N° d'ordre :
N° de série :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العـــــــــــالي والبحث العلمـــــــي

جامعة الشهيد حمة لخضر بالـــــــــــــــــوادي

كلية العلوم والتكنولوجيا

مذكرة التخرج

ليسانس أكاديمي

مجال: الرياضيات و الاعلام الآلي
شعبة الرياضيات
التخصص: نمذجة رياضية و محاكاة عددية

الموضوع

المفارقات العلمية

مفارقة جوزيف بيرتراند في الاحتمالات

أنموذجا

من إعداد:
إيمان ترشة
حليمة صالحي
فطيمة ترشة
تحت إشراف:
محمد السعيد تواتي إبراهيم

السنة الجامعية : 2014 - 2015

الفهرس

الفهرس

شكر وعرفان I

مقدمة..... II

الفصل الأول: مدخل إلى المفارقات

1 – 1 – تعريف المفارقات.....1

1 – 1 – 1 – لغة.....1

1 – 1 – 2 – اصطلاحا.....1

1 – 2 – أنواع المفارقات 2

1 – 2 – 1 – المفارقة الرياضية.....2

1 – 2 – 1 – 1 – مفارقة غاليليو: الجزء يساوي الكل.....3

1 – 2 – 1 – 2 – مفارقة باناخ تارسكي 3

1 – 2 – 2 – الفيزياء الفلكية 4

1 – 2 – 2 – 1 – مفارقة اولبرز 4

1 – 2 – 3 – الفلسفة.....5

1 – 2 – 3 – 1 – مفارقة القدرة المطلقة 5

1 – 2 – 4 – المنطق 6

1 – 2 – 4 – 1 – مفارقة الغراب.....6

1 – 2 – 5 – المفارقة الدينية.....7

1 – 2 – 5 – 1 – وجود الله في الدين من عدمه.....7

1 – 2 – 6 – مفارقة بيولوجية.....8

1 – 2 – 6 – 1 – مفارقة جراي 8
1 – 2 – 7 – مفارقة تاريخية..... 8
1 – 2 – 7 – 1 – مفارقة ابراهام لينكولن و جون كيندي 9
1 – 2 – 8 – مفارقة سياسية 10
1 – 2 – 8 – 1 – مفارقة استقرار أو عدم استقرار الأوضاع..... 10
1 – 3 – أشهر المفارقات العلمية..... 10
1 – 3 – 1 – قديما..... 10
1 – 3 – 1 – 1 – مفارقة زينون..... 10
1 – 3 – 2 – حديثا 13
1 – 3 – 2 – 1 – مفارقة برتراند راسل..... 13
1 – 3 – 2 – 2 – مفارقة جوزيه ويلارد جيبس..... 13

الفصل الثاني: الحساب الإحتمالي

2 – 1 – نبذة تاريخية..... 17
2 – 2 – مفاهيم أساسية 18
2 – 2 – 1 – سيغما (σ) الجبور أو العشائر..... 18
2 – 2 – 1 – 1 – تعريف 18
2 – 2 – 1 – 2 – نتيجة..... 18
2– 2 – 2 – العشيرة البوريلية..... 19
2 – 2 – 3 – التطبيقات القابلة للقياس 19
2 – 2 – 3 – 1 – تعريف 19
2 – 2 – 3 – 2 – تعريف 19
2 – 2 – 4 – التجربة العشوائية 20

2 – 3 – تعاريف أساسية 20
2 – 3 – 1 – فضاء العينة..... 20
2 – 3 – 2 – الأحداث 20
2 – 3 – 3 – الاحتمال 20
2 – 3 – 4 – فضاء الاحتمال..... 21
2 – 4 – حساب الاحتمال..... 21
2 – 4 – 1 – الاحتمال العددي 21
2 – 4 – 2 – الاحتمال الهندسي 23
2 – 4 – 3 – نتيجة 25
2 – 5 – المتغيرات العشوائية..... 26
2 – 5 – 1 – تعريف..... 26
2 – 5 – 2 – المميزات العددية لمتغير عشوائي..... 26
2 – 5 – 2 – 1 – التوقع الرياضي..... 26
2 – 5 – 2 – 2 – التباين 26
2 – 5 – 2 – 3 – الدالة المميزة 27
2 – 6 – قوانين الاحتمال الشهيرة..... 27
2 – 6 – 1 – التوزيعات الاحتمالية المتقطعة 27
2 – 6 – 1 – 1 – توزيع برنولي $X \rightsquigarrow B(1،p)$ 27
2 – 6 – 1 – 2 – التوزيع الثنائي $X \rightsquigarrow B(p،n)$ 28
2 – 6 – 1 – 3 – توزيع بواسون $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ 28
2 – 6 – 2 – التوزيعات الاحتمالية المستمرة 28
2 – 6 – 2 – 1 – التوزيع المنتظم $x \rightsquigarrow U(a،b)$..... 29

2 – 6 – 2 – التوزيع الطبيعي $x \rightsquigarrow N(\mu,\sigma^2)$ 29

2 – 6 – 2 – 3 – التوزيع الأسي $x \rightsquigarrow \xi(\lambda)$ 29

2 – 7 – نظرية النهاية المركزية 30

الفصل الثالث: مفارقة جوزيف بيرتراند

3 – 1 – تعريف 32

3 – 2 – مفارقة جوزيف بيرتراند 33

3 – 3 – الحلول 34

3 – 3 – 1 – الحل الأول 34

3 – 3 – 2 – الحل الثاني 35

3 – 3 – 3 – الحل الثالث 36

3 – 4 – مناقشة الحلول 37

3 – 4 – 1 – القطر العشوائي 37

3 – 4 – 2 – الرؤوس عشوائيا 38

3 – 4 – 3 – المنتصف العشوائي 38

الخاتمة

المراجع

الملخص

شكر وعرفان

إلى كل من أضاء بعلمه عقل غيره أو هدى بالجواب الصحيح حيرة سائليه، فأظهر بسماحته تواضع العلماء، و برحابته سماحة العارفين.

نتوجه بفائق التقدير والاحترام إلى مرشدنا " تواتي إبراهيم محمد السعيد " الذي منحنا الكثير من وقته وجهده وتوجيهاته وأرائه القيّمة، وقام بمساعدتنا في إعداد هاته المذكرة، نسأل الله أن يجزيه خيرا ويوفقه في حياته ويجعل هذا في ميزان حسناته.

ثم الشكر الموصول إلى كل من علمنا و قام بتوعيتنا طوال مشوارنا الدراسي، كما نتقدم بكل معاني الشكر والثناء والامتنان إلى كل أساتذة جامعة الشهيد حمة الأخضر الذين كان لهم دور هاما في انجاز هذه المذكرة من نصائح ومعلومات قيمة أفادونا بها في هذا البحث.

وفي الأخير نشكر كل من شجعنا وحفزنا من قريب أو من بعيد ونخص بذلك كل من عائلتي

" ترشة " و" صالحي " الذين قدموا لنا كل الدعم المعنوي والمادي لإتمام هذا العمل.

ختاما نرجو من الله التوفيق في عملنا هذا وأن يجعله علما نافعا لنا ولغيرنا.

مقدمة

إن المفارقة من المصطلحات النقدية التي أثارت العديد من التساؤلات وكثر حولها الجدل العلمي، ولا يخفى على الدارس أو الباحث المثقف أن المفارقة من المصطلحات النقدية الحديثة المهمة التي انتشرت في جميع المجالات، والتي اختلف العلماء حول تعريفها.

كان للمفارقات دور كبير في تطور العلوم، حيث ساهمت في إيجاد العديد من الحلول لكثير من المشاكل التي واجهت العلماء، وفقا لتعريفها كل حسب مفهومه الخاص.

الاحتمالات علم اكتسب مكانة واسعة بين الدراسات الرياضية لكونه علم ذو صلة كبيرة بواقع حياتنا، فبالرّغم من أنه علم رياضي إلا أنه يتدخل في حياتنا أكثر من أية علوم أخرى فهو أساس لأعمالنا ومعاملاتنا، حيث لا يوجد عمل إلا و يحتمل أن يحدث أو لا يحدث.

لدراسة هذا الموضوع وضعنا منهجا يحتوي على ثلاث فصول:

الفصل الأول: يتضمن عموميات حول المفارقات، وأدرجنا فيه مفهوم وأنواع المفارقات وأشهرها عبر التاريخ.

الفصل الثاني: يتمحور حول مفاهيم أساسية في الاحتمالات ويتضمن أهم التعاريف والعلاقات الضرورية التي تم توظيفها في هذا الفصل.

الفصل الثالث: خصصنا هذا الفصل لمفارقة جوزيف بيراترند وفيه سنتطرق إلى حلولها الثلاثة مع توضيح كل حل.

وفي إطار معالجتنا لموضوع المفارقات العلمية نتمنى أن نكون قد وفقنا في إعطاء جميع المفاهيم والعلاقات المرتبطة بهذا الموضوع، وطرحها بأسلوب واضح وجـــــــــــــــلي.

الفصل الأول

مدخل إلى المفارقات

منذ العصور القديمة حتى عصرنا هذا والمفارقات تلعب دورا بارزا في تاريخ العلوم، حيث أنها تعبر عن زوال أفكار قديمة و ظهور أفاق حديثة.

1 – 1 – تعريف المفارقات [9]

1– 1 – 1 – لغة

فارقَ يفارق، مُفارَقةً وفِراقًا، فهو مُفارِق، والمفعول مُفارَق.

فقد ورد في المعجم الوجيز الذي يعتبر من المعاجم الحديثة: " فارقة مفارقة و فراقا، باعده فرق بين القوم أي أحدث بينهم فرقة "، فمن خلال التعريفات سواء في المعاجم القديمة أو الحديثة يتضح جليا أن مدلول ومعنى المفارقة لا يخرج عن معنى الافتراق و التباعد و الاختلاف.

1 – 1 – 2 – إصطلاحا

هي تناقض ظاهري، أو أمر محير ظاهري التناقض. من الممكن أن تكون عبارة صحيحة أو مجموعة من العبارات التي تتضمن معنى النقض، أو النفي.

وفقا لتعريف الفيلسوف الانجليزي **مارك سينسبري**[1] تعني " خاتمة قد تبدو غير مقبولة مستمدة من فرضيات قد تبدو مقبولة من خلال منطق قد يبدو معقولا ".

المفارقة يمكن أن تعبر عن مفارقة خارجية عندما تناقض معرفة أو فرضية سابقة، أو تناقض داخلي عندما تحتوي في ذاتها على شيء وعكسه.

أما في البلاغة فهي قياس فاسد، وهي صياغة علمية لا تفيد استنتاج اليقين في المحاججة، وقد يسلم لها الخصم وقد لا يسلم.

وقد ورد في أكسفورد المختصر " المفارقة تعبير عن معنى المعنى بلغة نقيضة ".

[1]- فيلسوف إنجليزي، ولد سنة 1943، درس في لندن، تخصص في مجالات مختلفة، مؤلف لعدة كتب.

وقد رأى **اوجست شليجل**[1] أن " المفارقة شكل من النقيضة ".

وكذلك **صموئيل جونسون**[2] عرفها على أنها " طريق من طرق التعبير يكون لمعنى النقيض أو مضادا للكلمات ".

وأيضا **رولان بارت**[3] عرفها على أنها " المفارقة شكوك تتحول إلى نوع من القلق مطلوب في الكناية ومن شأن هذا القلق إبقاء تلاعب الرموز وتعدد الدلالات قائمين ".

وهي تعني التناقض (الفلسفة والتصوّف) إثبات لقول يتناقض مع الرأي الشائع في موضوع ما بالاستناد إلى اعتبار خفي على هذا الرأي العام حتى وقت الإثبات.

إذاً فالمفارقة مصطلح غامض يثير الالتباس، يمتلك تاريخا طويلا، ولهذا فكل من حاول بحث ودراسة هذا المصطلح، يصل بأنه مصطلح يستعصي على تعريف واحد، فيرى الأديب الألماني **ميويك** بأن المفارقة ليست بالظاهرة البسيطة، لهذا هناك عقبة في تعريفها، ولهذا فقد تعددت تعريفاتها وتباينت، ولم يكن هناك تعريفا واحدا جامعا لها فكل واحد تناولها بحسب مفهومه لها.

1 – 2 – أنواع المفارقات [8]

أخذت المفارقات العديد من الأشكال، بحيث أنها شملت مختلف التخصصات والمجالات كالرياضيات، الفيزياء... ونذكر منها:

1 – 2 – 1 – المفارقة الرياضية

هو تناقض مع قاعدة رياضية مسلم بصحتها.

---

[1]- كاتب، شاعر، ناقد و مترجم ألماني. ولد سنة 1767 في مدينة هانوفر، ومات عام 1845 في مدينة بون.

[2]- كاتب، شاعر و ناقد بريطاني، ولد سنة 1709، وتوفي سنة 1784.

[3]- فيلسوف فرنسي، ناقد أدبي، دلالي و منظر اجتماعي، ولد سنة 1915، توفي سنة 1980.

1 – 2 – 1 – 1 – مفارقة غاليليو: الجزء يساوي الكل

غاليليو عالم فلكي و فيلسوف فيزيائي، ولد في ايطاليا سنة 1564 كان مهتما بالرياضيات و الفلك و الفيزياء اشتهر بعلم الحركة و المركزية الشمسية.

توصل **غاليليو** في أحد تأملاته لمفارقة، فبأخذ مجموعة الأعداد الطبيعية {..... 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0 } ثم أخذنا مجموعة مربعات الكاملة المحتواة ضمن هذه المجموعة نجد:

{ ..... 36 ; 25 ; 16; 9 ; 4 ;1; 0 } واضح ومن البديهي أن هذه المجموعة هي جزء من مجموعة الأعداد الطبيعية وواضح أيضا أنها اصغر منها.

المفارقة تنتج أن هاتان المجموعتان متساويتان والبرهان على ذلك كالتالي:

لدينا أن كل عدد طبيعي هو عبارة عن جذر لمربع كامل ومنه نجد:

0 جذر تربيعي ل 0، 1 جذر تربيعي ل1،....، 6 جذر تربيعي ل36،.....، وهكذا .....

لو تابعنا للانهاية لنجد أن n هو جذر تربيعي ل n^2.

وهذا يعني أن المجموعتين متساويتين وهذا تناقض واضح مع بديهية الجزء أصغر من الكل.

1 – 2 – 1 – 2 – مفارقة باناخ تارسكي

وتنص هذه المفارقة انه " إذا قمت بتقسيم كرة ذات حجم أو قطر يساوي (r) بطريقة معينة ثم قمت بتجميع هذه الأجزاء بطريقة معينة، فانه يمكنك أن تكوّن كرتين من الحجم أو القطر(r) ".

المفارقة تكمن في أن هناك حجما مضافا لا يعلم مصدره. **باناخ**[1] و **تارسكي**[2] برهنا صحة و إمكانية وجود هذه الظاهرة رياضيا و نظريا و لكن فقط وفقا لمبدأ بديهية الاختيار.

[1]- ولد ستيفان باناخ في 30 مارس 1892 في كراكاو وتوفي في 31 أغسطس في ليفيف في أوكرانيا وهو عالم رياضيات بولوني.

[2]- عالم رياضيات بولندي ولد في 14 يناير1901 بوارسو بولندا وتوفي في 26 أكتوبر 1983.

ولقد اعتبرت نقدا لصحة هذا المبدأ الذي طالما كان مثيرا للجدل، حيث أن جميع القوانين المستخدمة في الإثبات تحفظ الحجم و بهذا يكون الخطأ راجع للمبدأ.

و باستخدام مبدأ غرابة الاختيار _المرشح حديثا كبديل _مثلا لا يمكن إثبات المفارقة.

ولكن علماء الرياضيات البحتة لازالوا يتمسكون بالمبدأ لاعتقادهم بوجود خطأ في مكان ما في مثل هذه الإثباتات غير المنطقية.

1 – 2 – 2 – الفيزياء الفلكية

وهي مفارقة (تناقض ظاهري) في الفيزياء الفلكية وعلم الكونيات المادي.

1 – 2 – 2 – 1 – مفارقة اولبرز

سميت على اسم الفلكي الألماني **هاينريشف فيلهلم اولبرز**[1]، تسمى أيضا مفارقة *السماء المظلمة* وهي *الحجة أن ظلمة السماء ليلا تتعارض مع الافتراض بوجود كون ثابت لا نهائي وابدي.*

تناقش هذه المفارقة سؤالا قد يبدو بسيطا للوهلة الأولى: لماذا تبدو السماء داكنة في الليل؟

قد طرح هذا التساؤل العالم الألماني **اولبرز** في القرن التاسع عشر، والسؤال الذي تبدو إجابته بسيطة هو اعقد من ذلك، فلو افترضنا أن الكون الذي نعيش فيه هو كون لا متناهي وموجود دائما، فبالتالي سيوجد نجم أو مجرة على امتداد خط بصرنا لو نظرنا في أي اتجاه، لأننا نرى أن النجوم والمجرات موزعة بالتساوي في الكون أينما نظرنا، وبالتالي ستكون السماء كلها مضيئة بالليل.

لنتخيل أنه يوجد شخص في غابة شجرية صغيرة ونظر من خلال الشجرة لخارج الغابة، يمكنه رؤية شخص ثان واقف خارج الغابة، و لكن مع زيادة مساحة الغابة تصبح فرصة الرؤية للخارج أضعف لوجود جذوع الأشجار على الأقل على امتداد خط النظر، فإذا أصبحت الغابة لا متناهية تصبح الرؤية لخارج الغابة مستحيلة. ولو طبقنا المثال السابق على الكون واستبدلنا جذوع الشجر بالنجوم والمجرات لوجدنا أنه في حالة

[1]- عالم فيزيائي ألماني، ولد سنة 1758 وتوفي سنة 1840.

الكون اللامتناهي فإننا يجب أن نرى السماء مضيئة أينما نظرنا، لا تكون السماء مظلمة على الكون إلا أن يكون متناهي وهذا ما توصل إليه **كيبلر**[1] ولكن هل هذا حقيقي؟

إذا كان يجب أن نرى السماء مضيئة ولكنها ليست كذلك فيجب أن يكون هناك خلل في حجتنا. إذًا لكي ندحض المفارقة وجب ألا يوجد نجوم بعد مسافة معينة، أي وجب وجود حدود للكون، ولكننا لا نرى أي دلائل على وجود حدود للكون.

ولكن يمكن أن يكون هناك حد بمعنى آخر أي حد الزمن، ومنه حتى لو كان الكون لا نهائي فإن عمره له حد، إذا فنحن نرى فقط النجوم التي كان لضوئها الكافي للوصول إلينا خلال عمر الكون 13.7 مليار سنة، وعليه يمكن أن نرى الضوء على بعد 10 مليارات سنة ولكن لا يمكننا رؤية ضوء على بعد 20 مليار سنة ضوئية.

ومنه ما يمكّننا من أن نرى في أي اتجاه هو ضوء وجد ما يكفي من الوقت في عمر الكون للوصول إلينا.

أي أن الحد الأقصى هو الأفق الكوني وأي مسافة داخله هي في حدود الكون المرئي وبمرور الزمن ينمو الكون المشاهد.

1 – 2 – 3 – الفلسفة

هي مفارقة التناقض الناتج عن عمليات استنباطية صحيحة، وذلك انطلاقا من مقدمات و أوليات متماسكة.

1 – 2 – 3 – 1 – مفارقة القدرة المطلقة

نسبت هذه المفارقة إلى **ابن رشد**[2]، تعود تاريخيا إلى القرن الثاني عشر، بحيث أنها كانت تمثل إحدى القضايا الجدلية في الفلسفة في أزمنة ليست بالبعيدة.

نصها كالتالي: " إذا كان باستطاعة كائن تنفيذ أي فعل، فيجب أن يكون قادرا على خلق مهمة ما لم يستطع هذا الكائن ذاته تنفيذها، ولذا فإنه لا يستطيع تنفيذ كل الأشياء، لكن من جهة أخرى إذا كان غير قادر على خلق مهمة لا يستطيع تنفيذها، إذا يوجد شيء لا يستطيع هذا الكائن فعله ".

[1]- عالم رياضيات، فلكي وفيزيائي ألماني، ولد في 27 ديسمبر 1571، وتوفي في 15 نوفمبر 1630.
[2]- أبو الوليد محمد بن أحمد بن محمد بن أحمد بن أحمد بن رشد، ولد في 14 ابريل 1126، توفي في 10 ديسمبر 1198.

فقد اتخذت هذه المفارقة أشكالا مختلفة عبر التاريخ لكن مفارقة الحجر تعد إحدى أهم هذه الأشكال وتنص:

"هل يستطيع كائن ذو قدرة مطلقة أن يخلق حجرا ثقيلا جدا لدرجة انه حتى هو لا يستطيع حمله؟ "

فإذا استطاع رفع الحجر، عندها يبدو أن الكائن يمكن أن يتوقف عن كونه ذا قدرة مطلقة لان الحجر لم يكن ثقيلا كفاية، ولكن إذا لم يستطع حملها، فان هذا الكائن لم يكن ذا قدرة مطلقة منذ البداية.

أثارت هذه المفارقة تاريخيا الكثير من الجدل إذ أننا غالبا ما نشير بكلّي القدرة إلى الله، فذهب الكثير من فلاسفة القرون الوسطى إلى نفي وجود القدرة المطلقة و اندرجت هذه المشكلة في إطار الجدال الأزلي بين النسبي و المطلق.

1 – 2 – 4 – المنطق

هي ادعاءات قد تبدو صحيحة إن نظرنا لها من جانب ، وخاطئة إن نظرنا لها من جانب آخر.

1 – 2 – 4 – 1 – مفارقة الغراب

نأخذ تصريحان متكافئان ومؤكدان على نفس المضمون، فمن البديهي أن كل دليل لأحدهما هو كذلك دليل للآخر. عل سبيل المثال " تيري و جوديث هما والداي " و " أنا ابن تيري و جوديث "، هذان التصريحان متكافئان منطقيا، لأنهما يقولان نفس الشيء.

إلا أن مفارقة الغراب (غربان **هيمبل**[1]) تظهر بطلانه، بحيث أن مفارقة غربان هيمبل تستخدم المبدأ لبرهان نتيجة الغير المعقولة، بأن الببغاء اخضر اللون هي دليل على أن الغربان سوداء. السبيل الوحيد لتلاقي هذه النتيجة، التي من الواضح أنها غير مقبولة هو رفض المبدأ المذكور سابقا.

[1]- فيلسوف علمي، ولد في 8 يناير 1905 في ألمانيا، توفي في 9 نوفمبر 1997 في برينستون نيو جرسي.

تعمل المقاربة كما يلي:

ليكن التصريحين التاليين:

1- جميع الغربان سوداء.

2- كل ما هو ليس بأسود ليس غرابا.

التصريحان يقولان نفس الشيء، ونفس المعنى، بحيث أن التصريح الأول يقول أن كل ما هو من نوع محدد له خاصية معينة، أما التصريح الثاني ينص أن كل ما يفتقد لتلك الخاصية ليس من ذلك النوع. وبذلك يكون التصريحان متكافئان منطقيا، كلاهما سيكونان صائبين وزائفين في الظروف ذاتها. حيث إذا كان هناك شيء وكان غرابا لكنه ليس أسود يكون التصريحان (1) و (2) زائفين، أما عكس ذلك فيكونا صائبان. بما أن التصريحان متكافئان منطقيا فإن أي مشاهدة تقوم بدعم احدهما تكون قد تدعم الآخر.

ولنفرض إذا أننا شاهدنا ببغاء أخضر، هذه المشاهدة تؤكد التصريح (2): كل ما هو ليس بأسود ليس غرابا، الببغاء أخضر ليس أسود وليس ببغاء، إذا المشاهدة هي دليل على صحة التصريح (2).

على ضوء ما سبق ذكره، مشاهدتنا لببغاء اخضر يجب أيضا أن تؤكد التصريح (1) أي أننا برؤيتنا لببغاء أخضر نستطيع أن نؤكد أن جميع الغربان سوداء. أي مشاهدة لشيء ليس اسود وليس غراب هو دليل بان جميع الغربان سوداء.

1 – 2 – 5 – المفارقة الدينية

1 – 2 – 5 – 1 – وجود الله في الدين من عدمه

طرحت مسألة وجود الله من عدمه من قبل رجال وعلماء الدين وآخرين، فهم وبإختلاف ديانتهم يقولون، بأنهم استطاعوا البرهنة على وجود الله اعتمادا على الغيب بحسب بعض الديانات أو تيارات دون غيرها داخل الدين الواحد، أو بالغيب والعقل معا بحسب ديانات أخرى في الدين الواحد.

يثير هذا النقاش قضايا عديدة. المشكلة الرئيسية هي عدم وجود تعريف متفق عليه لله بين رافضي و المعتقدين بوجوده، فبعضها عامة غير محددة تتحدث عن قوة كونية، وبعضها الآخر تتطرق إليه بمواصفات خاصة، إلا أن مستوى الاختلاف اقل بين المعتقدين، وهم ينتقدون تصور النصارى واليهود إلى الله.

هناك العديد من الحجج التي يستدل بها على وجود الله، حيث يمكن تصنيفها إلى: حجج ميتافيزيقية (غيبية)، منطقية، تجريبية و ذاتية، يستدل بها القائلين بوجود الله فقط.

يوجد أيضا العديد من الحجج العقلية التي يستدل بها من لا يؤمنون به، مع قسم كبير من المعتقدين، وغالبيتها لغير المؤمنين، تتمحور حول تعارض الصفات الإلهية المطلقة مع بعضها والتخيير والتسيير ووجود الشيطان.

وهناك أيضا حجج عقلية يستدل بها المعتقدين عندما يوجّهون خطابهم إلى مخاليفهم، والتي يرونها تؤيد ما ورد عندهم من نصوص القرآن والسنة.

1 – 2 – 6 – مفارقة بيولوجية

1 – 2 – 6 – 1 – مفارقة جراي

طرحت هذه المفارقة من قبل عالم الحيوان البريطاني **جيمس جراي**[1]، سنة 1936، حيث كان يطرح التساؤل: *كيف يستطيع الدلفين تحقيق تلك السرعات و التسارعات العالية بالمقارنة مع جسمه الذي يبدو عبارة عن كتلة عضلية صغيرة ؟* فقام جراي بتقدير الطاقة التي يستطيع الدلفين بذلها على حسب وظائف أعضائه، وقد توصل إلى أن تلك الطاقة لم تكن كافية بما فيه الكفاية للتغلب على قوى السحب في الماء. فأفترض انه لا بد أن يكون لجلد الدلفين خصائص خاصة مقاومة للسحب.

1 – 2 – 7 – مفارقة تاريخية

تعني مغالطة و خطأ تاريخي أو تشابها مثيرا.

[1]. عالم الحيوان ولد في 14 اكتوبر 1891 وتوفي سنة 1975.

1 – 2 – 7 – 1 – مفارقة ابراهام لينكولن و جون كيندي

لم يعرف أن شهد التاريخ تشابها ملفتا وغريبا في تفاصيل الأحداث كما حدث بين حياتي الرئيسين الأمريكيين **ابراهام لينكولن** (الرئيس 16) **وجون كيندي** (الرئيس 35)، حيث:

– **لينكولن** تم انتخابه في 1846 أما **جون كيندي** فتم انتخابه كعضو في مجلس النواب سنة 1946.

– كان **لينكولن** في مواجهة انتخابية مع **دوغلاس** الذي ولد عام 1813 أما **كيندي** فمنافسه **نيكسون** المولود في 1913.

– كان سكرتير **لينكولن** اسمه **كيندي** أما مساعد (سكرتيرة) **كيندي** فكان اسمه **لينكولن**.

– تنبأ الفلكي المشهور **بروغتون** بموت **لينكولن**، أما الفلكية المشهورة **ديكسون** فتنبأت بموت **كيندي**.

– اغتيل **لينكولن** في مسرح سمي" فورد " أما **كيندي** فاغتيل في سيارته " فورد ".

– قبل اغتيالهما بأسبوع زار **لينكولن** مدينة " مونرو" في ولاية ماريلاند، أما **كيندي** فقد زار"**مارلين مونرو**".

– اغتيل **لينكولن** على يد **ويلكس بوث** الذي ولد عام 1839، الذي هرب من المسرح والقي عليه القبض في مستودع، أما **كيندي** فاغتاله **اوزفالد** الذي ولد سنة 1939 وهرب من المستودع إلى المسرح، فتم القبض عليه، والملفت أن كلا القاتلين يحمل 15 حرفا في اسمه الثلاثي، واغتيلا قبل محاكمتهما.

– توفيت زوجتيهما عن عمر يناهز 64 سنة، وكانتا ذات الشعر الأسود وتتقنان الفرنسية، ومخطوبتين لشخص آخر قبلهما، وتوفيا ولد لكليهما خلال فترة رئاستهما.

– خلف **لينكولن** اندرو **جونسون**[1] المولود عام 1808 بينما خلف **كيندي** ليندون **جونسون**[2] المولود سنة1908.

[1]- الرئيس ألـ 17 للولايات المتحدة الأمريكية من 15 أفريل 1865 إلى 4 مارس 1869، توفي سنة 1875.

[2]- الرئيس ألـ 36 للولايات المتحدة الأمريكية من 22 نوفمبر 1963 إلى 20 يناير 1969، توفي سنة 1973.

1 – 2 – 8 – مفارقة سياسية

1 – 2 – 8 – 1 – مفارقة استقرار أو عدم استقرار الأوضاع

هي نظرية في العلاقات الدولية بشأن تأثير الأسلحة النووية والدمار الشامل. بحيث تنص على أنه لكل دولتين أسلحة نووية، واحتمال نشوب حرب مباشرة بينهما يقل إلى حد كبير، ولكن احتمال الصراعات الصغيرة أو غير المباشرة بينهما يزيد. يحدث هذا لأن الجهات الفاعلة العقلانية تريد تجنب الحروب النووية، وبالتالي فإنها لا تبدأ صراعات كبيرة و تسمح بالصراعات الصغيرة على سبيل المثال خلال الحرب الباردة بين الولايات المتحدة الأمريكية والاتحاد السوفيتي فهذين الاثنين في حرب دائمة ولكن أيضا هما في سلام دائم.

1 – 3 – أشهر المفارقات العلمية

المفارقة بيان يتناقض مع نفسه، أو حالة تبدو أنها تتحدى المنطق الاعتيادي، وفي كثير من الأحيان تكون الافتراضات المؤدية إلى التناقض خاطئة، مما يعطي مفارقة كاذبة، مع ذلك توجد بعض المفارقات غير الكاذبة و لكن لا تزال دون حل مقبول علميا.

1 – 3 – 1 – قديما

1– 3 – 1 – 1 – مفارقة زينون

ولد **زينون** في القرن الخامس قبل الميلاد، كان ينتمي إلى تلك الفئة من الفلاسفة الإغريق المشهورين، ولكنهم في نفس الوقت المنفور منهم والمغضوب عليهم، فقد كانت فلسفته تشكل خطرا كبيرا على التيار الفكري و الفلسفي السائد لدى الإغريق.

مفارقة **زينون** ليست مفارقة واحدة ولكنها على الأقل 9 مفارقات مختلفة منها مفارقة أخيل و السلحفاة، مفارقة السهم المنطلق و مفارقة العداء. ولكن جميع هذه المفارقات تشترك في نقطة أساسية وهي تعتبر محور تلك المفارقات جميعا وهى تقسيم المكان أو الزمان، اللحظات أو النقاط إلى عدد لانهائي من الأقسام الصغيرة.

كان **لزينون** ثلاث مفارقات في حركة الأجسام وتتمثل في:

1- مفارقة حركة الجسم

إن حركة أي جسم مستحيلة، وقد برهن **زينون** على ذلك كما يلي، لنفرض أن جسماً ما سيتحرك من النقطة (A) إلى النقطة (B)، حتى يصل إلى النقطة (B)، يجب عليه أن يمر من نقطة منتصف المسافة بين النقطتين، لنفرض أنها النقطة(C) وحتى يصل الجسم إلى (C) عليه أن يمر من نقطة المنتصف بين (A) و (C)، أي يمر من نقطة ربع المسافة الأصلية، وحتى يصل الجسم إلى نقطة ربع المسافة، عليه أن يمر من نقطة منتصف ربع المسافة وهكذا نجد أن هناك عددًا غير منته من نقاط المنتصفات،حيث يجب على الجسم أن يمر بها حتى يقطع المسافة بين (A) و (B)، بالتالي هو لن يقطع تلك المسافة أبدًا من ناحية، ومن ناحية أخرى لا يوجد مسافة ابتدائية على الجسم أن يقطعها، لأن أي مسافة ابتدائية لا بد أن يكون لها نقطة منتصف بالتالي لن يكون هناك نقطة بداية أبدًا وبالتالي فالحركة لن تبدأ وسيبقى الجسم واقفا في (A).

2- مفارقة الأرنب والسلحفاة

لا يمكن لمتحرك سريع أن يسبق متحرك بطيء فيما لو كان البطيء متقدم عليه بمسافة، كلنا نعرف منذ الطفولة قصة الأرنب والسلحفاة، وكيف أن السلحفاة تسبق الأرنب، لأن الأرنب يصاب بالغرور وينام ويلهو بينما تكون السلحفاة تسير للوصول لنهاية السباق، لكن المفارقة هي أن الأرنب لا يستطيع أبداً أن يسبق السلحفاة التي سارت قبله بمسافة – دون الحاجة أن يلهو وينام – وبرهان ذلك أن الأرنب حتى يسبق السلحفاة عليه أولاً أن يقطع المسافة التي تفصله عنها، وحتى يقطع هذه المسافة عليه أن يمر من نقطة المنتصف، وحتى يصل للمنتصف عليه أن يمر من نقطة الربع ... وهكذا نعود للبرهان في المفارقة الأولى لنجد أن الأرنب مهما كان سريعاً فلن يسبق السلحفاة.

3- مفارقة السهم المنطلق

الأكثر دهشة هي أن السهم (أو أي جسم) لا يمكن أن يطير ويتحرك، البرهان على ذلك أن السهم على مسار الحركة، في لحظة ما هو يقع في موضع ما، طبعاً حتى يكون السهم واقعاً في ذلك الموضع، فيجب أن يكون ساكناً لأنه لا يمكن أن يكون محتلاً له وهو متحرك، حسناً ولكن لو أخذنا أي لحظة من لحظات الحركة سنجد أن السهم ساكن في موضع ما، إذًا هو ساكن دوماً ولكن كيف هو ساكن دوماً ومتحرك بنفس الوقت ؟ إن حالة حركة السهم هي أشبه بما يحدث في أفلام الرسوم المتحركة، وكلنا يعلم أن الرسوم المتحركة هي في الأصل صور ثابتة ساكنة يتم تمرير شريط من صور متتالية بسرعة معينة، فتبدو وكأنها متحركة بإستمرار متصل، لكنها في الحقيقة حركة متقطعة لصور ساكنة. فالسؤال هنا من هو الذي يمرر الشريط السينمائي للحركة في الوجود؟

طبعاً الجميع يعلم أن الأجسام تتحرك وأن الأرنب يسبق السلحفاة وأن السهم يتحرك و يطير، ولكن هذه المفارقات الثلاثة **لزينون** تثبت عكس ذلك، لقد جاء **أرسطو** (فيلسوف يوناني، تلميذ **افلاطون**[1] ومعلم **الاسكندر الأكبر** ولد 384 ق.م وتوفي في 322 ق.م) وحاول أن ينقض كلام **زينون** وقال " إن الحركة تحدث ذلك، وأن المسافة المحدودة بين نقطتين يمكن أن تقسم إلى عدد لانهائي من النقاط، والجسم سيتحرك و يقطع المسافة لأنها مسافة محدودة خلال فترة محدودة "، كذلك عندما نأخذ أي لحظتين متتاليتين من لحظات حركة السهم، يشغل فيهما السهم موضعين، هناك فترة بينهما يمكن أن تقسم إلى عدد لانهائي من الفترات تضمن حركة السهم، بمعنى آخر لقد قرر **أرسطو** أن الحركة تحدث بشكل مستمر و متصل، وانطلى كلام أرسطو وبعده **نيوتن** (عالم انجليزي ولد في 4 يناير 1643 وتوفي في 31 مارس 1727) على الناس كل هذه القرون وأتى كلامه منسجماً مع التوابع الرياضية المتصلة، ليأتي الفيزيائي الشهير **هايزنبرغ**[2] بمبدأ عدم التعيين ويتبين أن **زينون** كان محقاً بكلامه.

[1]- فيلسوف يوناني كلاسيكي، رياضيتي، وضع الأسس الأولى للفلسفة الغربية توفي في أثينا عن عمر يناهز 80 سنة.

[2]- فيرنر كارل هايزنبيرغ فيزيائي ألماني وحائز على جائزة نوبل عام 1932 ولد في 5 ديسمبر 1901 وتوفي في 1 فبراير 1976.

1 – 3 – 2 – حديثا

1 – 3 – 2 – 1 – مفارقة برتراند راسل

والمعروفة أيضا بتناقض قوانين **راسل**، والتي وضعها العالم **برتراند راسل** سنة 1901، توضح أن *نظرية المجموعات المبسطة التي وضعها* ***جورج كانتور*** (عالم رياضيات ألماني ولد في 3 مارس 1845 وتوفي في 1918) *تؤدي إلى التناقض*. كانت نفس المفارقة قد اكتشفت من قبل **إيرنيست زيرميلو**[1] قبل اكتشاف راسل لها بسنة، ولكنه لم ينشر الفكرة، التي بقيت معروفة فقط **لهيلبيرت**[2] و **هوسول**[3] وأعضاء آخرين من جامعة غوتنغن.

وطبقًا لنظرية المجموعات المبسطة، فإن أية مجموعة معرفة هي مجموعة. افترض أن $\mathbb{R}$ هي مجموعة لكل المجموعات التي لا تكون مجموعة بنفسها. وإذا كان $\mathbb{R}$ مؤهلة لتكون مجموعة بنفسها، فانه يتعارض مع تعريفها الخاص كمجموعة تحتوي على كل المجموعات ولا تكون مجموعة بنفسها، ومن ناحية أخرى إذا كانت المجموعة لا تكون مجموعة بنفسها، فإنها تكون مؤهلة لتكوين مجموعة بنفسها طبقا لنفس التعريف هذا التناقض هو مفارقة راسل.

1 – 3 – 2 – 2 – مفارقة جوزيه ويلارد جيبس [6]

ولد **جوزيه ويلارد جيبس** سنة 1839، فهو عالم فيزيائي وكيميائي من الولايات المتحدة، أسس علم الفيزياء الكيميائية، له فضل كبير في تطور علم الديناميكا الحرارية و الرياضيات، ابتكر حساب المتجهات بالتوازي مع **أوليفر هيفساید**[4] وطبقها على الفيزياء، توفي عام 1903.

---

[1]- ارنست زيرميلو درس الرياضيات والفيزياء والفلسفة في جامعات برلين ولد في 27 يوليو 1871 وتوفي في 1953.

[2]- دافيد هيلبرت عالم رياضيات ألماني ، ولد في 23 يناير 1862 وتوفي في 14 فبراير 1943.

[3]- ادموند هوسول فيلسوف ألماني ومؤسس الظاهريات ولد في 8 أبريل 1859 وتوفي في 26 ابريل 1938.

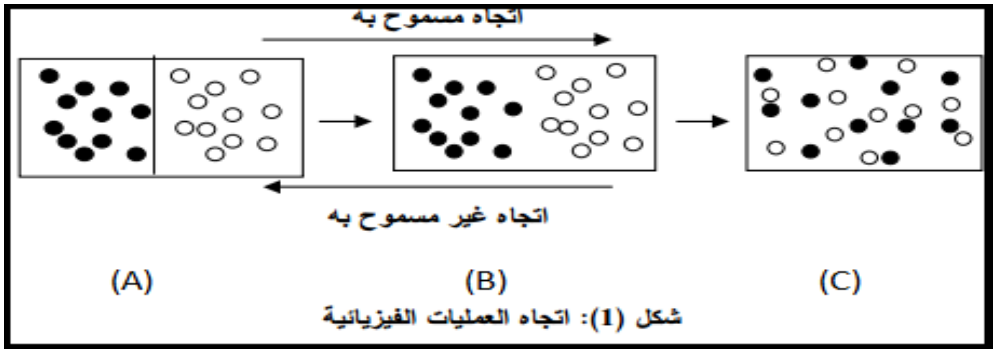
[4]- فيزيائي ساهم في بحوث الاتصال التلفوني ولد عام 1850م في بريطانيا وتوفي في 1925م .

حيث تظهر لنا مفارقته عند خلط كتل متطابقة من غاز مثالي وتدعى بمفارقة **جيبس**، ولإيضاحها نقوم بدراسة الحالتين التاليتين:

الحالة (1): خلط كتلتين مختلفتين من غاز مثالي عند درجة حرارة ثابتة:

معلوم بأن عملية خلط كتلتين من الغاز هي عملية غير انعكاسية. ولتوضيح ذلك: نعتبر كميتين من غازين مختلفين، كما هو موضح في الشكل(1)، لهما القيم (N_1, V_1, S_1, T) (الدوائر السوداء)، (N_2, V_2, S_2, T)(الدوائر البيضاء) محتويين في وعاء يفصلهما حاجز، عند إزالة الحاجز نلاحظ أن الغازين يبدآن بالانتشار حتى يتوزعا بانتظام خلال الوعاء بأكمله و يختلطا، كما هو موضح في الشكل (A)، حيث في هذه الحالة يأخذ الغاز القيم (N, V, S_{mix}, T) مع وجوب شرط :

$$V = V_1 + V_2 \qquad (1.1)$$



شكل (1): اتجاه العمليات الفيزيائية

كما ذكرنا سابق أن هذه العملية غير انعكاسية، أي أن لها اتجاها واحدا فقط (من الشكل (A) إلى الشكل (C)). أما العملية الانعكاسية لهذا الانتشار، وهي انفصال الغازين وتجمعهما في منتصف الإناء مرة أخرى بعد اختلاطهما، لا تحدث أبدا. لحساب التغير الانتروبي في هذه العملية نتيجة للخلط نجد أن:

$$\Delta S = S_{mix} - (s_1 + s_2) = N_1 K_B \ln(V) + N_2 K_B \ln(V) - N_1 K_B \ln(V_1) - N_2 K_B \ln(V_2) \qquad (2.1)$$

$$= N_1 K_B \ln\left(\frac{V}{V_1}\right) + N_2 K_B \ln\left(\frac{V}{V_2}\right) > 0 \qquad (3.1)$$

هذه تتطابق مع القيم العملية.

على سبيل المثال نجد انه عند القيم: $N_2 = N_1 = N$ و كذلك $V_2 = V_1 = \frac{V}{2}$

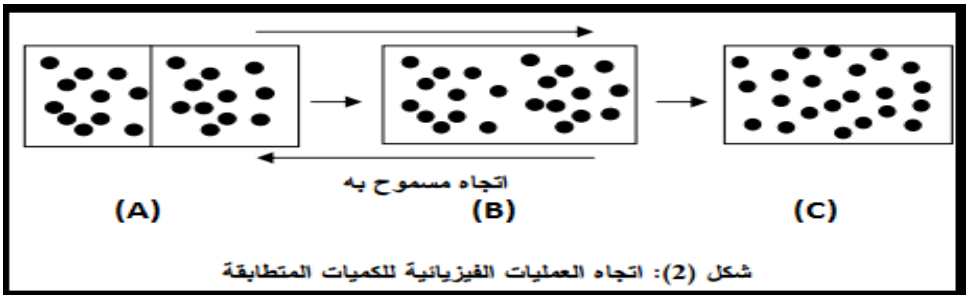
فإن قيمة التغير في الانتروبي هو: $\Delta S = 2NK_B \ln 2$

ومنه فان أثناء عملية الخلط تم انتشار جزيئات في الحجم V الكلي، وواضح ان عملية الخلط تمت بطريقة عشوائية، بالتالي نتج عنها زيادة الفوضى بالنظام، إحتمال زيادة انتروبي تصبح منطقية لان هذه العملية غير انعكاسية، الخلط هنا يعبر عن عملية يتم فيها تبادل اماكن جزيئات غاز بجزيئات غاز اخر.

لذلك فان كل عملية تبديل ينتج عنها خلق حالة جديدة، وبالتالي زيادة الانتروبي.

الحالة (2): خلط كتلتين متطابقتين من غاز مثالي عند درجة حرارة ثابتة:

عملية خلط كتلتين متطابقتين من غاز هي عملية انعكاسية (كما هو موضح في الشكل (2)).



شكل (2): اتجاه العمليات الفيزيائية للكميات المتطابقة

بالتالي فإن التغير في الانتروبي يجب أن يكون مساويا للصفر إذا تم الخلط أو لم يتم. ولهذا نجد:

$$\Delta S = S_{mix} - (s_1 + s_2) = 0 \qquad (4.1)$$

هذه النتائج تتفق مع النتائج العملية للعمليات الانعكاسية بالديناميكا الحرارية، ولكنها لا تتفق مع المعادلة (3.1)، حيث أن (3.1) لا تأخذ في الاعتبار هوية الجزيئات، فهي تعطي نفس الزيادة في الانتروبي كأن الجزيئات مختلفة.

إذا في هذه الحالة تم الخلط بين جزيئات متطابقة، بالتالي لا يتم أي تغيير، ولذلك فان تطبيق معادلة (3.1) يغالي من تقدير عدد المستويات المسموح بها. هذه المغالاة ناتجة من أن النظرية التقليدية تتعامل مع جزيئات الغاز على أنها جسيمات مميزة، حتى ولو كانت متطابقة. ولحل هذه المفارقة تم وضع دالة التجميع بالشكل:

$$Z = \frac{Z_{sp}^N}{N!} \qquad (5.1)$$

حيث: Z_{sp} هي دالة التجميع لجسيم مفرد، ومن (5.1) نجد:

$$\ln Z = N \ln Z_{sp} - (N \ln N - N) \qquad (6.1)$$

ومنه نتحصل على:

$$S = K_B N \ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2} K_B N \left[\ln\left(\frac{2\pi m K_B T}{h^2}\right) + \frac{5}{3}\right] \qquad (7.1)$$

(7.1) تمثل معادلة ساكور– تترود ولها جميع خواص الانتروبي، تعطي الحل الصحيح بكلتا الحالتين السابقتين.

الفصل الثاني

الحساب الإحتمالي

2 – 1 – نبذة تاريخية

تعود نشأة نظرية الاحتمالات إلى منتصف القرن السابع عشر، فهي تستمد جذورها من محاولات فهم وتحليل لعب الحظ التي تواجدت في القرن السادس عشر، وما تلاها من مسائل التأمين، التي كانت جميعها تمثل أمثله تقليدية للتجارب الاحتمالية. وشكلت اهتمام كل من **جيرولامو كاردانو**[1] الذي عاش خلال القرن السادس عشر الميلادي، وكذلك **بيير دي فيرما**[2] و **بليز باسكال**[3] اللذان عاشا خلال القرن السابع عشر.

صيغت الأسس التقليدية لنظرية الاحتمالات، والتي بقيت ثابتة نسبيا حتى اليوم، من أعمال العديد من العلماء من بينهم **برنولي** [4]، **لابلاس**[5] و **بايز** [6].

يعود تاريخ نظرية الاحتمالات المعاصرة إلى سنة 1933، التي صدرت فيها " المفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمالات"، فهو عمل للعالم الإحصائي و الرياضياتي **كلوموغورف** الروسي الأصل، فقدم في هذا العمل البناء الشامل لنظرية الاحتمالات، والذي يعتمد على نظرية القياس.

ارتبطت نظرية الاحتمالات الحديثة بالقياس، حيث القياس في الرياضيات يعني دالة تقوم بربط عدد ما، يدعى الحجم أو السعة أو الاحتمال بمجموعة جزئية من مجموعة كبرى. هذا المفهوم للقياس الرياضي يعتبر أساسيا في التحليل الرياضي ونظرية الاحتمالات. تطور هذا المفهوم من الحاجة لإجراء مكاملة على مجموعات اعتبارية غير معينة بدلا من إجراء التكامل بالطريقة التقليدية.

وتشكل نظرية القياس أحد أجزاء التحليل الحقيقي الذي يبحث في σ – جبر، القياسات، دوال القياس والتكاملات. ويعتبر ذا أهمية خاصة في نظرية الاحتمالات والإحصاء.

---

[1]- رياضياتي ايطالي من عصر النهضة، كذلك طبيب، منجم و مقامر، ولد في 24 سبتمبر 1501 وتوفي في 1576 بروما.
[2]- ولد سنة 1601 بفرنسا، مجال بحثه الرياضيات والقانون ونظرية ألاعداد، وتوفي سنة 1665.
[3]- رياضي، فيزيائي و فيلسوف فرنسي ولد سنة 1623 وتوفي سنة 1662.
[4]- ولد سنة 1700 وتوفي سنة 1782، كان فيزيائي ورياضي سويسري من أصل هولندي.
[5]- رياضي وفلكي فرنسي، من أعماله تطور الرياضيات الفلكية.
[6]- عالم رياضيات انجليزي، ولد سنة 1701 في لندن وتوفي في 7 أفريل 1761.

2 – 2 – مفاهيم أساسية

2 – 2 – 1 – سيغما (σ) الجبور أو العشائر

2 – 2 – 1 – 1 – تعريف [1]

نسمي σ – جبرا أو عشيرة على مجموعة X كل جبر مجموعات $\mathcal{A}$ يتمتع بخاصية الجمعية العدودة التي تعني أن كل اتحاد عدود لعناصر من A يبقى في A.

$$\forall\{A_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}^*} \subset A \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \, \epsilon A$$

ينتج من هذا التعريف أنه إذا كانت A عشيرة فإن:

$$\forall\{A_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}^*} \subset A \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} A_n \, \epsilon A$$

2 – 2 – 1 – 2 – نتيجة

حتى تكون جماعة A غير خالية من أجزاء مجموعة X عشيرة على X، يكفي التأكد من الخواص الآتية:

1. $X\epsilon\mathcal{A}$
2. $\forall\{A_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n\geq 1} A_n \, \epsilon\mathcal{A}$
3. $\forall A\epsilon\mathcal{A} \Longrightarrow A^c\epsilon\mathcal{A}$

أمثلة:

1. P(X) عشيرة على X.
2. من اجل $X = \mathbb{N}$ ، $\mathcal{A} = \{\emptyset، 2\mathbb{N}، 2\mathbb{N}+1\}$ عشيرة على $\mathbb{N}$.

2– 2 – 2 – العشيرة البوريلية [5]

ليكن $\left(\mathrm{B},\mathcal{T}\right)$ فضاء طبولوجي، نسمي عشيرة بوريلية على X نسبة الى $\mathcal{T}$ ونرمز لها ب $\mathrm{B}_{\mathcal{T}}(\mathrm{X})$ العشيرة المولدة من الفئة $\mathcal{T}$ لاجزاء X المفتوحة. نسمي عناصر هذه العشيرة بالمجموعات البوريلية.

2 – 2 – 3 – التطبيقات القابلة للقياس

2 – 2 – 3 – 1 – تعريف

نسمي فضاء قيوسا كل ثنائية $\left(\mathrm{X},\mathcal{A}\right)$ مكونة من مجموعة X، ومن عشيرة $\mathcal{A}$ مكونة من أجزاء X.

نسمي عناصر $\mathcal{A}$ بالمجموعات القيوسة أو القابلة للقياس.

2 – 2 – 3 – 2 – تعريف

ليكن $\left(\mathrm{X},\mathcal{A}\right)$ ، $\left(\mathrm{X}',\mathcal{A}'\right)$ فضائين قيوسين و $f:\mathrm{X}\longrightarrow\mathrm{X}'$ تطبيقا.

نقول عن f انه تطبيق قيوس اذا كان:

$$f^{-1}(\mathcal{A}')\subset\mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(\mathrm{A}')\in\mathcal{A}\ ,\ \forall\mathrm{A}'\in\mathcal{A}$$

لتكن E مجموعة قيوسة من $\left(\mathrm{X}\ ,\mathcal{A}\right)$ نقول عن تابع $f:\mathrm{X}\longrightarrow\mathrm{X}'$ أنه قيوس على E إذا كان:

$$f^{-1}(\mathcal{A}')\ \cap\mathrm{E}\ \subset\mathcal{A}$$

حيث: $f^{-1}(\mathcal{A}')\cap\mathrm{E}=\left\{f^{-1}(\mathrm{A}')\cap\mathrm{E},\ \mathrm{A}'\in\mathcal{A}\right\}$

نشير بـ $\mu\left(\left(\mathrm{X},\mathcal{A}\right),\left(\mathrm{X}',\mathcal{A}'\right)\right)$ الى مجموعة التطبيقات القيوسية من $\left(\mathrm{X},\mathcal{A}\right)$ الى $\left(\mathrm{X}',\mathcal{A}'\right)$.

2 – 2 – 4 – التجربة العشوائية

هي التجربة التي يمكن ملاحظتها وتحديد النواتج الممكنة قبل إجرائها، مع عدم التنبؤ بصفة مؤكدة بأن تحققها سيتم عبر أي من هذه النواتج.

2 – 3 – تعاريف أساسية

2 – 3 – 1 – فضاء العينة

لتكن التجربة العشوائية E، نسمي فضاء العينة (فضاء النواتج) مجموعة النتائج التي يمكن ظهورها عند إجراء التجربة E، ونرمز لها بـ Ω.

مثال 2 – 3 – 1:

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة، النتائج الممكنة هي T أو H، حيث T نرمز بها للوجه الظاهر، أما H للصورة. إذا فضاء العينة لهذه التجربة هو: $\Omega = \{T, H\}$

2 – 3 – 2 – الأحداث

Ω فضاء عينة لتجربة عشوائية E، كل مجموعة جزئية من عناصر Ω تسمى حادثا مرتبطا بالتجربة E (كل عنصر من العشيرة)، ونرمز له بـ A،B أوC.. حيث أن عناصر فضاء العينة تمثل الحوادث الأولية لكل نهاية ممكنة للتجربة E، ونرمز لها بـ ω.

2 – 3 – 3 – الاحتمال

E تجربة احتمالية وليكن ($\Omega, \mathcal{A}$) فضاء قابل للاحتمال.

نسمي احتمالا طل تطبيق $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرف علىσ – جبر الحوادث $\mathcal{A}$ ويحقق البديهيات التالية:

$$\forall\ A \in \mathcal{A} \quad : \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \qquad -$$

$$P(\Omega) = 1 \qquad -$$

$$\forall \{A_i\} i \in \mathbb{N}^+ \quad : \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad -$$

حيث $A_i \cap A_j = \emptyset$ مع $i \neq j$.

ملاحظة: تسمى البديهيات السابقة بمسلمات **كلوموغورف**.

نتائج المسلمات السابقة:

$$P(\phi) = 0 \qquad -$$

- إذا كان A_1 ، A_2 ، ... ، A_n حوادث متنافية (منفصلة مثنى مثنى) فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \qquad -$$

2 – 3 – 4 – فضاء الاحتمال

نسمي الثلاثية $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ بالفضاء الاحتمالي حيث:

Ω فضاء العينة، $\mathcal{A}$ عائلة من الاحداث، P دالة احتمال.

2 – 4 – حساب الاحتمال

الاحتمال عبارة على نسبة عددية غير سالبة أي: $\forall A \quad : \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

حيث القيمة "0" تعني استحالة الحادثة، أما القيمة "1" تعني أن الحادثة أكيدة.

2 – 4 – 1 – الاحتمال العددي [2]

ليكن فضاء العينة Ω المنته و المرتبط بالتجربة الاحتمالية E، بفرض ان الحوادث الاولية متساوية الإمكانية، فان كل حادث أولي $\omega_i \in \Omega \; ; \; i = \overline{1,n}$، له نفس الاحتمال بالفضاء المنتظم أي:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n} \; ; \quad \omega_i \in \Omega \qquad (1.2)$$

فإن احتمال أي حادثة $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ يتم حسابه على اساس البديهية الثالثة **لكلوموغورف**.

$$P(A) = \sum_{\omega_i \epsilon A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \epsilon A} P(\omega_i) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad (2.2)$$

إذن:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad (3.2)$$

حيث: $-$ $|A|$ تمثل عدد الطرق الملائمة لوقوع A.

$-$ $|\Omega|$ تمثل عدد العناصر الممكنة ل Ω.

مثال 2 – 4 – 1:

عند إلقاء زهرة نرد متناظرة مرة واحدة وتتبع ظهور عدد زوجي على الوجه الظاهر يكون:

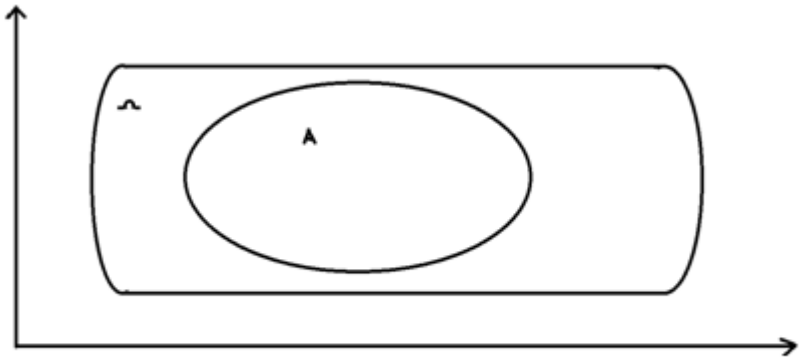
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ و الحادثة $A = \{2,4,6\}$

بمأن $|\Omega| = 6$ و $|A| = 3$ فإن: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5.$

2 – 4 – 2 – الاحتمال الهندسي [4]

ليكن الفراغ Ω لتجربة احتمالية E يتألف من عدد غير منته من الحوادث الأولية ω، أي أن: $|\Omega| = \infty$

نفرض أن كل هذه الحوادث هي عبارة عن إحداثيات نقطة في فراغ R^n، حيث: $n = 1،2،3$، والحوادث $A \in B$ كمنطقة ما في هذا الفراغ وΩ مجموعة محدودة في الفراغ R^n.



الشكل(1.2)

لتكن Ω لها قياس هندسي R، القياس الهندسي للمجموعة Ω يعتبر طولها، في R^2 مساحتها، R^3 حجمها، وبالتالي الحوادث $A \in B$، أي أنها ذات طول L أو ذات مساحة S أو ذات حجم V.

لقد بينا خلال دراسة بديهيات **كلوموغورف**، أن القياس الهندسي للمجموعات $A \in B$ يمكن اعتباره قياس احتماليا لتلك المجموعات، بشرط أن القياس الهندسي يحقق بديهيات **كلوموغورف**.

فإحتمال حادث $A \in B$ يعين وفق الصيغة الآتية :

$$P(A) = \frac{\text{قياس A}}{\text{قياس } \Omega} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \qquad (4.2)$$

مثال 2 – 4 – 2: Ω منطقة محدودة في الفراغ R^2، لتكن C منطقة محدودة داخل منطقة Ω.

ولتكن M عبارة على اية نقطة من ω، وبالتالي فإن احتمال أن تكون النقطة M من أي منطقة

جزئية من Ω يتناسب مع مساحة هذا الجزء.

فإحتمال أن تكون النقطة M في المنطقة C يساوي:

$$P(C) = \frac{\text{مساحة } C}{\text{مساحة } \Omega} = \frac{\mu(C)}{\mu(\Omega)} \qquad (5.2)$$

الإحتمال الهندسي يتضمن قياسات هندسية مثل:

أ – الطول:

مثال1:

لتكن القطعة المستقيمة $[AD]$ التي تحتوي القطعة $[BC]$، ولتكن E نقطة عشوائية من $[AD]$.

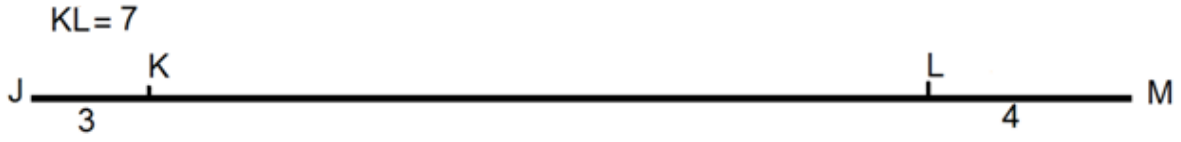
المطلوب:

إيجاد احتمال أن تقع E على $[BC]$.

الحل:

$$P\left([BC] \text{ على } E\text{تقع}\right) = \frac{BC}{AD}$$

مثال 2:



الشكل(2.2)

إذا اختيرت النقطة X عشوائيا على $[JM]$، فالمطلوب إيجاد احتمال وقوع X على $[KL]$.

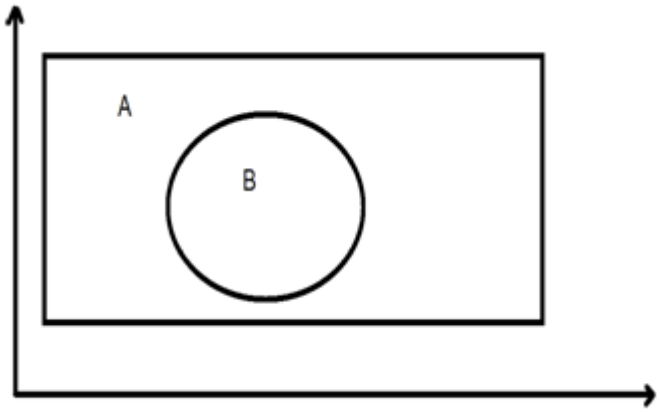
$$P\left([JM] \text{على } X \text{ تقع}\right) = \frac{KL}{JM}$$

$$= \frac{7}{4+3+7} = \frac{7}{14} = 0.5 = 50\%$$

ب – المساحة:

إذا احتوت المنطقة A منطقة اخرى B، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\mathrm{P}\left(\text{تقع E في الدائرة } B\right) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل A}} \qquad (6.2)$$



الشكل (3.2)

2– 4 – 3 – نتيجة

عند تحديد الاحتمال الهندسي لهدف ما نفترض الآتي:

– وقوع الهدف ضمن منطقة محددة.

– احتمال وقوع الهدف في أي مكان من المنطقة متساوي.

2 – 5 – المتغيرات العشوائية

2 – 5 – 1 – تعريف

ليكن $(\Omega،A،P)$ فضاء احتمالي مرتبط بتجربة E.

نقول عن التابع الحقيقي $X(\omega)$ المعرف على Ω و يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$، انه متغير عشوائي إذا كان:

$$\forall B \subset \mathbb{R} : \{X^{-1}(B)\} = \{\omega \epsilon \Omega : X(\omega) \epsilon B\}$$

2 – 5 – 2 – المميزات العددية لمتغير عشوائي [7]

2 – 5 – 2 – 1 – التوقع الرياضي

تعريف – 2 – 5 – 2 – 1

ليكن X متحولا عشوائيا ما (متقطعاً أو مستمراً) فالتوقع الرياضي للمتحول العشوائي نرمز له بـ $E(X)$ المعرف بالعلاقة التالية:

$$\begin{cases} E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i) & \text{إذا كان } X \text{ متغيراً متقطعاً} \\ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \, f(x) dx & \text{إذا كان } X \text{ متغيراً مستمراً} \end{cases} \quad (7.2)$$

2 – 5 – 2 – 2 – التباين

تعريف – 2 – 5 – 2 – 2

يدعى التوقع الرياضي لمربع إنحراف المتغير العشوائي X عن توقعه الرياضي بتباين X ونرمز له بالرمز $V(X)$، يكتب بالصيغة التالية:

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \quad (8.2)$$

2 – 5 – 2 – 3 – الدالة المميزة

تعريف – 2 – 5 – 2 – 3

ليكن X متغيراً عشوائياً، من أجل كل عدد حقيقي t، نرمز لدالته المميزة بـ $\phi_x(t)$.

$$\phi_x(t) = E\left(e^{itx}\right) \qquad (9.2)$$

في حالة متغير عشوائي مستمر:

$$\phi_x(t) = E\left(e^{itx}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx \qquad (10.2)$$

في حالة متغير عشوائي متقطع:

$$\phi_x(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itX_K} P(X = x_K) \qquad (11.2)$$

2 – 6 – قوانين الاحتمال الشهيرة [3]

2 – 6 – 1 – التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

التوزيع الاحتمالي لمجموعة القيم المتقطعة التي يأخذها المتغير العشوائي متقطع هي التي تتضمن جميع القيم الممكنة لهذا المتغير مع الاحتمال الخاص لكل منها.

2 – 6 – 1 – 1 – توزيع برنولي $X \backsim B(1,p)$

تعريف – 2 – 6 – 1 – 1

تسمى كل تجربة ذات نتيجتين ممكنتين (نجاح – فشل) بتجربة برنولي.

نسمي X متغير برنولي ذو الوسيط p إذا كان:

$$\begin{cases} P(X = 0) = q = 1 - p \\ P(X = 1) = p \end{cases} \qquad (12.2)$$

2 – 6 – 2 – 1 – التوزيع الثنائي $X \rightsquigarrow B(n,p)$

تعريف – 2 – 6 – 1 – 2

نكرر n مرة مستقلة تجربة **برنولي**، وليكن X المتغير العشوائي من(نجاح – فشل) في $\{i\}$ تجربة، المساوي لعدد النجاحات المختلفة، يسمى X المتغير العشوائي ثنائي الوسطين n و p و يكون:

$$P(X = x) = C_n^x \, p^x \, q^{n-x} \quad ; \quad x\epsilon\{0,1,\cdots,n\} \qquad (13.2)$$

2 – 6 – 1 – 3 – توزيع بواسون $X \rightsquigarrow P(\lambda)$

تعريف – 2 – 6 – 1 – 3

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتوزع وفق توزيع **بواسون**[1] بوسيط $\lambda > 0$، دالة احتماله هي:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad ; \quad x\epsilon\mathbb{N} \qquad (14.2)$$

حيث:

– λ تمثل معلمة التوزيع.

2 – 6 – 2 – التوزيعات الاحتمالية المستمرة

نعرف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بأنه الجدول أو القائمة الذي يشمل القيم المختلفة لهذا المتغير والاحتمال الخاص بكل قيمة من هذه القيم.

[1]- عالم رياضيات فرنسي الأصل، ولد في 1781 وتوفي سنة 1840.

2 – 6 – 2 – 1 – التوزيع المنتظم $x \rightsquigarrow U(a،b)$

تعريف – 2 – 6 – 2 – 1

إذا كان المتغير العشوائي X ينتمي الى المجال $[a،b]$ وله توزيع منتظم، فإن دالة كثافة إحتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad ; \quad a < x < b \qquad (15.2)$$

دالة الكثافة الاحتمالية

الشكل(4.2)

2 – 6 – 2 – 2 – التوزيع الطبيعي $x \rightsquigarrow N(\mu،\sigma^2)$

تعريف – 2 – 6 – 2 – 2

نقول أن للمتغير العشوائي X توزيعاً طبيعياً بوسيطين μ، σ^2 اذا كانت كثافته الإحتمالية معرفة بـ:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty \qquad (16.2)$$

حيث : $-\infty < \mu < +\infty$ ، $\sigma > 0$.

حالة خاصة – 2 – 6 – 2 – 2

التوزيع الطبيعي القياسي أو المعياري $x \rightsquigarrow N(0,1)$

نسمي المتغير الطبيعي القياسي أو المعياري هو الذي وسطه الحسابي صفر و تباينه واحد و يرمز له بالرمز z وتكون دالة كثافة احتماله هي:

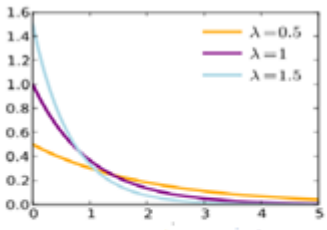
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \quad ; \quad -\infty < z < +\infty \qquad (17.2)$$

2 – 6 – 2 – 3 – التوزيع الأسي $x \rightsquigarrow \xi(\lambda)$

تعريف – 2 – 6 – 2 – 3

نقول أن ألمتغير العشوائي X يتبع التوزيع الأسي إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases} \qquad (18.2)$$



دالة الكثافة الاحتمالية

الشكل(5.2)

2 – 7 – نظرية النهاية المركزية

لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع، متوسطه μ وتباينه σ^2

إذا كان: $Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

فإن:

$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0،1\right) \qquad (19.2)$$

تفسير:

ليكن مجتمع له توزيع احتمالي ما متوسطه μ وتباينه σ^2 واخترنا عدة متغيرات عشوائية، حجم كل منها n، فالوسط الحسابي لهذه العينات له توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين $(\sigma^2\backslash n)$. $n > 30$.

هذه النظرية تعتمد على الوسط (المتوسط) كمقياس للنزعة المركزية، ومن هنا جاءت كلمة مركزية في اسم النظرية و كلمة النهاية لكوننا نريد أن يكون حجم العينة كبيرا، لنبسط هذه النظرية بالقول:

ليكن لدينا مجتمع ما، نريد إجراء دراسة ظاهرة ما في هذا المجتمع و نظرا لكبر ولصعوبة التطبيق لكل أفراده، فنختار عينة من المجتمع وندرس معالم العينة، وليكن المتوسط مقدرا غير متحيز ومن ثمة نأخذ عينة ثانية ونحسب متوسطها وثالثة ورابعة...

نجد أن توزيع هذه المتوسطات للعينات تتبع توزيع طبيعي بصرف النظر عن توزيع المجتمع الذي أخذت منه هذه العينات، ولها متوسط هو مجموع متوسطات العينات التي عددها n أي:

$$\mu = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3 + \cdots + \overline{X}_n}{n} \qquad (20.2)$$

كما أن الانحراف المعياري للمتوسطات $(n > 30)$ وسحب العينات مع الإرجاع يحسب بـ الصيغة:

$$\delta(\overline{X}) = \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}} \ . \qquad (21.2)$$

الفصل الثالث

مفارقة جوزيف بيرتراند

3 – 1 – تعريف

جوزيف لويس فرانسوا بيرتراند عالم رياضيات فرنسي و خبير اقتصادي، ولد بباريس في الحادي عشر من مارس سنة 1822، وتوفي فيها في الخامس من أفريل سنة 1900. عمل **جوزيف بيرتراند** في نظرية الأعداد والهندسة التفاضلية، نظرية الاحتمالات والاقتصاد والديناميكا الحرارية.

تحصل على شهادته الأولى عندما كان يبلغ من العمر 16 سنة، وفي السنة التي تليها، أي في 1839 تحصل على شهادة الدكتوراه عن أطروحة في الديناميكا الحرارية.

تلقى **بيرتراند** تعليمه في مدرسة الفنون التطبيقية (1839–1841)، ثم المدرسة العليا للمناجم (1841–1844).

كان عضوا في أكاديمية باريس، بينما في سنة 1858 انتخب عضوا أجنبيا في الأكاديمية الملكية السويدية للعلوم.

ساهم في العديد من المقالات الشعبية في تاريخ العلم، كما إشتهر بتأليف الكتب الرياضية، ومن بينها: باسكال (1891) و كذا كتاب " calcul des probabilités (1888) " الذي يحتوي على مفارقة في الاحتمالات المستمرة، والتي تعرف حاليا بمفارقة **بيرتراند**.

3 – 2 – مفارقة جوزيف بيرتراند [4]

وضعت هذه المفارقة علماء الرياضيات في حيرة، فيما يتعلق بصحة علم الاحتمالات، حيث أصبح العديد منهم يشكون بمنطق هذا الفرع في الرياضيات. فمفارقة **بيرتراند** عبارة على مشكل في مضمون نظرية الاحتمالات الكلاسيكية، حيث قدم عمله في كتاب " calcul des probabilités " كمثال لإظهار أن الاحتمالات قد لا تكون واضحة المعالم إذا لم يتم تعريف الآلية أو الطريقة التي تنتج المتغير العشوائي بشكل واضح.

ذهب **جوزيف بيرتراند** في مفارقته الى مايلي:

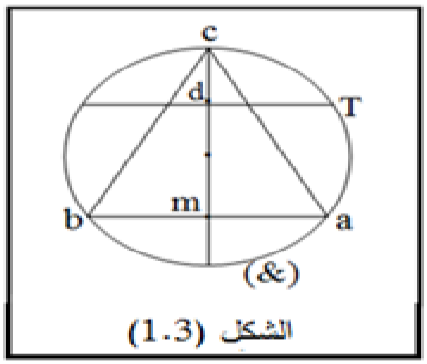
نفرض مثلث متساوي الأضلاع مدرج في دائرة نصف قطرها R ، نختار بشكل عشوائي وتر من هذه الدائرة، ما هو احتمال ان يكون طول هذا الوتر يزيد على ضلع من أضلاع المثلث المتساوي الأضلاع، المرسوم داخل الدائرة ؟

لهذا السؤال ثلاثة أجوبة مختلفة كليا وصحيحة. موضحة كما يلي:

3 – 3 – الحلول

3 – 3 – 1 – الحل الأول

لتكن الدائرة العشوائية (&)، بناء على التناظر نقوم بتحديد وتر لهذه الدائرة وليكن T نقوم برسم قطر للدائرة (&) المتعامد مع T. ونرسم كذلك داخل هذه الدائرة مثلث متساوي الأضلاع حيث رؤوسه الثلاثة تنتمي إلى الدائرة، وكذلك احد أضلاعه يوازي الوتر T، نعرف المثلث انطلاقا من اعطاء رؤوسه abc كما يبدو في الشكل التالي:



الشكل (1.3)

قطر الدائرة المرسوم يقطع الضلع $[ab]$ في المنتصف لأن $(T \parallel ab)$ ونرمز له بـ m.

ينقسم القطر بهذه النقطة بنسبة ربع إلى ثلاثة أرباع.

إذا قمنا بتسمية النقطة التي تقسم قطر الدائرة المرسوم بنسبة ربع إلى ثلاثة أرباع من الطرف المقابل بالرمز d، فإن طول وتر الدائرة الموازي للوتر T يزيد تماما على طول ضلع المثلث المتساوي الأضلاع، شرط وقوع منتصفه بين النقطتين d و m، وهذا يعني أن كل نقاط القطعة المستقيمة [dm] تمثل جميع الحالات الموافقة، بينما باقي نقاط قطر الدائرة تعتبر الحالات الممكنة.

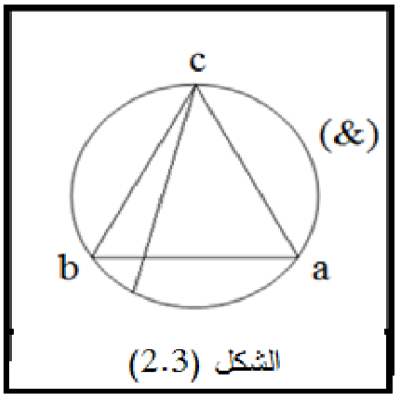
ومنه يكون الاحتمال المطلوب:

$$P = \frac{\text{طول dm}}{\text{طول قطر الدائرة}} = \frac{1}{2} = 0.50 \qquad (1.3)$$

وهو يمثل الحل الأول **لبيرتراند**.

3 – 3 – 2 – الحل الثاني

لتكن (&) وهي نفس الدائرة العشوائية السابقة، بسبب التناظر يمكننا اعتبار الرأس c للمثلث المتساوي الأضلاع abc أحد طرفي الوتر المختار عشوائيا، حيث أن الطرف الثاني هو الذي يحدد طول الوتر كما هو موضح في الشكل التالي:



الشكل (2.3)

إذا وقع الطرف الثاني للوتر المختار على القوس الصغير ab من الدائرة (&)، فإن طول الوتر المرسوم يزيد على طول ضلع المثلث abc المتساوي الأضلاع.

هذا يدل على أن جميع نقاط القوس الصغير ab تمثل الحالات الموافقة، أما كل نقاط الدائرة المتبقية تمثل الحالات الممكنة.

وبالتالي يكون الاحتمال:

$$P = \frac{\text{طول القوس الصغير}}{\text{طول محيط الدائرة}} = \frac{1}{3} = 0.3 \qquad (2.3)$$

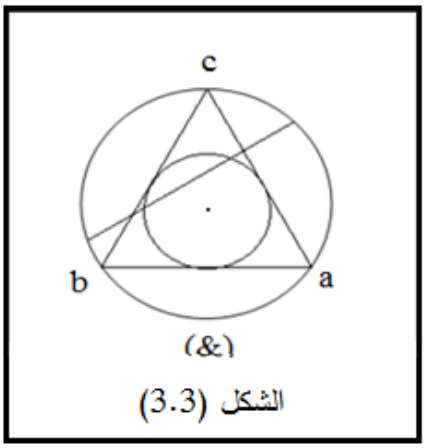
وهذا يعتبر الحل الثاني.

3 – 3 – 3 – الحل الثالث

لتكن (&) دائرة عشوائية، لتعيين طول وتر لهذه الدائرة يتطلب معرفة منتصفه.

إذا وقعت نقطة المنتصف داخل الدائرة المرسومة في المثلث abc المتساوي الأضلاع، فإن طول الوتر المعين بنقطة المنتصف هذه يزيد على طول أي ضلع من المثلث.

ومنه نقاط الدائرة (&) تمثل الحالات الممكنة، كما يوضحه الشكل التالي:



الشكل (3.3)

عندئذ يكون الاحتمال المطلوب هو:

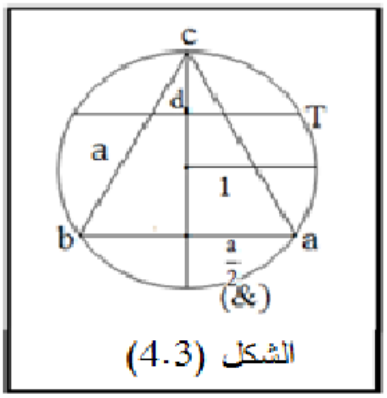
$$P = \frac{\text{مساحة الدائرة الصغيرة}}{\text{مساحة الدائرة الكبيرة}}$$

$$= \frac{\pi\left(R/2\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4} = 0.25 \qquad (3.3)$$

ومنه هذا يمثل الحل الثالث.

3 – 4 – مناقشة الحلول

إذا اعتبرنا الدائرة العشوائية (&) ذات نصف القطر 1، طول ضلع المثلث المتساوي الأضلاع المرسوم داخل الدائرة هو $\sqrt{3}$ كما هو موضح كالتالي:



الشكل (4.3)

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

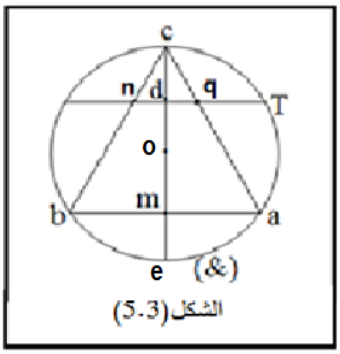
$$a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9}{4}$$

$$4a^2 = a^2 + 9$$

$$a^2 = 3 \implies a = \sqrt{3}$$

3 – 4 – 1 – القطر العشوائي

abc متقايس الأضلاع.



الشكل(5.3)

- o منتصف $[ce]$.
- تقسيم $[mc]$ الى نسبة $\frac{1}{3}$ من جهة القاعدة.

إذن m منتصف $[oe]$.

d نظيرة m بالنسبة لo.

إنشاء مستقيم يشمل o ويوازي T.

تطبيق نظرية طاليس نحصل على المساواة التالية:

$$\frac{cn}{cb} = \frac{cq}{ca} = \frac{nq}{bc} \qquad (4.3)$$

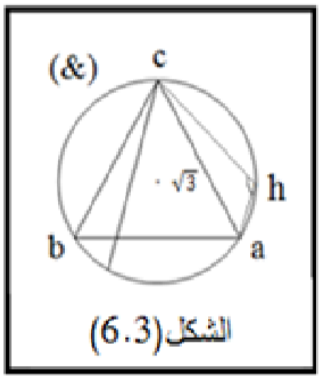
من هذه المساوات نتحصل على :

$$cd = do = om = me \qquad (5.3)$$

3 – 4 – 2 – الرؤوس عشوائيا

$h \in a\hat{c}$

$ch \leq ac$



الشكل(6.3)

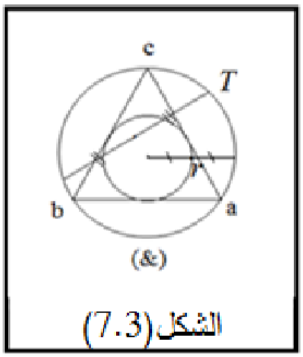
3 – 4 – 3 – المنتصف العشوائي

مركز الدائرة المرسوم داخل المثلث abc تمثل نقطة تقاطع المنصفات الداخلية.

بما أن المثلث abc متساوي الأضلاع إذن:

مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث هو نفسه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث.

وكذلك: $r' = \frac{r}{2}$



الشكل(7.3)

خلاصة:

اختلاف النتائج بشكل جذري أثار جدلا واسعا بين علماء الرياضيات عامة، والاحتمالات بصفة خاصة بشكلها الكلاسيكي، مما أدى إلى تغيير مفهوم العشوائية، وصيغت من بعدها نظرية الاحتمالات الحديثة وفقا لمفهوم **كلوموغورف** باستعمال نظرية القياس.

الخاتمة

تعتبر نظرية الاحتمالات فرعا بارزا من فروع علم الرياضيات، والتي تعتمد على العديد من المفاهيم الأساسية في نظرية القياس، المجموعات، التحليل... الخ، إلا أن بعض المفاهيم ظلت مجالا خصبا للبحث والتنقيب والتقييم، لوجود إلتباس في المفهوم أو عدم اكتمال الشروط الضرورية لذلك، ولعبت المفارقات دورا بارزا في تصحيح وكشف كثير من الغموض على العديد من المفاهيم العلمية، الاجتماعية والسياسية.

وتعد مفارقة جوزيف بيراترند من أبرز المفارقات في مجال الاحتمالات وبالأخص في حساب الاحتمال الهندسي حيث تم توظيف عديد من العلاقات الجبرية الهندسية لتعيين قيمة الاحتمال، مما دعا الكثيرين بعد نشر أعمال بيرتراند إلى الحيرة والشك عن نظرية الاحتمال برمتها، وارتأ آخرون إلى تصحيح وزيادة في ضبط المفهوم، ووضع شروط أكثر صرامة لتطبيق العلاقات الاحتمالية كحساب الاحتمال، المتغير العشوائي، التقارب...

وفي الأخير نرجو مواصلة البحث في هذا الموضوع من جوانب أخرى ليتم كشف النقاب عن العديد من الالتباس في المفاهيم وإدراك البعد التاريخي ومنهجية التفكير العلمي لإثراء العلوم المختلفة.

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية:

[1] السعيد مزوزي، أعمال موجهة في القياس والمكاملة، دار العلوم للنشر والتوزيع، عنابة 2003.

[2] خالد زهدي خواجه، أساسيات الاحتمالات، المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية.

[3] صالح بوعبد الله، مدخل الى الإحتمالات والإحصاء الرياضي 2005 -2006.

[4] عبد الحفيظ مصطفى، نظرية الاحتمالات "مبادئ و احتمالات" الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية 2004.

المراجع باللغة الأجنبية:

[5] MikleBeatriz_Alkéos Michail, probabilités et statistique élémentaires, 2012.

[6] Nasser.I, Partition function and application.

[7] Professeur:TahriJouteildrissi, Musur et integration et calcul des probablilite illustration, Faculté des science dhar El maherz.

المواقع و البحوث الالكترونية:

[8] مجلة الباحثون السوريون http://www.syr-res.com/

[9] معجم المعاني الجامع- معجم عربي عربي http://www.almaany.com/ar/dict/ar-ar/

الملخص

تطرقنا في هذه المذكرة إلى المفارقات (تعريف، أنواع، أشهرها) شملت هذه الأخيرة مختلف التخصصات والمجالات عبر التاريخ نذكر منها: رياضية، فيزيائية فلكية، فلسفية ... الخ، وتم التركيز على مفارقة جوزيف بيراترند وعلاقتها بالاحتمال الهندسي بصفة خاصة وبالاحتمال بصفة عامة، وتوظيف أهم القوانين المتعلقة بذلك بالإضافة إلى دراسة حلولها وكل ذلك انطلاقا من دراسة المفاهيم الأساسية للاحتمال.

الكلمات المفتاحية:

المفارقة، جوزيف بيراترند، الاحتمال الهندسي، المتغير العشوائي.

Résumé

Nous avons discuté dans ce mémoire sur paradoxe (definitions, types, les plus connus),ce dernier a inclus les différents spécialités et domaines a travers l'histoire: athlétique physique astronomique, philosophique... etc. et nous avons concentré spécifiquement sur le paradoxe de Joseph Bertrand et leur relation particulière avec le probabilité géométrique et de la probabilité en general et l'emploi des lois les plus importantes liées à ce en plus de l'étude de toutes les solutions et tout cela à partir d'une étude des concepts de base de la probabilité.

mots clés:

Paradoxe، Joseph Bertrand، la probabilité géométrique، variable aléatoire.

Abstract

We discussed the paradox in this memory (definitions, types, best known) the latter included the different specialties and fields throughout history: athletic astronomical physics, philosophy... etc. and we specifically focused on Joseph Bertrand paradox and their special relationship with the geometric probability and probability in general and the employment of the most important laws related to this in addition to the study of all solutions and all from a study of the basic concepts of probability.

Keywords:

Paradox، Joseph Bertrand، geometric probability، random variable.