N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

---

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Thème

Les fonctions sphériques et quelques applications

Présenté par:

KAIDAR Dalal
SAYADI Sara
ZEGHOUD Khaoula

Sous la supervision de :

Dr. BEN ALI Brahim

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Louange à Allah qui nous a facilité l'accomplissement de ce travail de recherche qui ne peut être accompli qu'avec Son aide.

Nous tenons tout d'abord à remercier notre encadreur Dr. Ben Ali Brahim pour son aide à réaliser ce modeste travail, et de la qualité de son encadrement pendant toute la durée de recherche pour que ce travail voit la lumière.

Nous exprimons notre sympathie et nos vifs remerciements à tous ceux qui contribué de prés ou de loin l'élaboration de ce mémoire, qu'ils soient tous assurés de notre profonde reconnaissance et trouvent dans ces mots l'expressions de nos sincères remerciements.

Comme nous tenons à remercier nos familles, et surtout nos parents pour leur soutients bienveillant durant la préparation.

Kaidar Dalal.
Sayadi Sara.
Zeghoud Khaoula.

Table des matières

Introduction

Les fonctions sphériques sont parmi les fonctions spéciales qui sont toutes considérées comme des solutions particulières de l'équation différentielle d'un certain type apparaissant dans de nombreux problèmes de physique théorique et mathématique. Parmi les fonctions spéciales les fonctions sphériques sont les plus fréquemment rencontrées en physique et mathématique appliquées par conséquent, et plus précisement, elles sont trés importantes dans la géomathématiques qui devient la clé de construire des nouvelles technologies.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques définitions et notions de base, puis nous définissons les groupes de lie, Les fonction de Bessel cylindriques et les polynômes de legendre.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons les fonctions sphériques sur l'algèbre de Hecke. Nous discutons également les plus importants types de fonctions sphériques (les harmoniques sphériques, Les fonctions de Bessel sphériques, Les fonctions sphériques généralisées et les fonctions sphériques de volume), leurs types, leurs propriètés (représentation intégrale, relation de récurrence, orthogonalité), puis nous introduisons l'expansion d'onde plane et son utilisation pour calculer les intégrales des fonctions de Bessel sphériques et enfin, nous définissons le théorème d'addition.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous présentons l'ètude de certains problèmes de la physique mathématique qui peuvent être résolus par l'utilisation des harmoniques sphériques et des fonctions de Bessel sphériques.

Notations et conventions

Γ	La fonction Gamma.
GL_n	Le groupe linéaire générale.
SL_n	Le groupe linéaire spéciale.
O_n	Le groupe orthogonale.
SO_n	Le groupe orthogonale spéciale.
J_m	La fonction de Bessel de première espèce.
N_m	La fonction de Neuman.
$H_m^{(1,2)}$	La fonction de Hankel.
I_m	La fonction de Bessel modifiée de première espèce.
K_m	La fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce.
j_i	La fonction de Bessel sphérique de première espèce.
n_i	La fonction de Neuman sphérique.
$h_i^{(1,2)}$	La fonction de Hankel sphérique.
i_i	La fonction de Bessel sphérique modifiée de première espèce.
k_i	La fonction de Bessel sphérique modifiée de dexième espèce.
C^∞	Espace des fonctions de class C^∞.
$\triangle$	Laplacien.
∇	Gradient.
$Y_{l,m}$	La fonction Harmonique sphérique.
$P_n^{(l,m)}$	Polynôme de Jacobi.
P_m	Polynôme de Legendre de première espèse.
Q_m	Polynôme de Legendre de deuxième espèce.
P_m^n	Polynôme de legendre adjointe de première espèce.
Q_n^m	Polynôme de legendre adjointe de dexième espèce.

Chapitre 1

Preliminaires et définitions:

1.1 Définitions :

Définition 1.1.1 *[17] On va utiliser x ,y....pour représenter les éléments de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3, x = (x_{1,}x_{2,}x_3)^t$, ,nous avons*

$$x = r\xi, r = \mid x \mid = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^3)}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^t$ est le vecteur unitaire de direction déterminé de manièrs unique de $x \in \mathbb{R}^3$. La sphère unité de $\mathbb{R}^3$ est désignée par Ω :

$$\Omega = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 / \mid \xi \mid = 1 \right\}$$

Nous avons mis Ω^{int} pour "l'espace intérieur" de Ω, tandis que Ω^{ext} désigne "l'espace extérieur" de Ω . Plus explicitement,

$$\Omega^{int} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \mid x \mid < 1 \right\}$$

$$\Omega^{ext} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \mid x \mid > 1 \right\}$$

La sphère dans $\mathbb{R}^3$ de rayon R autour de l'origine seront désignés par Ω_R:

$$\Omega_R = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \mid x \mid = R \right\}$$

Nous avons mis Ω_R^{int} pour "l'espace intérieur" de Ω_R, tandis que Ω_R^{ext} désigne "l'espace extérieur" de Ω_R:

$$\Omega^{int} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / \mid x \mid < R\right\}$$

$$\Omega^{ext} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / \mid x \mid > R\right\}$$

Il est bien connu que la surface totale $\parallel \Omega_R \parallel$ de Ω_R est:

$$\parallel \Omega_R \parallel = \int_{\Omega_R} d\varpi(\xi) = 4\pi R^2$$

Définition 1.1.2 *[8](Opérateur de Laplace-Beltrami) .Le laplacien on coordonnées sphériques s'écrit sous la forme:*

$$\triangle = \frac{1}{r^2} \triangle_s \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

où

$$\triangle_s = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$\triangle_s$ s'appelle l'opérateur de Laplace-Beltrami ou laplacien sur la sphère.

1.2 Le système de coordonnées sphériques:

Le système de coordonnées sphériques est un système permettant la représentation des figures géométriques dans l'espace tridemensionnel en utilisant trois coordonées (r, θ, φ) où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle avec l'axe z et $\varphi \in [0, 2\pi]$ est l'angle avec l'axe x dans le plan xy . tellque :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \qquad y = r \sin \theta \sin \varphi \qquad z = r \cos \theta$$

Les trois vecteurs principaux sont :

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \quad \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ces vecteurs de base sont orthogonaux, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \hat{r}.\hat{r} &= \hat{\theta}.\hat{\theta} = \hat{\varphi}.\hat{\varphi} = 1 \\ \hat{r}.\hat{\theta} &= \hat{\theta}.\hat{\varphi} = \hat{\varphi}.\hat{r} = 0 \end{aligned}$$

Pour évaluer némuriquement ou symboliquement les intégrations dans chaque système de coordonnées, il est trés important de définir les éléments differentiels de base (le gradient, le Jacobien et les éléments de longueur et d'aire..etc). dans le système de coordonnées sphériques ces éléments sont définis par:

L'élément de longueur est :

$$da = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r}.$$

L'élément d'aire est :

$$ds = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin d\varphi\hat{\varphi}$$

Le Jacobien est :

$$J\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right) = r^2\sin\theta$$

Le gradient est :

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

La divergente d'un champ vectoriël $F = (F_r, F_\theta, F_\varphi)$ est :

$$\nabla \times F = \begin{bmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta F\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right] \\ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right] \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right] \end{bmatrix}\left[\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}\right]$$

Les coordonnées angulaires θ et φ parmettant également de localiser un point q sur la sphère d'unité Ω.

et la matrice jacobienne est:

$$MJ = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

1.3 Les groupes de lie

Définition 1.3.1 *[8](l'algèbre de lie)* $\mathfrak{g}$ *est un algèbre de lie sur* $\mathbb{k}$ *si* $\mathfrak{g}$*est un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel muni de la loi de composition interne:*

$$[.,.] : \mathfrak{g} * \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

verifiant:

1.$[X, X] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$;

2.l'identité de Jacobi .i.e: pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$;

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

où $[.,.]$ est appellée commutateur ou multiplication de lie.

Définition 1.3.2 *[8]le groupe lineaire générale* $GL_n(\mathbb{R})$ *est un sous groupe ouvert de* $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.*(la forme matricielle de* $GL_n(\mathbb{R})$*).*

On a:

le groupe lineaire spéciale $SL_n(\mathbb{R})$ est le sous groupe fermé de G sur $\mathbb{R}$ tel que:

$$SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,/\, \det A = 1\}$$

et le groupe orthogonal est le sous groupe fermé

$$O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,/ A^t = A^{-1}\right\}$$

et le groupe orthogonal spéciale est le sous groupe fermé

$$SO_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,/ A^t = A^{-1} \text{ et } \det A = 1\right\}$$

Définition 1.3.3 *(l'éspace tangente) un vecteur tangent en P est une forme linéaire D : $O_p \to K$ telle que*

$D(f)\,g(p)+f(p)\,D(g)$ pour tous f et g dans O_p (ie D est une dérivation partielle en P) .on note que T_pM l'ensemble de ces vecteurs tangents à M en P.

1.4 Fonctions de Bessel:

1.4.1 Fonction de Bessel de première espèce :

L'équation différentielle de Bessel est :

$$y^{"} + \frac{1}{x}y^{'} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{1.4.1}$$

La solution de cette équation s'appelle fonction de Bessel, (1.4.1) est une équation linéaire d'ordre deux(voir [5]).

La solution de l'équation peut être représentée sous la forme :

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+p}}{k!\Gamma(k+p+1)} \tag{1.4.2}$$

Pour $p = \nu$ la solution est notée par $J_\nu(x)$ est appellée fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν par conséquant :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}, \tag{1.4.3}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(k-\nu+1)}. \tag{1.4.4}$$

où $\Gamma(x)$ est une fonction défini par :

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n \exp(-x)\,dx.$$

Pour ν non entier $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$ sont des fonctions linéairment indépendantes, si $\nu = n$ entier

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{1.4.5}$$

et on a

$$y = C_1 J_\nu (x) + C_2 J_{-\nu} (x) .$$

Est la solution générale de l'équation de Bessel (voir [15]) .

Remarque 1.4.1

$$J_{-n} (x) = (-1)^n J_n (x) \quad n = 1, 2, ... \tag{1.4.6}$$

(voir [12]).

1.4.2 Fonction de Bessel de deuxième espèce:

$$Y_n (x) = \lim_{\nu \to n} \frac{\cos \pi v J_\nu (x) - J_{-n} (x)}{\sin \pi \nu}. \tag{1.4.7}$$

La fonction $Y_n (x) \equiv N_n (x)$ s'appelle fonction de Bessel de deuxiem espèce d'ordre n ou fonction de Neuman .

1.4.3 Fonction de Bessel de troisième espèce:

Les fonctions

$$H_\nu^1 (x) = J_\nu (x) + iY_\nu (x) , \tag{1.4.8}$$

$$H_\nu^2 (x) = J_\nu (x) - iY_\nu (x) . \tag{1.4.9}$$

sont appelées fonctions de Bessel de troisième espèce (voir [12]), ils sont aussi appelées fonctions de Hankel de première et deuxième espèce, respectivement.

1.4.4 Les fonctions de Bessel modifiée:

Elles sont notée par $I_m (x)$ et $K_m (x)$, si nous prenons l'argument des fonctions de Bessel $J_m (x)$ et $H_m (x)$ imaginaire, nous obtenons les fonctions de Bessel modifiée

$$I_m (x) = \frac{J_m (ix)}{i^m} \tag{1.4.10}$$

$$K_m (x) = \frac{\pi i}{2} (i)^m H_m^1 (ix) \tag{1.4.11}$$

Ces fonctions sont les solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR(x)}{dx}-\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R(x)=0$$

(voir [15]).

Remarque 1.4.2

$$\begin{aligned} I_0(x) &= J_0(ix)=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+............, \qquad (1.4.12)\\ K_0(x) &= \frac{\pi i}{2}\left\{J_0(ix)+Y_0(ix)\right\}. \end{aligned}$$

(voir [1]).

1.5 Polynôme de Legendre:

Définition 1.5.1 *[16]*

Soit s un nombre complexe quelconque. L'équation différentielle linéaire du seconde ordre à coefficients variées est connue sous le nom "équation de Legendre" est défini par:

$$\left(1-x^2\right)y''(x)-2xy'(x)+s(s+1)y(x)=0 \qquad (1.5.1)$$

Ses solutions sont appellées "fonction de legendre". Si n est nul ou entier positif, ces fonctions sont appellées "polynôme de legendre".

On peut définir le polynôme de legendre par la relation suivante:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

1.5.1 Propriètés des polynômes de legendre:

1.Relations de récurrence:[16]

$$1:(s+1)P_{s+1}(x)-(2s+1)xP_s(x)+sP_{s-1}(x)=0 \qquad (1.5.2)$$

$$xP_s'(x)-P_{s-1}'(x)=xP_s(x) \qquad (1.5.3)$$

$$P'_{s+1}(x) - P'_{s-1}(x) = (2s+1)\,P_s(x) \tag{1.5.4}$$

$$\left(x^2-1\right)P'_s(x) = sxP_s(x) - sP_{s-1}(x) \tag{1.5.5}$$

2.Formule de Rodrigues:[6]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)\right],\ n = 0, 1, ... \tag{1.5.6}$$

3.Orthogonalité:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\delta_{m;n} \quad n = m, \tag{1.5.7}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0 \quad ,\, n \neq m. \tag{1.5.8}$$

(voir [3]).

Remarque 1.5.1

$$|P_n(x)| \leq 1,\ -1 \leq x \leq 1,\ n = 0, 1, 2, ...,$$

(voir [10]).

1.5.2 Les fonctions de legendre adjointes:

3.Les fonctions adjointes de Legendre sont définis par:

$$P_n^m(x) = \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \tag{1.5.9}$$

3.2: Orthogonalité:

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)\,P_r^m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\cdot\delta_{r;n}\ . \tag{1.5.10}$$

(voir [16]).

Chapitre 2

Les fonctions sphériques

2.1 Définition des fonctions sphériques:

Définition 2.1.1 *[14]les fonctions sphériques sont certaines fonctions (aux valeurs complexes) sur les groupes de lie réels G ou sur les espaces homogènes $X = G/K$,espace symetrique .*

Exemple 2.1.1

$$G = SL_n(\mathbb{R}), K = SO_n(\mathbb{R}).$$

$$X = S^2 = SO_3(\mathbb{R}) / SO_2(\mathbb{R})$$

les fonctions sphériques sont les polynomes de legendre, i.e ce sont les solutions de l'equation

$$\left(1 - z^2\right) P(z)'' - 2zP(z)' + v(v+1) P(z) = 0$$

où v est un nombre réel ou complexe .

2.2 Fonction sphérique et l'algèbre de Hecke:

Définition 2.2.1 *[14]*

Soient $G = SL_n(\mathbb{R}) \supset K = SO(n)$.On a une involution évidente $\tau : G \to G$ telle que $K = G^{\tau}$.

soit $X = G/K; G$ opère à gauche sur X. soit $\mathcal{D}_G(x)$ l'algèbre des opérateurs differentiels G-invariants. Rappellons que c'est une algèbre commutative isomorphe à une algèbre de polynomes à $n-1$ variables $\mathbb{C}[\triangle_2, \ldots \triangle_n]$.

On fixe une mesure de Haar dg sur G telle que

$$\int_K dg = 1$$

Le groupe G est unimodulaire .i.e:

$$dg = dg^{-1}$$

L'espace $C_c(G)$ de fonctions continues à support compact $f : G \to \mathbb{C}$ est une algèbre par rapport à la convolution

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)\, g\left(y^{-1}x\right) dy \tag{2.2.1}$$

(c'est l'analogue de l'anneau $\mathbb{C}[H]$ d'un groupe fini H).

On désigne par $\mathcal{H}(G)$ le sous-anneau de $C_c(G)$

$$\mathcal{H}(G) = C_c(K\backslash G/K) = \{f \in C(G) / f(k_1 x k_2) = f(x) \text{ pour tous } k_1, k_2 \in K\} \tag{2.2.2}$$

Définition 2.2.2 *Une fonction sphérique est une fonction $C^{\infty}\Phi : X \to \mathbb{C}$ telle que:*

$$(i)\ \ \Phi(kx) = \Phi(x)\,; k \text{ constante.}$$

$$(ii)\ \ \Phi(e) = 1; \text{tel que } e \text{ est un élément neutre.}$$

$$(iii)\ \ \Phi \text{ est une fonction propre de tout } D \in \mathcal{D}_G(x)$$

on peut regarder Φ aussi comme une fonction bi-k-invariante sur G .

Théorème 2.2.1 *Une fonction continue $f : G \to \mathbb{C}$, pas identiquement 0; est sphérique ssi* pour tous $x, y \in G$

$$\int_K f(xky)\, dk = f(x) f(y) \tag{2.2.3}$$

Théorème 2.2.2 *[13](i) Soit $\Phi : G \to \mathbb{C}$ continue bi-k-invariante. Alors Φ est sphérique ssi*

$L(\Phi) : \mathcal{H}(G) \to \mathbb{C}$,

$$L(\Phi)(f) = \int_G f(x)\Phi(x)\, dx \tag{2.2.4}$$

est un homomorphisme d'algèbres.

(ii) Réciproquement, tout morphisme continue d'algèbres $L : \mathcal{H}(G) \to \mathbb{C}$ a une forme $L(\Phi)$ où Φ est une fonction sphérique bornée.

Considerons l'espace

$$C(G//K) = C(K\backslash G/K)$$

de fonctions continues $\Phi : G \to \mathbb{C}$ bi-K-invariantes. Donc $\mathcal{H}(G) \subset C(G//K)$ est le sous-espace de fonction à support compact.

$\mathcal{H}(G)$ agit sur $C(G//K)$ par convolution : pour $f \in \mathcal{H}(G)$

$$H(f) : C(G//K) \to C(G//K)$$

$$H(f)(\Phi) = f * \Phi = \Phi * f \tag{2.2.5}$$

les opérateurs $H(f), f \in \mathcal{H}(G)$,sont appellés les opérateurs de Hecke.

Définition 2.2.3 *Une fonction $\Phi \in C^\infty(G//K)$ est sphérique ssi $\Phi(e) = 1$ et Φ est un vecteur propre de tout $H(f), f \in \mathcal{H}(G)$.*

2.3 Quelques types célèbres de fonctions sphériques:

2.3.1 Les harmoniques sphériques :

Une classe importante de fonctions spéciales, étroitement liées aux polynomes orthogonaux classiques, est constituée par les fonctions sphériques .qui sont parfois appellées Harmonique sphérique.

Définitions des harmoniques sphériques [6]:

Définition 2.3.1 *Les fonctions $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ sont appelées fonctions sphériques d'ordre l tel que:*

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im\varphi)\,\Theta_{l,m}(\cos\theta)\qquad(-l\leq m\leq l)\tag{2.3.1}$$

où

$$\Theta(x)=\Theta_{l,m}(x)=C_{l,m}\left(1-x^2\right)^{m/2}P_{l-m}^{(m,m)}(x)\tag{2.3.2}$$

$$\begin{cases} C_{l,m}(x)=\frac{1}{2^m l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}(l-m)!\,(l+m)!} \\ . \\ P_{l-m}^{(m,m)}(x)=\frac{2^m l!}{(l+m)!}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\ \text{ est un polynome de Jacobi} \\ . \\ P_l(x)=P_l^{(0,0)}(x)\ \text{ est un polynome de Legendre}\end{cases}$$

Définition 2.3.2 *[4]Les harmoniques sphériques d'ordre l sont la trace sur la sphère unité Ω des polynômes homogènes harmoniques de degré l.*

Notation 2.3.1 *[4]les polynômes homogènes harmoniques sont les polynômes qui sont laplacien est nul .*

Proposition 2.3.1 *[4]Les harmoniques sphériques d'ordre différents sont orthogonales pour le produit $L^2(\Omega)$.*

Proposition 2.3.2 *[4]Les harmoniques sphériques d'ordre l forment un espace vectoriel de dimension $2l+1$ qu'on note $\mathcal{H}_l$.*

Exemple 2.3.1 *les expressions explicites de quelques fonctions sphériques élémentaires :*

$$\begin{aligned} Y_{l,0}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta). \\ Y_{1,0}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta. \\ Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) &= \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \exp(\pm i\varphi). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Remarque 2.3.1

$$Y^*_{l,m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y^*_{l,-m}(\theta,\varphi).$$

Les types des harmoniques sphériques:[9]

On peut écrire les harmoniques sphériques sous la forme:

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \exp(im\theta) P_{l,m}(\sin\varphi) \tag{2.3.4}$$

On peut se faire une idée des variations des fonction sphériques en traçant sur la sphère le lieu où ces fonctions s'annulent.Pour cela, On distingue trois types d'harmoniques sphériques, les harmoniques zonaux, sectoriels et tésséraux.

Les harmoniques zonaux: Ils sont obtenus pour $m = 0$.Dans ce cas:

$$Y_{l,0}(\theta,\varphi) = Y_{l,0}(\varphi)$$

ne depend pas que de lattitude. Les harmoniques zonaux ont une symétrie de révolution autour de l'axe des pôles. Ils rendent compte, en particulière, de l'aplatissement de la Terre. Ils découpent la Terre selon des parallèles géographiques.

$$\begin{aligned} m &= 0, l = 2, Y_{2,0} = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right). \\ m &= 0, l = 3, Y_{3,0} = \frac{1}{2}\left(5\cos^2\theta - 3\right)\cos^2\theta. \end{aligned}$$

Les harmoniques sectoriels Ils sont obtenus pour $m = l$ .Dans ce cas:

$$P_{l,m}(\sin\varphi) = P_{l,l}(\sin\varphi) = \frac{(2l)!}{2^l l!}\left(\cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}$$

et cette fonction ne s'annulent pas (sauf aux poles) .Donc $Y_{l,l}$ ne s'annule que pour certaines valeurs de θ.Les harmoniques sectoriels ne sannulent que les méridiens géographiques

(On donne généralement l'image de la sphère ressemblant à une orange découpé en quartiers se rejoignant aux pôles) par exemple:

$$m = l = 1, Y_{1,1} = \sin\theta\cos\psi.$$

Les harmoniques tesséraux: Ils sont obtenus pour tous les autres cas. Les harmoniques s'annulent selon une sorte de damier sphériques dont les cases seraient délimitées par les méridiens et les parallèles par exemple:

$$l = 3, m = 1, Y_{3,1} = \frac{3}{2}\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)\cos\psi.$$

Proporiétés des fonctions harmoniques sphériques :

Voici quelques proporiétes importantes des fonctions harmoniques sphériques $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$.

1. **La relation de récurrance:**

pour $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ par rapport à l'indice l :

$$\cos\theta Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}}Y_{l+1,m}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}}Y_{l-1,m}(\theta,\varphi). \tag{2.3.5}$$

La formule obtenue est valable pour $m < 0$.

2. **La formule de dérivation** :

$$\frac{\partial Y_{l,m}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{e^{im\varphi}}{2\pi}\frac{d\Theta_{l,m}(x)}{dx} \tag{2.3.6}$$

d'où

$$\frac{d\Theta_{l,m}(x)}{dx} = \frac{mx}{1-x^2}\Theta_{l,m} - \sqrt{\frac{l(l+1) - m(m-1)}{1-x^2}}\Theta_{l,m-1} \tag{2.3.7}$$

De la forme explicite des harmoniques sphériques on déduit également la formule de dérivation partielle suivante :

$$\frac{\partial Y_{l,m}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = imY_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{2.3.8}$$

3.Orthogonalité : Les harmoniques shériques $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ vérifient les relations d'orthogonalité

$$\int_{\Omega} Y_{l,m}(\theta,\varphi)\, Y^{*}_{l',m'}(\theta,\varphi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{2.3.9}$$

où

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \quad (0 \leq \theta \leq \pi\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)\,.$$

et $Y^{*}_{l',m'}(\theta,\varphi)$ est la fonction adjointe de $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$.

3.La représentation intégrale *:*

La formule intégrale de Cauchy :

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(1-x^2\right)^l = \frac{(l+m)!}{2\pi i}\int_C \frac{\left(1-s^2\right)^l}{(s-x)^{l+m+1}}ds \tag{2.3.10}$$

(C est un contour entourant le point $s = x$).

La représentation intégrale pour $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$:

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta,\varphi) &= B_{l,m}\int_0^{2\pi} \exp\left(-im(\alpha-\varphi)\right)\left(\cos\theta + i\sin\theta\sin\alpha\right)^l d\alpha \\ &= B_{l,m}\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \exp\left(-im\alpha\right)\left(\cos\theta + i\sin\theta\sin\left(\alpha+\varphi\right)\right)^l d\alpha \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

où

$$B_{l;m} = \frac{1}{4\pi l!}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi}(l-m)!\,(l+m)!}. \tag{2.3.12}$$

Puisque l'intégrale d'une fonction périodique le long d'un segment dont la longueur est égale à la période de la fonction ne dépend pas de la position du segment ,on a

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = B_{l,m}\int_0^{2\pi} \exp\left(-im\alpha\right)\left(\cos\theta + i\sin\theta\sin\left(\alpha+\varphi\right)\right)^l d\alpha \tag{2.3.13}$$

3. *puisque* $Y_{l,m}$, $Y^*_{l,m} \in \mathbb{C}$ alors :

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta,\varphi) + Y^*_{l,m}(\theta,\varphi) &= 2\Re\left(Y_{l,m}(\theta,\varphi)\right), \\ Y_{l,m}(\theta,\varphi) - Y^*_{l,m}(\theta,\varphi) &= 2i\Im\left(Y_{l,m}(\theta,\varphi)\right). \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Partie réelle et partie imaginaire sont des quantités réells. on note aussi que touts les $Y_{l,0}$ sont réels et indépendants de φ.

$$Y_{l,0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Theta_{l,m}(\cos\theta)$$

2.3.2 Les fonctions sphériques de Volume:

Les fonctions $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ définissent la solution bornée $u = R(r)\,Y(\theta,\varphi)$ de l'équation de Laplace en fonction des angles .

Pour définir la fonction $R(r)$ qui est la solution générale de l'équation d'Euler suivante:

$$r^2R^{"} + 2rR^{'} - l(l+1)R = 0 \tag{2.3.15}$$

tel que $R(r)$ s'écrit sous la forme :

$$R(r) = C_1r^l + C_2r^{-l-1} \tag{2.3.16}$$

(C_1, C_2sont des constantes). Ainsi donc, l'équation de Laplace admet comme solutions particulières les fonctions $r^lY_{l,m}(\theta,\varphi)$ et $\frac{1}{r^{l+1}}Y_{l,m}(\theta,\varphi)$, dont les premières sont utilisées pour la résolution de problèmes aux limites interieurs, et les secondes, pour la résolution des problèmes aux limites extérieurs dans un domaine sphérique. Ces fonctions sont appelées *fonctions sphériques de Volume (* voir [11]*)*.

2.3.3 Fonctions sphériques généralisées :

Lorsqu'on fait tourner le système de coordonnées, un polynome homogène se transforme en un polynome homogène de même degré. D'autre part, l'opérateur de Laplace reste inchangé dans une telle rotation, i.e. $\Delta_{xyz} = \Delta_{x'y'z'}$. C'est pourquoi, quand on tourner le système de coordonnées, tout polynôme harmonique homogène se transforme en un polynôme harmonique homogène de même degré. D'où

$$u_{l,m}(x,y,z) = \sum_{m'} D^l_{m,m'}(x',y',z'), \tag{2.3.17}$$

où

$$u_{l,m}(x,y,z) = r^l Y_{l,m}(\theta,\varphi). \tag{2.3.18}$$

donc

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sum_{m'} D^l_{mm'} Y_{l,m'}(\theta',\varphi'). \tag{2.3.19}$$

Les combinaisons linéaires de fonctions $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ pour un l donné forment donc un espace de fonctions à $2l+1$ dimensions qui est invariant par rotation.

Les coefficients $D^l_{mm'}$ dépendront des paramètres qui déffinissent la rotation du système de coordonnées. Une rotation quelconque du système de coordonnées par rapport à l'origine des coordonnées se définit sans ampiguÏté par trois paramètres réels. En effet, on définit une rotation de façon univoque en donnant le sens de rotation de l'axe (deux paramètres) et l'angle de rotation (un paramètre). Comme paramètres définissant une rotation, on utilise le plus souvent les angles d'Euler α, β, γ, si bien que n'importe quelle rotation se fait en opérant trois rotations consécutives autour des axes de coordonnées : a) une rotation de l'angle α autour de l'axe des z ; b) une rotation de l'angle β autrour de l'axe des y ; c) une rotation de l'angle γ autour de l'axe des z. On a donc

$$D^l_{m,m'} = D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma).$$

où $D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma)$ est appelée matrice des rotations finies.

Une rotation quelconque se définit d'une façon univoque par les angles d'Euler si ceux-ci varient dans les limites suivantes : $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma < 2\pi$. Lorsqu'il s'agit d'une rotation des angles $(\alpha + 2\pi n_1,\ \beta + 2\pi n_2,\ \gamma + 2\pi n_3)$,elle se confonde avec la rotation d'angles (α,β,γ) si n_1, n_2, n_3 sont des nombres entiers, On a donc

$$D^l_{m,m'}(\alpha + 2\pi n_1,\ \beta + 2\pi n_2,\ \gamma + 2\pi n_3) = D^l_{m,m'}(\alpha,\ \beta,\ \gamma).$$

Remarquons, en outre que la rotation $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ est équivalente à la rotation $(\pi + \alpha,\ \ -\beta,\ \pi + \gamma)$. La rotation inverse se caractérisera par des angles

$$\alpha_1 = -\gamma,\ \beta_1 = -\beta,\ \gamma_1 = -\alpha,$$

ce qui équivaut à la rotation

$$(\pi + \alpha_1, -\beta_1,\ \pi + \gamma_1) = (\pi - \gamma,\ \beta,\ \pi - \alpha)\,.$$

Les fonctions $D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma)$ sont appellées *fonctions sphériques généralisées*, car elle confondent dans un certain nombres de cas particuliers avec les fonctions sphériques ordinaires. On les appelle également *D-fonctions de Wigner* . Les fonctions sphériques généralisées sont largement utilisées en mécanique quantique.

Propriétés des fonctions sphériques généralisées:

Dégageons quelques propriétés principales des fonctions sphériques généralisées et mettons-les sous forme explicite en fonction des paramètres α, β, γ.

1. *les conditions d'orthogonalité*

$$\begin{aligned} \int Y_{l,m}(\theta,\varphi)\,Y^*_{l,m_1}(\theta,\varphi)\,d\Omega &= \delta_{m,m_1}, \qquad (2.3.20)\\ \int Y_{l,m'}(\theta',\varphi')\,Y^*_{l,m'_1}(\theta',\varphi')\,d\Omega' &= \delta_{m',m'_1} \end{aligned}$$

donnent lieu à la relation

$$\sum_{m'} D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma)\left[D^l_{m_1,m'}(\alpha,\beta,\gamma)\right] = \delta_{m,m_1}, \qquad (2.3.21)$$

i.e. la matrice $D^+(\alpha,\beta,\gamma)$, qui est la transposée et la conjuguée complexe de $D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma)$, se confond avec $D^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)$. Cela revient à dire que la matrice $D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma)$ est unitaire. On obtient donc à partir de (2.3.19)

$$Y_{l,m'}(\theta',\varphi') = \sum_{m'}\left[D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma)\right]^* Y_{l,m}(\theta,\varphi) \qquad (2.3.22)$$

2.Une autre propriété élémentaire des fonctions sphériques généralisées se déduit de la propriété (1) des fonctions sphériques $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$:

$$D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\alpha) = (-1)^{m-m'}\left[D^l_{-m,\,-m'}(\alpha,\beta,\alpha)\right] \qquad (2.3.23)$$

Essayons de mettre les fonctions sphériques généralisées $D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\alpha)$ sous forme explicite. Soient deux rotations consécutives de paramètres α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 équivalentes à une rotation unique de paramètres α, β, γ, et cela en sorte qu'à la suite de la première rotation les coordonnées sphériques $(\theta_1,\ \varphi_1)$, tandis qu'à la suite de la seconde rotation les coordonnées θ_1, φ_1 changent en θ', φ' . On a alors

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta,\varphi) &= \sum_{m_1} D^l_{m,m_1}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\, Y_{l,m_1}(\theta_1,\varphi_1), \\ Y_{l,m_1}(\theta_1,\varphi_1) &= \sum_{m_1} D^l_{m_1,m'}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\, Y_{l,m'}(\theta',\varphi'). \end{aligned} \tag{2.3.24}$$

D'autre part,

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sum_{m_1} D^l_{m,m_1}(\alpha,\beta,\gamma)\, Y_{l,m'}(\theta',\varphi'). \tag{2.3.25}$$

En vertu de l'indépendance linéaire des fonctions sphériques, la confrontation des développements précédents conduit à l'égalité

$$D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{m_1} D^l_{m,m_1}(\alpha,\beta,\gamma)\, D^l_{m_1,m'}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2), \tag{2.3.26}$$

où

$$D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{m_1} D^l_{m,m'}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\, D^l_{m,m'}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2).$$

3.*Autres relations :*

$$\begin{aligned} D^l_{m,0}(\alpha,\beta,\gamma) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2i+1}} Y_{l,m}(\beta,\ \alpha), \\ D^l_{0,0}(\alpha,\beta,\gamma) &= P_l(\cos\beta). \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

A l'aide de (1.4), on obtient une autre relation analogue :

$$D^l_{0,m}(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2i+1}} Y_{l,m}(\beta,\ \alpha). \tag{2.3.28}$$

2.4 Fonctions de Bessel Sphériques :

Fonctions de Bessel sphériques sont généralement associés à la résolution de l'équation différentielle partielle de Helmholtz (EPD) en coordonnées sphériques. La technique de la séparation des variables appliquées à ce EPD conduit à une ED ordinaire dans la variable radiale qui a la forme

$$x^2y" + 2xy' + \left[k^2x^2 - n\,(n+1)\right] y = 0, \qquad n = 0, 1, 2, .. \tag{2.4.1}$$

où le k constant entre directement à partir de l'équation de Helmholtz et le nombre entier n est un constant de séparation qui a souvent l'interprétation physique du moment cinétique. Par conséquent, la solution générale de (1.1) peut être exprimée sous la forme

$$y = C_1 x^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}\,(kx) + C_2 x^{-1/2} Y_{n+\frac{1}{2}}\,(kx) \tag{2.4.2}$$

Parce que cette combinaison de fonctions de Bessel se pose si souvent dans la pratique, il est d'usage de définir de nouvelles fonctions

$$j_n\,(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}\,(x) \tag{2.4.3}$$

$$y_n\,(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}\,(x) \tag{2.4.4}$$

appelé, respectivement, les fonctions de Bessel sphériques de la première et deuxième espèce d'ordre n. Ensuite les fonctions de Hankel sphériques peuvent être définies par:

$$h_n^1\,(x) = j_n\,(x) + i y_n\,(x) \tag{2.4.5}$$

$$h_n^2\,(x) = j_n\,(x) - i y_n\,(x) \tag{2.4.6}$$

Exemple 2.4.1 *Les fonctions de Bessel sphériques suivantes représentent des solutions de l'équation de Bessel sphérique que nous pouvons l'écrire comme suit:*

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \left(k^2 - \frac{l\,(l+1)}{r}\right)\right) R_l = 0 \tag{2.4.7}$$

tel que

$$
\begin{aligned}
1 &: J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\
2 &: J_{-\frac{1}{2}}(x) = Y_{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \\
3 &: J_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} \right), \\
4 &: J_{-\frac{3}{2}}(x) = Y_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x} \right).
\end{aligned}
$$

2.4.1 Quelques propriétés des fonctions de Bessel sphériques:

Toute fonction de Bessel sphérique obéit des relations de récurrence qui relient les fonctions de l'ordre $(n-1)$, n et $(n+1)$. On va utiliser g_n pour représenter l'une de ces fonctions. Ces relations sont :

1 - Formules des récurrences :

$$g_{n-1} - \frac{2n+1}{x} g_n + g_{n+1} = 0, \tag{2.4.8}$$

et

$$n g_{n-1} - \frac{2n+1}{x} g_n^{'} - (n+1)\, g_{n+1} = 0. \tag{2.4.9}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$1.\ g_{-n}(x) = g_n(x). \tag{2.4.10}$$

$$2.\ g_n(-x) = (-1)^n g_n(x). \tag{2.4.11}$$

On a aussi

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x}. \tag{2.4.12}$$

$$n_n(x) = -(-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x}. \tag{2.4.13}$$

et

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x). \tag{2.4.14}$$

2 - Formule pour la dérivée :

$$J_n^{'} = 2\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]. \tag{2.4.15}$$

3-Orthognalité :

pour $n \in \mathbb{N}$, notons par ordre croissant $\varpi_1, \varpi_2, ...$ les zéros positifs de J_n, c'est-à-dire les réels positifs ϖ tels que $J_n(\varpi_k) = 0$ tel que $k = 1, 2, ...$.

Alors, pour i et j distincts,

$$\int_0^1 x J_n(\varpi_i x) J_n(\varpi_j x)\, dx = 0. \tag{2.4.16}$$

4.*La représentation asymptotique:*

quand $x \longrightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} j_n(x) &\sim \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{n+1}{2}\pi\right). \\ y_n(x) &\sim \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{n+1}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_n^1(x) &\approx \frac{\exp i\left(x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{x}. \text{ si } \mid x \mid \longrightarrow +\infty \text{ , Re}(x) > 0. \\ h_n^2(x) &\approx \frac{\exp -i\left(x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{x}. \end{aligned}$$

2.4.2 L'expansion d'onde plane :

l'expansion d'onde plane ou l'équation de Rayleigh est donnée par la relation suivante :

$$e^{i\overrightarrow{k}\overrightarrow{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{\infty} i^l Y_l^m\left(\hat{r}\right) Y_l^{m'}\left(\hat{k}\right) j_l(kr). \tag{2.4.17}$$

Quand $Y_l^m\left(\hat{r}\right)$ est le fonction harmonique sphérique pour le vecteur d'unite $\hat{r}$ et $j_l(kr)$ est le fonction de Bessel sphérique pour $k \geq 0$, qui est supposé pour le reste de ce paragraphe de long $k_n \geq 0$, pour entier n .

La formule alternative est :

$$e^{i\overrightarrow{k}\overrightarrow{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (i)^l (2l+1) P_l(\cos\theta) j_l(kr), \tag{2.4.18}$$

en utilisant le théorème de l'addition vectorielle donnée par :

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_l^m\left(\hat{r}\right) Y_l^{m'}\left(\hat{k}\right), \tag{2.4.19}$$

tellque $P_l(\cos\theta)$ polynōme de Legendre, θ est l'angle entre $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{r}$.

si $k = 0$, on a l'identity

$$j_l(0) = \delta_{l,0}$$

2.4.3 L'intégrales des fonctions bessel sphériques :

Représentation intégrale des fonctions des Bessel sphéques:

$$j_l(kr) = \frac{(-1)^l}{2} \int_{-1}^{1} P_l(\cos\theta) \exp(ikr\cos\theta)\, d(\cos\theta). \tag{2.4.20}$$

Intégrales infinies sur un fonction sphérique de Bessel :

L'intégration de la formule (2.4.20) sur r et interchangeant l'ordre d'intégration on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j_l(kr)\, dr = \frac{(-i)^l}{2} \int_{-1}^{1} P_l(\cos\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikr\cos\theta)\, drd(\cos\theta). \tag{2.4.21}$$

Cependant,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikr)\, dr = 2\pi\delta(k).$$

résultant en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j_l(kr)\, dr = \frac{(-i)^l}{k} \pi P_l(0).$$

L'intégrales infinies sur deux fonctions sphériques de Bessel :

$$\int_{0}^{+\infty} r^2 j_l(k_1 r)\, j_l(k_2 r)\, dr = \frac{\pi}{2k_1^2} \delta(k_1 - k_2)$$

Qui est connu comme la relation de Fermeture pour les fonctions de Bessel sphériques.

Autre relation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r^2 j_l(x)\, j_{l'}(x)\, dx = \frac{(-i)^{l+l'}\pi}{2}\int_{-1}^{1} P_l(y)\ \ P_{l'}(-y)\, dy. \tag{2.1}$$

maintenant

$$P_l(-y) = (-1)^l\, P_l(y)$$

juste comme

$$j_l(-x) = (-1)^l\, j_l(x)$$

Ce qui réduit l'équation (2.1) à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j_l(x)\, j_{l'}(x)\, dx = \frac{\pi}{2l+1}\delta_{l,l'}, \tag{2.4.22}$$

Connu comme la relation d'orthogonalité des fonctions de Bessel sphériques.

Remarque 2.4.1 *La réprésentation intégrale de polynome de Legendre pour* $-1 < x < 1$ *est :*

$$P_l(x) = \frac{(-i)^l}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixy) j_l(y)\, dy. \tag{2.4.23}$$

L'intégrales infinies sur trois fonctions sphériques de Bessel :

$$\int_{0}^{+\infty} r^2 j_l(k_1 r)\, j_l(k_2 r)\, j_0(k_3 r)\, dr = \frac{\pi\beta(\Delta)}{4k_1k_2k_3} P_l(y)\left(\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{2k_1k_2}\right). \tag{2.4.24}$$

2.5 Théorème d'addition :

Etablissons pour les fonctions sphériques une relation trés util, appelée théorème d'addition(voir [11]). A cet effet, posons dans (2.3.21) $m' = 0$ et appliquons les formules (4.1.2) et (2.3.27) :

$$P_l(\cos\theta') = \frac{4}{2l+1}\sum_m Y_{l,m}(\theta,\varphi)\, Y^*_{l,m}(\beta,\alpha). \tag{2.5.1}$$

La relation (2.5.1) admet une interprétation géometrique bien simple. Soient deux vecteurs quelconques r_1, r_2 dont les directions se définissent par des coordonnées sphériques $(\theta_1,\ \varphi_1)$ et $(\theta_2,\ \varphi_2)$. Soit ϖ l'angle que font ces directions entre elles. Posons dans (2.5.1) $\theta = \theta_1$, $\varphi = \varphi_1$ et faisons une rotation $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ de telle faÇon que la direction du nouvel axe des z vienne se confondre avec celle du vecteur r_2. De toute évidence, les angles α et β seront les angles sphériques du nouvel axe des z dans le système de coordonnées ancien. Il est facile de voir alors que $\alpha = \varphi_2$, $\beta = \theta_2$ et l'angle ϖ entre r_1 et r_2 se confond avec θ' . La formule (2.5.1) devient donc

$$P_l\left(\cos\varpi\right) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}\left(\theta_1,\varphi_1\right) Y_{l,m}^{*}\left(\theta_2,\varphi_2\right). \tag{2.5.2}$$

La relation (2.5.2) est appelée *théorème d'addition pour les fonctions sphériques.*

Chapitre 3

Applications

Le présent chapitre est consacré à l'étude de certains problèmes de la valeur limite de la physique mathématique qui peuvent être résolus par l'utilisation des harmoniques sphériques et les fonctions sphériques de Bessel.

3.1 Solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques:

L'un des systèmes les plus importants de coordonnées curvilignes orthogonales permettant la séparation des variables dans l'équation de Laplace est le système des coordonnées sphériques r, θ, φ, par rapport aux coordonnées rectangulaires x, y, z, par les formules

$$x = r\sin\theta\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{3.1.1}$$

où

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \tag{3.1.2}$$

Le système orthogonal triple correspond que les surfaces se composent de la sphères $r =$ const, les cônes circulaires $\theta =$ const, et les avions $\varphi =$ const passant par l'axe des z. En outre, le carré des éléments de longueur d'arc est:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \tag{3.1.3}$$

et, par conséquent, d'après (3.1.1), les coefficients métriques sont

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta,$$

et l'équation de Laplace prend la forme (3.1.3)

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{3.1.4}$$

On remarque que si nous cherchons des solutions particulières de (3.1.4) de la forme

$$u = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi), \tag{3.1.4}$$

Puis les variables peuvent être séparés, de sorte que le problème de la détermination de chaque facteur de (3.1.5) se réduit à la solution d'une équation différentielle ordinaire.

En fait, la substitution (3.1.5) dans (3.1.4), en multipliant par $r^2\sin^2\theta$ et en divisant par $R\Theta\Phi$, on a

$$\left[\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right]\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}, \tag{3.1.5}$$

Ce qui est possible seulement si les deux côtés sont égaux à une constante, que nous noterons par μ^2.

Cela conduit à deux équations:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu^2\Phi = 0, \tag{3.1.6}$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta\sin\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right). \tag{3.1.7}$$

Le même raisonnement montre que les deux côtés de l'équation dernière doivent être égaux à une constante, qui, cette fois-ci, est commode de désigner par $\nu(\nu+1)$. Par conséquent, on obtient les équations:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0, \tag{3.1.8}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \nu(\nu+1)R = 0. \tag{3.1.9}$$

Ainsi,La détermination des facteurs dans le produit (3.1.5) se réduit relativement au simple problème de résolution des équations différentielles ordinaires (3.1.8-10). Les solutions particulières correspondantes (3.1.5) de l'équation de Laplace dépendent de deux paramètres μ et ν (en général, complexe), qui peuvent être utilisés pour construire des solutions des problèmes de valeurs limites de la physique mathématique concernant divers domaines spéciaux (sphères, cônes, etc.). Les paramètres μ, ν et les solutions correspondantes des équations (3.1.8-10) doivent être choisis de telle sorte que chaque solution particulière (3.1.5) est harmonique dans le domaine donné, et une superposition appropriée des solutions particulières résolut le problème de valeur limite donné (voir [7]).

3.2 Les solutions de l'équation de Helmholtz :

En physique mathématique, les fonctions de Legendre sont importantes, non seulement en traitant avec l'équation de Laplace, mais aussi avec d'autres équations, dont l'équation de *Helmholtz*

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{3.2.1}$$

est d'une importance particulière. Pour résoudre (3.2.1) en les coordonnées sphériques, on cherche des solutions particulières de la forme:

$$u = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi), \tag{3.2.2}$$

Les variables séparent immédiatement, et on obtient les équations différentielles suivantes pour déterminer les facteurs R, Θ et Φ

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu^2\Phi = 0, \tag{3.2.3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0, \tag{3.2.4}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[K^2 r^2 - \nu(\nu+1)\right]R = 0. \tag{3.2.5}$$

Ici μ et ν sont des paramètres réels ou complexes arbitraires, mais sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\Re(\mu) \geq 0$, $\Re(\nu) \geq -\frac{1}{2}$.

Les équations (3.2.3-5) coincident avec les équations (3.1.8-9), et peuvent être résolus en terme de fonctions élémentaires dans le premier cas, et en terme de fonctions de Legendre dans le second cas. Sous la substitution:

$$R = r^{-1/2}\nu, \tag{3.2.6}$$

l'équation (3.2.5) va dans

$$\nu" + \frac{1}{r}\nu' + \left[K^2 - \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]\nu = 0. \tag{3.2.7}$$

Ceci est l'équation de Bessel de l'argument $z = Kr$, dont la solution générale peut être exprimée en termes des fonctions cylindriques. En particulier, dans le cas de rotation symétrique, où u est indépendant de la coordonner φ, nous avons:

$$u = r^{-1/2}\left[Aj_n(Kr) + Bh_n^2(Kr)\right]\left[CP_n(\cos\theta) + DQ_n(\cos\theta)\right], \tag{3.2.8}$$

où $j_n(z)$ est la fonction de bessel sphérique de premier espèce et $h_n^2(z)$ est la fonction de Hankel. Dans les problèmes où θ varie sur l'intervalle $[0, \pi]$, l'exigence bornitude nous oblige à fixer $D = 0$ et $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Par superposition des solutions particulières (3.2.8), nous pouvons résoudre beaucoup de problèmes de la physique mathématique, y compris l'important problème la diffraction d'ondes électromagnétiques par la surface de la terre.

3.3 Le problème de Dirichlet pour une Sphère :

Comme un exemple simple de l'application de la méthode de superposition, nous considérons que le problème de *Dirichlet* intérieur pour un domaine sphérique. Pour garder les choses aussi simples que possible, nous supposons que la fonction de limite f et la solution u sont indépendantes de l'angle φ. Choisir l'origine au centre de la sphère (rayon de a) et de l'axe z le long de l'axe de symétrie, on peut formuler notre problème comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u = u(r,\theta) \text{ de telle sorte que :} \\ \text{1) } u \text{ est harmonique dans le domain } r < a \text{ et continue dans} \\ \text{le domaine fermé } r \leq a. \\ \text{2) } u \text{ satisfait à la condition } u\mid_{r=a} = f(\theta)\text{, où } f(\theta) \text{ est continue} \\ \text{dans l'intervalle } 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

La symétrie rotation du problème de correspond à la mise en $\Phi = 1$ dans (3.1.5) et $\mu = 0$ dans (3.1.9). Ensuite, (3.1.9) se réduit à l'équation différentielle:

$$\left(1 - z^2\right)u" - 2zu' + \nu(\nu + 1)u = 0$$

Pour les fonctions de Legendre de l'argument $x = \cos\theta$, qui pour $-1 < x < 1$ à la solution générale:

$$\Theta = AP_{\nu}(\cos\theta) + BQ_{\nu}(\cos\theta), \tag{3.3.1}$$

où $P_{\nu}(x)$ et $Q_{\nu}(x)$ sont des fonctions de Legendre de la première et deuxième espèce, et ν est un nombre complexe quelconque tel que $\Re(\nu) \geq -\frac{1}{2}$. Comme le variable $x = \cos\theta$ varie en fait sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$, et étant donné que $x \longrightarrow 1$, $Q_{\nu}(x) \longrightarrow \infty$ tandis que $P_{\nu}(x)$ reste borné nous devons ensemble $B = 0$ si la solution est de rester délimitée à l'intérieur de la sphère. En outre, depuis $P_{\nu}(x) \longrightarrow \infty$ comme $x \longrightarrow -1$ à moins que ν est un entier non négatif , la même raison nous oblige à choisir $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Par conséquent, les seules solutions de (3.1.9) pour $\mu = 0$ qui restent bornée dans l'intervalle fermé $0 \leq \theta \leq \pi$ correspondent à μ intégrante non négatif et sont de la forme:

$$\Theta = AP_n(\cos\theta), \qquad n = 0,\ 1,\ 2, ..., \tag{3.3.2}$$

Où $P_n(x)$ est le polynôme de Legendre de degré n. En ce qui concerne l'équation radiale (3.2.4), il est une équation d'Euler, a une solution générale $\left(\text{por } \nu \neq -\frac{1}{2}\right)$

$$R = Cr^{\nu} + Dr^{-\nu-1}. \tag{3.3.3}$$

Dans le cas présent $\nu = n$, et l'exigence que la solution soit délimitée au centre de la sphère nous oblige à choisir $D = 0$. Il en résulte que

$$R = Cr^n, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{3.3.4}$$

et donc l'ensemble approprié de solutions particulières de l'équation de Laplace l'intérieur de la sphère est:

$$u = u_n = M_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.3.5}$$

Nous pouvons maintenant résoudre notre problème de valeur limite par superposition de la solution (3.3.5). En effet, supposons que la fonction $f(\theta)$ de délimitation peut être expansé dans une série de polynômes de Legendre

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{3.3.6}$$

où

$$f_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{3.3.7}$$

et supposons que la série (3.3.6) converge uniformément dans l'intervalle $[0,\ \pi]$. Ensuite, choisissant $M_n = f_n a^{-n}$ et en additionnant les solutions (3.3.5), nous obtenons la série

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), \tag{3.3.8}$$

qui, d'après *le théorème de Harnack* sur des suites de fonctions harmoniques, converge uniformément pour $0 \leq r \leq a$ à une fonction harmonique avec des valeurs limites.

$$u\,|_{r=a} = f(\theta),$$

i.e., (3.3.8) permet de résoudre le problème de Dirichlet pour une sphère.

hghgfjjgdkgb,jfkdfnd

fnfn;nd;

hkjdkfjg

gjfhgkdgd

bgj,fv,k;f

jghjkfdgkjg

fgjfgjksd

jnjkjhkfl

kgfkljg

,gfhfghn

hgfh

ghfgc

hb

gnh

hgh

hgfhgfh

ghcf

ghf

gnhgcfnh

ghncf

Bibliographie

[1] **FRANK BOWMAN**, *Introduction to Bessel functions, New York, 1958.*

[2] **G.HECKMAN**, ***H.Schilichtkrull***, *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces, 1994.*

[3] **ISAAC TODHUNTER,** *An elemantary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions and Bessel functions, London, 1857.*

[4] **ISABELLE TERRASSE**, **TOUFIC ABBOUD**, *Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes, 2007.*

[5] **KORNEV.B.G**, *Bessel functionand their application, London, 2002.*

[6] **LARRY C.ANDREWS**, *Special functions for engineers and applied mathematicians, New York, 1985.*

[7] **N.N.LEBEDEV, RICHARD.R.SILVERMAN**, *Special function and their applications, 1965.*

[8] **MARRY KRAY**, *Algèbre de lie _ Applications aux particules élémentaires, stage de magistère sous la direction de MICHEL RAUSCH de Traubenberg, Strasbourg, 2008.*

[9] **MICHEL CAPEDROU,** *Satellite de Kepler au GPS.*

[10] **NICO.M.TEMME**, *special function An introduction to the classical functions of mathematical physics, Canada, 1996.*

[11] **A.NIKIFOROV**, ***V.OUVAROV***, *Fonction spéciale de la physique mathématique, Mosco, 1983.*

[12] **ORIN.J.FARREL,BERYRAM ROSS,** *Solved problems in analysis, New York, 1963.1971.*

[13] **K.F.RILEY, M.P.HOBSON, S.J.BENCE**, *Mathematic methods for physics and engineering third edition, Cambridge university, 2006.*

[14] **V.SCHECHTMAN**, *Fonctions sphériques et système integrables, 2012.*

[15] **V .SMIRNOV**,*Cours de Mathématiques Supérieur, tome II, Mosco, 1970.*

[16] **THOMAS_MURRAY_MACROBERT**, *An elemantary treatise on harmonic function, London, 1927.*

[17] **WILLI FREEDEN**, **MICHAEL SCHREINER**, *Sphérical functions of mathematical geosciences, Heidelberg, 2009.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons représenté les fonctions sphériques, quelques types et ses propriètés distinctives.Aussi, nous avons clarifié leurs application dans la physique mathémathique pour mettre l'attention sur ce type important de fonctions spéciales dans le but de les utiliser dans des domaines plus vaste pour découvrir des nouvelles perspectives.

Abstract

In this memory we represented the spherical functions , some of their types and properties, then we clarified the importance of these functions as applications in physical mathematic problems to bend the attention to it since it represents an important class of special functions in order to use it in different domains to discover new applications in new horizons.

الملخص

في هذه المذكرة قدمنا الدوال الكروية, بعض أصنافها و خصائصها المميزة و وضحنا مدى أهميتها كتطبيقات في المسائل الفيزيائية و كذا المسائل الرياضية الفيزيائية , و ذلك لغرض لفت الانتباه لها باعتبارها صنفا هاما من الدوال الخاصة التي تعتبر مفتاحا لتطور مختلف العلوم, و أيضا من اجل تسليط الضوء عليها في مجالات أوسع بهدف اكتشاف آفاق جديدة.