymbol{M}, x = dy\}, \quad Z(\boldsymbol{M}) = \operatorname{Ker} d = \{x \in \boldsymbol{M} / dx = 0\}.$$

Les éléments de $B(M)$ sont appelés les bords et les éléments de $Z(M)$ les cycles de (M, d). Des éléments quelconques de M sont appelés des chaînes.

Comme $d^2 = 0$, on a de façon évidente $B(M) \subset Z(M)$. On peut donc former le quotient de modules

à gauche sur A

$$H(\boldsymbol{M}) = Z(\boldsymbol{M})/B(\boldsymbol{M}).$$

Ce module $H(\boldsymbol{M})$ est appelé l'homologie de $(\boldsymbol{M}, d)$. On note aussi $H(\boldsymbol{M}, d)$ ce module d'homologie, pour rappeler qu'il dépend de la différentielle.

On dira que deux éléments $x, y \in \boldsymbol{M}$ sont homologues s'il existe $v \in \boldsymbol{M}$ tel que $x - y = dv$, en d'autres termes, x et y définissent la méme classe d'homologie dans $H(M)$. On utilise souvent la notation $[x]$ pour désigner la classe d'un élément $x \in M$.

Les exemples les plus courants utiliseront $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$ ou bien l'un des corps usuels ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$, ou génériquement $\mathbb{K}$). Dans ce dernier cas, le module M est un espace vectoriel et on parle d'espace vectoriel différentiel. L'homologie est alors aussi un espace vectoriel.

Soient (M, d) et (M', d') deux modules différentiels. Un morphisme de modules différentiels entre (M, d) et (M', d') est un morphisme de modules $\varphi : M \to M'$ compatible avec les différentielles au sens on $d' \circ \varphi = \varphi \circ d$. De cette relation, on tire facilement que $\varphi(Z(M)) \subset Z(M')$ et $\varphi(B(M)) \subset B(M')$. Donc φ passe au quotient, au sens où il définit un morphisme en homologie

$$\varphi^{\#} : H(M) \to H(M') \quad \textit{tel que} \quad \varphi^{\#}([m]) = [\varphi(m)].$$

II.1.2 Complexes différentiels

Définitions

Un complexe différentiel est une suite de modules $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de morphismes de modules $d_n : M^n \to M^{n+1}$ telles que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ pour tout entier n. Les morphismes d_n sont appelés les différentielles du complexe. On note $(\boldsymbol{M}^\bullet, d)$ ce complexe. L'indice n est appelé l'indice de graduation du complexe. Ici, il s'agit d'un complexe croissant, car les différentielles vont dans le sens croissant des indices.

Il est bien sûr possible d'introduire des complexes décroissants, c'est à dire une suite de modules munie de morphismes $d_n : M_n \to M_{n-1}$ (pour $n > 0$) telles que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Il est alors d'usage d'indicer en bas les modules. On note $(M_\bullet, d)$ ce complexe décroissant. Il n'y a pas de différence conceptuelle entre les complexes croissants et les complexes décroissants. Seul le vocabulaire change. En particulier, comme on va le voir plus loin, on associe à des complexes différentiels croissants une cohomologie alors qu'on associe à des complexes différentiels décroissants une homologie. Ce n'est bien sûr, pour l'ins-

tant, qu'une différence de terminologie. Par la suite, on introduira de nouveaux objets dans le cadre de complexes croissants, mais des définitions équivalentes pourraient être données sur des complexes décroissants.

Un complexe différentiel définit en particulier un module différentiel, en posant

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M^n,$$

et $d = d_n$ sur M^n.

Pour $n > 0$, dans chaque module M^n, nous avons les sous modules $Z^n(M) = \operatorname{Ker} d_n$ et $B^n(M) = \operatorname{Im} d_{n-1}$. Les éléments de $Z^n(M)$ sont appelés les n -cocycles et les éléments de $B^n(M)$ les n -cobords. De façon générale, les éléments de M^n sont appelés les n -cochaînes. Nous avons les inclusions $\operatorname{Im} d_{n-1} \subset \operatorname{Ker} d_n$, c'est à dire $B^n(M) \subset Z^n(M)$. Nous pouvons donc former les modules quotients

$$H^n(M, d) = Z^n(M)/B^n(M)$$

Le cas particulier $n = 0$ est traité en posant $H^0(M, d) = \operatorname{Ker} d_0 \subset M^0$. Cela revient à introduire le module supplémentaire $M^{-1} = 0$ dans le complexe $(M^\bullet, d)$, avec le morphisme $d_{-1} : M^{-1} \to M^0$ défini bien sûr par $d_{-1}(0) = 0$. La suite de modules $H^n(M, d)$ est appelée la suite de cohomologie du complexe $(M^\bullet, d)$.

Un tel morphisme définit alors des morphismes en cohomologies

$$\varphi^\# : H^n(M, d) \to H^n\left(M', d'\right).$$

II.1.3 Algèbres différentielles

définitions

Souvent, l'espace vectoriel différentiel sur lequel on calcule l'homologie a aussi une structure d'algèbre (ou plus généralement d'anneau). Il est possible de contraindre la différentielle d à être compatible avec le produit de cette algèbre, et récupérer ainsi une structure d'algèbre en homologie.

Soit donc A une algèbre associative unitale. Une différentielle d'algèbre sur $\mathbf{A}$ est une dérivation $d : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de carré nul :

$$d(ab) = (da)b + a(db).$$

On dira alors que ($\mathbf{A}, d$) est une algèbre différentielle. Sa cohomologie (ou son homologie, puisqu'ici il n'y a pas de graduation) est définie comme sur un module différentiel. Cependant, la structure d'algèbre, et la compatibilité entre la différentielle et le produit, donnent des propriétés supplémentaires.

Ainsi, l'espace vectoriel $Z(\mathbf{A}) = \text{Ker } d$ des cocycles est une sous algèbre de $\mathbf{A}$, et l'espace vectoriel $B(\mathbf{A}) = \text{Im } d$ des cobords est un idéal bilatère de $Z(\mathbf{A})$. En effet, pour $a, b \in Z(\mathbf{A})$ nous avons $d(ab) = (da)b + a(db) = 0$. Donc $ab \in Z(\mathbf{A})$. Si maintenant $a \in Z(\mathbf{A})$ et $b \in \mathbf{A}$, alors il reste $d(ab) = a(db)$. Donc $a(db)$ est un cobord. Le même raisonnement vaut pour $(db)a$, et prouve que B ($\mathbf{A}$) est bien un idéal bilatère de $Z(\mathbf{A})$.

Ceci implique alors que le quotient $H(\mathbf{A}, d) = Z(\mathbf{A})/B(\mathbf{A})$ est une algèbre appelée algèbre de cohomologique de $\mathbf{A}$.

On remarquera enfin que si A est unitale, alors $d1 = 0$, comme il est facile de le voir en appliquant la différentielle à la relation $1.1 = 1$.

Nous posons

$$H^\bullet(M, d) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(M, d).$$

Ce module gradué est la cohomologie du complexe $(M^\bullet, d)$

Dans le cas d'un complexe décroissant, nous formons, pour $n > 0$

$$H_n(M, d) = \text{Ker } d_n / \text{ Im } d_{n+1}.$$

Le cas $n = 0$ est défini aussi à part en posant $H_0(M, d) = M_0/$ Im d_1. Cela correspond à rajouter au complexe différentiel le module $M_{-1} = 0$ et le morphisme nul $M_0 \to M_{-1}$. La suite de modules $H_n(M, d)$ est la suite d'homologie du complexe $(M_\bullet, d)$. Dans ce cas, les éléments de $Z_n(M) = \text{Ker } d_n$ sont appelés les n -cycles, et les éléments de $B_n(M) = \text{Im } d_{n+1}$ les n -bords du complexe. Les éléments de M_n sont appelés les n -chaînes. Nous notons $H_\bullet(M, d)$ son homologie.

La cohomologie d'un complexe différentiel $(M^\bullet, d)$ est dite triviale, si $H^n(M, d) = 0$ pour tout $n > 0$ et si $H^0(M, d) = \text{A}$.

Soient $(M^\bullet, d)$ et $(M'^\bullet, d')$ deux complexes (croissants). Nous dirons que le morphisme $\varphi : M \to M'$ est un morphisme de complexes différentiels si pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi : M^n \to M'^n$ et $d'_{n+1} \circ \varphi = \varphi \circ d_n$. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{d} & \boldsymbol{M}^{n-1} & \xrightarrow{d} & \boldsymbol{M}^{n} & \xrightarrow{d} & \boldsymbol{M}^{n+1} & \xrightarrow{d} & \cdots \\ & & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi & & \\ \cdots & \xrightarrow{d} & \boldsymbol{M}'^{n-1} & \xrightarrow{d} & \boldsymbol{M}'^{n} & \xrightarrow{d} & \boldsymbol{M}'^{n+1} & \xrightarrow{d} & \cdots \end{array}$$

II.1.4 Bicomplexes

Définitions

Un bicomplexe différentiel est une suite de modules $(M^{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ et de morphismes $\delta : M^{p,q} \to M^{p+1,q}$ et $d : M^{p,q} \to M^{p,q+1}$ telles que $\delta^2 = 0$,$d^2 = 0$, et $d\delta = \delta d$.[1] Ce bicomplexe permet d'introduire différentes cohomologies. Tout d'abord, on peut considérer les cohomologies de δ et d séparément, notées respectivement $H^{\bullet,\bullet}(M,\delta)$ et $H^{\bullet,\bullet}(M,d)$. Comme δ et d commutent, chacune induit un morphisme sur la cohomologie de l'autre :

$$\delta : H^{p,\bullet}(\boldsymbol{M},d) \to H^{p+1,\bullet}(\boldsymbol{M},d) \quad et \quad d \quad : H^{\bullet,q}(\boldsymbol{M},\delta) \to H^{\bullet,q+1}(\boldsymbol{M},\delta)$$

Elles sont toutes deux de carré nul. Il est donc possible d'introduire leur cohomologies, que nous notons respectivement $H^{\bullet,\bullet}(M,d|\delta)$ et $H^{\bullet,\bullet}(M,\delta|d)$.

Il est utile de décrire les éléments de $H^{\bullet,\bullet}(M,d|\delta)$. Une classe $[x^{p,q}]_{d|\delta} \in H^{p,q}(\boldsymbol{M},d|\delta)$ admet un représentant $[x^{p,q}]_d \in H^{p,q}(\boldsymbol{M},d)$ tel que $\delta\,[x^{p,q}]_d = [\delta x^{p,q}]_d = 0$. Ce représentant $[x^{p,q}]_d$ admet lui-même un représentant $x^{p,q} \in M^{p,q}$ tel que $dx^{p,q} = 0$. D'autre part, la relation $[\delta x^{p,q}]_d = 0$ signifie que $\delta x^{p,q} = -dy^{p+1,q-1}$ pour un élément $y^{p+1,q-1} \in \boldsymbol{M}^{p+1,q-1}$. Donc $\delta x^{p,q}$ n'est pas nul, mais ill'est modulo les bords pour d. On a ainsi la situation schématisée sous la forme

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ d\uparrow & & \\ x^{p,q} & \xrightarrow{\delta} & \delta x^{p,q} + dy^{p+1,q-1} = 0 \\ & & d\uparrow \\ & & y^{p+1,q-1} \end{array}$$

Un élément nul $[x^{p,q}]_{d|\delta}$ dans $H^{p,q}(\boldsymbol{M},d|\delta)$ est représenté dans l'espace $H^{p,q}(\boldsymbol{M},d)$ par un cobord de la forme $[x^{p,q}]_d = \delta\left[z^{p-1,q}\right]_d = \left[\delta z^{p-1,q}\right]_d$ pour un $z^{p-1,q} \in \boldsymbol{M}^{p-1,q}$. Cette relation s'écrit dans $\boldsymbol{M}^{p,q}$ sous la forme $x^{p,q} = \delta z^{p-1,q} + dy^{p,q-1}$. On a donc le schéma

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ \uparrow d & & \\ z^{p-1,q} & \xrightarrow{\delta} & \delta z^{p-1,q} + dy^{p,q-1} = x^{p,q} \\ & & \uparrow d \\ & & y^{p,q-1} \end{array}$$

Comme on peut le constater, toutes les relations usuelles définissant une cohomologie sont écrites modulo des cobords pour d. C'est pourquoi la cohomologie $H^{\bullet,\bullet}(M, d|\delta)$ est appelée la cohomologie de $(M^{\bullet,\bullet}, \delta)$ modulo d. La situation est tout à fait semblable pour $H^{\bullet,\bullet}(M, \delta|d)$, qui est la cohomologie de $(M^{\bullet,\bullet}, d)$ modulo δ. Ces deux cohomologies sont a priori différentes.

A partir du bicomplexe différentiel ($M^{\bullet,\bullet}, \delta, d$), on peut construire un complexe différentiel $(M^\bullet, D)$, appelé complexe total pour $M^{\bullet,\bullet}$, de la façon suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$M^n = \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}.$$

et $Dx^{p,q} = \delta x^{p,q} + (-1)^p dx^{p,q}$. Il est facile de voir que $D^2 = 0$. On peut alors introduire la cohomologie de ce complexe total $H^\bullet(M, D)$. Cette cohomologie sera reliée à d'autres cohomologies par la suite.

II.2 Propriétés générales

II.2.1 Suites exactes

Les notions d'homologie et de cohomologie sont intimement reliées aux notions de suites exactes et à leurs constructions associées.

Si $(M^\bullet, d)$ est un complexe différentiel, on peut interpréter sa cohomologie $H^\bullet(M, d)$ comme une mesure de la non exactitude de la suite

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} M^n \xrightarrow{d_n} M^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

puisque $H^n(M, d)$ compare $\operatorname{Im} d_{n-1}$ à $\ker d_n$.

Théorème

Considérons la suite exacte courte de complexes différentiels

$$0 \longrightarrow (M^\bullet, d_M) \xrightarrow{\varphi} (N^\bullet, d_N) \xrightarrow{\psi} (P^\bullet, d_P) \longrightarrow 0$$

où les φ et ψ sont des morphismes de complexes différentiels. On peut montrer qu'il existe un morphisme

$$\partial : H^\bullet(\boldsymbol{P}, d_{\boldsymbol{P}}) \to H^\bullet(\boldsymbol{M}, d_{\boldsymbol{M}})$$

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(\boldsymbol{M}, d_{\boldsymbol{M}}) & \xrightarrow{\quad\varphi^\sharp\quad} & H^\bullet(\boldsymbol{N}, d_{\boldsymbol{N}}) \\ & {\scriptstyle\partial}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\psi^\sharp} & \\ & H^\bullet(\boldsymbol{P}, d_{\boldsymbol{P}}) & \end{array}$$

tel que ce qui fait que le diagramme triangulaire ci-dessus est une suite exacte longue en cohomologie :

$$\cdots \to H^n(M, d_M) \overset{\varphi^\#}{\to} H^n(N, d_N) \overset{\psi^\#}{\longrightarrow} H^n(P, d_P) \overset{\partial}{\longrightarrow} H^{n+1}(M, d_M) \longrightarrow \cdots$$

Preuve. [4] Comme la suite est exacte, pour tout $\alpha \in H^\bullet(\boldsymbol{P}, d_{\boldsymbol{P}})$, il existe $x \in \boldsymbol{N}$ tel que $\psi(x)$ soit un représentant de la classe α. En particulier, $d_{\boldsymbol{P}}\psi(x) = 0$. De $\psi(d_{\boldsymbol{N}}x) = d_{\boldsymbol{P}}\psi(x)$, nous déduisons que $d_N x \in \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$. Donc il existe $m_x \in M$ tel que $\varphi(m_x) = d_N x$. On vérifie facilement que m_x est un cocycle, puisque φ est injectif. Soit $\beta \in H^\bullet(M, d_M)$ la classe de m_x. Nous posons $\partial\alpha = \beta$.

Il faut maintenant montrer que cette définition a un sens, c'est à dire que la classe β est indépendante des choix faits dans cette définition. Si $y \in N$ est tel que $\psi(y)$ est un autre représentant de la classe α, alors, avec des notations évidentes, nous avons $\psi(y) - \psi(x) = d_P p = d_P\psi(n) = \psi(d_N n)$. Donc $y - x - d_N n \in \operatorname{Ker}\psi$. Or, $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$, donc $d_N y = d_N x + d_N\varphi(m)$ pour un $m \in M$. Alors $\varphi(m_y) = d_N y = d_N x + d_N\varphi(m) = \varphi(m_x) + \varphi(d_M m)$. Comme φ est injective, cela implique $m_y = m_x + d_M m$, c'est à dire que la classe de cohomologie de m_y est la même que celle de m_x. Par construction, nous voyons que nous avons la commutativité du diagramme. On peut résumer cette construction par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \boldsymbol{M}^n & \xrightarrow{\varphi} & \boldsymbol{N}^n & \xrightarrow{\psi} & \boldsymbol{P}^n & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & x & \mapsto & \alpha \\ & & {\scriptstyle d_{\boldsymbol{M}}}\downarrow & & {\scriptstyle d_{\boldsymbol{N}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{\boldsymbol{N}}} & & \downarrow \\ & & & & m_x & \mapsto & d_{\boldsymbol{N}}x & \mapsto & 0 \\ 0 & \longrightarrow & \boldsymbol{M}^{n+1} & \xrightarrow{\varphi} & \boldsymbol{N}^{n+1} & \xrightarrow{\psi} & \boldsymbol{P}^{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Il faut remarquer que nous avons

$$\partial : H^n(\boldsymbol{P}, d_P) \to H^{n+1}(M, d_M).$$

soit $\alpha \in H^n(P, d_p)$, on a :

$$\varphi^{\#}(\partial(\alpha)) = \varphi^{\#}([m_x]) = [\varphi(m_x)] = [d_N x] = 0.$$

Soit $[m] \in H^n(M, d_M)$ tel que $\varphi^{\#}([m]) = [\varphi(m)] = 0$, alors on a $\varphi(m) = d_N x$ pour certain $x \in N$, alors $d_N \psi(x) = \psi(\varphi(m)) = 0$ et

$$\partial([\psi(x)]) = [m_x] = [m],$$

on déduit alors que

$$\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} \varphi^{\#}$$

. Soit $[m] \in H^n(M, d_M)$ on a

$$\psi^{\#}\left(\varphi^{\#}([m])\right) = [\psi(\varphi(m))] = 0.$$

Soit $[n] \in H^n(N, d_N)$ tel que $\psi^{\#}([n]) = 0$ donc $[\psi(n)] = 0$ on déduit que $\psi(n) = d_p P = d_p \psi(n)$, donc $\psi(n - d_N n) = 0$, cela implique que $n - d_N n \in \operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$, donc il existe $m \in M$ tel que $n - d_N n = \varphi(m)$, finalement on a :

$$\varphi^{\#}([m]) = [\varphi(m)] = [n - d_N n] = [n],$$

il s'ensuit alors que

$$\operatorname{Im} \varphi^{\#} = \operatorname{Ker} \psi^{\#}.$$

Soit $[x] \in H^n(N, d_N)$ on a :

$$\partial\left(\psi^{\#}([x])\right) = \partial([\psi(x)]) = [m_x] = 0.$$

car $\varphi(m_x) = d_N x = 0$ et φ est injective. Soit $[y] \in H^n(P, d_p)$ et soit $x \in N$ tel que $\psi(x) = y$ On a $\partial([y]) = [m_x] = 0$ donc $m_x = d_M m$, alors $d_N x = \varphi(m_x) = \varphi(d_M m) = d_N \varphi(m)$, donc $d_N(\varphi(m) - x) = 0$ et

$$\psi^{\#}([x - \varphi(m)]) = [\psi(x) - \psi(\varphi(m))] = [y],$$

on obtient alors

$$\operatorname{Im} \psi^{\#} = \operatorname{Ker} \partial^{\#}.$$

■

Ce genre de suite exacte est très utile pour calculer des cohomologies. Par exemple, si l'une des cohomologies est triviale, alors cette suite exacte longue se réduit à des suites exactes qui représentent des isomorphismes entre les 2 cohomologies qui restent. Ainsi, si $H^\bullet(M, d_M)$ est triviale, alors $H^\bullet(N, d_N)$ et $H^\bullet(\boldsymbol{P}, d\boldsymbol{p})$ sont isomorphes. II en est de même en permutant le rôle des complexes.

Le morphisme de bord est naturel par rapport aux suites exactes courtes de complexes différentiels

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (\boldsymbol{M}^\bullet, d) & \longrightarrow & (\boldsymbol{N}^\bullet, d) & \longrightarrow & (\boldsymbol{P}^\bullet, d) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \\ 0 & \longrightarrow & (\boldsymbol{M'}^\bullet, d) & \longrightarrow & (\boldsymbol{N'}^\bullet, d) & \longrightarrow & (\boldsymbol{P'}^\bullet, d) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

au sens suivant. Si Φ relie deux suites exactes courtes de complexes différentiels

alors $\Phi^\#$ induit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^n(\boldsymbol{M}, d) & \longrightarrow & H^n(\boldsymbol{N}, d) & \longrightarrow & H^n(\boldsymbol{P}, d) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}(\boldsymbol{M}, d) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \Phi^\sharp & & \downarrow \Phi^\sharp & & \downarrow \Phi^\sharp & & \downarrow \Phi^\sharp & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^n(\boldsymbol{M'}, d) & \longrightarrow & H^n(\boldsymbol{N'}, d) & \longrightarrow & H^n(\boldsymbol{P'}, d) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}(\boldsymbol{M}, d) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

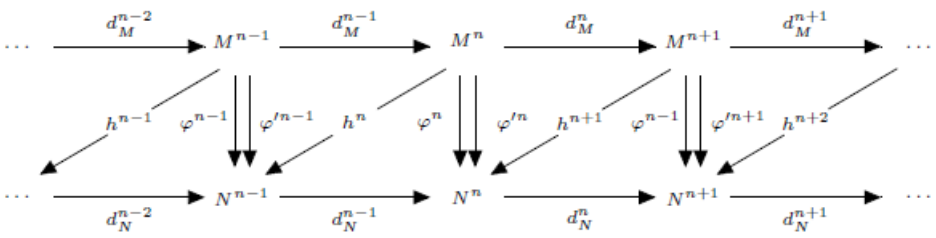
II.2.2 Homotopies

Définitions

Soit donnés $(M^\bullet, d_M)$ et $(N^\bullet, d_N)$ deux complexes différentiels croissants. Deux morphismes de complexes différentiels $\varphi, \varphi' : M \to N$ sont dit homotopes s'il existe un morphisme de degré $-1, h : M^n \to N^{n-1}$, tel que

$$d_{N,n-1}h + hd_{M,n} = \varphi_n - \varphi'_n : M^n \to N^n.$$

On note $\varphi \simeq \varphi'$ deux morphismes de complexes différentiels qui sont homotopes.



L'homotopie définit une relation d'équivalence entre les morphismes de complexes différentiels.

L'un des résultats essentiels de la théorie de l'homotopie est le suivant : si $\varphi, \varphi' : (M^\bullet, d_M) \to (N^\bullet, d_N)$ sont homotopes, alors $\varphi^\# = \varphi'^\# : H^\bullet(M, d_M) \to H^\bullet(N, d_N)$.

Une homotopie contractante d'un complexe différentiel $(M^\bullet, d)$ est une homotopie entre les morphismes de complexes différentiels Id : $(M^\bullet, d) \to (M^\bullet, d)$ (application identité) et $0 : (M^\bullet, d) \to (M^\bullet, d)$ (application nulle). Ainsi une telle homotopie h satisfait à $dh + hd = \text{Id}$ sur M.

Si $(M^\bullet, d)$ admet une homotopie contractante, alors sa cohomologie est triviale. En effet, soit $x \in M$ un cycle $(dx = 0)$, alors en lui appliquant la relation $dh + hd = \text{Id}$, on obtient $dhx = x$, c'est à dire que x est un bord.

La notion d'homotopie contractante admet des généralisations assez variées. La plus simple consiste à considérer différentes possibilités de signes dans la relation $dh + hd = \text{Id}$. Ce qu'il faut en retenir, c'est qu'il existe parfois de telles applications qui permettent d'associer à tout cycle (ou cocycle) un élément dont ce cycle est le bord (ou le cobord). Ces applications simplifient considérablement les calculs de cohomologies.

II.2.3 Changement de coefficients

Soit $(M^\bullet, d)$ un complexe croissant formé de modules sur $\mathbb{Z}$. On dit que le groupe abélien $\mathbb{Z}$ est le groupe des coefficients de ce complexe, et donc aussi de son homologie. **Définition**
Soit G un groupe abélien, alors on peut introduite le complexe (croissant) dont les coefficients sont dans G en considérant les modules $M^n \otimes_{\mathbb{Z}} G$ et la différentielle d en posant

$$d(m \otimes g) = (dm) \otimes g,$$

pour tous $m \in M^n$ et $g \in \mathrm{G}$. On note alors $H^\bullet(M; \mathrm{G})$ la cohomologie de $M^\bullet$ à valeurs dans G.

Il existe des relations entre $H^\bullet(M; \mathrm{G})$ et $H^\bullet(M)$, sous forme de suites exactes longues. Dans les bons cas, par exemple lorsque $G = \mathbb{K}$ est un corps, cette relation se réduit tout simplement à

$$H^\bullet(M; \mathbb{K}) = H^\bullet(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}.$$

Cette relation n'est pas inoffensive : avec un corps qui contient $\mathbb{Q}$, elle annihile toute la torsion dans $H^\bullet(M)$.

II.2.4 Complexe adjoint

Définition

Soit $(M_\bullet, \partial)$ un complexe décroissant de modules à gauches sur l'anneau A. On lui associe son complexe différentiel adjoint en considérant les modules sur $\mathbb{Z}$ de la forme $\boldsymbol{N}^n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{M}_n, \mathbf{A})$. Sur $\boldsymbol{N}^\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{N}^n$, la différentielle est définie comme l'adjointe de ∂ :

$$(d\alpha^n)(x_{n+1}) = \alpha^n(\partial x_{n+1}),$$

pour tout $\alpha^n \in N^n$ et tout $x_{n+1} \in M^{n+1}$. La relation $d^2 = 0$ est une conséquence de $\partial^2 = 0$.

II.2.5 Augmentation d'un complexe

Théorème

Soit $(N^\bullet, d)$ un complexe différentiel d'anneaux. Une augmentation de ce complexe est la donnée d'un bicomplexe $(M^{\bullet,\bullet}, \delta, d)$ et d'une application injective $\epsilon : N^q \to M^{0,q}$ telle que $\delta \circ \epsilon = 0$ et $d\epsilon = \epsilon d$. En d'autres termes, N s'injecte dans un bicomplexe de façon compatible avec la différentielle du bicomplexe. On peut donc considérer la suite de complexes différentiels

$$0 \longrightarrow N^\bullet \longrightarrow M^{0,\bullet} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} M^{p,\bullet} \xrightarrow{\delta} M^{p+1,\bullet} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

On a alors l'important résultat pratique suivant :

$$0 \longrightarrow N^q \longrightarrow M^{0,q} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} M^{p,q} \xrightarrow{\delta} M^{p+1,q} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

si les suites sont exactes pour tous $q \geq 0$, alors on a

$$H^\bullet(M, D) = H^\bullet(N, d).$$

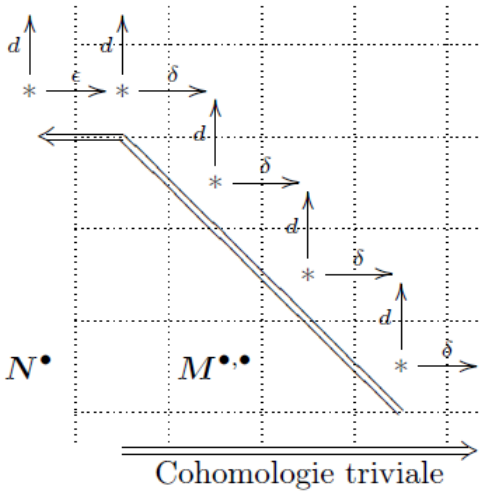
Preuve. Il est évident que ϵ induit une application $\epsilon^\# : H^\bullet(N, d) \to H^\bullet(M, D)$. C'est cette application qui réalise l'isomorphisme. On va s'intéresser à la surjectivité de cette application. Pour cela, soit $\alpha^n \in H^n(M, D)$, dont on choisit un représentant $x^n \in M^n$. L'élément x^n s'ecrit sous forme d'une somme $x^n = \sum_{r=0}^n x^{r,n-r}$ pour des $x^{r,n-r} \in M^{r,n-r}$. La relation $Dx^n = 0$ se répercute sur les $x^{r,n-r}$ sous la forme

$$\delta x^{r,n-r} + (-1)^{r+1} dx^{r+1,n-r-1} = 0 \in M^{r+1,n-r}.$$

pour $0 \leq r \leq n-1$ et $\delta x^{n,0} = 0$ pour $r = n$, puisqu'il n'y a pas d'élément dans $M^{n+1,-1}$. La cohomologie de δ est triviale par hypothèse, donc il existe $y^{n-1,0} \in M^{n-1,0}$ tel que $\delta y^{n-1,0} = x^{n,0}$. On peut considérer $y^{n-1,0}$ comme un élément de M^{n-1}. La différence $x^n - Dy^{n-1,0} \in M^n$ est un autre représentant de la classe α^n qui a pour particularité de ne pas avoir de composante dans $M^{n,0}$. Sur ce représentant, on peut reproduire la construction précédente, qui élimine cette fois la composante dans $M^{n-1,1}$. De proche en proche, on obtient un représentant qu'on note encore x^n tel que $x^{0,n} \neq 0$ et toutes les autres composantes sont nulles. La relation $Dx^{0,n} = 0$ signifie $dx^{0,n} = 0$ et $\delta x^{0,n} = 0$. De cette seconde relation on déduit l'existence de $z^n \in N^n$ tel que $\epsilon z^n = x^{0,n}$. Alors $\epsilon\,(dz^n) = d\,(\epsilon z^n) = dx^{0,n} = 0$. Donc dz^n est dans le noyau de ϵ, qui est par hypothèse nul. D'où $dz^n = 0$. L'élément $z^n \in N^n$ définit une classe de cohomologie $\beta^n \in H^n(N, d)$ telle que $\epsilon^{\#}\beta^n = \alpha^n$. Donc $\epsilon^{\#}$ est bien surjective. L'injectivité utilise une technique semblable sur le représentant $x^{n-1} \in M^{n-1}$ tel que $\epsilon\,(z^n) = Dx^{n-1}$.

■

On peut résumer cette construction dans le schéma suivant :



CHAPITRE

III

HOMOLOGIES, COHOMOLOGIES ET TOPOLOGIE

III.1 Homologie simpliciale

L'homologie simpliciale fait partie des premières tentatives pour définir une homologie qui donne des invariants topologiques. Cette homologie est de nature entièrement géométrique, et consiste à considérer des « blocs élémentaires » (points, triangles, tétraèdres, . . .) à partir desquels on reconstruit l'espace à étudier. On parle de triangulation de l'espace. Nous allons donc définir ces blocs élémentaires puis le complexe différentiel à partir duquel on calcule cette homologie.

III.1.1 Simplexes de $\mathbb{R}^N$

Définition

Dans ce qui suit, on se place dans $\mathbb{R}^N$. Soient $v_0, \ldots, v_p (p+1)$ points distincts de $\mathbb{R}^N$. On dira qu'ils sont géométriquement indépendants si les p vecteurs $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_p - v_0$ de $\mathbb{R}^N$ sont linéairement indépendants. Un p -simplexe σ^p est alors un sous espace de $\mathbb{R}^N$ défini par

$$\sigma^p = \left\{ x \in \mathbb{R}^N / x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1 \right\}$$

où les v_i sont $(p+1)$ points de $\mathbb{R}^N$ géométriquement indépendants. Les λ_i sont les coordonnées barycentriques de $x \in \sigma^p$.p est la dimension du simplexe. On note $\sigma^p = [v_0 v_1 \ldots v_p]$ un tel p -simplexe. C'est un compact de $\mathbb{R}^N$. On dira que les v_i sont les vertex de σ^p, et que le sous espace

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^N / x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1, \lambda_j = 0 \right\}$$

est la j-ième face de σ^p (face opposée au vertex v_j).

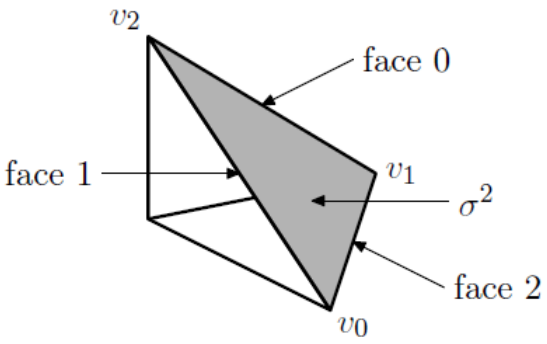


FIGURE III.1 – Faces d'un simplexe.

Les simplexes de dimension 0 de $\mathbb{R}^N$ sont les points. En dimension 1 on a les segments, en dimension 2 les triangles (pleins), en dimension 3 les tétraèdres (pleins), etc...

III.1.2 Complexe simplicial

Définition

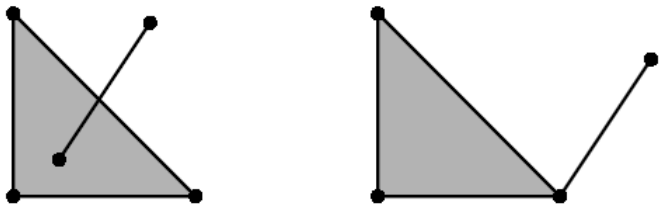


FIGURE III.2 – L'objet de gauche n'est pas un complexe simplicial. L'objet de droite est un complexe simplicial.

Un complexe simplicial K est un ensemble fini de simplexes de $\mathbb{R}^N$ tel que :

-Si $\sigma^p \in K$, alors toutes les faces de σ^p sont aussi dans K.

-Si $\sigma^p, \sigma^q \in K$, alors ou bien $\sigma^p \cap \sigma^q = \varnothing$, ou bien $\sigma^p \cap \sigma^q$ est une face

commune à σ^p et σ^q (donc un élément de K).

La dimension de K est la dimension maximale de ses simplexes.

Afin de définir une opération bord sur les complexes simpliciaux, il faut orienter les simplexes. Pour cela, on se donne un ordre sur les vertex du simplexe. On note $\sigma^p = \langle v_0 \dots v_p \rangle$ un p -simplexe orienté. Si on change l'ordre des vertex, on sort un signe ± 1 selon la signature de la permutation qui change l'ordre. Ainsi, avec cette règle on a $\langle v_0 v_1 \rangle = -\langle v_1 v_0 \rangle$ et $\langle v_{\mathbf{0}} v_{\mathbf{1}} v_{\mathbf{2}} \rangle = -\langle v_{\mathbf{1}} v_{\mathbf{0}} v_2 \rangle = \langle v_{\mathbf{1}} v_2 v_{\mathbf{0}} \rangle$ etc...

Soit maintenant K un complexe simplicial de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. On note $\ell(p)$ le nombre de p -simplexes dans K. Le groupe des p -chaînes de K, noté $C_p(K)$, est le groupe abélien libre engendré par les p -simplexes orientés de K En d'autres termes, une p -chaîne de $C_p(K)$ est une somme formelle

$$c = \sum_{i=1}^{\ell(p)} n_i \sigma_i^p,$$

où les σ_i^p sont les $\ell(p)$ p -simplexes de K et $n_i \in \mathbb{Z}$.

On peut alors définir une opération bord

$$\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K),$$

en posant

$$\partial_p \langle v_0 \dots v_p \rangle = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \langle v_0 \dots \widehat{v_i} \dots v_p \rangle ,$$

où $\widehat{v_i}$ signifie qu'on omet le vertex v_i (on obtient donc un $(p-1)$ -simplexe) et $\partial_0 \langle v_0 \rangle = 0$. On prolonge ∂_p par linéarité sur $\mathbb{Z}$ sur tout $C_p(K)$:

$$\partial_p c = \sum_{i=0}^{\ell(p)} n_i \partial_p \sigma_i^p.$$

On peut alors très facilement montrer que $\partial_{p-1}\partial_p = 0$. En effet on a : $\partial_p(\langle v_0, \cdots, v_i, \cdots, v_p \rangle) =$

$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \langle v_0, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_p \rangle$, donc $\partial_{p-1}\partial_p(\langle v_0, \cdots, v_i, \cdots, v_p \rangle) =$

$\sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \langle v_0, \cdots, \widehat{v_j}, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_p \rangle + \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \langle v_0, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, \widehat{v_j}, \cdots, v_p \rangle = 0.$

On obtient ainsi un complexe différentiel (décroissant)

$$C_k(K) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(K) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Dans ce complexe différentiel, les espaces $C_p(K)$ sont des modules sur l'anneau $\mathbb{Z}$. L'homologie de ce complexe est l'homologie simpliciale de K à valeur dans $\mathbb{Z}$, que l'on note $H_\bullet(K)$

On peut aussi introduire la cohomologie simpliciale de K comme la cohomologie adjointe du complexe $C_\bullet(K)$ (à valeurs dans $\mathbb{Z}$). On la note $H^\bullet(K)$. Pour un complexe simplicial K de $\mathbb{R}^N$ donné, l'union des simplexes de K considérés comme sous espaces de $\mathbb{R}^N$, est un sous espace topologique de $\mathbb{R}^N$, qu'on appelle le polyèdre de K, ou encore la réalisation géométrique de $\boldsymbol{K}$, et qu'on note $|K|$.

On dira qu'un espace topologique X est triangulable s'il existe un complexe simplicial K tel que X soit homéomorphe à $|K|$. On peut montrer que toute variété compacte est triangulable. On définit alors l'homologie simpliciale de X comme l'homologie simpliciale de K. L'homologie simpliciale de X est un invariant topologique, c'est à dire que si X' est un espace topologique homéomorphe à X, alors leurs homologies simpliciales sont isomorphes. On peut montrer en effet que si K et K' sont deux complexes simpliciaux qui fournissent toutes les deux des triangulations de X, alors leurs homologies simpliciales sont isomorphes. On définit la cohomologie simpliciale de X comme la cohomologie simpliciale de K. C'est aussi un invariant topologique.

III.2 Homologie singulière

Contrairement à l'homologie simpliciale, l'homologie singulière s'applique à tout espace topologique. Elle généralise l'homologie simpliciale en considérant non plus des triangles mais des applications partant de triangles standards à valeurs dans l'espace topologique étudié.

III.2.1 Complexe singulier

Simplexes singuliers

Définitions

Dans $\mathbb{R}^N$, on considère la base canonique $e_1, \ldots, e_N$ définie par les vecteurs $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ où 1 est à la i-ème position. On ajoute à cette base,considérée comme des points de $\mathbb{R}^N$, l'élément 0, noté e_0. On peut de façon canonique inclure $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$ en posant $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto (x_1, \ldots, x_N, 0)$. On note donc par les mêmes symboles les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^{N+1}$ qui viennent de la base canonique de $\mathbb{R}^N$. On note $\mathbb{R}^\infty$ la limite des inclusions $\mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$

Le p -simplexe standard de $\mathbb{R}^\infty$ est défini comme

$$\Delta_p = \left\{ x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i / \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Pour $p = 0, \Delta_0$ est donc le point origine e_0 de $\mathbb{R}^\infty$; pour $p = 1, \Delta_1$ est le segment qui joint e_0 à e_1; etc...

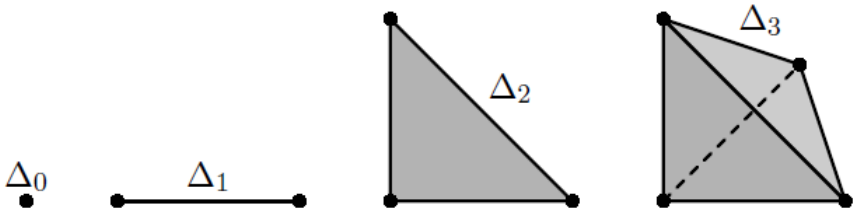


FIGURE III.3 – Les p-simplexes standards de $\mathbb{R}^\infty$ pour p = 0 ; 1 ; 2 ; 3.

Etant donnés $n+1$ points $v_0, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^N$, on note $[v_0, \ldots, v_n]$ l'application $\Delta_n \to \mathbb{R}^N$ définie par $x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i$. On appelle cette application un n -simplexe singulier affine. On remarquera que l'image de $[v_0, \ldots, v_n]$ est le sous espace de $\mathbb{R}^N$ engendré par les combinaisons connexes des points $v_0, \ldots, v_n$. Ici, on ne suppose pas que ces points soient géométriquement indépendants, ce qui signifie

que cette image peut être dégénérée. Par exemple, l'image de $[e_0, e_1, e_2, e_2]$ est un triangle, et non un tétraèdre. C'est de là que vient le mot "singulier".

Il sera utile par la suite d'identifier les n -simplexes standards avec les applications $[e_0, \ldots, e_n]$.

Une expression du type $[v_0, \ldots \widehat{v_i} \ldots, v_n]$ signifie que l'on omet le point v_i. Ainsi par exemple, $[e_0, \ldots \widehat{e_i} \ldots, e_p]$ est un $(p-1)$ -simplexe singulier affine dont l'image est contenue dans Δ_p. On note $F_i^p = [e_0, \ldots \widehat{e_i} \ldots, e_p]$: $\Delta_{p-1} \to \Delta_p$ ce simplexe singulier affine, et on l'appelle la i -ème face de Δ_p. En effet, l'image de F_i^p est la face de Δ_p opposée au sommet e_i. On a alors $F_i^p(e_j) = e_j$ pour $j < i$ et $F_i^p(e_j) = e_{j+1}$ pour $j \geq i$. On vérifie facilement que pour $j > i$ on a

$$F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0, \ldots \widehat{e_i} \ldots \widehat{e_j} \ldots, e_{p+1}].$$

Soit maintenant X un espace topologique. Un p-simplexe singulier sur X est une application continue $\sigma_p : \Delta_p \to X$. En considérant toute les sommes formelles finies à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de tels p-simplexes

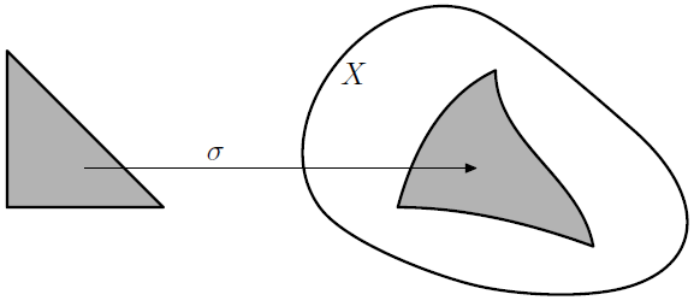


FIGURE III.4 – Exemple de simplexe singulier.

singuliers, on engendre un groupe abélien que l'on note $\Delta_p(X)$. C'est le groupe des p-chaînes singulières sur X. Une p-chaîne singulière de X s'écrit donc sous la forme $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ où les σ sont des p -simplexes singuliers et les n_σ des entiers. La somme porte sur un nombre fini de p-simplexes singuliers.

Comme on peut l'imaginer facilement, l'espace $\Delta_p(X)$ est énorme, puisque les applications continues $\Delta_p \to X$ sont nombreuses !

Si $\sigma : \Delta_p \to X$ est un p -simplexe singulier, on définit la i-ème face de σ comme le $(p-1)$-simplexe singulier

$$\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p : \Delta_{p-1} \to X.$$

Le bord de σ est alors la combinaison

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^{(i)}.$$

C'est une $(p-1)$-chaîne. On prolonge ∂_p par linéarité à toute p-chaîne $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$: $\partial_p c = \sum_\sigma n_\sigma \partial_p \sigma$.

Donc ∂_p définit un morphisme de groupes

$$\partial_p : \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X).$$

On montre alors que

$$\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
&\partial_p \left(\partial_{p+1}(\sigma)\right) = \partial_p \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \sigma \circ F_i^{p+1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \partial_p \left(\sigma \circ F_i^{p+1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} \sum_{j=0}^{p} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ F_i^{p+1} \circ F_j^p \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} \sum_{0 \leqslant j < i \leqslant p+1} (-1)^i (-1)^j \left[e_0, \ldots, \widehat{e}_j, \ldots, \widehat{e}_i, \ldots, e_{p+1} \right] \\
&+ \sum_{i=0}^{p+1} \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant p} (-1)^i (-1)^j \left[e_0, \ldots, \widehat{e}_i, \ldots, \widehat{e}_{j+1}, \ldots, e_{p+1} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} \sum_{0 \leqslant j < i \leqslant p+1} (-1)^i (-1)^j \left[e_0, \ldots, \widehat{e}_j, \ldots, \widehat{e}_i, \ldots, e_{p+1} \right] \\
&- \sum_{i=0}^{p+1} \sum_{0 \leqslant i < k \leqslant p+1} (-1)^i (-1)^k \left[e_0, \ldots, \widehat{e}_i, \ldots, \widehat{e}_k, \ldots, e_{p+1} \right] \ (k = j+1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Pour $p < 0$, on pose $\Delta_p(X) = 0$, et pour $p \leq 0, \partial_p = 0$. Par la suite, on notera ∂ pour tous les morphismes ∂_p. On a donc le complexe différentiel décroissant $(\Delta_\bullet(X), \partial)$:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \Delta_p(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial} 0.$$

Son homologie est l'homologie singulière de X, notée $H_\bullet(X)$. Cette homologie est un invariant topologique de X. La cohomologie singulière de X à valeurs dans $\mathbb{Z}, H^\bullet(X)$, est la cohomologie adjointe du complexe $\Delta_\bullet(X)$ C'est aussi un invariant topologique

Théorème

Si X a plusieurs composantes connexes par arcs X_α, ou plus généralement si $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, alors le groupe $\Delta_p(X)$ est la somme directe des groupes $\Delta_p(X_\alpha)$.

Preuve. Puisque pour tout $p \geqslant 0$, on a Δ_p est connexe par ares, donc pour tout p-simplexe singulier σ il existe α tel que : $\sigma \in \Delta_p(X_\alpha)$ car σ est continue, c'est-à-dire $\Delta_p(X) = \bigoplus_\alpha \Delta_p(X_\alpha)$. Cette décomposition est préservée par le passage à l'homologie, et on a $H_\bullet(X) = \bigoplus_\alpha H_\bullet(X_\alpha)$. En fait pour $c \in \ker \partial$, puisque $c = \sum_{\alpha=0}^n c_\alpha$ et $\partial c = \sum_{\alpha=0}^n \partial c_\alpha = 0$, alors $\partial c_\alpha = 0$ pour tout α, donc $[c] = \sum_{\alpha=0}^n [c_\alpha]$. On a si $c - c' = \partial c''$, alors $\Sigma_\alpha(c_\alpha - c'_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^n \partial c''_\alpha$, donc $c_\alpha - c'_\alpha = \partial c''_\alpha$, alors $[c_\alpha] = [c'_\alpha]$ pour tout α. En conséquence l'applicition

$$H_p(X) \longrightarrow \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha) \; : [c] = \sum_{\alpha=0}^n [c_\alpha] \longrightarrow (..., 0, [c_0], \ldots, [c_n], 0, \ldots),$$

est bien definie et bijective.

■

Il suffit donc, pour étudier cette homologie, de considérer des espaces connexes par arcs.

Homologie singulière à valeurs dans un groupe abélien quelconque

Comme dans le cas de l'homologie simpliciale, on a ici un exemple d'homologie où les espaces sont des modules sur l'anneau $\mathbb{Z}$. On peut généraliser cette construction en remplaçant l'anneau $\mathbb{Z}$, dont en réalité seule la structure de groupe abélien intervient, par n'importe quel groupe abélien G. En particulier, il est possible de définir l'homologie singulière de X à valeurs dans $\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, etc. Pour différencier ces différentes homologies, on note parfois $H_\bullet(X; \mathbb{Z})$ l'homologie singulière à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui vient d'être définie.

Soit G un groupe abélien dont l'opération interne est notée additivement. On définit le groupe $\Delta_p(X; \mathrm{G})$ des p-chaînes singulières à valeurs dans G sur X comme le groupe engendré par les sommes formelles finies $c = \sum_\sigma g_\sigma \sigma$ où les σ sont des p-simplexes singuliers et les g_σ sont des éléments de G. La définition de l'homologie singulière de X à valeurs dans G reprend celle à valeurs dans $\mathbb{Z}$, mais cette

fois on prolonge ∂ par linéarité sur G. En d'autres termes, on pose

$$\Delta_p(X;G) = \Delta_p(X) \otimes_Z G.$$

On note $H_\bullet(X;\mathrm{G})$ le groupe d'homologie singulière de X à valeurs dans G. On dira aussi que G est le groupe des coefficients de l'homologie singulière.

III.2.2 Propriétés de I'homologie singulière

La définition qui vient d'être donnée de l'homologie singulière a le mérite d'être compacte et facilement généralisable à d'autres groupes abéliens que $\mathbb{Z}$. Cependant, dans les exemples concrets, elle se révèle quasiment inefficace, car, à part quelques exemples très simples, elle ne permet pas le calcul direct du groupe d'homologie singulière. Il faut en fait tirer de cette définition des propriétés et des techniques qui permettent ces calculs dans des cas plus compliqués. C'est l'objet de la topologie algébrique.

Théorème

Il est relativement facile de montrer que l'homologie singulière de l'espace $X = *$ réduit à un point, vaut $H_0(*) = \mathbb{Z}$ et $H_p(*) = 0$ pour $p \neq 0$.

Preuve. [2] pour tout $p \geq 0$ il existe p-simplex singular unique $\sigma_{(p)} : \Delta_p \to X$ donc

$$\Delta_p(X) = \mathbb{Z} = \left\{ n\sigma_{(p)} \ ; \ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

et

$$\partial\sigma_{(p)} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_{(p)}^{(i)} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_{(p-1)} = \begin{cases} 0 & p \text{ impair ou } p = 0 \\ \sigma_{(p-1)} & p \text{ est pair et } p > 0 \end{cases}$$

On a :

$$\mathrm{Z}_p(\mathrm{X}) = \begin{cases} \Delta_p(\mathrm{X}) & p \text{ impair ou } p = 0 \\ 0 & p \text{ est pair et } p > 0 \end{cases} \text{ et } \mathrm{B}_p(\mathrm{X}) = \begin{cases} \Delta_p(\mathrm{X}) & p \text{ est impair} \\ 0 & p \text{ est pair} \end{cases} \text{ et } H_p(\mathrm{X}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ 0 & p > 0 \end{cases}$$

■

C'est un bon début...

Application pull-back induite en homologie

Définition

Soit $f : X \to X'$ une application continue entre deux espaces topologiques X et X'. Par composition,

f envoie les simplexes singuliers de X dans les simplexes singuliers de X' : $\sigma \mapsto f \circ \sigma$. On a donc une application induite $f_* : \Delta_\bullet(X) \to \Delta_\bullet(X')$, qui est un morphisme de groupes. II est facile de voir qu'elle commute avec les applications bord. On hérite donc d'une application en homologie, appelée l'application pull-back,

$$f_\# : H_\bullet(X) \to H_\bullet(X').$$

Ce résultat reste valable pour l'homologie à valeur dans n'importe quel groupe abélien.

Homotopies

Théorème

Si deux applications continues $f_0, f_1 : X \to Y$ sont homotopes, on peut montrer que $f_{0\#} = f_{1\#} : H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$. En conséquence, si deux espaces topologiques X et Y sont homotopes, alors $H_\bullet(X) = H_\bullet(Y)$.

Preuve. [2]

Lemme.

(i) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues on a

$$(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\# : H_p(X) \to H_p(Z),$$

pour tout $p \geq 0$.

(ii) Si $Id_X : X \to X$ est l'application identité alors $Id_{X\#}$ est le homomorphisme identité de $H_p(X)$ pour tout $p \geq 0$.

Preuve du Lemme.

(i) On a

$$(g \circ f)_*(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g_*(f \circ \sigma) = g_*(f_*(\sigma)) = g_* \circ f_*(\sigma),$$

alors

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*,$$

en déduire

$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}.$$

(ii) clair.

Maintenant pour $t \in I$ on définit $\varphi_t : X \to X \times I$ tel que $\varphi_t(x) = (x, t)$ et soit $F : X \times I \to Y$ un homotopie entre f et g, donc

$$F(., 0) = f \quad et \quad F(., 1) = g.$$

On a

$$\mathrm{F}\varphi_0 = f \quad et \quad F\varphi_1 = g.$$

puisque $\varphi_{0\#}$ = $\varphi_{1\#}$ car φ_{0*},φ_{1*} : $\Delta_p(X) \to \Delta_p(X \times I)$ sont homotopes. En effet, on definit les applications $P_i : \Delta_p(X) \to \Delta_{p+1}(X)$ pour $i = 0, 1, ..., p$ tel que

$$P_i(\sigma)(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) = \sigma(\lambda_0, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_p) \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i} \lambda_k\right)$$

, et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i$ et $P = \sum_{k=0}^{i} P_i$ et soit $\partial'_i : \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X)$ une application tel que : $\partial'_i(\sigma) = \sigma^{(i)}$ donc $\partial'_i(\sigma)(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) = \sigma(\lambda_0, \ldots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_i, \ldots, \lambda_{p-1})$.

Si $i < j - 1$ on a

$$\begin{aligned}
\partial'_j P_i(\sigma)(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) &= P_i(\sigma)(\lambda_0, \ldots, \lambda_{j-1}, 0, \lambda_j, \ldots, \lambda_p) \\
&= \sigma(\lambda_0, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \ldots, \lambda_{j-1}, 0, \ldots, \lambda_p) \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i} \lambda_k\right) \\
&= \partial'_{j-1}\sigma(\lambda_0, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \ldots, \lambda_p) \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i} \lambda_k\right) \\
&= P_i \partial'_{j-1}(\sigma)(\lambda_0, \ldots, \lambda_p).
\end{aligned}$$

Si $i > j$ on a

$$\begin{aligned}
&\partial'_j P_i(\sigma)(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\\
&\qquad = P_i(\sigma)(\lambda_0,\ldots,\lambda_{j-1},0,\lambda_j,\ldots,\lambda_p)\\
&\qquad = \sigma(\lambda_0,\ldots,\lambda_{j-1},0,\ldots,\lambda_{i-2},\lambda_{i-1}+\lambda_i,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_p)\ \times\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}\lambda_k\right)\\
&\qquad = \partial'_j\sigma(\lambda_0,\ldots,\lambda_{i-2},\lambda_{i-1}+\lambda_i,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_p)\ \times\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}\lambda_k\right)\\
&\qquad = P_{i-1}\left(\partial'_j\sigma\right)(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\\
&\qquad = P_{i-1}\partial'_j(\sigma)(\lambda_0,\ldots,\lambda_p).
\end{aligned}$$

Si $i = j$ on a

$$\begin{aligned}
&\partial'_j P_j(\sigma)(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\\
&\qquad = P_j(\sigma)(\lambda_0,\ldots,\lambda_{j-1},0,\lambda_j,\ldots,\lambda_p)\\
&\qquad = \sigma(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\times\left(1-\sum_{k=0}^{j-1}\lambda_k\right)\\
&\qquad = P_{j-1}(\sigma)(\lambda_0,\ldots,\lambda_{j-1},0,\lambda_j,\ldots,\lambda_p)\\
&\qquad = \partial'_j P_{j-1}(\sigma)(\lambda_0,\ldots,\lambda_p),
\end{aligned}$$

alors

$$\partial'_j P_j = \partial'_j P_{j-1}$$

$$\partial'_j P_i = P_{i-1}\partial'_j \ si \quad i > j$$

$$\partial'_j P_i = P_i\partial'_{j-1} \ si \quad i < j-1$$

$$\partial P = \sum_{j=0}^{p+1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+j}\partial'_j P_i = \partial'_0 P_0 + \sum_{i=j=1}^{p}\partial'_j P_j$$
$$+\sum_{i=j-1=0}^{p}(-1)\partial'_j P_{j-1} - \partial'_{p+1}P_p + \sum_{i>j}(-1)^{i+j}\partial'_j P_i + \sum_{i<j-1}(-1)^{i+j}\partial'_j P_i.$$

On peut alors voir que

$$\partial P = \partial'_0 P_0 - \partial'_{p+1}P_p - P\partial,$$

mais on a

$$\begin{aligned}
&\partial'_0 P_0(\sigma)\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\\
&= P_0(\sigma)\,(0,\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\\
&= \sigma\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\times 1\\
&= \varphi_1\sigma\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\\
&= \varphi_{1*}(\sigma)\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\partial'_{p+1} P_p(\sigma)\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\\
&= P_p(\sigma)\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_p,0)\\
&= \sigma\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\times 0\\
&= \varphi_0\sigma\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)\\
&= \varphi_{0*}(\sigma)\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_p),
\end{aligned}$$

alors

$$\partial P + P\partial = \varphi_{1*} - \varphi_{0*}.$$

On obtient

$$f_\# = (\mathrm{F}\varphi_0)_\# = \mathrm{F}_\#\varphi_{0\#} = \mathrm{F}_\#\varphi_{1\#} = (\mathrm{F}\varphi_1)_\# = g_\#.$$

On de plus si X et Y deux espaces topologiques sont homotopes, donc il existe deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ tel que $f \circ g \simeq Id_Y$ et $g \circ f \simeq Id_X$, alors

$$f_\# \circ g_\# = (f \circ g)_\# = Id_{Y\#} = Id_{H_\bullet(Y)},$$

et

$$g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# = Id_{X\#} = Id_{H_\bullet(X)},$$

donc $f_\#$ est isomorphisme entre deux groups $H_\bullet(X)$ et $H_\bullet(Y)$.

■

Ce résultat donne par exemple l'homologie d'un espace X contractile : $H_0(X) = \mathbb{Z}$ et $H_p(X) = 0$ pour $p \neq 0$.

Théorème

On peut montrer que si X est connexe par arcs, alors $H_0(X) = \mathbb{Z}$, où un générateur de $H_0(X)$ est donné par le 0-simplexe singulier $\Delta_0 \ni e_0 \mapsto x \in X$ pour n'importe quel $x \in X$.

Preuve. [1] Par definition, $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$ car $\partial_0 = 0$. Soit $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon\left(\Sigma_i n_i \sigma_i\right) = \Sigma_i n_i$. On peut facilement voir que ε est surjective si X est non vide. Soit $\sigma : \Delta_1 \to X$ est un 1-simplex singulier on a $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{(0)} - \sigma^{(1)}) = 1 - 1 = 0$. donc on a l'inclusion $\operatorname{Ker}\varepsilon \subset \operatorname{Im}\partial_1$.

On suppose $\varepsilon\left(\Sigma_i n_i \sigma_i\right) = 0$, alors $\Sigma_i n_i = 0$ et σ_i est 0-simplexe singulier. Soit $x_0 \in X$ c'est-à-dire il existe un chemin $\tau_i : [e_0, e_1] \to X$ d'origine x_0 et d'extrémité $\sigma_i(e_0)$ car X est connexe par arcs. Soit $\sigma_0 : \Delta_0 \to X$ est 0-simplexe singuliere tel que $\sigma_0(e_0) = x_0$, on peut voir que τ_i est 1-simplexe singuliere et puisque $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$, donc $\partial\left(\sum_i n_i\tau_i\right) = \sum_i n_i\sigma_i - \sum_i n_i\sigma_0 = \sum_i n_i\sigma_i$ car $\sum_i n_i = 0$, alors $\sum_i n_i\sigma_i$ est 0-bord, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}\varepsilon \subset \operatorname{Im}\partial_1$, donc $\operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Im}\partial_1$.En Conséquence : $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1 = C_0(X)/\operatorname{Ker}\varepsilon \simeq \mathbb{Z}$. ■

Ce résultat donne donc H_0 pour tout espace topologique X, compte-tenu de la remarque sur la décomposition de X en composantes connexes par arcs.

Isomorphisme entre les homologies simpliciale et singulière

Dans le cas où l'espace topologique X est triangulable, on a l'important résultat que les homologies simpliciale et singulière sont les mêmes.

III.2.3 Homologie relative

Définition

Soit X un espace topologique et $Y \subset X$ un sous espace topologique. Le complexe différentiel décroissant $(\Delta_\bullet(Y), \partial)$ est de toute évidence un sous complexe différentiel de $(\Delta_\bullet(X), \partial)$. On note $\Delta_p(X, Y) = \Delta_p(X)/\Delta_p(Y)$ les groupes abéliens quotients. La différentielle ∂ passe au quotient et on peut introduire ainsi le complexe différentiel quotient $(\Delta_\bullet(X, Y), \partial)$. L'homologie de ce complexe est l'homologie singulière relative de la paire topologique (X, Y). On la note $H_\bullet(X, Y)$.

L'homologie relative est l'homologie naturellement adaptée aux paires d'espaces topologiques et à

leurs morphismes. Dans cet esprit, il faut considérer un espace topologique X comme la paire $(X, \varnothing)$ et remarquer que $H_\bullet(X) = H_\bullet(X, \varnothing)$.

De la suite exacte courte de complexes différentiels

$$0 \longrightarrow \Delta_\bullet(Y) \longrightarrow \Delta_\bullet(X) \longrightarrow \Delta_\bullet(X, Y) \longrightarrow 0.$$

on tire la suite exacte longue en homologie relative :

$$\cdots \longrightarrow H_p(Y) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_p(X, Y) \longrightarrow H_{p-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(Y) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X, Y) \longrightarrow 0.$$

L'homologie relative a été définie pour obtenir une telle suite exacte longue.

Sa signification est la suivante. On cherche des invariants de la topologie de X modulo la topologie de Y dans X. Attention, il ne s'agit pas de négliger Y brutalement, en le réduisant par exemple à un point. Dans le groupe $H_\bullet(X, Y)$ la "dimension" de Y intervient, puisque le complexe $\Delta_p(X, Y)$ est différent de $\Delta_p(X)$ s'il existe des chaînes singulières de Y en dimension p.

Si $B \subset A \subset X$ sont trois espaces topologiques emboîtés, tels que tout couple constitué de deux de ces espaces forme une paire d'espaces topologiques, alors la suite exacte courte des complexes différentiels

$$0 \longrightarrow \Delta_\bullet(A, B) \longrightarrow \Delta_\bullet(X, B) \longrightarrow \Delta_\bullet(X, A) \longrightarrow 0.$$

induit la suite exacte longue en homologie relative du triplet (X, A, B) :

$$\cdots \longrightarrow H_p(A, B) \longrightarrow H_p(X, B) \longrightarrow H_p(X, A) \longrightarrow H_{p-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(A, B) \longrightarrow H_0(X, B) \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0,$$

qui généralise la suite exacte longue précédente.

Résultat

La suite exacte longue précédente permet de prouver que les groupes $H_p(X, *)$ et $H_p(X)$ sont isomorphes pour tout $p > 0$. En degré 0, si (X_α) est la famille des composantes connexes par arcs de X, on a

$$H_0(X) = \bigoplus_\alpha \mathbb{Z} \text{ et } H_0(X, *) = \bigoplus_{\alpha \neq \alpha_0} \mathbb{Z},$$

Preuve. Si $p > 2$, on obtient

$$0 \to H_p(X) \to H_p(X, *) \to 0,$$

et le résultat est immédiat. En outre, l'application $H_0(*) \to H_0(X)$ est injective, il vient, donc

$$0 \to H_1(X) \to H_1(X,*) \stackrel{0}{\to} \mathbb{Z} \to H_0(X) \to H_0(X,*) \to 0,$$

ce qui permet de conclure.

■

Théorème

La propriété d'excision de l'homologie relative permet de se faire une idée du comportement de cette homologie vis-à-vis des sous espaces inclus dans Y. Pour énoncer cette propriété, soit U un sous espace de $Y \subset X$ tel que la fermeture de U soit contenue dans l'intérieur de Y, alors l'inclusion $(X\backslash U, Y\backslash U) \hookrightarrow (X,Y)$ induit un isomorphisme

$$H_\bullet(X\backslash U, Y\backslash U) \simeq H_\bullet(X,Y).$$

Si $f : (X,Y) \to (X',Y')$ est un morphisme de paires d'espaces topologiques, alors il induit un morphisme de groupes abéliens

$$f_\# : H_\bullet(X,Y) \to H_\bullet(X',Y').$$

Si deux morphismes de paires d'espaces topologiques $f, g : (X,Y) \to (X',Y')$ sont homotopes, alors ces morphismes de groupes sont les mêmes. En particulier, si deux paires (X,Y) et (X',Y') sont homotopes, alors leurs homologies singulières sont identiques.

Si G est un groupe abélien, on peut réaliser la construction précédente avec les chaînes singulières à valeurs dans G, on obtient alors la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_p(Y;\mathrm{G}) \longrightarrow H_p(X;\mathrm{G}) \longrightarrow H_p(X,Y;\mathrm{G}) \longrightarrow H_{p-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(Y;\mathrm{G}) \longrightarrow H_0(X;\mathrm{G}) \longrightarrow H_0(X,Y;\mathrm{G}) \longrightarrow 0.$$

III.2.4 Homologie réduite

Définition

Soit l'application (continue) $f : X \to *$ qui envoie X tout entier sur l'espace réduit à un unique point, alors on obtient un morphisme en homologie $f_\# \; H_\bullet(X) \to H_\bullet(*)$. On définit l'homologie réduite de X comme le groupe abélien gradué Ker $f_\# \subset H_\bullet(X)$. On la note

$$\widetilde{H}_\bullet(X) = \mathrm{Ker}\,(f_\# : H_\bullet(X) \to H_\bullet(*)).$$

Comme l'homologie $H_\bullet(*)$ n'est non nulle qu'en degré 0, l'homologie relative ne diffère de $H_\bullet(X)$ qu'en degré 0, où en quelque sorte une contribution de $H_0(*) = \mathbb{Z}$ est ôtée, mais on peut voir la relation : $H_0(X) = \widetilde{H}_0(X) \bigoplus \mathbb{Z}$. En particulier, $\widetilde{H}_\bullet(*) = 0$. De manière plus générale, si X est un espace contractile, $\widetilde{H}_\bullet(X) = 0$.

Résultat

on peut en déduire que pour tout espace topologique X on a l'isomorphisme :

$$H_\bullet(X, *) \simeq \widetilde{H}_\bullet(X).$$

Théorème

Si Y est un sous espace fermé de X et V est un voisinage de Y tel que Y est un rétract forte par déformation de V alors

$$H_\bullet(X, Y) \simeq H_\bullet(X/Y, Y/Y) \simeq \widetilde{H}_\bullet(X/Y).$$

Preuve. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
H_p(X,Y) & \xrightarrow{f_{1\#}} & H_p(X,V) & \xleftarrow{f_{2\#}} & H_p(X-Y, V-Y) \\
\downarrow{\scriptstyle h_{1\#}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{2\#}} \\
H_p(X/Y, Y/Y) & \xrightarrow{g_{1\#}} & H_P(X/Y, V/Y) & \xleftarrow{g_{2\#}} & H_p(X/Y-Y/Y, V/Y-Y/Y)
\end{array}$$

On a Y est un rétract forte par déformation de V, donc deux paires (V, Y) et (Y, Y) sont homotopes, alors $H_p(V, Y) = H_p(Y, Y) = 0$, donc de la suite exacte longue en homologie relative du triplet (X, V, Y), en conséquence, $f_{1\#}$ est un isomorphisme. De la rétraction forte par déformation de V sur Y, On peut montrer que Y/Y est un rétract par déformation V/Y, donc $g_{1\#}$ est un isomorphisme. De même de la propriété d'excision on peut en déduire que $f_{2\#}$ et $g_{2\#}$ sont des isomorphismes. Il est clair que $h_{2\#}$ est un isomorphisme car il est facile de voir que h_2 est un homéomorphisme. De la commutativité du diagramme on peut facilement montrer que $h_{1\#}$ est un isomorphisme.

■

Ce résultat permet d'accéder à $H_\bullet(X, Y)$ en considérant un espace topologique en tant que tel, et non

une paire. D'un autre côté, il signifie aussi que l'homologie réduite n'est qu'un cas particulier d'homologie relative...

L'homologie réduite est l'homologie adaptée aux espaces topologiques pointés, à leurs morphismes et à leurs constructions. En particulier, on peut montrer que si $Y \subset X$ est fermé, en utilisant la suite exacte longue de l'homologie relative, on obtient la suite exacte longue en homologie réduite :

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_p(Y) \longrightarrow \widetilde{H}_p(X) \longrightarrow \widetilde{H}_p(X/Y) \longrightarrow \widetilde{H}_{p-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_0(Y) \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \longrightarrow \widetilde{H}_0(X/Y) \longrightarrow 0.$$

Souvenons-nous que les groupes gradués $H_\bullet(X)$ et $\widetilde{H}_\bullet(X)$ ne diffèrent qu'en degré 0, ce qui implique qu'à part en bas degré, cette suite exacte longue est valable avec l'homologie ordinaire.

Prenons le cas particulier de l'inclusion de l'espace topologique compact X dans son cône CX. Alors $CX/X = SX$ est la suspension de X. On sait que CX est contractile, donc $\widetilde{H}_\bullet(CX) = 0$. La suite exacte longue ci-dessus nous révèle alors les isomorphismes

$$\widetilde{H}_p(X) \simeq \widetilde{H}_{p+1}(SX).$$

L'homologie réduite peut être définie à valeurs dans n'importe quel groupe abélien G et les résultats ci-dessus s'y généralisent sans modification.

III.2.5 La suite de Mayer-Vietoris

Théorème

Il existe une autre suite exacte longue que celle de l'homologie relative qui permet de relier l'homologie d'un espace X à l'homologie de sous espaces.

Pour la construire, considérons deux sous espaces U et V dans X tels que X soit l'union des intérieurs de U et V. Dans le groupe $\Delta_p(X)$, considérons les chaînes qui sont somme de chaînes dans U et de chaînes dans V. Notons ce sous groupe $\Delta_p(U+V)$, alors l'application bord ∂ sur $\Delta_\bullet(X)$ se restreint à $\Delta_\bullet(U+V)$. On peut montrer que l'inclusion de complexes différentiels $\Delta_\bullet(U+V) \hookrightarrow \Delta_\bullet(X)$ induit un isomorphisme en homologie singulière.

Considérons maintenant la suite exacte courte de complexes différentiels

$$0 \longrightarrow \Delta_\bullet(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} \Delta_\bullet(U) \oplus \Delta_\bullet(V) \xrightarrow{\psi} \Delta_\bullet(U+V) \longrightarrow 0.$$

où, pour tout $x \in \Delta_p(U \cap V)$, on pose $\varphi(x) = (x, x) \in \Delta_p(U) \oplus \Delta_p(V)$, et pour tous $(x, y) \in \Delta_p(U) \oplus \Delta_p(V)$, on pose $\psi(x, y) = x - y$.

La suite de Mayer-Vietoris est la suite exacte longue associée à cette suite exacte courte de complexes différentielles. Compte-tenu de l'identification ci-dessus, elle prend la forme :

$$\cdots \to H_p(U \cap V) \to H_p(U) \oplus H_p(V) \to H_p(X) \to H_{p-1}(U \cap V) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(X) \to 0.$$

Dans le cas où les deux ouverts U et V sont disjoints, cette suite exacte longue montre que pour tout $p \geq 0$ on a

$$H_p(U \sqcup V) = H_p(U) \oplus H_p(V).$$

L'invariance homotopique et la suite exacte longue de Mayer-Vietoris restent valable en replaçant H par $\widetilde{H}$.

CHAPITRE

IV

APPLICATIONS

En 1887, **Camille Jordan** rédige la première démonstration de le théorème maintenant connu sous le nom théorème de Jordan qui s'énonce ainsi : Toute courbe de Jordan sépare le plan en deux composantes connexes disjointes dont elle est la frontière commune ; une seule d'entre elles est bornée. En la proposition ci-dessous, nous démontrerons une généralisation de ce théorème en dimension n en utilisant utilise des outils de topologie algébrique. Nous utilisons ce théorème pour montrer que "ouvert dans $\mathbb{R}^n$" est un invariant topologique. Cette théorème s'appelle "Théorème de l'**invariance du domaine**". Nos références dans cette partie sont [1] et [5].

Proposition IV.0.1 *(a) Pour tout plongement* $h : D^k \to \mathbb{S}^n$, $\widetilde{H}_p\left(\mathbb{S}^n - h\left(D^k\right)\right) = 0 ; \forall p \geqslant 0.$

(b) Pour tout plongement $h : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ *tel que* $k < n$, $\widetilde{H}_p\left(\mathbb{S}^n - h\left(\mathbb{S}^k\right)\right)$ *est* $\mathbb{Z}$ *si* $p = n - k - 1$ *et 0 sinon.*

Preuve. Montrons (a) par récurrence, on a pour $k = 0, \mathbb{S}^n - h\left(D^0\right)$ est homéomorphe au $\mathbb{R}^n$, un homéomonphisme est ici la projection stéréographique, et $\mathbb{R}^n$ est contractile, en fait on a l'application

$H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ tel que $H(x,t) = (1-t)x$ avec $H(x,0) = x$ et $H(x,1) = 0$, alors

$$\widetilde{H}_p\left(\mathbb{S}^n - h\left(D^0\right)\right) = 0, \forall p \geqslant 0.$$

Comme D^k et I^k Sont homéomorphes, donc on peut utiliser I^k au lieu de D^k. On suppose que $\widetilde{H}_p\left(\mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1}\right)\right) = 0\,; \forall p \geqslant 0$ pour tout plongement $h : I^{k-1} \to \mathbb{S}^n$. Soit $A = \mathbb{S}^n - h(I^{k-1} \times [1/2;1])$ et $B = \mathbb{S}^n - h(I^{k-1} \times [0;1/2])$, donc $A \cap B = \mathbb{S}^n - h(I^k)$ et $A \cup B = \mathbb{S}^n - h(I^{k-1} \times \{1/2\})$, en utilisant la suite Mayer-Vietoris et $\widetilde{H}_p\left(\mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1}\right)\right) = 0\,; \forall p \geqslant 0$ pour tout plongement h, on trouve un isomorphisme

$$\varnothing : \widetilde{H}_p\left(\mathbb{S}^n - h\left(I^k\right)\right) \to \widetilde{H}_p(A) \oplus \widetilde{H}_p(B) \text{ tel que : } \varnothing([c]) = ([c],[c]),$$

pour tout $p \geqslant 0$, si'l existe $[a] \in \widetilde{H}_p\left(\mathbb{S}^n - h\left(I^k\right)\right)$ tel que $[\alpha] \neq 0$, donc α n'est pas une bord dans au moins un de A et B. Par itération, on peut alors produire une séquence inbriquiée d'intervalles fermés $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, tel que $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_m = \{p\}$ et $p \in I$ tel que α n'est pas une bord dans $\mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1} \times I_m\right)$ pour tout $m \in I$. D'autre part, on a α est bord d'une chaîne $\beta = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ dans $S^n - h\left(I^{k-1} \times \{p\}\right)$, puisque $\sigma(\Delta_p)$ est compact car σ est continue et Δ_p est compact dans $\mathbb{R}^n$, donc $\bigcup_\sigma(\Delta_p)$ est compact et $\left(\mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1} \times I_m\right)\right)_{m\in IN}$ est recouvrement ouvert de $\bigcup_\sigma(\Delta_p)$ car $\bigcup_\sigma(\Delta_p) \subset \mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1} \times \{p\}\right) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1} \times I_m\right)$, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\left(\mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1} \times I_m\right)\right)_{m\in J}$ c'est à dire $\bigcup_\sigma(\Delta_p) \subset \mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1} \times I_M\right)$ tel que $M = \mathrm{Max}_{m\in J}\{m\}$, alors β est chaîne dans $\mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1} \times I_M\right)$ et α est bord dans $\mathbb{S}^n - h\left(I^{k-1} \times I_M\right)\cdot$ c'est contradiction, donc

$$\widetilde{H}_p\left(\mathbb{S}^n - h\left(D^k\right)\right) = 0.$$

(b) En utilisant aussi le raisonnement par récurrence.

• Pour $k = 0$, on pose $h\left(\mathbb{S}^0\right) = \{x_1, x_2\}$ tel que x_1 et x_2 des points différents de S^n. Puisque $\mathbb{S}^n - \{x_1, x_2\}$ est homéomorphe au $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, et on a pour $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ tel que $f(x,y) = x$ et $g : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tel que : $g(x) = (x,0)$, $f \circ g = Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et $g \circ f \simeq Id_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}}$ par l'application $H : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tel que $H(x,y,t) = (x,ty)$ donc $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ sont homotopes. Maintenant montrons que

$$\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on pose $X_1 = S^n - \{x_1\}$, et $X_2 = S^n - \{x_2\}$. Puisque $X_1 \simeq X_2 \simeq \mathbb{R}^n$, donc $\widetilde{H}_p(X_1) = \widetilde{H}_p(X_2) = \widetilde{H}_p(\mathbb{R}^n) = 0$, et on a X_1 et X_2 sont ouverts dans S^n et $X_1 \cup X_2 = S^n$. par la suite de Mayer-Vietoris on

peut déduire que

$$\widetilde{H}_p\left(S^n\right) = \widetilde{H}_{p-1}\left(S^n - \{x_1, x_2\}\right),$$

mais on a pour $n > 1$, $S^n - \{x_1, x_2\} \simeq S^{n-1}$, alors $\widetilde{H}_p\left(S^n\right) = \widetilde{H}_{p-1}\left(S^{n-1}\right)$, et on a $S^0 = \{a, b\} = \{a\} \sqcup \{b\}$, donc

$$H_0\left(S^0\right) = H_0(\{a\}) \oplus H_0(\{b\}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ alors } \widetilde{H}_0\left(S^0\right) = \mathbb{Z}.$$

On peut utiliser le raisonnement par récurrence sur n. On trouve

$$\widetilde{H}_p\left(S^n - h\left(S^0\right)\right) = \widetilde{H}_p\left(S^{n-1}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $k = 0$ vérifie la propriété.

• On Suppose que $k-1$ vérifie la propriété. Soit D_+^k et D_-^k les hémisphéres de $\mathbb{S}^k$, on a $\mathbb{S}^k = D_+^k \cup D_-^k$ et $\mathbb{S}^{k-1} = D_+^k \cap D_-^k$. On pose $U = \mathbb{S}^n - h\left(D_+^k\right)$ et $V = \mathbb{S}^n - h(D_-^k)$. par la partie (a)on a $\widetilde{H}_\bullet(U) = \widetilde{H}_\bullet(V) = 0$, donc par la suite de Mayer-Vietoris pour les ensembles U et V on peut montrer facilment

$$\widetilde{H}_p\left(\mathbb{S}^n - h\left(\mathbb{S}^k\right)\right) = \widetilde{H}_{p+1}\left(\mathbb{S}^n - h\left(\mathbb{S}^{k-1}\right)\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n-k-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors k vérifie la propriété.

■

Théorème IV.0.1 ***(Invariance du domaine)***

Si U est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout plongement $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $h(U)$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Soit $g : U \longrightarrow \mathbb{S}^n$ un plongement, si $x \in g(U)$ et $D^n \subset U$ une boule centrée en la point $g^{-1}(x)$. Montrons que $g\left(D^n - \partial D^n\right)$ est un ouvert dans $\mathbb{S}^n$. On a par la proposition précédent

$$\widetilde{H}_0\left(\mathbb{S}^n - g\left(\partial D^n\right)\right) = \mathbb{Z},$$

en déduire que $\mathbb{S}^n - g(\partial D^n)$ se compose de deux composants connexes par arcs. Comme $D^n - \partial D^n$ est un ouvert dans U il est donc homéomorphe au $g\left(D^n - \partial D^n\right)$, ainsi, par la proposition précédent on a

$$\widetilde{H}_0\left(\mathbb{S}^n - g\left(D^n\right)\right) = 0,$$

c'est-à-dire $g\left(D^n - \partial D^n\right)$ et $\mathbb{S}^n - g\left(D^n\right)$ sont connexes par arcs et puisque leur union est égale à $\mathbb{S}^n - g\left(\partial D^n\right)$. En conséquence, les deux composants de $\mathbb{S}^n - g\left(\partial D^n\right)$ sont $g\left(D^n - \partial D^n\right)$ et $\mathbb{S}^n - g\left(D^n\right)$. En paticulier, $\mathbb{S}^n - g\left(D^n\right)$ est un fermé dans $\mathbb{S}^n - g\left(\partial D^n\right)$, donc $g\left(D^n - \partial D^n\right)$ est un ouvert dans $\mathbb{S}^n - g\left(\partial D^n\right)$.

D'autre part, on a ∂D^n est compact, alors $g\left(\partial D^n\right)$ est compact et fermé dans $\mathbb{S}^n$, donc $\mathbb{S}^n - g\left(\partial D^n\right)$ est un ouvert dans $\mathbb{S}^n$, en conséquence, $g\left(D^n - \partial D^n\right)$ est un ouvert dans $\mathbb{S}^n$. Finalement, $g(U)$ est un ouvert dans $\mathbb{S}^n$.

Puisque $\mathbb{S}^n$ est le compactifié par un point de $\mathbb{R}^n$, en effet, on a $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{S}^n - \{P\}$ alors $(\mathbb{R}^n)^+ \simeq (\mathbb{S}^n - \{P\})^+$ et l'application

$$\varphi : (\mathbb{S}^n - \{P\})^+ \longrightarrow \mathbb{S}^n \text{ tel que } \varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{S}^n - \{P\} \\ P & \text{si } x = \infty \end{cases}$$

est un homéomorphisme. D'où Pour tout plongement $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $h(U)$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

■

CONCLUSION

L'homologie est un outil trés fort qui intervient dans plusieurs branches de mathématiques ; dans la géométrie algébrique on retrouve la cohomologie des faiseaux, la cohomology étale.., dans l'algèbre il y la cohomologie des groupes, dans la théorie des nombre on a la cohomologie galoisienne...etc. Cette théorie repose sur la conversion d'un problème topologique à un problème algébrique, qui utilise le concept de structures libres pour la transition entre les deux structures.

Depuis son émergence dans la seconde moitié du XIXe siècle, cette théorie a beaucoup évolué, en particulier, elle a été généralisée par Michael Atiyah et Friedrich Hirzebruch à K-théorie. Cette théorie a contribué à prouver nombreux résultats en mathématiques (théorème du point fixe de Brouwer, théorème de la boule chevelue, théorème de Borsuk - Ulam, Invariance du domaine, Invariance de la dimension...) ainsi que dans la physique théorique (cohomologie BRST des théories de jauge, théories des champs, théories conformes, homologie de Morse et supersymétrie, systèmes dynamiques...).

Un de projet qu'on peut viser ensuite à ce travail est d'étudier une théorie spécifique de cohomologie dans une branche mathématique, par example la cohomology galoisienne dans la théorie des nombres, la cohomology étale dans la géométrie algébrique. Cela serait un projet très intéressant en vue de l'importance de cette théorie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *A.Hatcher, Algebraic Topology, New York, CUP, 2001.*

[2] *C.KOSNIOWSKI, A FIRST COURSE IN algebraic topology, Cambridge University Press 1980.*

[3] *W.Massey, a Basic Course in Algebraic Topology, Springer-Verlag, NeW YorK, Inc, 1991.*

[4] *T.MASSON, Introduction aux (Co)Homologies, Paris : Hermann, 2008.*

[5] *V.V.Prasolov, Elements of Homology Theory, American Mathematical Society, 2007.*

Résumé

Dans cette mémoire, nous avons traité la définition et les propriétés les plus importantes des groupes d'homologie dans le cas général, ainsi que de celles qui aident à calculer les groupes d'homologie singulier. Quant à le chapitre d'applications, nous avons montré tout d'abord que pour toute partie de S^n qui est homéomorphe à S^k, tel que $k < n$, alors sa complément dans S^n est divisé en deux parties ouverts (dans le complément) et disjointes, par calculer des groupes de leur homologie singulière, en utilisant la suite de Mayer-Vietoriss et la propriété suivante : pour tout espace topologique X, alors $H_0(X)$ est un groupe abélien libre engendré par son ensemble de composants connexes par arcs. Nous avons utilisé ce résultat pour montrer la théorème Invariance du Domaine.

Abstract

In this thesis, we dealt with the definition and most important properties of homology groups in the general case, as well as those that help in calculating the singular homology groups. As for the applications chapitre, we showed first that for each part of S^n that is homeomorphic to S^k, where $k < n$, then its complement in S^n is divided into two separate parts, each of which is open in the it by calculating groups of their singular homology, by using the Mayer–Vietoris sequence and the following property : for each topological space X, then $H_0(X)$ is a free abelian group generated by its set of path-components. We used that to prove Invariance of Domain theorem.

ملخص

في هذه المذكرة، تطرقنا الى تعريف واهم خصائص زمر التماثل في الحالة العامة وكذا التي تساعد في حساب زمر التماثل المفرد. أما في فصل التطبيقات فقد أثبتنا أولا أن من أجل كل جزء من S^n متشاكل طبولوجيا مع S^k حيث $n > k$، فإن متممته في S^n تنقسم الى جزئين منفصلين كل منهما مفتوح فيها، وذلك عن طريق حساب زمر تماثلها المفرد، بإستخدام متتالية ماير فيتوريس والخاصية التالية : من أجل كل فضاء طبولوجي X، فإن $H_0(X)$ هو عبارة عن زمرة تبديلية حرة مولدة بمجموعة مركبات X المسارية. حيث استخدمنا ذلك في إثبات أن في R^n الفتح هو خاصية طبولوجية.