

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR
-EL OUED-
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES



Mémoire de fin d'étude
MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Méthode d'ondelettes pour résoudre une classe
d'équations différentielles ordinaires d'ordre
fractionnaire

Présenté par : Ben Mebarek Safa
Rahaim Hana

Soutenu publiquement le 15/06/2022, devant le jury composé de

Beggas Mohamed	Président	MCA	Univ. Eloued
Dehda Bachir	Rapporteur	MCA	Univ. Eloued
Doudi Nadjjet	Examineur	MCB	Univ. Eloued

Année universitaire 2021 – 2022

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail :

A le père cher.

A la mère chère.

A les frères et sœurs.

A tous la famille.

A tous les amis.

Safa et Hana.

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier "**Allah**" le tout puissant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Comme nous tenons à remercier vivement, encadreur de mémoire **Dr. Dehda Bachir** maitre de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de ce travail.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Nous remercions vivement nos parents et nos frères pour l'aide et le soutien moral qu'ils nous ont prodigués.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également au nos camarades de la promotion 2022 de Mathématiques et nos amis surtout **Amira, Thalja, Wassila** et **Taha** pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal .

Que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.

Enfin, nous remercions tous nos Personnel universitaires qui nous accueillent chaque matin avec le sourire.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'une méthode numérique pour la résolution d'une classe des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaires, où on débute par un rappel sur des fonctions spéciales (Gamma et Beta). Ensuite, on introduit la définition et quelques propriétés de l'intégrale et la dérivation fractionnaires. Puis, on étudie la méthode d'ondelette de Haar pour la résolution numérique de l'équation de Bagley Torvik. Enfin, beaucoup des exemples illustratifs sont présentés et caractérisés par les erreurs absolues.

Mots-clés : Intégrale de Riemann-Liouville, dérivation de Caputo, équation de Bagley Torvik, l'ondelette de Haar.

Abstract

This work is devoted to the study of a numerical method for the resolution of a class of ordinary differential equations of fractional order, where one debits by a recall on special functions (Gamma and Beta). Then, we introduce the definition and some properties of the fractional integral and derivative. Then, we study the Haar wavelet method for the numerical solution of the Bagley Torvik equation. Finally, many of the illustrative examples are presented and characterized by absolute errors.

Key words : Riemann-Liouville integral, Caputo derivation, Bagley Torvik equation, Haar wavelet.

Table des matières

1	Outils de base	1
1.1	Fonctions spéciales	1
1.1.1	La fonction Gamma	1
1.1.2	La fonction Bêta	3
1.1.3	La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta	4
1.2	Intégration fractionnaire	5
1.2.1	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	5
1.2.2	Intégrale fractionnaire de Weal	8
1.2.3	Intégrale fractionnaire d'Abel-Riemann	8
1.3	Dérivation fractionnaire	8
1.3.1	Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville	8
1.3.2	Dérivée fractionnaire de A-R	11
1.3.3	Dérivée fractionnaire de Caputo	11
1.3.4	Dérivée fractionnaire de Grünwald	12
1.4	Méthodes analytiques pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire	12
1.4.1	La méthode de l'opérateur inverse	12
1.4.2	Méthode de la transformée de Laplace	13
2	Méthode d'ondelettes	16
2.1	Introduction	16
2.2	Définitions et propriétés des ondelettes	16
2.2.1	Définitions	16
2.2.2	Propriétés des ondelettes	18
2.3	L'ondelette de Haar	18
2.3.1	Principe de La Méthode D'ondelettes de Haar	22
2.3.2	Explication de la méthode	22
2.3.3	Méthode de solution	26
2.3.4	Analyse de convergence de la méthode des ondelettes de Haar	27
3	Applications numériques	29

Introduction générale

Les équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire sont omniprésentes dans les sciences et de l'ingénierie puis-qu'elles apparaissent bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme, ou des mathématiques financières. Aussi elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire. Et l'un des sept problèmes du prix du millénaire consiste à montrer l'existence et la continuité par rapport aux données initiales d'un système d'équation différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire .

La résolution plus généralement des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. La solution analytique d'équation différentielle ordinaire d'ordre fractionnaire, cependant, soit n'existe pas ou est difficile à trouver. Ces dernières années, la plus grande importance a été déplacée des techniques analytiques aux méthodes numériques. Où Le principal attrait des méthodes numériques est que des solutions pourraient être obtenues pour de nombreux problèmes qui ne sont pas prêts pour un traitement analytique. C'est précisément en raison de ce fait que plusieurs méthodes efficaces et précises ont été développées pour trouver la solution numérique des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire comme méthodes des différences finies et méthode d'ondelettes ...etc.

Les ondelettes sont une théorie mathématique remarquablement nouvelle fondée à la fin des années 1980 et c'est aussi un outil mathématique courant pour diviser, analyser et intégrer une fonction. Ces dernières années, les ondelettes a trouvé un grand nombre d'applications dans le domaine de la science et de l'ingénierie comme dans l'analyse du signal, l'analyse numérique et la compression d'images ... etc. Il existe différents types d'ondelettes comme Daubechies, Coiflet, Battle-Lemarie, Ondelettes B-spline et Chebyshev, Mathieu, Legendre et Ondelettes de Haar... etc. Elles sont séparées en fonction de leurs propriétés comme le support compact, l'orthogonalité et le nombre de moments nuls et autres. Beaucoup de travaux ont été consacrés par de nombreux auteurs comme U. Lepik, afin de trouver la solution approximative des différents types d'équations comme équations intégrales et l'intégration numérique, les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles et les équations aux dérivées partielles fractionnaires linéaires et non linéaires qui jouent un rôle très important dans divers phénomènes physiques utilisant différents types d'ondelettes. L' algorithme d'ondelettes pour résoudre une classe d' équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire sur la méthode de collocation.

Pour calculer les coefficients d'ondelettes, nous devons résoudre un système linéaire d'équations algébriques. Dans la plupart des cas, les coefficients d'ondelettes ont été calculés par la méthode de collocation. Nous utilisons également de simulation numérique pour calculer les coefficients d'ondelettes. En particulier, nous utilisons le programme Matlab.

Notre mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres :

Dans le premier chapitre : Nous sommes intéressés à donner quelques définitions et propriétés pour : des fonctions spéciales (Gamma et Bêta), intégration fractionnaire et dérivation fractionnaire. Ensuite, nous examinons quelques méthodes classiques et les plus couramment utilisées pour résoudre des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire, telles que la méthode de l'opérateur inverse.

Dans le second chapitre : Nous étudions une nouvelle méthode de résolution des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire basée sur les ondelettes de Haar. Nous mentionnons le principe de cette méthode et la méthode de solution.

Dans le troisième chapitre : Ce chapitre sera un chapitre purement appliqué où nous appliquerons la méthode HAAR à plusieurs exemples numériques bien connus .

Finalement, nous complétons ce mémoire par une conclusion générale et des références principales.

Chapitre 1

Outils de base

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés que nous utiliserons dans la suite de ce travail.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma (ou fonction d'Euler de deuxième espèce) est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles (voir [1], [4]).

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma : \alpha \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \alpha > 0. \quad (1.1)$$

Propriétés 1.1.1 *Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \forall \alpha > 0. \quad (1.2)$$

Propriétés 1.1.2 *La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\Gamma(n + 1) = n!. \quad (1.3)$$

Démonstration : *Raisonnons la par récurrence si $n = 0$, alors :*

$$\Gamma(0 + 1) = \Gamma(1) = 1 = 0!.$$

Supposons que la formule est vrai pour $n - 1$, i.e

$$\Gamma((n - 1) + 1) = \Gamma(n) = (n - 1)!,$$

et montrons qu'elle est vrai pour n .

D'après l'équation (1.2), on trouve :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

Exemple 1.1 On peut calculer aussi

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1,\end{aligned}$$

et selon le dernier résultat on a

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \Gamma(4) = 6, \dots$$

Démonstration : Démontrons maintenant que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Par définitions, nous avons

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(1/2)-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-(1/2)} dt.$$

Pour $0 < a < b$, après un changement de variables

$$\int_a^b e^{-t} t^{-(1/2)} dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-x^2} 2dx,$$

où

$$\begin{cases} x = t^{1/2} \\ dx = (1/2)t^{-1/2} dt. \end{cases}$$

Si $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow +\infty$, alors nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

il est clair que

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Comme $I > 0$ et ceci est vrai tout simplement parce que $e^{-x^2} > 0$, alors $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc ;

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

En se servant de ce important résultat et la relation fonctionnelle (1.2), on voit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n + 1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Remarque 1.1.1 D'après le résultat (1.2), par récurrence on déduit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + n)}{x.(x + 1)...(x + n - 1)}.$$

Cette relation permet de définir $\Gamma(x)$ pour x réel négatif tel que $-n < x < -n + 1$. On a ainsi défini $\Gamma(x)$ pour tout nombre réel x .

Dans notre cas pour $n = [\alpha] + 1$ nous avons $0 < n - \alpha < 1$, ce qui signifie que $-n < -\alpha < -n + 1$ et selon la convention ci-dessus, on aura

$$\Gamma(-\alpha) = \frac{\Gamma(n - \alpha)}{(-\alpha).(-\alpha + 1)...(-\alpha + n - 1)}.$$

Propriétés 1.1.3 Les propriétés importantes de la fonction Gamma :

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!}$.
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
3. $\Gamma(-x) = \frac{-\pi \csc(\pi x)}{\Gamma(x + 1)}$.
4. $\Gamma(nx) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\frac{nx}{\sqrt{2\pi}} \right]^n \prod_{K=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{K}{n}\right), n \in \mathbb{N}^+.$

1.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta (ou fonction d'Euler de premier espèce) est défini par :

$$B : (p, q) \rightarrow \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau, \quad (1.4)$$

tels que : $p > 0$ et $q > 0$.

Propriétés 1.1.4 La fonction Bêta satisfait aux propriétés suivantes :

1. Dans sa définition sous forme d'intégrale, le changement de variable $s = 1 - \tau$ prouve que cette fonction est symétrique c'est-à-dire que

$$B(p, q) = B(q, p).$$

2. Il suffit d'effectuer une intégration par partie pour prouver que

$$pB(p, q + 1) = qB(p + 1, q).$$

3. $B(p, 1) = \frac{1}{p}$.

1.1.3 La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

La fonction Bêta est relié à la fonction Gamma par :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (1.5)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy. \end{aligned}$$

Utilisons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x/(x + y). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv, \\ y = u(1 - v). \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1 - v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1 - v) = -u, \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} | -u | dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p+q-1} du \right) \left(\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) \\ &= \Gamma(p+q)B(p, q). \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, où $\Gamma(p+q) \neq 0$.

Si p, q sont des entiers naturels, on obtient :

$$B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

1.2 Intégration fractionnaire

1.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ on considère l'intégrale

$$I^{(1)}f(t) = \int_a^x f(\tau)d\tau, \tag{1.6}$$

$$I^{(2)}f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(\tau)d\tau,$$

d'après le théorème du Fubini on trouve ;

$$I^{(2)}f(t) = \frac{1}{1!} \int_a^t (t-\tau)^{2-1} f(\tau)d\tau. \tag{1.7}$$

En répétant la même opération n fois on obtient :

$$\begin{aligned} I^{(n)}f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_{n-1}} (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy et comme nous avons $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que la dernière expression pourrait avoir un sens même quand n prenant des valeurs non-entières, alors c'était naturel de définir l'opérateur d'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.2.1 [5] Soient $f \in L^1[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f de borne inférieure a est définie par :

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau, \tag{1.8}$$

$-\infty \leq a < t < +\infty$.

Cas particulier : $I_{a+}^0 f(t) = f(t)$ (i.e I_{a+}^0 est l'opérateur d'identité).

Remarque 1.2.1 Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I_{0+}^α par I^α .

Remarque 1.2.2 Par le simple changement de variable $s = t - \tau$, on remarque que I_{a+}^α peut être s'écrit sous la forme suivante :

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s) ds, \quad (1.9)$$

c'est une autre définition de l'intégrale de R-L.

Théorème 1.2.1 Pour $f \in C[a, b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe suivant :

$$I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f)(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t),$$

pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Preuve

Soient $f \in C[a, b]$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors ;

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (I_{a+}^\beta f)(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau (\tau-s)^{\beta-1} f(s) ds \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\int_a^\tau (\tau-s)^{\beta-1} f(s) ds \right] d\tau. \end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet on trouve :

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f)(t) &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *L'opérateur l'intégrale I_{a+}^α est linéaire.*

En effet, si f et g sont deux fonctions telles que $I_{a+}^\alpha f$ et $I_{a+}^\alpha g$ existent, alors pour c_1 et c_2 deux réels arbitraires on aura

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha(c_1f + c_2g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (c_1f + c_2g)(\tau) d\tau \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \\ &= c_1 I_{a+}^\alpha f(t) + c_2 I_{a+}^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Exemple 1.2 • *On calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f telle que :*

$$f(t) = (t - a)^n, a \in \mathbb{R}, n > -1.$$

On a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(t - a)^n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^n d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+n} \int_0^1 (1 - x)^{\alpha-1} x^n dx \\ &= \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1)} (t - a)^{\alpha+n}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0,5, n = 1$ et $a = 0$, on aura

$$I^{0,5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2,5)} (t)^{1,5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2,5)}.$$

- *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ d'une fonction constante $f(t) = C$:*

$$I_a^\alpha(C) = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}.$$

- *Calculons l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f telle que : $f(t) = e^{kt}, k > 0$.*

En utilisant la formule (1.9) de l'intégrale de R-L avec $a = -\infty$, on obtient ;

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^\alpha e^{kt} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{k(t-s)} ds \\ &= \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-ks} ds. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $x = ks$, on déduit

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{\alpha} e^{kt} &= \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{\alpha-1} e^{-x} \frac{dx}{k} \\ &= k^{-\alpha} \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= k^{-\alpha} \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Donc

$$I_{-\infty}^{\alpha} e^{kt} = k^{-\alpha} e^{kt}. \quad (1.10)$$

1.2.2 Intégrale fractionnaire de Weal

L'intégrale d'ordre fractionnaire de gauche de l'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction donnée f est définie comme [6] :

$${}_{-\infty}I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy. \quad (1.11)$$

L'intégrale d'ordre fractionnaire de droite de l'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction donnée f est définie comme :

$${}_{+\infty}I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy. \quad (1.12)$$

1.2.3 Intégrale fractionnaire d'Abel-Riemann

Intégrale fractionnaire d'Abel-Riemann pour tout l'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction donnée f et $x \in \mathbb{R}^+$ est définie comme :

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad x > 0, \alpha > 0, \quad (1.13)$$

et $I^0 = I$.

Propriétés 1.2.1 [7] L'intégrale fractionnaire d'Abel-Riemann possède la propriété de semi-groupe :

$$I^{\alpha} I^{\beta} = I^{\alpha+\beta}; \quad \alpha, \beta \geq 0. \quad (1.14)$$

1.3 Dérivation fractionnaire

1.3.1 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 [5] Soient $f \in L^1[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f de borne inférieure a est définie par :

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

$$= D^n \{ I_{a+}^{n-\alpha} f(t) \}, \quad (1.16)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ est dérivée d'ordre entier $n = [\alpha] + 1$.

Cas particuliers

1. $D_{a+}^0 f(t) = D^1 \{I_{a+}^1 f(t)\} = f(t)$ (D_{a+}^0 est l'opérateur d'identité).
2. Pour $\alpha = n$ où n est un entier, l'opérateur donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre n

$$D_{a+}^n f(t) = D^{n+1} I_{a+}^{n+1-n} f(t) = D^{n+1} I_{a+}^1 f(t) = D^n f(t).$$

Remarque 1.3.1 Si $\alpha < 0$, on convient de prendre $D_{a+}^\alpha f(t) = I_{a+}^{-\alpha} f(t)$.

Remarque 1.3.2 Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite D_{0+}^α par D^α .

Propriétés 1.3.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \alpha$ alors ;

$$D_{a+}^\alpha = D^n I_{a+}^{n-\alpha}.$$

Preuve

L'hypothèse sur n implique que $n \geq [\alpha] + 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} D_{a+}^n I_{a+}^{n-\alpha} &= (D^{[\alpha]+1} D^{n-[\alpha]-1})(I_{a+}^{n-[\alpha]-1} I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha}) \\ &= D^{[\alpha]+1} (D^{n-[\alpha]-1} I_{a+}^{n-[\alpha]-1}) I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha} \\ &= D^{[\alpha]+1} I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha} = D_{a+}^\alpha, \end{aligned}$$

car $D^{n-[\alpha]-1} I_{a+}^{n-[\alpha]-1} = I$ (l'opérateur identité).

Théorème 1.3.1 Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ alors :

$D_{a+}^\alpha (c_1 f + c_2 g)$ existe, et on a :

$$D_{a+}^\alpha (c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 D_{a+}^\alpha f(t) + c_2 D_{a+}^\alpha g(t).$$

Preuve

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ avec $n - 1 < \alpha < n$ on a :

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha (c_1 f(t) + c_2 g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (c_1 f(\tau) + c_2 g(\tau))(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t c_1 f(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau + \int_a^t c_2 g(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \right) \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau + \frac{c_2}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t g(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \\ &= c_1 D_{a+}^\alpha f(t) + c_2 D_{a+}^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Propriétés 1.3.2 Soit la fonction f telle que $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est commutative avec la dérivée d'ordre n , $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n D^\alpha f(t) = D^{\alpha+n} f(t) = D^\alpha D^n f(t).$$

Lemme 1.3.1 On suppose que $n - 1 < \alpha < n$; $m - 1 < \beta < m$ et soit la fonction f telle que D^α existe, alors

$$D^\alpha (D^\beta f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t) \neq D^\beta (D^\alpha f(t)).$$

Exemple 1.3 • La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante. En général la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est nulle ni constante. On a :

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha(C) &= \frac{d^n}{dt^n} (I_{a+}^{n-\alpha} C) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} (t-a)^{n-\alpha} \right) \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha} \end{aligned}$$

on a ;

$$\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(1-\alpha)(t-a)^{-\alpha},$$

et comme on a ;

$$\Gamma(n-\alpha+1) = (n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha),$$

on obtient

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha(C) &= \frac{C(n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(1-\alpha)(t-a)^{-\alpha}}{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$$D_{a+}^\alpha(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.$$

C'est-à-dire que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

- Fonction exponentielle $f(t) = \exp(kt)$, pour $k > 0$, et $\alpha > 0$.
En utilisant la formule (1.16) en $a = -\infty$ et la résultat (1.10) on donne ;

$$\begin{aligned} D_{-\infty}^\alpha \exp(kt) &= \frac{d^n}{dt^n} I_{-\infty}^{n-\alpha} \exp(kt) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (k^{\alpha-n} \exp(kt)) \\ &= k^{\alpha-n} k^n \exp(kt) \\ &= k^\alpha \exp(kt). \end{aligned}$$

Donc

$$D_{-\infty}^\alpha \exp(kt) = k^\alpha \exp(kt).$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire de A-R

La dérivée fractionnaire A-R d'ordre $\alpha > 0$ est définie comme l'inverse de l'intégrale fractionnaire A-R correspondante[7], c'est-à-dire,

$$D^\alpha I^\alpha = I, \quad (1.17)$$

pour un entier positif m , tel que $m - 1 < \alpha \leq m$:

$$(D^m I^{m-\alpha}) I^\alpha = D^m (I^{m-\alpha} I^\alpha) = D^m I^m = I,$$

c'est-à-dire

$$D^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_\alpha^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), \alpha = m. \end{cases}$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

A la fin des années soixante du dernier siècle, une définition alternative des dérivées fractionnaires a été introduite par Caputo. Caputo et Minadri ont utilisé cette définition dans leurs travaux sur la théorie de la viscoélasticité. Selon la définition de Caputo [8],[9] :

$${}^c D_x^\alpha = I^{m-\alpha} D^m,$$

for $m - 1 < \alpha \leq m$ qui signifie que :

$${}^c D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(m)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), \alpha = m. \end{cases}$$

Propriétés 1.3.3 Les propriétés de base de la dérivée fractionnaire de Caputo sont :

1. Caputo a introduit une définition alternative, qui a l'avantage de définir des conditions initiales d'ordre entier pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire.
2. $I^\alpha {}^c D_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!}$.
3. La différenciation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire, similaire à la différenciation d'ordre entier :

$${}^c D_x^\alpha [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda {}^c D_x^\alpha f(x) + \mu {}^c D_x^\alpha g(x).$$

4. Soit la fonction f telle que $f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, n - 1$, alors le dérivée fractionnaire de Caputo est commutative avec la dérivée d'ordre $n, n \in \mathbb{N}$:

$$D^n {}^c D^\alpha f(t) = D^{\alpha+n} f(t) = D^\alpha D^n f(t).$$

Exemple 1.4 • La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\tau-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\tau-1} \times 0 d\tau = 0. \end{aligned}$$

1.3.4 Dérivée fractionnaire de Grünwald

Les dérivées de Grünwald de n'importe quel ordre entier vers n'importe quelle fonction, peuvent prendre la forme [6] :

$$D^\alpha f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left(\frac{x}{N}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f\left(x - j \frac{x}{N}\right) \right\}. \quad (1.18)$$

1.4 Méthodes analytiques pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans la présente section, certaines méthodes analytiques sont présentées pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire, parmi ces méthodes[6], on a

1.4.1 La méthode de l'opérateur inverse

Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire :

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} = F, \quad (1.19)$$

où f est une fonction inconnue et $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ est une dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, donc en prenant l'opérateur inverse $\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}$ à les deux membres de l'équation (1.19), on se donne :

$$f = \frac{d^{-\alpha} F}{dx^{-\alpha}}. \quad (1.20)$$

Des termes supplémentaires doivent être ajoutés à l'équation (1.20), qui sont :

$$c_1 x^{\alpha-1}, c_2 x^{\alpha-2}, \dots, c_m x^{\alpha-m},$$

et donc

$$f - \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f = c_1 x^{\alpha-1} + c_2 x^{\alpha-2} + \dots + c_m x^{\alpha-m},$$

où c_1, c_2, \dots, c_m sont des constantes arbitraires à déterminer à partir des conditions initiales et $m - 1 < \alpha \leq m$.

Ainsi :

$$f - c_1 x^{\alpha-1} - c_2 x^{\alpha-2} - \dots - c_m x^{\alpha-m} = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} F.$$

Par conséquent, la solution la plus générale de l'équation (1.19) est donné par :

$$f = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} F + c_1 x^{\alpha-1} + c_2 x^{\alpha-2} + \dots + c_m x^{\alpha-m},$$

où $m - 1 < \alpha \leq m$.

Exemple 1.5 Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire :

$$\frac{d^{3/2}}{dx^{3/2}} f(x) = x^5.$$

Appliquer $\frac{d^{-3/2}}{dx^{-3/2}}$ aux deux côtés de l'équation, on obtient :

$$f(x) = \frac{d^{-3/2} x^5}{dx^{-3/2}} + c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1/2}.$$

1.4.2 Méthode de la transformée de Laplace

Dans cette section, nous chercherons une transformée de $d^m f/dx^m$ pour tout m et f différentiellement intégrable, c'est-à-dire que nous souhaitons mettre en relation :

$$L \{ f^{(m)} \} = \int_0^\infty \exp(-sx) f^{(m)} dx,$$

à la transformée de Laplace $L(f)$ de la fonction différentiellement intégrable. Rappelons d'abord les transformées bien connues des dérivées d'ordre entier :

$$L \{ f^{(m)} \} = s^m L \{ f \} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0); m = 1, 2, 3, \dots,$$

et intégrales multiples

$$L \{ f^{(m)} \} = s^m L \{ f \}, m = 0, -1, -2, \dots, \quad (1.21)$$

et noter que les deux formules sont englobées par :

$$L \{ f^{(m)} \} = s^m L \{ f \} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k f^{(m-1-k)}(0), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.22)$$

Aussi, la formule (1.22), peut être généralisée pour inclure un non entier m par une simple extension :

$$L \{ f^{(m)} \} = s^m L \{ f \} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(m-1-k)}(0), \quad (1.23)$$

pour tout m où n est l'entier tel que $n - 1 < m \leq n$. La somme est vide disparaît quand $m \leq 0$. En prouvant (1.23), on considère d'abord $m < 0$, de sorte que la définition de Riemann-Liouville :

$$f^{(m)} = \frac{1}{\Gamma(-m)} \int_0^x \frac{f(y)}{[x-y]^{m+1}} dy, m < 0,$$

peut être adopté et par application directe du théorème de convolution :

$$L \left\{ \int_0^x f_1(x-y)f_2(y)dy \right\} = L \{f_1\} L \{f_2\}.$$

Donne alors :

$$L \{f^{(m)}\} = \frac{1}{\Gamma(-m)} L \{x^{-1-m}\} L \{f\} = s^m L \{f\}, m < 0. \quad (1.24)$$

Donc l'équation (1.21) généralisée inchangée pour moins m .

Pour m positif non entier, nous utilisons le résultat [6] :

$$[f^{(m)}] = \frac{d^n}{dx^n} [f^{(m-n)}],$$

où n est l'entier tel que $n - 1 < m \leq n$. Or, en appliquant la formule (1.22), on trouve que :

$$\begin{aligned} L \{f^{(m)}\} &= L \left\{ \frac{d^n}{dx^n} [f^{(m-n)}] \right\} \\ &= s^n L \{f^{(m-n)}\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-1-k}}{dx^{n-1-k}} [f^{(m-n)}] (0). \end{aligned}$$

La différence $m - n$ étant négative, le premier terme de droite peut être évalué en utilisant (1.24). Puisque $m - n < 0$, la règle de composition peut être appliquée aux termes à l'intérieur de la sommation. Le résultat :

$$L \{f^{(m)}\} = s^m L \{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(m-1-k)}(0), 0 < m \neq 1, 2, \dots$$

Découle de ces deux opérations et se voit incorporé dans (1.23).

La transformation (1.23) est une généralisation très simple de la formule classique de la transformée de Laplace de la dérivée ou intégrale de f . Aucune généralisation similaire n'existe cependant pour les formules classiques [6] :

- $L \left\{ \frac{-f}{x} \right\} = \frac{d^{-1}L \{f\}}{ds^{-1}}(s) - \frac{d^{-1}L \{f\}}{ds^{-1}}(\infty)$
- $L \{-xf\} = \frac{dL \{f\}}{ds}$
- $L \{[-x]^n f\} = \frac{d^n L \{f\}}{ds^n}, n = 1, 2, \dots$

Comme résultat final de cette section, nous établirons la formule utile :

$$L \left\{ \exp(-kx) \frac{d^m}{dx^m} [f e^{kx}] \right\} = [s + k]^m L \{f\}. \quad (1.25)$$

Exemple 1.6 *Considérons l'équation intégro-différentielle :*

$$D^{1/2}f(x) + D^{-1/2}f(x) + 2f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi x}} + 6\sqrt{\frac{x}{\pi}} + \frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} + 2x + 4$$

et afin de résoudre cette équation en utilisant la méthode de la transformation de Laplace, nous prenons d'abord la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation :

$$L\{D^{1/2}f(x)\} + L\{D^{-1/2}f(x)\} + 2L\{f(x)\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}L\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} +$$

$$\frac{6}{\sqrt{\pi}}L\{\sqrt{x}\} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}L\{x^{3/2}\} + 2L\{x\} + L\{4\}.$$

En utilisant la définition de la transformation de Laplace pour l'ordre non entier donnée par l'équation (1.23) on obtient ainsi après simple simplification :

$$L(f) = \frac{2s^2 + 3s + 1 + 2\sqrt{s} + 4s\sqrt{s}}{s^2(s + 1 + 2\sqrt{s})}$$

$$= \frac{(2s + 1)(s + 1 + 2\sqrt{s})}{s^2(s + 1 + 2\sqrt{s})}.$$

Ensuite, en utilisant la transformation de Laplace inverse, nous avons :

$$f(x) = 2 + x,$$

comme solution de l'équation différentielle intégro.

Chapitre 2

Méthode d'ondelettes

2.1 Introduction

La notion d' "Ondelettes" ou "Wavelets" a été utilisée pour la première fois au début des années 80 par le géophysicien français J.Morlet pour désigner des fonctions mathématiques utilisées dans la représentation des données sismiques. Les ondelettes sont des fonctions de base de variation multi-échelles, ou multirésolutions, utilisées dans le but de l'approximation ou de la compression des données. La théorie des ondelettes n'est pas en fait tout à fait nouvelle, mais le support mathématique, contenu déjà dans les recherches des années 30, a été développé considérablement dans les dernières 20 années, après que ces fonctions ont été utilisés dans le traitement numérique du signal et en particulier dans l'analyse et la compression des images.

2.2 Définitions et propriétés des ondelettes

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1 Une ondelette est une fonction oscillante (ce qui explique le mot "onde") de moyenne nulle, appelée ψ , possédant un certain degré de régularité et dont le support est fini (ce qui explique le mot "ondelette", qui veut dire petite onde).

Définition 2.2.2 Une ondelette est une fonction de base que l'on peut translater et dilater pour recouvrir le plan temps-fréquences et analyser un signal. L'ondelette doit être une fonction de moyenne nulle, en d'autres termes, doit être une onde. Ce qui s'écrit mathématiquement par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (2.1)$$

Définition 2.2.3 Une ondelette $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant la condition d'admissibilité ssi :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{w} dw < \infty, \quad (2.2)$$

où $|\widehat{\psi}(w)|$ est la transformée de Fourier de $\psi(w)$.

Exemple 2.1 L'ondelette de Haar :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ -1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Exemple 2.2 L'ondelette de Morlet (complexe) :

$$\psi(x) = e^{-\pi x^2} e^{10i\pi x}, \quad (2.4)$$

maintenant, nous allons montrer les ondelettes les plus importantes avec leurs courbes graphiques :

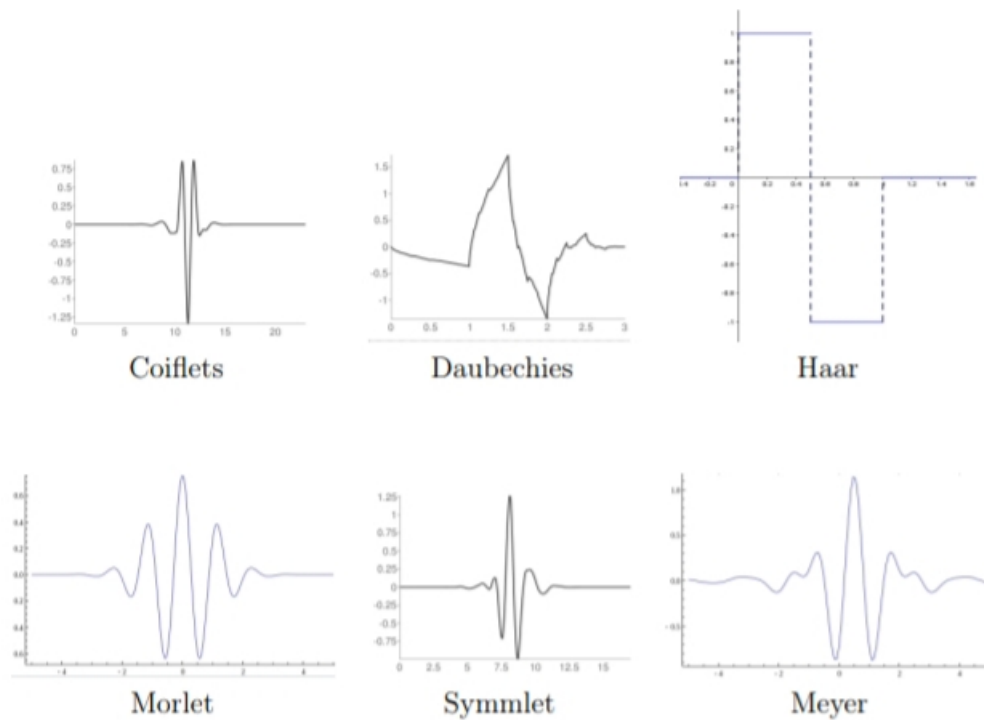


Figure 2.1 – Certains types d'ondelettes

2.2.2 Propriétés des ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions qui peuvent être caractérisées par certaines propriétés remarquables, ces dernières pouvant être incompatibles entre elles, cela implique des choix à faire suivant l'application souhaitée. Nous donnons des propriétés d'ondelettes [10].

-Décroissance rapide : Une ondelette sera dite à décroissance rapide si

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0 \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R}, |\psi(x)| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m}. \quad (2.5)$$

-Orthogonalité : Une ondelette ψ est dite orthogonale si pour tout $(j, j', n, n') \in \mathbb{Z}^4$ on a :

$$\langle \psi_{jn}, \psi_{j'n'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{nn'} \quad (\delta_{jj'} = 0 \text{ si } j \neq j' \text{ et } \delta_{jj} = 1). \quad (2.6)$$

-Nombre de moments nuls : Pour $n \in \mathbb{N}$, une ondelette admet n moments nuls si :

$$\forall k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0. \quad (2.7)$$

-Support compact : Autant l'ondelette a moins de moments nuls autant son support est compact, et une analyse plus exacte des hautes fréquences est possible.

2.3 L'ondelette de Haar

Définition 2.3.1 [11] La fonction d'échelle définie sur l'intervalle $[a, b)$ est :

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in [a, b), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Cette fonction s'appelle l'ondelette père [12].

Définition 2.3.2 [11] L'ondelette de Haar est définie sur l'intervalle $[a, b)$, est donné par :

$$h_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a, \frac{a+b}{2}), \\ -1, & \text{si } x \in [\frac{a+b}{2}, b), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Cette fonction s'appelle l'ondelette mère [12].

Toutes les autres fonctions des ondelettes de Haar sont définies sur des sous-intervalles de $[a, b)$ et sont générés à partir de $h_2(x)$ par les opérations de dilatation et de translation. Chaque fonction des ondelettes de Haar définie pour $x \in [a, b)$ sauf la fonction d'échelle peut être exprimée comme :

$$h_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [\xi_1, \xi_2), \\ -1, & \text{si } x \in [\xi_2, \xi_3), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.10)$$

où $\xi_1 = a + (b-a)\frac{k}{m}$ et $\xi_2 = a + (b-a)\frac{k+0.5}{m}$, $\xi_3 = a + (b-a)\frac{k+1}{m}$, $i = 3, 4, \dots, 2M$.

Le entier $m = 2^j$ indique le niveau de l'ondelette où $j = 0, 1, 2, \dots, J$ et $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$. Le entier j est le paramètre de dilatation et k est le paramètre de translation. Le niveau maximal de résolution est l'entier J . La relation entre i, m et k est donné par : $i = m + k + 1$, dans le cas de valeurs minimales $m = 1$ et $k = 0$, on a $i = 2$. La valeur maximale de i est $i = 2^{J+1} = 2M$.

L'ensemble orthogonal des fonctions de Haar est défini comme indiqué dans les figures (2.2-2.9) qui est une onde carrée avec une magnitude de ± 1 dans un certain intervalle et zéro ailleurs. La première courbe de la figure (2.2) est que $h_1(t) = 1$ pendant tout l'intervalle $[0, 1]$. C'est ce qu'on appelle la fonction d'échelle. La deuxième courbe $h_2(t)$ est l'onde carrée fondamentale, ou ondelette mère qui couvre également tout l'intervalle $[0, 1]$. Toutes les autres courbes suivantes sont générés à partir de $h_2(t)$ avec deux opérations translation et dilatation, $h_3(t)$ est obtenu à partir de $h_2(t)$ avec dilatation, c'est-à-dire que $h_2(x)$ est compressé à partir de l'intervalle entier $[0, 1]$ au demi-intervalle $[0, 1/2]$ pour générer $h_3(t)$, $h_4(t)$ est identique à $h_3(t)$ mais décalé (traduit) vers la droite de $1/2$. De la même manière, $h_3(x)$ est compressé du demi-intervalle au quart d'intervalle pour générer $h_5(t)$. La fonction $h_5(t)$ est translatée vers la droite par $1/4, 2/4, 3/4$ pour générer $h_6(t), h_7(t)$ et $h_8(t)$; respectivement.

En général :

$$h_n(t) = h_2(2^j x - k/2^j), n = 2^j + k, j \geq 0, 0 \leq k \leq 2^j$$

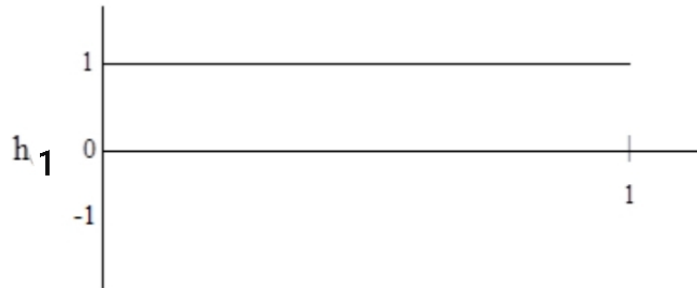


Figure (2.2)– Première fonction de Haar.

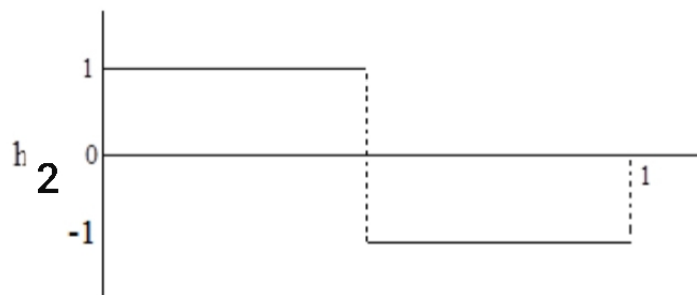


Figure (2.3)– Deuxième fonction de Haar.

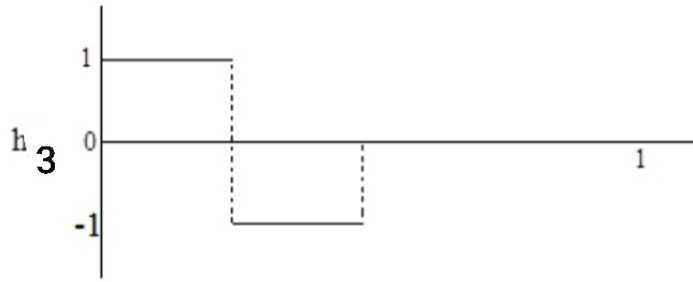


Figure (2.4)– Troisième fonction de Haar.

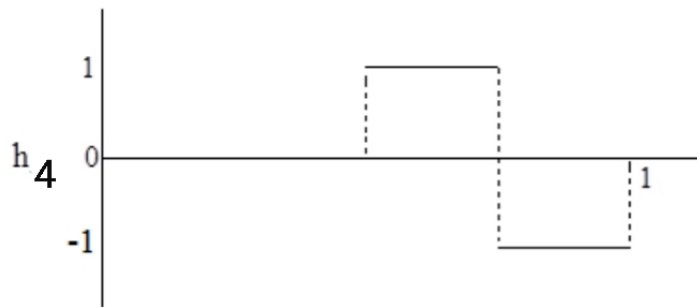


Figure (2.5)– Quatrième fonction de Haar.

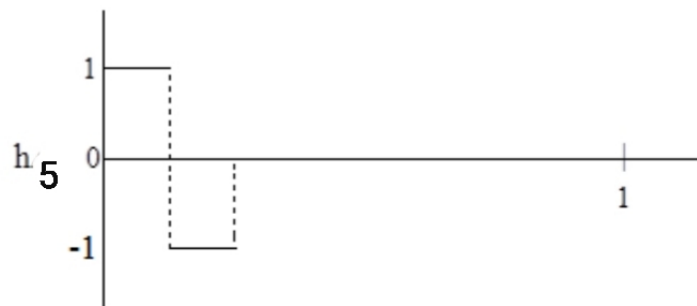


Figure (2.6)– Cinquième fonction de Haar.

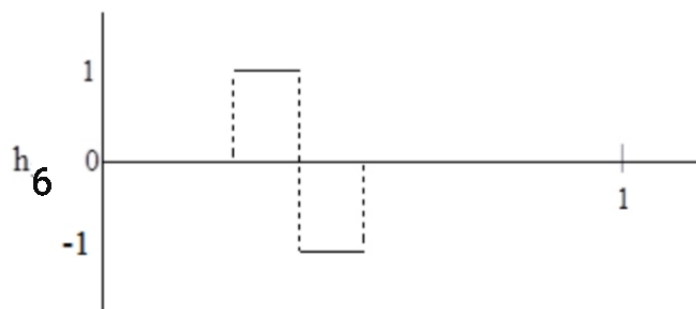


Figure (2.7)– Sixième fonction de Haar.

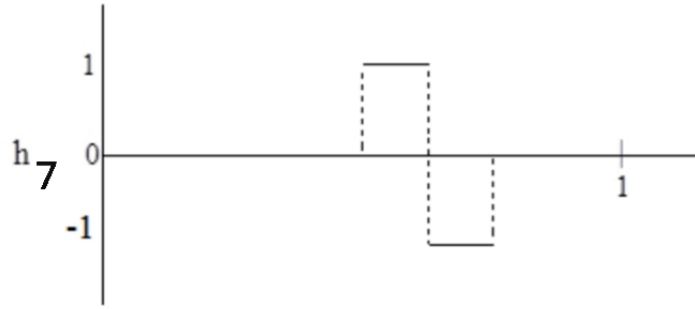


Figure (2.8)– Septième fonction de Haar.



Figure (2.9)– Huitième fonction de Haar.

Les fonctions des ondelettes de Haar sont orthogonales les unes aux autres car :

$$\int_a^b h_j(x)h_k(x)dx = \begin{cases} (b-a)2^{-j}, & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{si } j \neq k, \end{cases} \quad (2.11)$$

toute fonction f qui est carrée intégrable dans l'intervalle $[a, b]$ " i . e $f \in L^2([a, b])$ " peut être exprimée sous la forme d'une somme infinie d'ondelettes de Haar :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(x), \quad (2.12)$$

où $a_i = \langle f, h_i \rangle; \forall i \geq 1$.

Remarque 2.3.1 La série ci-dessus se termine par des termes finis si f est constante par morceaux ou peut être approchée comme constante par morceaux pendant chaque sous-intervalle.

Remarque 2.3.2 Lors de l'application de la méthode d'ondelettes de Haar, l'intervalle $[a, b]$ sera divisé en $2M + 1$ sous-intervalles, d'où $\Delta x = \frac{b-a}{2M}$, les points de colocalisation

$$x_l = a + (b-a) \frac{l-0.5}{2M},$$

où $l = 1, 2, \dots, 2M$ et la matrice de Haar $(H(i, l))_{il}$ est de la dimension de $2M \times 2M$, telle que $H(i, l) = h_i(x_l)$. Nous expliquerons cela plus tard.

Exemple 2.3 Pour $J = 2 \Rightarrow 2M = 8$ donc :

$$H(8, 8) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Principe de La Méthode D'ondelettes de Haar

Le principe de cette méthode est de réduire le problème à un ensemble d'équations algébriques en développant d'abord les termes, qui a une dérivée maximale, est donné sous une forme de la somme de fonctions de Haar et aussi les coefficients de Haar inconnus. Pour calculer les coefficients de Haar, nous devons résoudre un système linéaire d'équations algébriques, et d'autres dérivés et la fonction elle-même sont obtenus par intégration [13].

2.3.2 Explication de la méthode

Avant de commencer d'application de la méthode d'ondelettes de Haar sur une classe d'équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire, nous introduisons les notations suivantes :

$$P_{i,1}(x) = \int_0^x h_i(x)dx, \quad (2.13)$$

où h_i est définie par l'équation(2.10), on définit aussi

$$P_{i,v}(x) = \int_0^x P_{i,v-1}(x)dx, \quad v = 2, 3, \dots \quad (2.14)$$

Ces intégrales peuvent être calculées en utilisant l'équation (2.10), et les deux premières d'entre elles sont données par

$$P_{i,1}(x) = \begin{cases} x - \xi_1, & \text{si } x \in [\xi_1, \xi_2], \\ \xi_3 - x, & \text{si } x \in [\xi_2, \xi_3], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$P_{i,2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \xi_1, \\ \frac{1}{2}(x - \xi_1)^2, & \text{si } \xi_1 \leq x < \xi_2, \\ \frac{(b-a)^2}{4m^2} - \frac{1}{2}(x - \xi_3)^2, & \text{si } \xi_2 \leq x < \xi_3, \\ \frac{(b-a)^2}{4m^2}, & \text{si } x \geq \xi_3. \end{cases} \quad (2.16)$$

De même, on peut trouver d'autres intégrales $P_{i,v}(x)$ $v = 3, 4, \dots$
 Intégration les fonctions de Haar l'équation(2.10) pour λ fois. Pour tout $x \in [a, b]$ on a :

$$p_{i,\lambda}(x) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b h_i(s) ds^\lambda$$

$$= \frac{1}{(\lambda - 1)!} \int_a^x (x - s)^{\lambda-1} h_i(s) ds, \quad \lambda = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, 2M. \quad (2.17)$$

Le cas $\lambda = 0$ correspond à la fonction $h_i(x)$.

Toutes ces intégrales peut être calculer analytiquement et présentées directement. Quand $i = 1$ l'équation (2.17) donne :

$$p_{1,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda!} (x - a)^\lambda. \quad (2.18)$$

Et pour $i \geq 2$ dans l'équation (2.17), on obtient :

$$p_{i,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda!} \begin{cases} 0, & si \quad x \in [a, \xi_1), \\ (x - \xi_1)^\lambda, & si \quad x \in [\xi_1, \xi_2), \\ [(x - \xi_1)^\lambda - 2(x - \xi_2)^\lambda], & si \quad x \in [\xi_2, \xi_3), \\ [(x - \xi_1)^\lambda - 2(x - \xi_2)^\lambda + (x - \xi_3)^\lambda], & si \quad x \in [\xi_3, b]. \end{cases} \quad (2.19)$$

Exemple 2.4 Pour $J = 2$ et $\lambda = 1/2$:

$$p(8, 8) = \begin{pmatrix} 0.2821 & 0.4886 & 0.6308 & 0.7464 & 0.8463 & 0.9356 & 1.0171 & 1.0925 \\ 0.2821 & 0.4886 & 0.6308 & 0.7464 & 0.2821 & -0.0416 & -0.2445 & -0.4002 \\ 0.2821 & 0.4886 & 0.0666 & -0.2309 & -0.1332 & -0.0685 & -0.0447 & -0.0323 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2821 & 0.4886 & 0.0666 & -0.2309 \\ 0.2821 & -0.0756 & -0.0643 & -0.0266 & -0.0156 & -0.0106 & -0.0078 & -0.0061 \\ 0 & 0 & 0.2821 & -0.0756 & -0.0643 & -0.0266 & -0.0156 & -0.0106 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2821 & -0.0756 & -0.0643 & -0.0266 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2821 & -0.0756 \end{pmatrix}$$

Pour $J = 2$ et $\lambda = 3/2$:

$$p(8, 8) = \begin{pmatrix} 0.0118 & 0.0611 & 0.1314 & 0.2177 & 0.3174 & 0.4288 & 0.5509 & 0.6828 \\ 0.0118 & 0.0611 & 0.1314 & 0.2177 & 0.2938 & 0.3067 & 0.2881 & 0.2475 \\ 0.0118 & 0.0611 & 0.1079 & 0.0955 & 0.0663 & 0.0545 & 0.0476 & 0.0429 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0118 & 0.0611 & 0.1079 & 0.0955 \\ 0.0118 & 0.0376 & 0.0210 & 0.0159 & 0.0134 & 0.0118 & 0.0107 & 0.0098 \\ 0 & 0 & 0.0118 & 0.0376 & 0.0210 & 0.0159 & 0.0134 & 0.0118 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0118 & 0.0376 & 0.0210 & 0.0159 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0118 & 0.0376 \end{pmatrix}$$

Les figures suivantes (2.10 – 2.17) représentent la première intégrale de $h_i(x)$, pour tout $i = 1, 2, \dots, 8$.

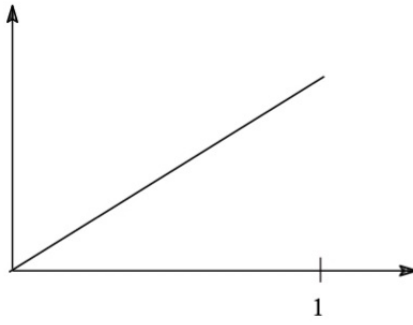


Figure (2.10)-Intégration de la première ondelette de Haar.

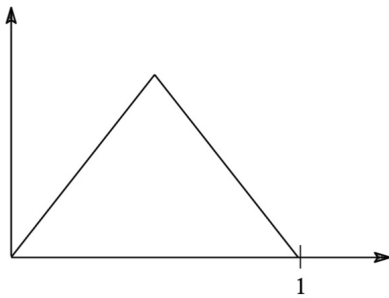


Figure (2.11)-Intégration de la deuxième ondelette de Haar.

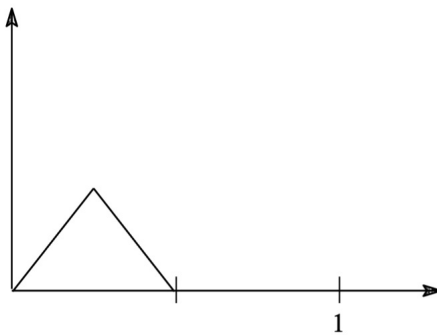


Figure (2.12)-Intégration de la troisième ondelette de Haar.

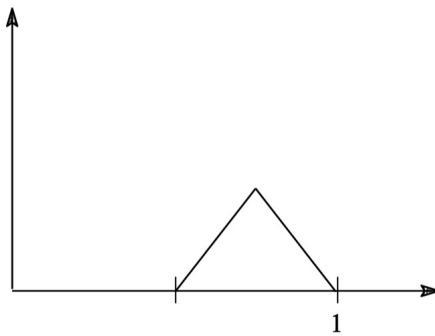


Figure (2.13)-Intégration de la quatrième ondelette de Haar.

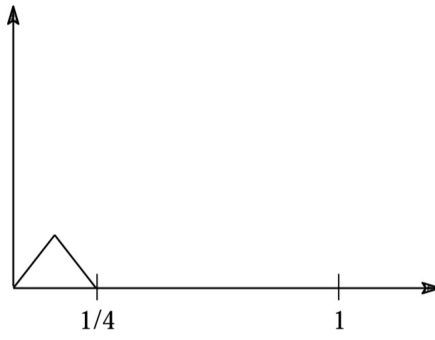


Figure (2.14)-Intégration de la cinquième ondelette de Haar.

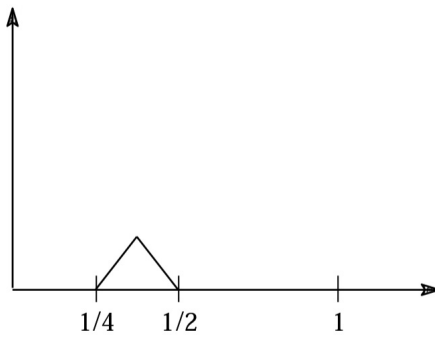


Figure (2.15)-Intégration de la sixième ondelette de Haar.

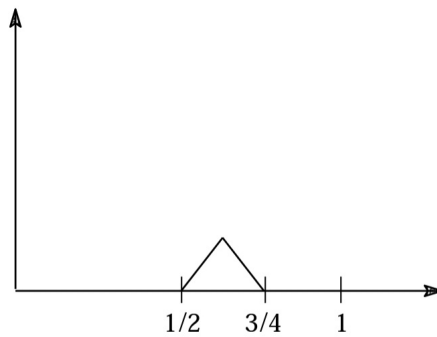


Figure (2.16)-Intégration de la septième ondelette de Haar.

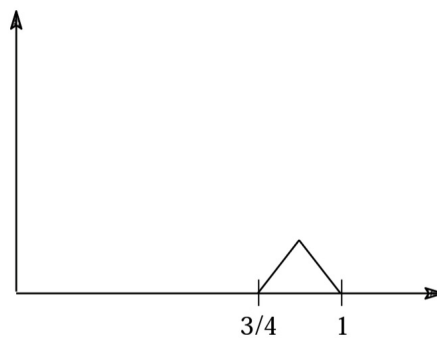


Figure (2.17)-Intégration de la huitième ondelette de Haar.

Pour résoudre les problèmes aux limites dans certains exemples, nous avons besoin des valeurs $p_{i,\lambda}(b)$, qui peuvent être calculées à partir de l'équation(2.19). Dans des cas particuliers $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$, on trouve

$$q_1(x) = p_{i,1}(b) = \begin{cases} b - a, & \text{si } i = 1, \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$q_2(x) = p_{i,2}(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}(b - a)^2, & \text{si } i = 1, \\ \frac{(b - a)^2}{4m^2}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.21)$$

Sur l'intervalle $[0, 1)$ on définit aussi,

$$Ch_i(x) = \int_0^1 P_{i,1}(x)dx \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2M. \quad (2.22)$$

Donc,

$$Ch_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi_1)^2, & \text{si } x \in [\xi_1, \xi_2), \\ \frac{1}{4m^2} - \frac{1}{2}(\xi_2 - 1)^2, & \text{si } x \in [\xi_2, \xi_3), \\ \frac{1}{4m^2}, & \text{si } x \in [\xi_3, 1), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Maintenant, après avoir rappelé certains symboles et relations nous commencerons par méthode de solution et expliquer la méthode des ondelettes de Haar pour résoudre une classe d'équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire.

2.3.3 Méthode de solution

Ici, nous pouvons voir la méthode de résolution du schéma proposé pour résoudre la généralisation équation de Bagley-Torvik, qui a un rôle particulier dans l'étude du comportement des matériaux réels où le mouvement d'une plaque rigide plongée dans un fluide newtonien [15]. Considérer l'équation de Bagley-Torvik généralisée de la forme

$$aD^\alpha y(x) + bD^{3/2}y(x) + cy(x) = f(x), \quad (2.24)$$

avec les conditions initiales $y(0) = A, y'(0) = B$, où $\frac{3}{2} < \alpha \leq 2, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.

La solution $y(x)$ de l'équation(2.24) peut être obtenu par la procédure suivante,

1* Suppose que

$$D^\alpha y(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x), \quad (2.25)$$

où a_i sont des coefficients de Haar à déterminer.

2* En intégrant deux fois l'équation(2.25) et en utilisant les conditions initiales, on obtient

$$Dy(x) = B + \sum_{i=1}^{2M} a_i F_{\alpha-1,i}(x), \quad 0 < \alpha_1 \leq 1, \quad (2.26)$$

$$y(x) = A + Bx + \sum_{i=1}^{2M} a_i F_{\alpha,i}(x), \quad (2.27)$$

où $F_{\alpha-1,i}(x) = I_0^{\alpha-1} h_i(x)$ et $F_{\alpha,i}(x) = I_0^\alpha h_i(x)$ sont des matrices opérationnelles d'intégration d'ordre fractionnaire.

3* Aussi, suppose que :

$$D^{3/2} y(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i F_{\alpha-3/2,i}(x), \quad (2.28)$$

où $F_{\alpha-3/2,i}(x) = I_0^{\alpha-3/2} h_i(x)$.

4* En substituant (2.25) à (2.28) dans (2.24), on obtient le système d'équations suivant :

$$a \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + b \sum_{i=1}^{2M} a_i F_{\alpha-3/2,i}(x) + c \left(A + Bx + \sum_{i=1}^{2M} a_i F_{\alpha,i}(x) \right) = f(x). \quad (2.29)$$

5* Résoudre (2.29) avec MatLab, nous obtenons les coefficients d'ondelettes de Haar a_i . En substituant les valeurs de a_i dans (2.27), on obtient la solution numérique recherchée du problème donné (2.24) en utilisant HWCM. L'erreur sera calculée en utilisant $E = |y_e - y_a|$ et $E_{max} = \max |y_e - y_a|$, où y_e et y_a sont les solutions exacts et approximatifs respectivement.

2.3.4 Analyse de convergence de la méthode des ondelettes de Haar

Erreur d'analyse

Théorème 2.3.1 [16] Soit $f(x) \in L^2([a, b])$ une fonction continue définie en $[0, 1]$. Alors la norme d'erreur au niveau j satisfait :

$$\| E_j \| \leq \frac{K^2}{12} 2^{-2j}, \quad (2.30)$$

où $f(x) < K, \forall x \in [0, 1]$ et $K > 0$.

Preuve voir [16]

Estimation de l'erreur

Le tableau (2.1) cite la comparaison entre la solution numérique obtenue par ondelette de Haar et la solution analytique [16].

Time (t)	Approximate solution of y(t)	Analytical solution of y(t)	Absolute error
0	8.88178×10^{-16}	0	8.88178×10^{-16}
1	3.53856	2.95258	0.585974
2	7.53718	6.76011	0.77707
3	8.2854	7.66614	0.61926
4	6.26126	6.07725	0.184014
5	2.53055	2.94394	0.41339
6	-1.49195	-0.525171	0.966783
7	-4.50898	-3.2463	1.26268
8	-5.72074	-4.55029	1.17045
9	-5.00085	-4.30286	0.697989
10	-2.84029	-2.84838	0.0080944

Tableau (2.1) - Comparaison de l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte analytique pour $t = 0, 1, 2, \dots, 10$.

Chapitre 3

Applications numériques

Dans ce chapitre, nous appliquerons la méthode HAAR à plusieurs exemples numériques [15], [17].

Exemple 3.1 Considérons maintenant l'équation (2.24) avec $a = b = c = 1$ et

$$f(x) = \Gamma(\alpha + 1) + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - 3/2 + 1)}x^{\alpha-3/2} + x^\alpha, \text{ on a}$$

$$D^\alpha y(x) + D^{3/2}y(x) + y(x) = \Gamma(\alpha + 1) + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - 3/2 + 1)}x^{\alpha-3/2} + x^\alpha, \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Nous obtenons la solution HWCM $y(x)$ de (3.1) et est en excellent accord avec la solution exacte $y(x) = x^\alpha$ en plus précision, qui est indiquée dans le tableau (3.1). Comparaison de solutions numériques avec la solution exacte est présentée dans la figure (3.1). L'analyse des erreurs est également illustrée à la figure (3.2).

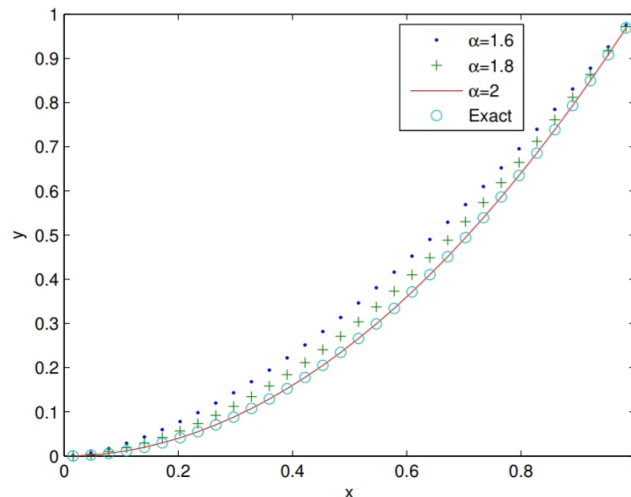


Figure (3.1)-Comparaison des solutions numériques avec la solution exacte de l'exemple.

$E_{\max} =$			
$\max y_e - y_a $			
J	$\alpha = 1.6$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 2$
3	1.0765e-07	3.0934e-08	8.8942e-09
4	5.2916e-08	2.6935e-08	7.2716e-09
5	3.1508e-08	1.4320e-08	7.1636e-09
6	1.3511e-08	1.2341e-08	3.4150e-09

Tableau (3.1) - L'analyse d'erreur de HWCM pour différentes valeurs de α de l'exemple.

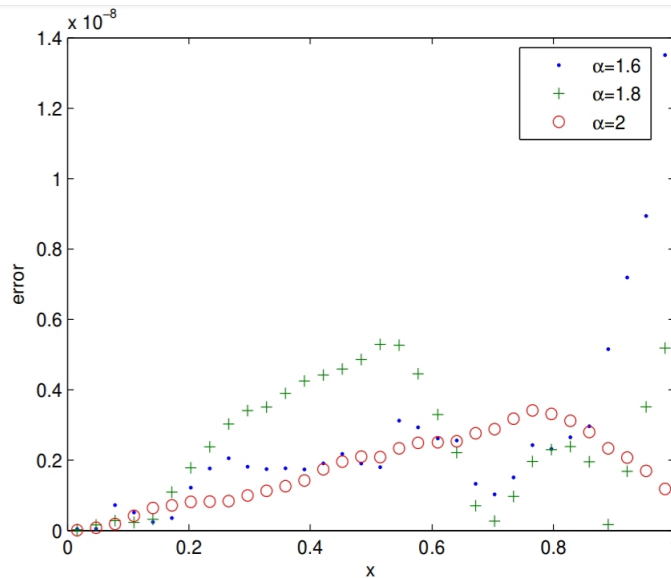


Figure (3.2)-Analyse des erreurs de HWCM d'exemple.

Programmes de Matlab

Programme A

```

function h=h(i,x)
p=L(i);
x1 = p(2)/(2^p(1)); x2 = (p(2) + 0.5)/(2^p(1)); x3 = (p(2) + 1)/(2^p(1));
if x >= 0 & x < x1;
h=0;
else if x >= x1 & x < x2;
h=1;
else if x >= x2 & x < x3;
h=-1;
else x >= x3 & x < 1;
h=0;
end
    
```

Programme B

```

function F=F(i,alpha,x)
p=L(i);
x1=p(2)/(2^p(1)); x2 = (p(2) + 0.5)/(2^p(1)); x3 = (p(2) + 1)/(2^p(1));
if x >= 0 & x < x1;
F = 0;
else if x >= x1 & x < x2;
F = (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x1)^alpha);
else if x >= x2 & x < x3;
F = (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x1)^alpha) - 2 * (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x2)^alpha);
else x >= x3 & x <= 1;
F = (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x1)^alpha) - 2 * (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x2)^alpha) +
(1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x3)^alpha);
end
    
```

Programme C

```

function L = L(i)
for j = 0 : i
for k = 0 : (2^j) - 1
if i == (2^j) + k + 1;
L = [jk];
end
end
end
    
```

Programme 1

```

format long
%Programme pour l'exemple 3.1
% a c'est la valeur de y en zéro et b est la valeur de y' en zéro
alpha = input('alpha ='); a = input('a ='); b = input('b ='); J = input('J =');
t = input('t ='); M = 2^J;
for k = 1 : 2 * M
x(k) = (k - 0.5)/(2 * M);
end
A = zeros(2 * M);
for i = 1 : 2 * M
A(i, 1) = 1 + ((x(i))^(alpha-1.5))/gamma(alpha - 0.5) + ((x(i))^(alpha))/gamma(alpha + 1);
end
for i = 1 : 2 * M
for j = 2 : 2 * M
A(i, j) = h(j, x(i)) + F(j, alpha - 1.5, x(i)) + F(j, alpha, x(i));
end
end
B = zeros(2 * M, 1);
for i = 1 : 2 * M
B(i) = -a - b * x(i) + gamma(alpha + 1) + ((x(i))^(alpha)) + (gamma(alpha + 1)/gamma(alpha -
0.5)) * ((x(i))^(alpha-1.5));
end
C = inv(A) * B;
y = 0;
for i = 2 : 2 * M
y = y + C(i) * F(i, alpha, t);
end
    
```

end

$$y_{\text{approchee}} = (y + a + b * t) + (C(1) * (t.^{\text{alpha}}))/\text{gamma}(\text{alpha} + 1)$$

$$y_{\text{exacte}} = t.^{\text{alpha}}$$

Exemple 3.2 Ensuite, considérons la FDE généralisée de type Cauchy d'ordre α^{th} ,

$$D^\alpha y(x) = y(x) + \frac{2}{\Gamma(3 - \alpha)} x^{2-\alpha} - x^2, 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.2}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$.

Selon Dans les exemples précédents, nous avons obtenu la solution HWCM requise $y(x)$ de (3.2) pour différentes valeurs de α et est en excellent accord avec l'exact solution $y(x) = x^2$, lorsque $\alpha = 1$ et est présenté à la figure (3.3). L'analyse d'erreur pour différentes valeurs de α sont données dans le tableau (3.2) et dans la figure (3.4).

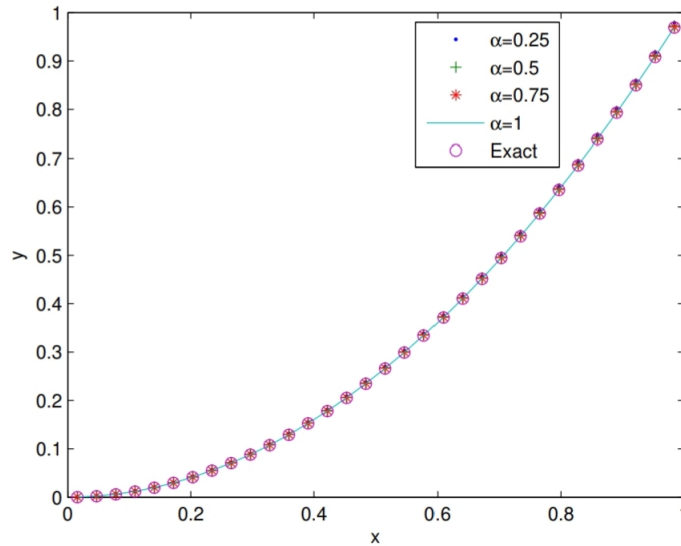


Figure (3.3)-Comparaison de la solution HWCM pour différentes valeurs de α avec solution pour $J = 4$ de l'exemple.

J	$E_{\max} = \max y_e - y_a $			
	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$
3	2.3381e-02	9.8169e-03	4.2784e-03	2.5750e-03
4	9.6934e-03	3.3744e-03	1.2124e-03	6.5349e-04
5	4.0308e-03	1.1640e-03	3.4414e-04	1.6463e-04
6	1.6789e-03	4.0427e-04	9.7818e-05	4.1317e-05

Tableau (3.2)- L'analyse d'erreur de HWCM pour différentes valeurs de α de l'exemple.

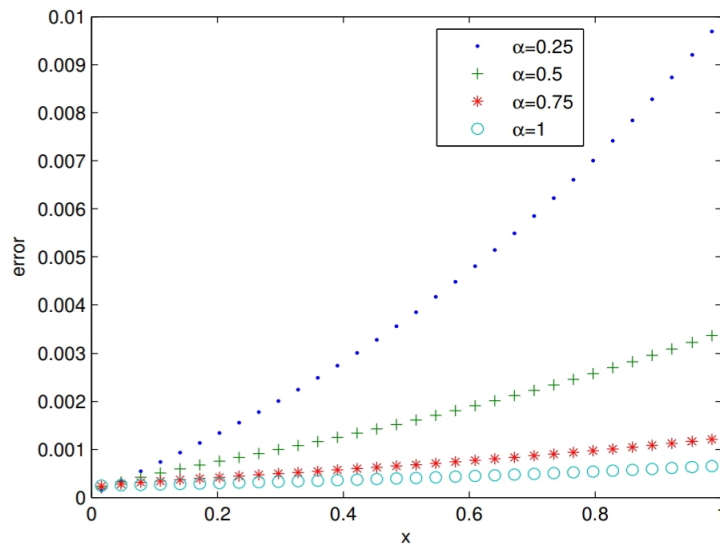


Figure (3.4)-Comparaison de l'analyse des erreurs pour différentes valeurs de α de l'exemple .

Exemple 3.3 Considérons l'équation de Bagley-Torvik généralisée (2.24) avec $a = b = c = 1$ et $f(x) = 1 + x$, on obtient

$$D^\alpha y(x) + D^{3/2}y(x) + y(x) = 1 + x, \quad (3.3)$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Selon la méthode expliquée, nous avons obtenu la solution HWCM $y(x)$ de l'équation (3.3) et est en excellent accord avec la solution exacte $y(x) = 1 + x$ et mieux que les méthodes existantes également avec une précision supérieure à la précision de la figure 7 [15], qui est illustrée à la figure (3.5) et au tableau (3.3). La comparaison de la solution numérique avec la solution exacte est présentée dans la figure (3.6).

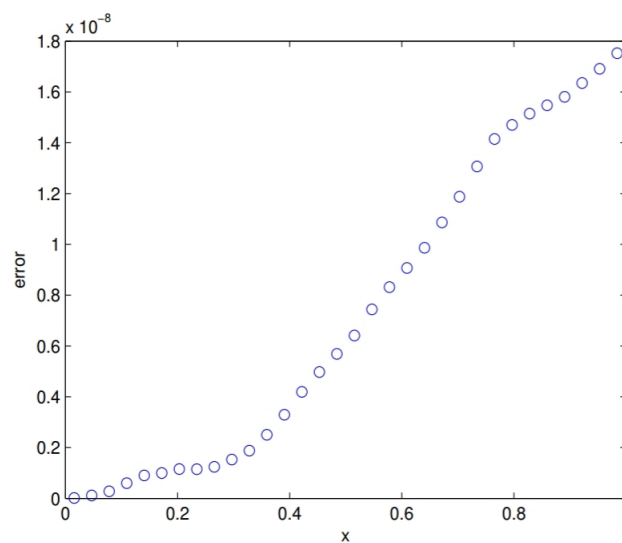


Figure3.5 – Analyse d'erreur de HWCM de l'exemple.

x	$HWCM$	$Exact$	E_{HWCM}
0	0.9999999944	1.0	5.6e-9
0.2	1.1999999987	1.2	1.3e-9
0.4	1.3999999946	1.4	5.4-9
0.6	1.5999999911	1.6	8.9-9
0.8	1.7999999905	1.8	9.5-9
1	1.9999999953	2.0	4.7-9

Tableau 3.3– Comparaison de la solution numérique et de l'erreur maximale de l'exemple.

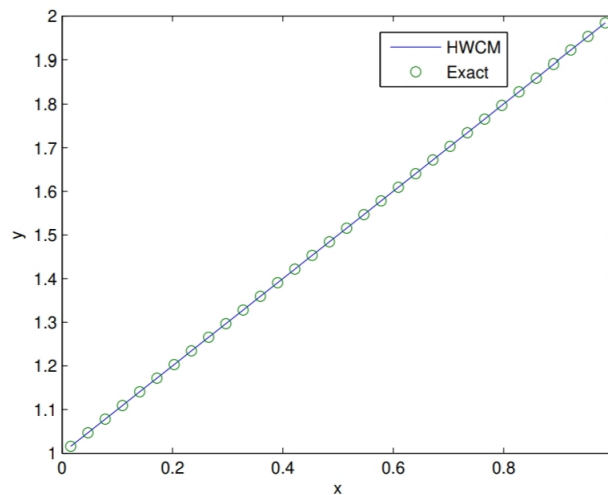


Figure 3.6 – Comparaison de la solution HWCM avec la solution exacte pour $J = 4$ de l'exemple.

Programmes de Matlab

Programme A

```

function h=h(i,x)
p=L(i);
x1 = p(2)/(2p(1)); x2 = (p(2) + 0.5)/(2p(1)); x3 = (p(2) + 1)/(2p(1));
if x >= 0 & x < x1;
h=0;
else if x >= x1 & x < x2;
h=1;
else if x >= x2 & x < x3;
h=-1;
else x >= x3 & x < 1;
h=0;
end
    
```

Programme B

```

function F=F(i,alpha,x)
p=L(i);
x1=p(2)/(2^p(1)); x2 = (p(2) + 0.5)/(2^p(1)); x3 = (p(2) + 1)/(2^p(1));
if x >= 0 & x < x1;
F = 0;
else if x >= x1 & x < x2;
F = (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x1)^alpha);
else if x >= x2 & x < x3;
F = (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x1)^alpha) - 2 * (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x2)^alpha);
else x >= x3 & x <= 1;
F = (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x1)^alpha) - 2 * (1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x2)^alpha) +
(1/gamma(alpha + 1)) * ((x - x3)^alpha);
end
    
```

Programme C

```

function L = L(i)
for j = 0 : i
for k = 0 : (2^j) - 1
if i == (2^j) + k + 1;
L = [jk];
end
end
end
    
```

Programme 2

```

format long
%Programme pour l'exemple 3.3
%a c'est la valeur de y en zéro et b est la valeur de y' en zéro
alpha = input('alpha ='); a = input('a ='); b = input('b ='); J = input('J =');
t = input('t ='); M = 2^J;
for k = 1 : 2 * M
x(k) = (k - 0.5)/(2 * M);
end
A = zeros(2 * M);
for i = 1 : 2 * M
A(i, 1) = 1 + ((x(i))^(alpha - 1.5))/gamma(alpha - 0.5) + ((x(i))^alpha)/gamma(alpha + 1);
end
for i = 1 : 2 * M
for j = 2 : 2 * M
A(i, j) = h(j, x(i)) + F(j, alpha - 1.5, x(i)) + F(j, alpha, x(i));
end
end
B = zeros(2 * M, 1);
for i = 1 : 2 * M
B(i) = -a - b * x(i) + 1 + t;
end
C = inv(A) * B;
y = 0;
for i = 2 : 2 * M
y = y + C(i) * F(i, alpha, t);
end
    
```

$$y_{\text{approchee}} = (y + a + b * t) + (C(1) * (t.^{\text{alpha}}))/\text{gamma}(\text{alpha} + 1)$$

$$y_{\text{exacte}} = 1 + t$$

Exemple 3.4 Considérons l'équation de Bagley-Torvik généralisée (2.24) avec $a = b = c = 1$ et $f(t) = t^3 + 6t + \frac{8}{\Gamma(\frac{1}{2})}t^{3/2}$, on obtient

$$D^2y(t) + D^{3/2}y(t) + y(t) = t^3 + 6t + \frac{8}{\Gamma(\frac{1}{2})}t^{3/2}, \quad (3.4)$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Les solutions numériques obtenues par la méthode de la matrice opérationnelle des ondelettes de Haar sont données dans le tableau (3.4). Clairement, les approximations obtenues par la méthode proposée sont en accord avec les solutions exactes. Le résultat numérique pour $m = 64$ est illustré à la figure (3.7).

t	m=4	m=8	m=16	m=32	m=64	Exact
0.1	0.0007357	0.00015125	3.0884e-005	6.8041e-006	1.3625e-006	0.00100
0.2	0.0010791	0.00020388	4.0563e-005	6.4464e-006	2.0841e-007	0.00800
0.3	0.0011925	0.00024073	3.2658e-005	6.0500e-007	2.9951e-006	0.02699
0.4	0.0011967	0.00018726	8.0217e-006	1.2339e-005	7.9890e-006	0.06398
0.5	0.0012024	0.00011321	3.3176e-005	2.9228e-005	1.4572e-005	0.12499
0.6	0.0010813	0.00084729	8.7403e-005	5.0458e-005	2.2625e-005	0.21598
0.7	0.0007035	0.00017485	0.000151290	7.5263e-005	3.2045e-005	0.34297
0.8	0.0001724	0.00034113	0.000225213	0.000104287	4.2679e-005	0.51196
0.9	0.0004093	0.00057878	0.000309616	0.000135866	5.4381e-005	0.72895

Tableau 3.4 – Les erreurs absolues pour différentes valeurs m .

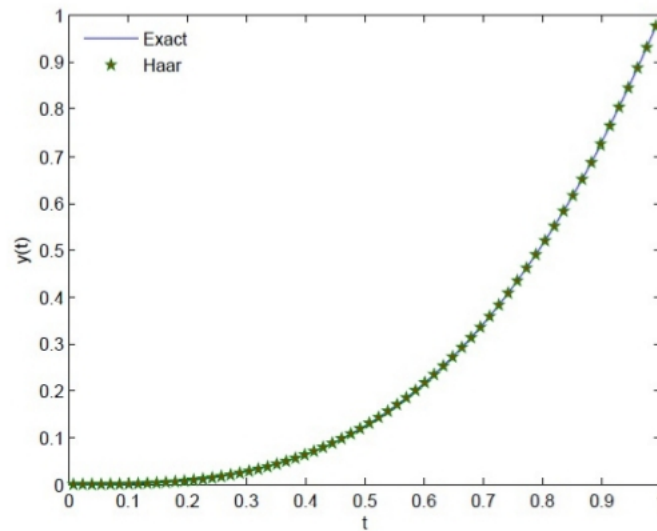


Figure 3.7 – Solutions numériques et exactes pour $m = 64$.

Exemple 3.5 Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire :

$$D^{3/2}y(t) + y(t) = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3.5)$$

où $f(t) = t^{5/2} + \frac{5.8905}{\sqrt{\pi}}t$. La solution exacte du problème est $y(t) = t^{5/2}$.

Les erreurs absolues par rapport à la solution exacte sont données dans le tableau (3.5) et représenté graphiquement dans la figure (3.8). étant donné le tableau (3.6), on observe que la solution approchée fourni par la méthode proposée présente un excellent accord avec les valeurs exactes.

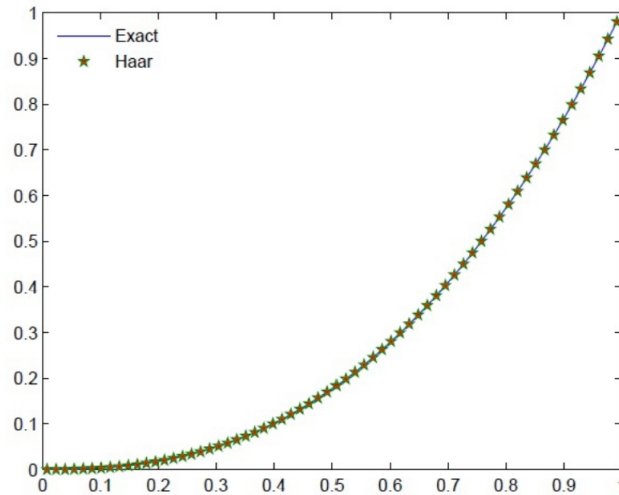


Figure 3.8 – Solutions numériques et exactes pour $m = 64$.

t	m=4	m=8	m=16	m=32	m=64	Exact
0.1	1.7444e-003	4.3597e-004	8.5678e-005	2.4177e-005	3.5200e-006	0.00316227
0.2	2.3958e-003	4.6877e-004	1.3299e-004	3.3988e-005	7.9410e-006	0.01788854
0.3	2.5239e-003	6.5568e-004	1.6446e-004	3.7140e-005	1.3333e-005	0.04929503
0.4	2.4081e-003	6.9440e-004	1.7821e-004	4.4827e-005	1.9790e-005	0.10119288
0.5	2.5252e-003	6.6319e-004	1.7153e-004	4.4125e-005	2.7381e-005	0.17677669
0.6	3.2058e-003	8.0889e-004	1.8039e-004	4.8475e-005	3.6121e-005	0.27885480
0.7	3.3457e-003	7.1310e-004	1.9574e-004	5.0480e-005	4.6221e-005	0.40996341
0.8	3.1013e-003	8.0699e-004	2.0416e-004	4.8070e-005	5.7070e-005	0.57243340
0.9	2.6882e-003	7.7154e-004	1.9958e-004	5.1381e-005	6.9340e-005	0.76843347

Tableau 3.5– Les erreurs absolues pour différentes valeurs m .

t	m=4	m=8	m=16	m=32	m=64	Exact
0.1	1.0452e-003	3.9554e-004	6.2683e-005	2.4550e-005	3.9551e-006	0.0048333
0.2	1.3206e-003	1.9641e-004	8.1062e-005	1.2571e-005	5.0845e-006	0.0186667
0.3	1.0431e-003	1.5838e-004	6.6202e-005	9.5868e-006	4.1178e-006	0.0405009
0.4	4.2916e-004	2.0679e-004	2.9150e-005	1.3065e-005	1.7837e-006	0.0693387
0.5	3.0731e-004	7.6596e-005	1.9134e-005	4.7827e-006	1.1956e-006	0.1041868
0.6	2.3656e-004	1.1659e-004	1.2363e-005	7.1317e-006	8.0944e-007	0.1440592
0.7	3.1646e-004	2.3110e-005	1.8527e-005	1.7331e-006	1.1758e-006	0.1879804
0.8	1.4632e-004	1.0123e-005	1.0219e-005	3.4688e-007	6.2067e-007	0.2349892
0.9	6.8368e-005	7.3583e-006	2.0696e-006	5.9524e-007	1.6395e-007	0.2841433

Tableau 3.6– Les erreurs absolues pour différentes valeurs m .

Exemple 3.6 Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire avec des coefficients variables :

$$D^{5/2}y(t) + \frac{1}{t+1}D^{3/2}y(t) + \frac{1}{4(t+1)^{3/2}}y(t) + y(t) = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (3.6)$$

avec les conditions $y(0) = \sqrt{\pi}$, $y'(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et $y(1) = \sqrt{2\pi}$, où $f(t) = \frac{(t+\pi)^{1/2}}{4(t+1)}$. la solution exacte est $y(t) = \sqrt{\pi(t+1)}$.

Les solutions approximatives de l'équation donnée pour $m = 8, 16, 32, 64$ sont présentées dans le tableau (3.7) et représentées graphiquement dans la figure (3.9). À partir du tableau (3.7), on peut voir qu'en appliquant un plus grand nombre d'ondelettes de Haar, une bonne solution approximative pour ce problème peut être obtenu.

t	m=4	m=8	m=16	m=32	m=64	Exact
0.1	0.0307379	0.00025327	2.0664e-004	5.2033e-005	2.2630e-006	1.858965
0.2	0.0110791	0.00041345	1.1572e-004	4.3263e-005	3.1931e-006	1.941626
0.3	0.0201005	0.00074638	4.2869e-004	6.3305e-005	4.8943e-006	2.020908
0.4	0.0331187	0.00085588	8.1239e-005	1.2130e-006	5.2344e-006	2.097196
0.5	0.0811954	0.00073611	6.7288e-004	3.2927e-005	3.5427e-006	2.170804
0.6	0.0512804	0.00089023	3.6502e-004	6.1465e-005	5.2737e-006	2.241996
0.7	0.0037122	0.00074921	3.7013e-005	5.5032e-006	2.3165e-006	2.310997
0.8	0.0052735	0.00078344	2.7113e-004	7.1042e-005	6.3099e-006	2.377996
0.9	0.0045873	0.00067210	4.3204e-004	2.5523e-005	5.6571e-006	2.443159

Tableau 3.7– Les erreurs absolues pour différentes valeurs m .

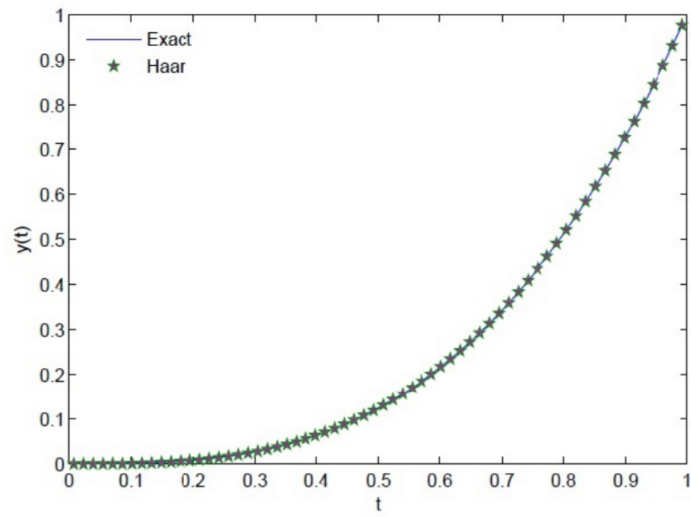


Figure 3.9 – Comparaison de la solution numérique et exacte à $m = 64$.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire nous avons présenté une étude approfondie et détaillée sur les équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire. D'une autre part, nous appliquons une procédure numérique pour résoudre le problème mentionné qui concerne une classe d'équations différentielles fractionnaires en utilisant la méthode de collocation via les ondelettes de Haar à l'aide de matrice opérationnelle d'intégration d'ordre fractionnaire. La solution numérique obtenue par le schéma proposé est très proche de la solution exacte, ce qui a été illustrée par des tableaux et des figures. La technique proposée est donc une approche efficace pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaires.

Bibliographie

- [1] **E. Artin** *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*. Teubner, Leipzig (English translation : *The Gamma Function*. Published 1964 by Holt, Rinehart and Winston, New York), 1931.
- [2] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo** , *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, 2006
- [3] **M. Wellbeer** , *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their Analytical Bockground*, D. Univ Braunschweig, 2010.
- [4] **H. Schaefer** , *Über die methode der a priori schranken*, Math, 415-416, Ann. 126, 1955.
- [5] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo**, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, 2006.
- [6] **Oldham K.B., Spanier J.**, "The fractional calculus", Academic press, New York, 1974.
- [7] **Mittal R.C. and Nigam R.**, "Solution of fractional intgro-differential equation by Adomian decomposition method", *Int. J. Appl. Math. and Mech.*, 4(2) : pp. 87-94, 2008.
- [8] **Caputo M.**, "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent part II", *J. Roy. Astral. Soc.*, 13 : 529-539, 1967.
- [9] **Minardi F.**, "Fractional Calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics", A carpinteri and F. Mainrardi, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, pp291-348, 1997
- [10] **S. Mallat.**, " A wavelet tour of signal processing".Academic Press . 1998 .
- [11] **Siraj-ul-Islam, Imran Aziz, Fazal Haq.** "A comparative study of numerical integration based on Haar wavelets and hybrid functions". *ELSEVIER . Computers and Mathematics with Applications*, 59 (2010) 2026-2036.
- [12] **Virginie Ehrlacher.** "Méthode des différences finies". 26 mai 2020
- [13] **Ü. Lepik.** "Solving PDEs with the aid of two-dimensional Haar wavelets". *ELSEVIER.* 10 February 2011
- [14] **M. Pakdaman, A. Ahmadian, S. Effati, S. Salahshour, D. Baleanu.** "Solving differential equations of fractional order using an optimization technique based on training artificial neural network". *Appl. Math. Comp.*, 293, 81-95, 2017.
- [15] **A. B. DESHI, G. A. GUDODAGI,**"NUMERICAL SOLUTION OF SOME CLASS OF GENERALIZED FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS USING HAAR WAVELET".*Inter. E-Conf. in Math. Sciences and Fractional Calculus(ICMSFC Feb 2021)*.Vol. 12(3). No. 8, pp 1-11.(ICMSFC Feb 2021) .
- [16] **S. Saha Ray.**"On Haar wavelet operational matrix of general order and its application for the numerical solution of fractional Bagley Torvik equation".*Applied Mathematics and Computation* 218 (2012) 5239–5248.

- [17] **Firdous A. Shah and R. Abass.** *"Haar Wavelet Operational Matrix Method for the Numerical Solution of Fractional Order Differential Equations"*. *Nonlinear Engineering* 2015; 4(4) : 203-213

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'une méthode numérique pour la résolution d'une classe des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaires, où on débite par un rappel sur des fonctions spéciales (Gamma et Beta). Ensuite, on introduit la définition et quelques propriétés de l'intégrale et la dérivation fractionnaires. Puis, on étudie la méthode d'ondelette de Haar pour la résolution numérique de l'équation de Bagley Torvik. Enfin, beaucoup des exemples illustratifs sont présentés et caractérisés par les erreurs absolues.

Mots-clés : Intégrale de Riemann-Liouville, dérivation de Caputo, équation de Bagley Torvik, l'ondelette de Haar.

Abstract

This work is devoted to the study of a numerical method for the resolution of a class of ordinary differential equations of fractional order, where one debits by a recall on special functions (Gamma and Beta). Then, we introduce the definition and some properties of the fractional integral and derivative. Then, we study the Haar wavelet method for the numerical solution of the Bagley Torvik equation. Finally, many of the illustrative examples are presented and characterized by absolute errors.

Key words : Riemann-Liouville integral, Caputo derivation, Bagley Torvik equation, Haar wavelet.

ملخص

هذه المذكرة تختص بدراسة طريقة عددية لحل نمط من المعادلات التفاضلية ذات رتبة كسرية، حيث نبدأها بتذكير حول بعض الدوال الخاصة كالدالة غاما و الدالة بيتا. ومن ثم نقدم تعريف و بعض خصائص التكامل و الاشتقاق الكسري. بعد ذلك، نقوم بدراسة طريقة مويجة هار لحل معادلة باغلاي تورفيك عدديا. و أخيرا نعرض عدة أمثلة توضيحية بالأخطاء المطلقة.

الكلمات المفتاحية: تكامل ريمان- ليوفيل، اشتقاق كابيتو، معادلة باغلاي تورفيك.