

N° d'ordre :
N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Existence des Solutions pour les Équations Différentielles impulsives D'ordre Fractionnaire

Présenté par: MAROUF KHOULOU
RABAH MIMOUNA

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	Nisse Lamine	MCA/Prof.	Univ. El Oued
Rapporteur	Nisse Khadidja	M.C.A	Univ. El Oued
Examineur	Bekkar Menceur	MCA/MC	Univ. El Oued

Année universitaire : 2019/2020

Dédicace

Nous dédions ce travail

*A nos chers parents qu'allah les protèges, qui nous'ont beaucoup soutenus
durant tout la vie*

*A nos frères et soeurs qui nous'ont partagés notre vie avec tous ses détails
A nos amis avec lesquels nous avons partagé l'amour conseils et l'affinité*

*A nos professeurs qui nous semés les graines des savoir et nous ont dotés a
leurs conseils*

*Nous souhaitons ici exprimer notre profonde gratitude et notre grand respect
à notre superviseur, le professeur Nisse Khadidja, pour sa patience, sa
disponibilité et ses conseils avisés.*

Notations

- * $C(X, Y)$ L'espace des fonctions continues de X dans Y .
- * $L^P([a, b])$ L'espace des fonctions p^{me} intégrables sur $[a, b]$.
- * $L^\infty([a, b])$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sur $[a, b]$.
- * $\Gamma(\cdot)$ La fonction Gamma d'Euler.
- * I_{a+}^α L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à droite.
- * I_b^α L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à gauche.
- * ${}^R D_{a+}^\alpha$ La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à droit.
- * ${}^R D_{a-}^\alpha$ La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à gauche.
- * ${}^c D_{a+}^\alpha$ La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α à droite.
- * ${}^c D_{a-}^\alpha$ La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α à gauche.
- * $PC(I, X)$ l'espace de fonction continu par morceaux de I vers X .

Table des matières

1	Préliminaires	3
1.1	Espaces fonctionnelle	3
1.1.1	Espaces des fonctions continues	3
1.1.2	Espaces des fonctions intégrable	3
1.2	Quelques théorèmes du point fixe	4
1.2.1	Notions sur les opérateurs compacts	4
1.2.2	L'ensemble équicontinue	4
1.2.3	théorèmes du point fixe	4
1.3	Calcul fractionnaire	5
1.3.1	La fonction Gamma	5
1.3.2	L'intégrale fractionnaire	5
1.3.3	La dérivation fractionnaire	6
1.3.4	Quelques propriétés sur l'intégrale et la dérivation fractionnaire	6
2	Quelques résultats d'existence pour les équations différentielles fractionnaire impulsives	8
2.1	Notations et propriétés liés aux EDFI	8
2.1.1	Forme général d'une équations différentielles impulsives	8
2.1.2	L'espace des fonctions continues par morceaux	10
2.1.3	Critère de compacité	11
2.2	Équations différentielles fractionnaires impulsive	11
2.2.1	Position de problème	11
2.2.2	L'équation intégrale équivalente	12
2.2.3	Les résultats de l'existence	15
2.3	Équations différentielles fonctionnelle fractionnaires impulsive avec retard	19
2.3.1	Position du problème	19
2.3.2	L'équation intégrale équivalente	20
2.3.3	Le résultat de l'existence	22
3	Points fixes d'une classe d'opérateurs définis dans l'espace des fonctions continus par morceaux et application	27
3.1	Formulation du théorème	27
3.1.1	Quelques notation et lemme préliminaire	27
3.1.2	Enoncé et preuve du théorème	28
3.2	Application à un problème d'EDFI avec retard	29
3.2.1	Position du problème et l'équation intégrale équivalente	29
3.2.2	Le résultat d'existence et d'unicité	30
3.3	Exemple illustratif	32

Introduction

e calcul différentiel est une partie importante des mathématiques, Le sujet du calcul fractionnaire (c'est-à-dire le calcul des intégrales et des dérivées) a acquis une popularité et une importance considérables au cours des trois dernières décennies ou ainsi, en raison principalement de ses applications démontrées dans de nombreux domaines apparemment divers et répandus tel que les intégrales et dérivées d'ordre entier sont les intégrales et dérivées normales de l'analyse. Mais dans le cas d'un ordre fractionnaire, ces idées manifestent leurs propres particularités.

Et il est connu que le calcul classique fournit un outil puissant pour expliquer et modéliser des processus dynamiques importants dans de nombreux domaines des sciences appliquées. Mais les expériences et la réalité nous apprennent qu'il existe de nombreux systèmes complexes dans la nature avec une dynamique anormale, tels que le transport de contaminants chimiques dans l'eau autour des roches, la dynamique des matériaux viscoélastiques, l'effet de la spéculation sur la rentabilité des actions sur les marchés financiers, et de nombreux plus. Dans la plupart des cas susmentionnés, ces types de processus anormaux ont un comportement complexe macroscopique et leur dynamique ne peut pas être caractérisée par des modèles dérivés classiques.

Que les ingénieurs et les scientifiques ont développé de nouveaux modèles qui impliquent des équations différentielles fractionnaires Ces modèles ont été appliqués avec succès où la fonction inconnue s'introduit avec une dérivation d'ordre non entier, sont rencontrés dans la modélisation mathématiques de divers phénomènes qui conservent la mémoire des transformations passées.

D'autre part, les équations différentielles impulsives constituent un outil plus approprié dans la modélisation de plusieurs phénomènes naturels et processus réels, en particulier ceux dont l'état subit des changements brusques, au cours de leurs évolutions continues. D'où, l'intérêt porté sur les équations différentielles fractionnaires impulsives (EDFI) ces dernières années. et ceci est dans divers directions : existence et unicité des solutions, la dépendance continue des solutions par rapport aux temps initial, la stabilité.

C'est dans ce cadre que s'inscrit le travail présenté dans ce mémoire, plus précisément : la questions d'existence des solutions pour les (EDFI) du premier ordre. L'approche employée dans ce travail est basée sur la théorie du point fixe

Le travail se subdivise en trois parties :

La première partie : on présente des définitions et des théorèmes précis qu'on les utilise dans ce mémoire.

La deuxième partie : se contient les résultats d'existence une solution d'équation différentielles fractionnaires impulsives par l'utilisation de théorème le point fixé.

La troisième partie : on montre le résultat d'existence et d'unique dans l'espace des fonctions continues par morceaux puis on applique ce résultat dans l'équation différentielles fractionnaires impulsives avec un exemple pour la clarification.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente des définitions et des théorèmes précis (espaces fonctionnelle, quelques théorème du point fixe, calcul fractionnaire) qu'on les utilisé dans ce mémoire.

1.1 Espaces fonctionnelle

Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1.1 Espaces des fonctions continues

Définition 1.1.1 [3] (page 1) [1] (page 3)

Soit $k \in \mathbb{N}$, on note par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois continument dérivables sur Ω , muni de la norme

$$\| f \|_{C^k(\Omega)} = \sum_{i=0}^n \max_{x \in \Omega} | f^i(x) | . \quad (1.1)$$

Pour $n = 0$ on note $C^0([a, b])$ par $C([a, b])$ (l'espace des fonctions continues) et on note $\| \cdot \|_{C^0(\Omega)}$ par $\| \cdot \|_{\infty}$ c'est-à-dire :

$$\| f \|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} | f(x) | .$$

1.1.2 Espaces des fonctions intégrable

Définition 1.1.2 [10] (page 4) [4](page 2)

1. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_{\Omega} |f(t)|^p dt < \infty.$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^{\infty}(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables et bornées presque par tout sur Ω .

Théorème 1.1.1 [1] (page 1)[4](page 2)

1. Pour $1 \leq p < \infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\| f \|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

est un espace de Banach.

2. Pour $p = \infty$ l'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

est un espace de Banach.

Théorème 1.1.2 (Inégalité de Hölder) [17] (page 56)

Soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) des fonctions mesurables, p et q deux exposants conjugués $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ alors on a : $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{si } 1 \leq p \leq +\infty$$

1.2 Quelques théorèmes du point fixe

Soient X, Y deux espaces normés, $U \subset X$ et $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ un opérateur.

1.2.1 Notions sur les opérateurs compacts

Définition 1.2.1 (Ensemble relativement compact) [11] (page 26)

On dit que le sous-ensemble $M \subset X$ est relativement compact si $\bar{M}$ est compact.

Définition 1.2.2 (Opérateur compact) [11] (page 28)

l'opérateur T qui transforme tout sous-ensemble borné de $D(T)$ à un sous-ensemble relativement compact in X est un opérateur compact.

Définition 1.2.3 (Opérateur complètement continu) [11] (page 28)

On dit que l'opérateur T est complètement continu si T continu et compact.

1.2.2 L'ensemble équicontinue

Définition 1.2.4 (Ensemble équicontinue) [8] (page 213)

Soit A une famille d'opérateurs de X dans Y .

A est équicontinue en un point $a \in X$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall T \in A, \forall x, x^* \in U, |x - x^*| < \delta \Rightarrow |T(x) - T(x^*)| < \epsilon$$

on dit que A est équicontinue sur X si et seulement si est équicontinue en tout point de X .

1.2.3 théorèmes du point fixe

Soit X un espace de Banach.

Théorème 1.2.1 (Théorème de point fixe de Banach) [5] (page 229)

Soient $0 \leq \alpha < 1$ et l'opérateur T satisfait l'inégalité :

$$d(Tu, Tv) \leq \alpha d(u, v)$$

pour chaque $u, v \in X$ Alors T admet un point fixe unique.

Définition 1.2.5 [5] (page 230)

U est relativement compact si U est équicontinu et borné.

Théorème 1.2.2 (Théorème de point fixe de Schaefer) [9] (page 29)

Soit T complètement continu, supposons en outre que l'ensemble :

$$F = \{x \in X : x = \lambda T(x) \quad \lambda \in [0, 1]\}$$

est borné. Alors T admet un point fixe.

Théorème 1.2.3 (Théorème de point fixe de Schauder) [5] (page 230)

Soit U convexe et fermé de X , et $T(U)$ est relativement compact dans X .

Alors T admet au moins un point fixe.

1.3 Calcul fractionnaire

Dans cette section, on rappelle quelques notions essentielles de la théorie du calcul fractionnaire d'ordre non entier.

1.3.1 La fonction Gamma

Définition 1.3.1 [14](page 1) [4](page 3)

La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{C}(Re(x) > 0)$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (1.2)$$

Cette intégrale est convergente pour tout $x \in \mathbb{C}(Re(x) > 0)$

En intégrant par parties, on montre que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (1.3)$$

1.3.2 L'intégrale fractionnaire

Définition 1.3.2 (L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (à gauche)) [1](page 69) [5] (page 13)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, L'opérateur I_{a+}^α défini sur $L_1[a, b]$ par :

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (1.4)$$

pour $a \leq x \leq b$ est appelé l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α (à gauche) d'une fonction f .

Définition 1.3.3 (L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (à droite)) [1](page 69) [5] (page 13)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, L'opérateur I_{b-}^α défini sur $L_1[a, b]$ par :

$$I_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad (1.5)$$

pour $a \leq x \leq b$ est appelée l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α (à droite) d'une fonction f .

En particulier, si $\alpha = 0$, alors :

$$I_{b-}^0 f(x) = I_{a+}^0 f(x) = f(x) \quad (1.6)$$

1.3.3 La dérivation fractionnaire

Définition 1.3.4 (La dérivés de Riemann-Liouville (à gauche)) [1] (page 70) [7] (page 37)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n = [\alpha] + 1$ on appelle dérivé de Riemann-Liouville d'ordre α (à gauche) d'une fonction f la dérivé définie par la formule suivante :

$${}^R D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

pour $a \leq x \leq b$

Définition 1.3.5 (La dérivés de Riemann-Liouville (à droite)) [1] (page 71) [7] (page 37)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n = [\alpha] + 1$ on appelle dérivé de Riemann-Liouville d'ordre α (à droite) d'une fonction f la dérivé définie par la formule suivante :

$${}^R D_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(-\frac{d^n}{dt^n} \right) \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

pour $a \leq x \leq b$

Définition 1.3.6 (La dérivés de Caputo (à gauche)) [1] (page 92)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a \leq x \leq b$ On appelle dérivé de Caputo d'ordre α (à gauche) d'une fonction f tel que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1([a, b])$. la fonction définie par :

$${}^c D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

Définition 1.3.7 (La dérivés de Caputo (à droite)) [1] (page 92)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a \leq x \leq b$ On appelle dérivé de Caputo d'ordre α (à droite) d'une fonction f tel que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1([a, b])$. la fonction définie par :

$${}^c D_{b-}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

1.3.4 Quelques propriétés sur l'intégrale et la dérivation fractionnaire

Relation entre la dérivée au sens de Rimann-Liouville et celle de Caputo [1] (page 91)

Soit $\alpha > 0$ ($\alpha \notin \mathbb{N}$) supposons que h est une fonction telle que ${}^c D^\alpha h(x)$ et ${}^R D^\alpha h(x)$ existent, alors :

$$({}^c D^\alpha h)(x) = ({}^R D^\alpha h)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(x)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha} \text{ et } n = [\alpha] + 1$$

Théorème 1.3.1 [1] (page 89)

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $p \geq 1$ tel que $\alpha + \beta < \frac{1}{p}$. Si $h(x) \in L_p(a, b)$ alors :

$$(I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} h)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} h)(x)$$

et

$$(I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} h)(x) = (I_{b-}^{\alpha+\beta} h)(x)$$

Théorème 1.3.2 [1] (page 89)

Soient $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$ supposons que h est une fonction telle que les dérivés fractionnaires $D^{\alpha} h(x)$ et $D^{\alpha+m} h(x)$ existent, alors :

$$(D^m D_{a+}^{\alpha} h)(x) = (D_{a+}^{\alpha+m} h)(x)$$

et

$$(D^m D_{b-}^{\alpha} h)(x) = (-1)^m (D_{b-}^{\alpha+m} h)(x)$$

Lemme 1.3.1 [1] (page 89) [7]

Soient $\alpha > 0$ et $h(x) \in L_1(a, b)$ alors :

$$({}^R D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} h)(x) = h(x)$$

et

$$({}^R D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} h)(x) = h(x)$$

Théorème 1.3.3 [1] (page 89) [7]

Soient $\alpha > \beta > 0$ et $h(x) \in L_1(a, b)$ alors :

$$({}^R D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} h)(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta} h)(x)$$

et

$$({}^R D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} h)(x) = (I_{b-}^{\alpha-\beta} h)(x)$$

Théorème 1.3.4 [1] (page 95) [2] (page 44)

Soient $\alpha > 0$ ($\alpha \notin \mathbb{N}$) et $h(x) \in L_{\infty}(a, b)$ ou $h(x) \in C[a, b]$ alors :

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} h)(x) = h(x)$$

et

$$({}^c D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} h)(x) = h(x)$$

Proposition 1.3.1 [1]

Soit $\alpha > 0$

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}, c_i \in \mathbb{R},$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ $n = [\alpha] + 1$ sont solution de l'équation différentielle

$${}^c D^{\alpha} h(x) = 0$$

Proposition 1.3.2 [7] (page 45) [1] (page 96)

Soit $\alpha > 0$

$$I^{\alpha c} D^{\alpha} h(x) = h(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

pour certains $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n = [\alpha] + 1$

Chapitre 2

Quelques résultats d'existence pour les équations différentielles fractionnaire impulsives

Ce chapitre, se contient les résultats d'existence une solution d'équation différentielles fractionnaires impulsives par l'utilisation de théorème le point fixé.

2.1 Notations et propriétés liés aux EDFI

Cette partie est extrait de livre [13] pour la forme général d'une équations différentielles impulsives

2.1.1 Forme général d'une équations différentielles impulsives

Nous ferons une brève description des processus qui modélisent avec des systèmes d'équations différentielles impulsives.

Soit Ω l'espace des phases d'un processus évolutif, c'est-à-dire l'ensemble de ses états. Notons P_t l'application qui transfère le processus à l'instant t . L'application P_t peut alors interprété comme un point (t, x) de l'espace $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R} \times \Omega$ appelle un espace de phase étendu du processus évolutif considéré.

Supposons que la loi d'évolution du processus est décrite par :

- (a) Un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2.1)$$

tels que $t \in \mathbb{R}$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$; $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (b) L'ensembles $M_t, N_t \subset \mathbb{R} \times \Omega$.

- (c) Un opérateur $A_t : M_t \rightarrow N_t$.

Le mouvement du point P_t dans l'espace de phase étendu est exécuté de la manière suivante : le point P_t commence son mouvement à partir du point $(t_0, x(t_0))$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et se déplace le long de la courbe $\{(t, x(t))\}$ décrite par la solution $x(t)$ du système (2.1) avec condition initiale $x_0 \in \Omega$ jusqu'au moment t où P_t rencontre l'ensemble M_t .

En ce moment t_1 , l'opérateur A_{t_1} transfère le point P_t de la position $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$ à la

position $(t_1, x_1^+) \in N_{t_1}$, $x_1^+ = A_{t_1}x(t_1)$.

Ensuite, le point P_t continue de se déplacer le long de la courbe $\{(t, y(t))\}$ décrite par la solution $y(t)$ du système (2.1) avec condition initiale $y(t_1) = x_1^+$ jusqu'à une nouvelle rencontre avec l'ensemble M_t , etc.

L'union des relations (a), (b), (c) caractérisant le processus évolutif est appelée système d'équations différentielles impulsives. la courbe décrite par le point P_t dans l'espace de phase étendu une solution du système d'équations différentielles impulsives. Les moments $t_1, t_2, \dots$ lorsque l'application P_t rencontre l'ensemble M_t est appelé moments d'effet d'impulsion et l'opérateur $A_t : M_t \rightarrow N_t$ un opérateur de saut.

Nous supposons que la solution $x(t)$ de l'équation différentielle impulsive est une fonction continue gauche aux moments de l'effet d'impulsion c'est à dire que

$$x(t_k^-) = x(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

La liberté de choix des ensembles M_t, N_t et l'opérateur A_t conduit à la grande variété des systèmes impulsives la solution du système l'équation différentielle impulsive peut être :

1. une fonction continue, si la courbe intégrale n'intersecte pas l'ensemble M_t ou l'intersecte aux points fixes de l'opérateur A_t .
2. une fonction continue par morceaux avec un nombre fini de points de discontinuité du premier type, si la courbe intégrale coupe M_t à un nombre fini de points qui ne sont pas des points fixes de l'opérateur A_t .
3. une fonction continue par morceaux avec un ensemble dénombrable de points de discontinuité de premier type, si la courbe intégrale coupe M_t à un ensemble dénombrable de points qui ne sont pas des points fixes de l'opérateur A_t .

Nous donnerons une description plus détaillée des deux classes d'équations différentielles impulsives qui présentent un intérêt particulier

Classe 1 : Systèmes à moments fixes d'effet d'impulsion

Pour ces systèmes, l'ensemble M_t est représenté par une séquence d'hyperplans, $t = t_k$ où t_k est une séquence donnée de moments d'effet d'impulsion. L'opérateur A_t n'est défini que pour $t = t_k$ $A_k : \Omega \rightarrow \Omega, x \rightarrow A_k x = x + I_k(x)$.

Les systèmes de cette classe sont écrits comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)) & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

tels que $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Soit $\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ et $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} t_k = \pm \infty$ Désigner par $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ la solution du système (2.2) si satisfaisant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \quad t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= I_k(x(t_k)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

et la condition initiale

$$x(t_0^+) = x(t_0) \quad (2.3)$$

Classe 2 : Systèmes avec les moments impulsifs variables

Pour ces systèmes d'équations différentielles impulsives, l'ensemble M_t est représenté par une séquence d'hypersurfaces $\{t = \tau_k(x), k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$

On suppose que $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ pour $x \in \Omega, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ et $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} \tau_k(x) = \pm \infty$ pour tout $x \in \Omega$

Nous supposons que la restriction de l'opérateur A_t à l'hypersurface $\{t = \tau_k(x), k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ est donnée par l'opérateur $A_k x = x + I_k(x)$, tel que $I_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Les systèmes d'équations différentielles impulsives de cette classe sont écrits sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)) & t = \tau_k(x(t)), k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.4)$$

La solution $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ du problème de valeur initiale (2.4), (2.3) est une fonction continue par morceaux mais contrairement à la solution de (2.2)(2.3), elle a des points de discontinuité selon la solution, c'est-à-dire que les différentes solutions ont différents points de discontinuité.

Il est clair que les systèmes d'équations différentielles impulsives à moments fixes d'effet impulsif peuvent être considérés comme un cas particulier des systèmes à perturbations impulsives variables.

2.1.2 L'espace des fonctions continues par morceaux

Définition 2.1.1 [6] (page 13)

Soient $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui satisfait $t_k < t_{k+1}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$, J un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

On note par $PC(J, \mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui vérifient :

1) ψ est continue pour tout $t \in J$ tel que $t \neq t_k$.

2) ψ est continue à gauche pour tout $t \in J$.

3) ψ possède une discontinuité de première espèce pour tout $t_k \in J$.

De même, on dit que $\psi \in PC^1(J, \mathbb{R}^n)$, si ψ et ψ' appartiennent à $PC(J, \mathbb{R}^n)$

Corollaire 2.1.1

Soit $\psi \in PC^1(J, \mathbb{R}^n)$, alors :

- Pour chaque t_k tel que $]t_k, t_{k+1}[\subset J, \psi \in C([t_k, t_{k+1}[, \mathbb{R}^n)$

- Pour chaque $t_k \in J$, les deux limites suivantes (la limite à droite et la limite à gauche) :

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} \psi(t) = \psi(t_k^-) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_k^+} \psi(t) = \psi(t_k^+)$$

existe et de plus $\psi(t_k^-) = \psi(t_k)$

Théorème 2.1.1

[6] (page 13)
 $PC(J, \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{PC} = \sup\{|x(t)| \mid t \in J\}, \quad x \in PC(J, \mathbb{R}^n)$$

$PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{PC^1} = \|x\|_{PC} + \|x'\|_{PC}, \quad x \in PC(J, \mathbb{R}^n)$$

2.1.3 Critère de compacité

Définition 2.1.2 (*Ensemble quasi-équicontinue*) [2] (Page 24)

On dit que l'ensemble $F \subset PC$ est quasi-équicontinuous dans $[0, T]$ si :

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ telle que $x \in F$; $k \in \mathbb{Z}$; $t_1, t_2 \in [\tau_{k-1}, \tau_k] \cap [0, T]$ et $|t_1 - t_2| < \delta$ on a $|x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon$.

Théorème 2.1.2 (*Ensemble relativement compact*) [2] (Page 24)

On dit que l'ensemble $F \subset PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ est relativement compact si et seulement si :

1. F est uniformément borné, c'est-à-dire $\|x\| \leq c$ pour chaque $x \in F$ et certains $c > 0$.
2. F est quasi-équicontinuous dans $[0, T]$.

Les résultats suivantes existent dans des recherches précédents [16], [?], On va les détailler

2.2 Équations différentielles fractionnaires impulsives

2.2.1 Position de problème

Nous considérons dans cette section le problème de valeur initiale (PVI), pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire impulsive

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) & t \in J = [0, T], t \neq t_k \\ \Delta y(t) = I_k(y(t_k^-)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

tel que $k = 1, \dots, m$, $0 < \alpha \leq 1$, ${}^c D^\alpha$ est la dérivé fractionnaire de Caputo $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $I_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$, $\Delta y(t) = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, $y(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} y(t_k + h)$ représentent les limites à droite et à gauche de $y(t)$ à $t = t_0$

$C(J, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach de tous fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$ avec la norme

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| : t \in J\}$$

Comme les solutions d'une équation différentielle impulsive sont continues par morceaux, alors l'espace fonctionnel approprié pour de telles solutions est l'espace des fonctions continues par morceaux

$$PC(J; \mathbb{R}) = \{y : J \rightarrow \mathbb{R}, y \in C((t_k, t_{k+1}]; \mathbb{R}), k = 0, \dots, m, y(t_k^-) \text{ et } y(t_k^+) \text{ existent avec } y(t_k^-) = y(t_k), k = 1, \dots, m\}$$

Cet ensemble est un espace Banach avec la norme

$$\|y\|_{PC} = \sup |y(t)|$$

Définition 2.2.1

Soit $y \in PC(J, \mathbb{R})$. On dit que y est une solution de problème (2.5) si elle satisfait l'équation ${}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ sur $J' (J' = [0, T] \setminus t_1, \dots, t_m)$ et satisfaire aux conditions

$$\Delta y(t) = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1; \dots, m$$

$$y(0) = y_0$$

2.2.2 L'équation intégrale équivalente

Lemme 2.2.1 [8] (Page 142)

Soient $\alpha > 0$, $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds & \text{si } t \in [0, t_1] \\ y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \sum_{i=1}^k I_i(y(t_i^-)) , & \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}] \quad k = 1, \dots, m \end{cases} \quad (2.6)$$

si et seulement si y est solution du PVI fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = h(t), & t \in J' \\ \Delta y(t_k) = I_k(y(t_k^-)) & k = 1, \dots, m \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Preuve

On suppose que y satisfait (2.7)

Si $t \in [0, t_1]$, on a

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t)$$

On appliquons l'intégrale de Riemann-Liouville on trouve :

$$I^{\alpha c} D^\alpha y(t) = I^\alpha h(t)$$

utilisant Lemme 1.3.2 ($0 < \alpha < 1$; $n=1$) et la Définition 1.3.2

$$y(t) + c_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

On pose $t = 0$, donc

$$y(0) + c_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^0 (0-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

Puisque $y(0) = y_0$ alors

$$y_0 + c_0 = 0$$

ça veut dire

$$c_0 = -y_0$$

Donc

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

si $t \in (t_1, t_2]$, on a

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t)$$

On appliquons l'intégrale de Riemann-Liouville on trouve :

$$I^{\alpha c} D^\alpha y(t) = I^\alpha h(t)$$

utilisant Lemme 1.3.2 ($0 < \alpha < 1$; $n=1$) et la Définition 1.3.2

$$y(t) + c_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

pour $t = t_1^+$ on a

$$y(t_1^+) + c_0 = 0$$

ça veut dire

$$c_0 = -y(t_1^+)$$

En faisant correspondre $c_0 = -y(t_1^+)$ donc

$$y(t) = y(t_1^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

Comme $y(t_1^+) = \Delta y(t_k) + y(t_1^-)$. On a

$$y(t) = \Delta y(t_k) + y(t_1^-) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

ainsi la relation précédent prend la forme

$$y(t) = I_1(y(t_1^-)) + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \quad (2.8)$$

Si $t \in (t_2, t_3]$, on a

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t)$$

On appliquons l'intégrale de Riemann-Liouville on trouve :

$$I^\alpha {}^c D^\alpha y(t) = I^\alpha h(t)$$

Appliquons Lemme 1.3.2 ($0 < \alpha < 1$; $n=1$) et la Définition 1.3.2

$$y(t) + c_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

pour $t = t_2^+$ alors

$$y(t_2^+) + c_0 = 0$$

ça veut dire

$$c_0 = -y(t_2^+)$$

En faisant correspondre $c_0 = -y(t_2^+)$ donc

$$y(t) = y(t_2^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

Comme $y(t_2^+) = \Delta y(t_2) + y(t_2^-)$ on a :

$$y(t) = \Delta y(t_2) + y(t_2^-) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

On pose $t = t_2^-$ dans l'équation (2.8) on trouve :

$$y(t_2^-) = I_1(y(t_1^-)) + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

Enfin

$$y(t) = I_2(y(t_2^-)) + I_1(y(t_1^-)) + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

si $t \in (t_k, t_{k+1}]$ on utilisant à nouveau Lemme 1.3.2 avec les mêmes étapes précédent nous obtenons donc (2.5)

Inversement,

Si $t \in [t_0, t_1]$, on a $y(0) = y_0$

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

l'applique du la dérivation de Caputo donne :

$${}^c D^\alpha y(t) = {}^c D^\alpha (y_0 + I^\alpha h(t))$$

D'après la proposition 1.3.1 ($0 < \alpha < 1$; $n=1$)

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t)$$

si $t \in [t_k, t_{k+1})$ $k = 1, \dots, m$. et quelle qu la dérivation de Caputo de constant est nulle.

Notons que : y_0 , $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} h(s) ds$ et $\sum_{i=1}^k I_i(y(t_i^-))$ sont constants.

On applique La dérivation de Caputo

$${}^c D^\alpha y(t) = {}^c D^\alpha \left(y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \sum_{i=1}^k I_i(y(t_i^-)) \right)$$

alors

$${}^c D^\alpha y(t) = {}^c D^\alpha (I^\alpha h(t))$$

puis

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t)$$

On peut vérifiant facilement que la condition $\Delta y(t_k) = I_k(y(t_k^-))$ de problème (2.5) est vérifié.

2.2.3 Les résultats de l'existence

Le théorème suivant est le résultat de l'existence et l'unicité

Théorème 2.2.1

On suppose que :

[H1] Il existe une constante $l > 0$ tel que $|f(t, u) - f(t, \bar{u})| \leq l |u - \bar{u}|$ pour chaque $t \in J$ et chaque $u, \bar{u} \in \mathbb{R}$.

[H2] Il existe une constante $l^* > 0$ tel que $|I_k(u) - I_k(\bar{u})| \leq l^* |u - \bar{u}|$ pour chaque $u, \bar{u} \in \mathbb{R}$ et $k = 1, 2, \dots, m$.

si

$$\left[\frac{T^\alpha l(m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + ml^* \right] < 1 \quad (2.9)$$

alors (2.5) admet une solution unique sur J .

preuve

Transformons le problème (2.5) en un problème de point fixe.

On considère l'opérateur $F : PC(J, \mathbb{R}) \rightarrow PC(J, \mathbb{R})$ défini par

$$\begin{aligned} F(y)(t) = & y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k^-)) \end{aligned}$$

Clairement de lemme 2.6, les points fixes de l'opérateur F sont solution du problème (2.5).

Nous utilisons le principe de contraction de Banach pour prouver que l'opérateur F admet un point fixe.

Nous montrons que l'opérateur F est une contraction.

Soit $x, y \in PC(J, \mathbb{R})$. pour chaque $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| = & |y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\ & + \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k^-)) - y_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ & - \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k^-))| \\ \leq & |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds| \\ & + |\int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds| + |\sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k^-)) \\ & - \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k^-))| \\ \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds + \sum_{0 < t_k < t} |I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))| \end{aligned}$$

En utilisant $[H_1]$ et $[H_2]$ on trouve

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |x(s) - y(s)| ds \\
&\quad + \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} |x(s) - y(s)| ds + \sum_{0 < t_k < t} l^* |x(t_k^-) - y(t_k^-)| \\
&\leq \|x - y\|_{\infty} \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + \|x - y\|_{\infty} \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} ds + \|x - y\|_{\infty} \sum_{0 < t_k < t} l^* \\
&\leq \|x - y\|_{\infty} \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^m \frac{T^{\alpha}}{\alpha} + \|x - y\|_{\infty} \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{T^{\alpha}}{\alpha} + \|x - y\|_{\infty} \sum_{0 < t_k < t} l^*
\end{aligned}$$

puisque $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ alors

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{lmT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \|x - y\|_{\infty} + \frac{T^{\alpha}l}{\Gamma(\alpha + 1)} \|x - y\|_{\infty} + ml^* \|x - y\|_{\infty} \\
&\leq \left[\frac{T^{\alpha}l(m + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} + ml^* \right] \|x - y\|_{\infty}
\end{aligned}$$

D'après (2.9), F est une contraction.

En conséquence du théorème du point fixe de Banach, nous en concluons que F admet un point fixe unique qui est une solution du problème (2.5).

Le théorème suivant est le résultat de l'existence

Théorème 2.2.2

On suppose que :

[H3] La fonction $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

[H4] Il existe une constante $M > 0$ tel que $|f(t, u)| \leq M$ pour chaque $t \in J$ $u \in \mathbb{R}$.

[H5] La fonction $I_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et il existe une constante $M^ > 0$ tel que $|I_k(u)| \leq M^*$ pour chaque $u \in \mathbb{R}$ et $k = 1, 2, \dots, m$.*

alors (2.5) admet au moins une solution sur J .

Preuve :

On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour prouver que F admet un point fixe. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

étape 1 : (F est continu)

Soit y_n une suite telle que $y_n \rightarrow y$ dans $PC(J, \mathbb{R})$. pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &= |y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y_n(s)) ds + \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, y_n(s)) ds \\
&\quad + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y_n(t_k^-)) - y_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&\quad - \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k^-))| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds + \sum_{0 < t_k < t} |I_k(y_n(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))|
\end{aligned}$$

Puisque f et $I_k(k = 1, \dots, m)$ sont des fonctions continues, en faisant $n \rightarrow \infty$ on trouve

$$\|F(y_n) - F(y)\|_{PC} \rightarrow 0$$

étape 2 : (L'image d'ensemble borné du $PC(J, \mathbb{R})$ par F est bornés)

Soit $B_{\eta^*} = \{y \in PC(J, \mathbb{R}) : \|y\| \leq \eta^*\}$ un ensemble borné de PC. On va montre que existe une constante positive l tel que $\|F(y)\|_{PC} \leq l; \forall y \in B_{\eta^*}$

Soit $y \in B_{\eta^*}$, $t \in J$

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &= |y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&\quad + \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k^-))| \\
&\leq |y_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \sum_{0 < t_k < t} |I_k(y(t_k^-))| \\
&\leq |y_0| + \frac{mMT^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{MT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + mM^*
\end{aligned}$$

le résultat

$$|F(y)(t)| \leq |y_0| + \frac{MT^\alpha(m+1)}{\Gamma(\alpha + 1)} + mM^* := l$$

étape 3 : (L'image d'ensemble borné de $PC(J, \mathbb{R})$ par F est un ensembles quasi-équicontinus.)

Soit $\tau_1, \tau_2 \in J, \tau_1 < \tau_2, B_{\eta^*}$ est un ensemble borné de $PC(J, \mathbb{R})$. Comme dans étape 2, et soit $y \in B_{\eta^*}$.

$$\begin{aligned}
|F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| &= |y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < \tau_2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{\tau_2} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&\quad + \sum_{0 < t_k < \tau_2} I_k(y(t_k^-)) - y_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < \tau_1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{\tau_1} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \sum_{0 < t_k < \tau_1} I_k(y(t_k^-)) | \\
&= | \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{\tau_2} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < \tau_2} I_k(y(t_k^-)) \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{\tau_1} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \sum_{0 < t_k < \tau_1} I_k(y(t_k^-)) | \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} |(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}| |f(s, y(s))| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |(\tau_2 - s)^{\alpha-1}| |f(s, y(s))| ds + \sum_{0 < t_k < \tau_2 - \tau_1} |I_k(y(t_k^-))| \\
&= | \frac{M}{\alpha \Gamma(\alpha)} ((\tau_2 - \tau_1)^\alpha - \tau_2^\alpha - (\tau_1 - \tau_1)^\alpha - \tau_1^\alpha) \\
&\quad + \frac{M}{\alpha \Gamma(\alpha)} (\tau_2 - \tau_1)^\alpha ds + \sum_{0 < t_k < \tau_2 - \tau_1} |I_k(y(t_k^-))| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)} [2(\tau_2 - \tau_1)^\alpha + \tau_2^\alpha - \tau_1^\alpha] + \sum_{0 < t_k < \tau_2 - \tau_1} |I_k(y(t_k^-))|
\end{aligned}$$

Comme $\tau_2 \rightarrow \tau_1$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Alors l'image d'ensemble borné de $PC(J, \mathbb{R})$ par F est un ensemble quasi-équicontinu.

étape 4 :

Reste maintenant à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{y \in PC(J, \mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ tel que } 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $y \in \mathcal{E}$, et $y = \lambda F(y)$ tel que $0 < \lambda < 1$. pour tout $t \in J$

$$y(t) = \lambda F(y)$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \lambda y_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0 < t_k < t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \lambda \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k^-))
\end{aligned}$$

Après l'étape 2

$$\begin{aligned} |(y)(t)| &\leq \lambda \left(|y_0| + \frac{MT^\alpha(m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + mM^* \right) \\ &\leq |y_0| + \frac{MT^\alpha(m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + mM^* \end{aligned}$$

$$\| (y)(t) \|_\infty \leq |y_0| + \frac{MT^\alpha(m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + mM^* = R$$

Cela montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné.

D'après l'étapes 2,3 et le théorème 2.1.2 on conclut que l'image d'un borné par l'opérateur F est relativement compact, alors F est compact, de plus d'après l'étape 1 F est complètement continu. Plus l'étape 4 montre que tout les conditions du théorème du point fixe de Schaefer vérifié par suit l'opérateur admet au moins un point fixe qui est que un solution du problème (2.5)

2.3 Équations différentielles fonctionnelle fractionnaires impulsive avec retard

2.3.1 Position du problème

Nous considérons dans cet section le problème de valeur initiale (PVI), pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha y(t) = f(t, y_t) & t \in J = [0, T], t \neq t_k \\ \Delta y(t_k) = I_k(y(t_k^-)) \\ y|_{[-\tau, 0]} = \varphi \end{cases} \quad (2.10)$$

Tel que ${}^c D_t^\alpha$ est le dérivé fractionnaire de Caputo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$, $f : J \times PC^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lebesgue mesurable pour tout $t \in J$ et $f(t, \phi)$ est continu pour tout $\phi \in PC^1$, $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont continu pour $k = 1, \dots, m$ tel que $PC^1 = PC^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ dénote l'espace des fonctions dérivées continues gauche par morceaux $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\|\varphi\|_1 = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(s)\|$, ici τ est une constante positive, $y_t \in PC^1$ est Défini par

$y_t(s) = y(t+s)$ pour $-\tau \leq s \leq 0$. $y(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0} y(t_k - h)$ représentent les limites à droite et à gauche de $y(t)$ à $t = t_k$

$$PC^1(\rho) = \{\varphi \in PC^1 : \|\varphi\|_{PC^1} \leq \rho\} \text{ tel que } \rho = \max\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$$

2.3.2 L'équation intégrale équivalente

Proposition 2.3.1 [15]

Soit $0 < \alpha < 1$ et $f : J \times PC^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonction continu, le PVI

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha y(t) = f(t, y_t) & t \in J = [0, T] \\ y|_{[-\tau, 0]} = \varphi \end{cases}$$

est équivalent à l'intégrale fractionnaire Volterra suivante

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-\tau, 0] \\ \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.11)$$

Autrement dit, chaque solution de (2.10) est également une solution de (2.11), et l'inverse est vrai

Proposition 2.3.2 [3] (P 342)

Soit $0 \leq \alpha \leq 1$ et $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continu. Une fonction $y \in C(J, \mathbb{R})$ est une solution de l'intégrale fractionnaire équation

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\hat{a}} (\hat{a} - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

si et seulement si y est une solution du problème de Cauchy fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha y(t) = h(t), & t \in J \\ y(\hat{a}) = y_0, & \hat{a} \in (0, T) \end{cases}$$

Lemme 2.3.1

Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $f : J \times PC^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lebesgue mesurable pour tout $t \in J$ et $f(t, \phi)$ est continu pour tout $\phi \in PC^1$. Une fonction $y \in PC^1([-\tau, T], \mathbb{R}^n)$ est une solution du PVI (2.10) si et seulement si $y \in PC^1([-\tau, T], \mathbb{R}^n)$ est une solution de l'équation intégrale fractionnaire suivante :

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{pour } t \in [-\tau, 0] \\ \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & \text{pour } t \in [0, t_1] \\ \varphi(0) + I_1(y(t_1^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & \text{pour } t \in (t_1, t_2] \\ \vdots \\ \varphi(0) + \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & \text{pour } t \in (t_m, T] \end{cases} \quad (2.12)$$

preuve

On va prouver le résultat en utilisant la même marche dans la part précédente ou en utilisant les propositions 2.3.1 2.3.2

ce si en utilisant les propositions 2.3.1, 2.3.2

Supposons que y satisfait le problème impulsif (2.10)

Si $t \in [-\tau, 0]$ est clair que

$$y(t) = \varphi(t)$$

Si $t \in [0, t_1]$ puis de Proposition (2.3.1)

$$y(t) = \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds$$

donc

$$y(t_1^-) = \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds$$

Si $t \in (t_1, t_2]$

${}^c D_t^\alpha y(t) = f(t, y_t)$ et $\Delta y(t_k) = I_k(y(t_k^-))$

En utilisant la Proposition (2.3.2) nous obtenons

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_1^+) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \\ &= y(t_1^-) + I_1(x(t_1^-)) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds + I_1(x(t_1^-)) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \\ &= \varphi(0) + I_1(x(t_1^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \end{aligned}$$

Si $t \in (t_2, t_3]$

En utilisant la Proposition (2.3.2) nous obtenons

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_2^+) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \\ &= y(t_2^-) + I_2(x(t_2^-)) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \\ &= \varphi(0) + I_1(x(t_1^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds + I_2(x(t_2^-)) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \\ &= \varphi(0) + I_1(x(t_1^-)) + I_2(x(t_2^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \end{aligned}$$

Si $t \in (t_m, T]$

En utilisant la Proposition 2.3.2 nous obtenons

$$y(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^m I_k(x(t_k^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds$$

Inversement

pouvons le prouver de la même manière que dans la section précédente.

2.3.3 Le résultat de l'existence

Définissons l'opérateur $A : PC^1([-\tau, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow PC^1([-\tau, T], \mathbb{R}^n)$ comme suit :

$$(Ay)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{pour } t \in [-\tau, 0] \\ \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & \text{pour } t \in [0, t_1] \\ \varphi(0) + I_1(y(t_1^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & \text{pour } t \in (t_1, t_2] \\ \vdots \\ \varphi(0) + \sum_{k=0}^m I_k(y(t_k^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & \text{pour } t \in (t_m, T] \end{cases} \quad (2.13)$$

Avant de fixer et de prouver le résultat, nous introduisons les hypothèses suivantes :

[H6] Il existe une constante $\beta \in (0, \alpha)$ et une fonction réelle $m(t) \in L^{\frac{1}{\beta}}(J)$ tel que $\|f(t, \phi)\| \leq m(t)$, pour presque tous $t \in J$ et tous $\phi \in PC^1$.

[H7] Il existe une constante $\gamma \in (0, \alpha)$ et une fonction réelle $\mu(t) \in L^{\frac{1}{\gamma}}(J)$ tel que $\|f(t, \phi) - f(t, \Psi)\| \leq \mu(t) \|\phi - \Psi\|_1$, pour presque tous $t \in J$ et tous $\phi, \Psi \in PC^1$.

[H8] $I_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ transfère l'ensemble borné à ensemble borné. Il existe une constante $\lambda^* > 0$ telle que $\|I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))\| \leq \lambda^* \|x - y\|_\infty$ pour chaque $x, y \in PC^1([-\tau, T])(\rho)$ et $k = 1, 2, \dots, m$.

Théorème 2.3.1

Supposons que les hypothèses [H6]-[H8] sont vérifiées. Alors l'PVI (2.10) admet au moins une solution sur J , à condition que

$$\frac{\|\varphi(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)^{1-\beta} T^{\alpha-\beta} M + mM^*}{\rho} \leq 1 \quad (2.14)$$

tel que $M = \left(\int_0^T (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds\right)^\beta$, $M^* = \max \{\|I_k(y(t_k^-))\| : \|x\|_\infty \leq \rho\}$, $k = 1, \dots, m$

Preuve

D'après la définition de $PC^1([-\tau, T])(\rho)$, il est facile de savoir que $PC^1([-\tau, T])(\rho)$ est un sous-ensemble fermé, borné et convexe de $PC^1([-\tau, T], \mathbb{R}^n)$.

Utiliserons le théorème du point fixe de Schauder pour prouver que A défini par (3.2) admet un point fixe. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1 :

On montre que l'image de $PC^1([-\tau, T])(\rho)$ par A est $PC^1([-\tau, T])(\rho)$. Pour le prouver, utiliserons l'inégalité de Hölder.

On a $m(t) \in L^{\frac{1}{\beta}}(J)$ et $\|f(t, \phi)\| \leq m(t)$,

Soit θ est conjugué β , alors $\theta = \frac{1}{1-\beta}$

On vérifié facilement que $(t-s)^{\alpha-1} \in L^{\frac{1}{1-\beta}}$

Sous l'inégalité de Hölder et la condition [H6], on obtient que $(t-s)^{\alpha-1}f(s, y_s)$ est Lebesgue intégrable par rapport à $s \in [0, t]$, et

$$\int_0^t \|(t-s)^{\alpha-1}f(s, y_s)\| ds \leq \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_0^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \quad (2.15)$$

Pour $t \in [-\tau, 0]$, on a

$$\|(Ax)(t)\| = \|\varphi(t)\| \leq \|\varphi\|_{PC^1} \leq \rho_0$$

En utilisant l'inégalité (3.3) et l'inégalité de Hölder (2.15) pour $t \in [0, t_1]$. on a

$$\begin{aligned} \|(Ay)(t)\| &= \|\varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds\| \\ &\leq \|\varphi(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \right\| \\ &\leq \|\varphi(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_0^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\ &\leq \|\varphi(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} t^{\alpha-\beta} \left(\int_0^T (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\ &\leq \|\varphi(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} t^{\alpha-\beta} \left(\int_0^T (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\ &\leq \|\varphi(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} t_1^{\alpha-\beta} M \\ &\leq \rho_1 \end{aligned}$$

De même, pour $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, \dots, m$. on a

$$\begin{aligned} \|(Ay)(t)\| &= \|\varphi(0) + \sum_{i=1}^k I_i(y(t_i^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds\| \\ &\leq \|\varphi(0)\| + \left\| \sum_{i=1}^k I_i(x(t_i^-)) \right\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} m(s) ds \\ &\leq \|\varphi(0)\| + mM^* + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} T^{\alpha-\beta} M \\ &\leq \rho_k \end{aligned}$$

De ce qui précède on a $\|Ay\|_{\infty} \leq \rho$ tel que $\rho = \max\{\rho_0, \dots, \rho_m\}$

Donc $A : PC^1([\tau, T])(\rho) \rightarrow PC^1([\tau, T])(\rho)$.

Étape 2 :

A est continu.

Soit y^l une suite telle que $y^l \rightarrow y$ sur $PC^1([-\tau, T])(\rho)$. Ceci, associé à la continuité de $f(t, \phi)$ par rapport à ϕ et $I_k(\varphi)$ par rapport à φ , implique que $f(t, y_t^l) \rightarrow f(t, y_t)$, $t \in J$ et $I_k(y^l) \rightarrow I_k(y)$ sur $PC^1([-\tau, T])(\rho)$ quand $l \rightarrow \infty$, $k = 1, 2, \dots, m$.

pour $t \in [-\tau, 0]$,

$$\| (Ay^l)(t) - (Ay)(t) \| = \| \varphi(t) - \varphi(t) \| \equiv 0,$$

Pour $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned} \| (Ay^l)(t) - (Ay)(t) \| &= \| \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s^l) ds - \varphi(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, y_s^l) - f(s, y_s)] ds \| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s \in J} \| f(s, y_s^l) - f(s, y_s) \| ds \| \\ &\leq \frac{t^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \sup_{s \in J} \| f(s, y_s^l) - f(s, y_s) \| \\ &\leq \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{s \in J} \| f(s, y_s^l) - f(s, y_s) \| \end{aligned}$$

Puisque, quand $l \rightarrow \infty$, $f(t, y_t^l)$ converge vers $f(t, y_t)$, $t \in J$ nous trouvons :

$$\| Ay^l - Ay \|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } l \rightarrow \infty.$$

De même, pour $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, \dots, m$. on a

$$\begin{aligned} \| (Ay^l)(t) - (Ay)(t) \| &= \| \varphi(0) + \sum_{i=1}^k I_i(y^l(t_i^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s^l) ds \\ &\quad - \varphi(0) - \sum_{i=1}^k I_i(y(t_i^-)) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \| \\ &\leq \| \sum_{i=1}^k I_i(y^l(t_i^-)) - \sum_{i=1}^k I_i(y(t_i^-)) \| \\ &\quad + \| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s^l) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \| I_i(y^l(t_i^-)) - I_i(y(t_i^-)) \| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, y_s^l) - f(s, y_s)] ds \| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\| (Ay^l)(t) - (Ay)(t) \| &\leq \sum_{i=1}^k \| I_i (y^l (t_i^-)) - I_k (y (t_i^-)) \| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s \in J} \| f(s, y_s^l) - f(s, y_s) \| ds \| \\
&\leq \sum_{i=1}^k \| I_i (y^l (t_i^-)) - I_k (y (t_i^-)) \| + \frac{t^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \sup_{s \in J} \| f(s, y_s^l) - f(s, y_s) \| \\
&\leq \sum_{i=1}^k \| I_i (y^l (t_i^-)) - I_k (y (t_i^-)) \| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{s \in J} \| f(s, y_s^l) - f(s, y_s) \|
\end{aligned}$$

Puisque, quand $l \rightarrow \infty$, $f(t, y_t^l)$ est converge vers $f(t, y_t)$, $t \in J$ et $I_k(y^l)$ est converge vers $I_k(y)$, $k = 1, \dots, m$ nous trouvons :

$$\| Ay^l - Ay \|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } l \rightarrow \infty.$$

il s'ensuit que A est continu.

Étape 3 :

On montrer que l'image d'ensemble borné par A est un ensembles quasi-équicontinus de $\text{PC}^1([-\tau, T], \mathbb{R}^n)$. Soit $\text{PC}^1([-\tau, T])(\rho)$ être un ensemble borné comme à l'étape 1 et 2, et $y \in \text{PC}^1([-\tau, T])(\rho)$

Soit c'est évidemment que Ay est équicontinue sur l'intervalle de temps $[-\tau, 0]$. pour $s_1, s_2 \in [0, t_1]$, $s_1 < s_2$, En utilisant inégalité de Holder :

$$\begin{aligned}
\| (Ax)(s_2) - (Ay)(s_1) \| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \| \int_0^{s_1} [(s_2-s)^{\alpha-1} - (s_1-s)^{\alpha-1}] f(s, y_s) ds \\
&+ \int_{s_1}^{s_2} (s_2-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{s_1} \| [(s_2-s)^{\alpha-1} - (s_1-s)^{\alpha-1}] f(s, y_s) \| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s_1}^{s_2} \| (s_2-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) \| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{s_1} [(s_1-s)^{\alpha-1} - (s_2-s)^{\alpha-1}] m(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s_1}^{s_2} (s_2-s)^{\alpha-1} m(s) ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^{s_1} [(s_1-s)^{\alpha-1} - (s_2-s)^{\alpha-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right\}^{1-\beta} \left[\int_0^{s_1} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right]^\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \| (Ax)(s_2) - (Ay)(s_1) \| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_{s_1}^{s_2} [(s_2 - s)^{\alpha-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right\}^{1-\beta} \left[\int_{s_1}^{s_2} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right]^{\beta} \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^{s_1} [(s_1 - s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}} - (s_2 - s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}}] ds \right\}^{1-\beta} \left[\int_0^T (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right]^{\beta} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_{s_1}^{s_2} [(s_2 - s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}}] ds \right\}^{1-\beta} \left[\int_0^T (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right]^{\beta} \\
& \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} \left[s_1^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}} - (s_2 - s_1)^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}} - s_2^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}} \right]^{1-\beta} \\
& + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} \left[(s_2 - s_1)^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}} \right]^{1-\beta} \\
& \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} (s_2 - s_1)^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

Comme $s_2 \rightarrow s_1$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Alors Ay est équicontinu sur l'intervalle $[0, t_1]$ En général, pour l'intervalle de temps $(t_k, t_{k+1}]$. Nous obtenons également l'inégalité suivante

$$\| (Ay)(s_2) - (Ay)(s_1) \| \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} (s_2 - s_1)^{\alpha-\beta} \rightarrow 0, \quad \text{comme } s_2 \rightarrow s_1$$

D'un autre côté on a de étape 1 $A(PC^1([-\tau, T]))(\rho) \subset PC^1([-\tau, T])(\rho)$ est uniformément borné, et de étape 3 équicontinue donc en utilisant de théorème d'Ascoli Arzela, on trouve que $A(PC^1([-\tau, T]))(\rho)$ est un sous-ensemble relativement compact de $PC^1([-\tau, T], \mathbb{R}^n)$. et grâce à leur continuité de (étape 2) donc il est complètement continu.

De étapes 1 à 3 et par l'utilisant de théorème du point fixe de Schauder, on constate que A peut avoir un point fixe dans $PC^1([-\tau, T])(\rho)$ qu'elle est une solution de l'PVI (2.10) en J .

Chapitre 3

Points fixes d'une classe d'opérateurs définis dans l'espace des fonctions continus par morceaux et application

dans ce chapitre on va reformuler le théorème du point fixe dans l'espace des fonction continu par morceaux et on appliquant la resulta de ce théoème sur un type déquation differentielles fractionnaire impulsives avec un retard et finalement on donnant un exemple de ce type d'equation.

3.1 Formulation du théorème

3.1.1 Quelques notation et lemme préliminaire

- . Soit I un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, I_1 et I_2 deux intervalles disjoints tel que : $I_1 \cup I_2 = I$, $[t_k, t_{k+1}] \subset I_2$ tel que $k = 1, 2, \dots, m$. et $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = T \subset I_2$.
- . Soit X un espace de Banach muni de la norme $|\cdot|$

- . $PC(I, X)$ est l'espace des fonctions continues par morceaux muni de la norme :

$$\|x\| = \sup \{|x(t)|, t \in I\}$$

- . Pour $\varphi \in PC(I, X)$, Soit D un sous ensemble de $PC(I, X)$ définit par :

$$D = \{x \in PC(I, X) / x(t) = \varphi(t), t \in I_1\} \quad (3.1)$$

- . $L : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau : I_2 \rightarrow I$ deux fonction.
- . $G : I_2 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable par rapport à la deuxième variable.
- . α_k ($k = 1, 2, \dots, m$) et $M > 0$ constantes.

Lemme

Le sous ensemble D défini par (3.1) est fermé

Preuve :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite converge de D vers x tel que $x \in \bar{D}$

$$\begin{aligned} \sup |x(t) - \varphi(t)|, \quad t \in I_1 &= \|x(t) - \varphi(t)\|_{PC} \\ &\leq \|x(t) - x_n(t)\|_{PC} + \|x_n(t) - \varphi(t)\|_{PC} \end{aligned}$$

et comme $x_n(t) \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}$ donc $x_n(t) - \varphi(t) = 0 \quad \forall t \in I_1$

donc $\|x_n(t) - \varphi(t)\|_{PC} = 0$

et comme $x_n(t) \rightarrow x(t)$ donc $\|x(t) - x_n(t)\|_{PC} \rightarrow 0$

alors $\sup \{|x(t) - \varphi(t)|, \quad t \in I_1\} = 0$

donc $x(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in I_1$

alors D est fermé

3.1.2 Enoncé et preuve du théorème

Théorème 3.1.1

Considère $F : D \rightarrow D$ un opérateur tel que D est sous ensemble fermé de $PC(I, X)$, avec la notation défini dans la partie précédent.

On suppose que :

(C_1) . $\forall x, y \in D$ et $t \in I_2$

$$|Fx(t) - Fy(t)| \leq \sum_{k=1}^m \alpha_k |x(t_k^-) - y(t_k^-)| + M \int_{I_2} G(t, s) L(s) |x(\tau(s)) - y(\tau(s))| ds$$

(C_2) . $\forall t \in I_2, \tau(t) \leq t$

(C_3) . Il existe deux exposant conjugués p, q (ie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) , $L \in L^p(I_2)$ et pour tout $t \in I_2$, $G(t, \cdot) \in L^q(I_2)$ et $\|G(t, \cdot)\|_{L^q(I_2)}$ est borné pour tout $t \in I_2$.

Si :

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k + M \sup_{t \in I_2} \|G(t, \cdot)\|_{L^q(I_2)} \|L\|_{L^p(I_2)} < 1$$

Alors F admet un point fixe unique dans D .

Preuve

On va montrer que l'opérateur F est contractant sous les hypothèse (C_1) - (C_3)

• pour tout $x, y \in D$ et $t \in I_1$:

$$|Fx(t) - Fy(t)| = |\varphi(t) - \varphi(t)| = 0$$

• pour tout $x, y \in D$ et $t \in I_2$:

$$\begin{aligned} |Fx(t) - Fy(t)| &\leq \sum_{k=1}^m \alpha_k |x(t_k^-) - y(t_k^-)| + M \int_{I_2} G(t, s) L(s) |x(\tau(s)) - y(\tau(s))| ds \\ &\leq \sum_{k=1}^m \alpha_k \|x - y\|_{PC} + M \int_{I_2} G(t, s) L(s) \|x - y\|_{PC} ds \end{aligned}$$

d'après le condition (C_3) et l'inégalité de Holder est appliquant à G et L :

$$\int_{I_2} G(t, s) L(s) ds \leq \|G(t, \cdot)\|_{L^q(I_2)} \|L\|_{L^p(I_2)}$$

donc, on obtient :

$$\begin{aligned} |Fx(t) - Fy(t)| &\leq \sum_{k=1}^m \alpha_k \|x - y\|_{PC} + M \|G(t, \cdot)\|_{L^q(I_2)} \|L\|_{L^p(I_2)} \|x - y\|_{PC} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k + M \|G(t, \cdot)\|_{L^q(I_2)} \|L\|_{L^p(I_2)} \right) \|x - y\|_{PC} \\ \|Fx(t) - Fy(t)\|_{PC} &\leq \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k + M \sup_{t \in I_2} \|G(t, \cdot)\|_{L^q(I_2)} \|L\|_{L^p(I_2)} \right) \|x - y\|_{PC} \end{aligned}$$

puisque :

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k + M \sup_{t \in I_2} \|G(t, \cdot)\|_{L^q(I_2)} \|L\|_{L^p(I_2)} < 1$$

alors l'opérateur F contraction ,Donc F admet un point fixe unique .

3.2 Application à un problème d'ÉDFI avec retard

3.2.1 Position du problème et l'équation intégrale équivalente

Nous considérons le problème de la valeur initiale introduite trouvée dans le chapitre 2 précé-

dent (PVI) pour les équations différentielles fractionnaires avec retard :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y_t) & t \in I = [0, T], t \neq t_k \\ \Delta y(t_k) = I_k(y(t_k^-)), & k = 1, 2, \dots, m \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [-r, 0] \end{cases} \quad (P)$$

Tel que $f : J \times \mathcal{C} \rightarrow X$, $\mathcal{C} = C([-r, 0], X)$, $I_k \in C(X, X)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) et X est espace de Banach avec norm $|\cdot|$ pour tout $y : [-r, T] \rightarrow X$ et $t \in I$, $y_t \in \mathcal{C}$ et définit par $y_t(s) = y(t+s)$ $s \in [-r, 0]$

Espace des solutions d'équations (P) est l'espace des fonctions continues par morceaux

$PC(I, X) = \{y : [0, T] \rightarrow X \mid y \in C([t_k, t_{k+1}], X), (k = 0, 1, 2, \dots, m).$
 $\exists y(t_k^+), y(t_k^-)$ et satisfait $y(t_k) = y(t_k^-)\}$

Lemme 3.2.1 *Une fonction $y \in PC([-r, T], X)$ est une solution du PVI (P) si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire suivante :*

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{pour } t \in [-r, 0] \\ \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & \text{pour } t \in [0, t_1] \\ \varphi(0) + I_1(y(t_1^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & \text{pour } t \in (t_1, t_2] \\ \vdots \\ \varphi(0) + \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & \text{pour } t \in (t_m, T] \end{cases} \quad (3.2)$$

La preuve de lemme (3.2.1) est dans le chapitre 2 précédent.

3.2.2 Le résultat d'existence et d'unicité

En se basant sur le théorème (3.1.1), on va prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (P).

Théorème 3.2.1

On suppose que :

(HY1)- il existe une fonction $K : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall (t, \varphi), (t, \phi) \in [0, T] \times \mathcal{C} \quad |f(t, \varphi) - f(t, \phi)| \leq K(t)|\varphi - \phi|$$

(HY2)- $I_k \in C(X, X)$, il existe des constantes l_k ($k = 1, \dots, m$) tel que :

$$\forall x, y \in \mathcal{C}, \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad |I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))| \leq l_k |x(t_k^-) - y(t_k^-)|$$

(HY3)- Pour $p \in [0, \alpha]$

$$K \in L^P([0, T])$$

Si

$$\left(\sum_{k=1}^m l_k + \frac{c \|K\|_p T^{\alpha - \frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)} \right) < 1 \text{ tel que } c = \left(\frac{1}{(\alpha - 1)q + 1} \right)^{1 - \frac{1}{p}} \quad (3.3)$$

Alors le problème (P) admet une solution unique.

preuve :

On dit que y est solution de (P) si et seulement si est point fixe de l'opérateur F défini sur D par :

$$Fy(t) = \varphi_0 + \sum_{k=0}^n I_k(y(t_k^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds$$

tels que $I_1 =]-r, 0]$, $I_2 = [0, T]$, $I = [-r, T]$ et D est le sous ensemble de $PC(I, X)$ défini par (3.1), On va montrer que les conditions (C_1) - (C_3) .

D'après l'hypothèse $(HY_1), (HY_2)$ on a pour tout $x, y \in D$ et $t \in I_2$

$$\begin{aligned} |Fx(t) - Fy(t)| &= |\varphi_0 + \sum_{k=0}^m I_k(x(t_k^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_s) ds \\ &\quad - \varphi_0 - \sum_{k=0}^m I_k(y(t_k^-)) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds| \\ |Fx(t) - Fy(t)| &\leq \sum_{k=0}^m |I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x_s) - f(s, y_s)| ds \\ &\leq \sum_{k=0}^m l_k |x(t_k^-) - y(t_k^-)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} K(s) |x(s) - y(s)| ds \end{aligned}$$

Donc (C_1) est vérifié avec :

$$\sum_{k=0}^m l_k = \sum_{k=0}^m \alpha_k, \quad K(s) = L(s), \quad M = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad \tau(t) = t \text{ et}$$

$$G(t, s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} & 0 \leq s \leq t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

Il est clair que la première partie de la condition (C3) est vérifiée par l'hypothèse (HY3), et nous montrons que $G(t, \cdot) \in L^q(I_2)$

Si $s > t$:

$$G(t, s) = 0 \in L^q(I_2)$$

Si $0 < t < s$:

$$G(t, s) = (t - s)^{\alpha-1}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t (G(t, s))^q ds &= \int_0^t ((t - s)^{\alpha-1})^q ds \\ &= \int_0^t ((t - s)^{(\alpha-1)q}) ds \\ &= \left[\frac{(t - s)^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right]_0^t \\ &= \frac{-1}{(\alpha-1)q+1} (t)^{(\alpha-1)q+1} \\ &\leq \frac{-1}{(\alpha-1)q+1} (T)^{(\alpha-1)q+1} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

donc $G(t, \cdot) \in L^q(I_2)$, ça veut dire le condition (C2) est vérifié.

L'inégalité $\sum_{k=1}^m \alpha_k + M \sup_{t \in I_2} \|G(t, \cdot)\|_{L^q(I_2)} \|L\|_{L^p(I_2)} < 1$ est vérifié si

$$\sum_{k=1}^m l_k + \frac{c \|K\|_p T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)} < 1$$

d'après le Théorème (3.2.1) l'opérateur F admet un point fixe unique dans D qui est la solution du problème(P).

3.3 Exemple illiustratif

Considérons les équations différentielles fractionnelles avec retard impulsif de Caputo sui-

vantes :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = \frac{e^{-vt} x_t}{(1+e^t)(1+x_t)} & t \in I = [0, 1], t \neq t_1, v > 0 \\ \Delta x(t_k) = \frac{1}{2} \\ x|_{[-\tau, 0]} = \varphi(t), & t \in [-r, 0] \\ \varphi(0) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

Le problème (3.4) est identifié au problème(P)avec :

$$D = \{x \in PC([0, 1], \mathbb{R}) \mid x(t) = \varphi(t), t \in [-r, 0]\}$$

On a

$$f(t, \varphi) = \frac{e^{-vt}\varphi}{(1+e^t)(1+\varphi)}, \quad (t, \varphi) \in [0, 1] \times \mathcal{C}$$

tel que $\mathcal{C} = C([0, 1], \mathbb{R}_+)$

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}$ et $t \in [0, 1]$. ensuite nous avons

$$\begin{aligned} |f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| &= \left| \frac{e^{-vt}\varphi_1}{(1+e^t)(1+\varphi_1)} - \frac{e^{-vt}\varphi_2}{(1+e^t)(1+\varphi_2)} \right| \\ &= \frac{e^{-vt}}{1+e^t} \left| \frac{\varphi_1}{1+\varphi_1} - \frac{\varphi_2}{1+\varphi_2} \right| \\ &= \frac{e^{-vt} |\varphi_1 - \varphi_2|}{(1+e^t)(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)} \\ &\leq \frac{e^{-vt} |\varphi_1 - \varphi_2|}{(1+e^t)} \\ &\leq \frac{e^{-vt} |\varphi_1 - \varphi_2|}{2} \end{aligned}$$

donc $K(t) = \frac{e^{-vt}}{2},$

on va montrer maintenant que : $K \in L^p(I)$

$$\begin{aligned} \int_0^t (K(z))^p dz &= \int_0^t \left(\frac{e^{-vz}}{2} \right)^p dz \\ &= \left[\frac{-1}{2vp} e^{-vpz} \right]_0^t \\ &= \frac{-1}{2vp} e^{-vpt} + \frac{1}{2vp} \\ &\leq \frac{-1}{2vp} e^{-vpT} + \frac{1}{2vp} \\ &\leq +\infty \end{aligned}$$

alors $K \in L^p(I)$, puis les hypothèses (HY1) et (HY3) sont vérifiées.

D'autre part

$$I_k(x) = \frac{1}{2}$$

alors pour quelque soit l_k nombre positif le hypothèse (HY2) est vérifiée.

donc le problème (3.4) admet une solution unique sur l'ensemble D

Bibliographie

- [1] P Ravi . Agarwal, Donal O'Regan *Topological Degree Theory and Applications* Volume 10 Series in Mathematical Analysis and Applications , Taylor and Francis Group, LLC, 2006.
- [2] H.BASS, j.f.c.Kingman,f.Smithies,j.a.Toddc.t.c.Wall , *Fixed Point Theorems* . Cambridge University Press 1974 .
- [3] M, Benchohra, Boualm Attou Slimant *existence and uniqueness of solutions to Impulsive fractional functional differential equations*. Electronic Journal of Differential Equations, No. 10,2009.
- [4] M. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas *Impulsive Differential Equations and Inclusions*.Contemporary Mathematics and Its Applications, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.,2006.
- [5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle Théori et Application*. Masson, Paris 198
- [6] H. Brezis,R. G. Douglas, A. Jeffrey, *Impulsive differential equationLY : periodic solutions and applicator*. Drumi Bainov Academy of Medicine, Sofia and Pavel Simeonov Plovdiv University, First published 1993.
- [7] J.Charles, Mostafa Mbekhta, Hervé Queffélec *Analyse Fonctionnelle et Théorie des Opérateurs*. Dunod, Paris, 2010.
- [8] El Hage Hassan Nawfal, *Topologie général et espace normés*. Dunob,2011.
- [9] A. A. Kilbass, S. G. Samko, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives theory and applications*. Originally published in Russian by Nauka i Tekhnika, Minsk in 1987.
- [10] Antol Y. Kilbas,Hari M. Srivastava ,Juan J. Trujillo *Theory and application of fractional differntial equations*. North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006) Constantin Milici, Gheorghe Drgnescu, J. Tenreiro Machado , *Introduction to Fractional Differential Equations*.
- [11] V. lakshmikantham,*theory of fractional functional differential equations,nonlinear anal. tma 69(2008)3337-3343*. .
- [12] Tian Liang Guo,Wei Jiang *Impulsive fractional functional differential equations*. School of Mathematical Sciences, AnhuiUniversity,Hefei,Anhui230039,PRChina, 2012.
- [13] J.-M. Morel, Cachan, F. Takens, Groningen, B. Teissier, Paris *The Analysis of Fractional Differential Equations An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of*

Caputo Type. Springer Heidelberg Dordrecht, 2004.

- [14] Gani T.Stamov *Almost Periodic Solutions of Impulsive Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [15] Y.Zhou *Basic Theory of Fractional Differential Equations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2014.
- [16] C. Zuily *Éléments De Distribution Et D'équations Aux Dérivées Partielles Cours et problemes résolus*. Dunod, Paris, 2002.
- [17] Yong Zhou *Basic Theory of Fractional Differential Equations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2014.

Résumé

Dans ce travail, nous abordons la question d'existence des solutions pour les équations différentielles fractionnaires implusives (EDFI) du premier ordre. Dans une première partie, nous faisons une lecture détaillée de quelques résultats d'existence connus dans la littérature mathématiques pour les (EDFI), fondés sur différentes variantes de la théorie du point fixe.

Dans une deuxième partie, nous formulons un théorème du point fixe pour un type d'opérateurs agissant sur l'espace des fonctions continues par morceaux, appliqué à une classe d'(EDFI) avec retard.

Mots clés : calcul fractionnaire, condition implusive, théorème du point fixe, équation différentielle avec retard .

ملخص

في هذا العمل، نعالج مسألة وجود الحل للمعادلة تفاضلية كسرية من الدرجة الأولى .

في الجزء الأول، نلقي نظرة على بعض نتائج الوجود في الأدبيات الرياضية لمعادلات تفاضلية اندفاعية ذات رتب كسرية، استناداً إلى صيغ مختلفة لنظرية النقطة الثابتة

في الجزء الثاني، نقوم بصياغة نظرية نقطة ثابتة لنوع من المؤثرات المعرفة على فضاء الدوال المستمرة بتقطع، المطبقة على نوع من المعادلات التفاضلية الاندفاعية ذات رتب كسرية .

كلمات مفتاحية: حساب كسري، شروط اندفاعية، نظرية النقطة الثابتة، معادلة تفاضلية مع تأخير.

Abstract

In this work, we address the question of existence the solutions of the first order differential implusive differential equation (EDFI).

In the first part we take a close look at some results of existence known in the mathematical literature for (EDFI), based on different variants of the fixed point theory.

In a second part, we formulate a fixed point theorem for a type of operators which act on the space of piecewise continuous functions, applied to a class of (EDFI) with delay.

Key words : Fractional calculus, implusive condition, fixed point theorem, differential equation with delay .