N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR ELOUED

FACULTÉ DESSCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: :Modélisation mathématiques & simulation numérique

Thème

Rôle de série de Fourier dans le calcule des sommes des séries numériques

Présenté par: - AHTIRIB Khaoula
- BERDJOUH Sakina
- FETHIZA AMARA Meriem

DOUIB Bachir **Encadreur**
MENECEUR Bekkar **Examinateur**

Année universitaire: **2014 – 2015**

Remerciements

La louange est à Allah, qui nous a facilité l'accomplisseme de ce travail de recherche chose ne peut être qu'avec la volonté de Dieu -à lui la tout puissance et la Majesté- et que la louange initiale et finale appartieut à allah,Seigneur des mondes.

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur **"DOUIB Bachir",** à l'université d'**El-Oued,** a qui nous voudrons exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.

Nous présentons nos veridiques remerciments à tout personne, du proche ou du loin, qui nous a donné un coup de main, à fin de términer ce travail de recherche.

En fin, nous remercions vivement notres familles pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

"Que la Grace et la paix soient sur notre profet Mohammed ainsi que sur sa famille et ses compagnons".

Notations générales

$C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$:	l'ensemble des fonctions sont continues de $\mathbb{R}^N$ à $\mathbb{R}$.
$C^1(E, F)$:	l'ensemble des fonctions sont continues et la différentielle d'ordre 1 est continue de E à F.
R_{2l} :	l'ensemble des fonctions prériodique de période l.
$f'(x+0), f'(x-0)$:	les dérivées à droite et à gauche de f.
$f(x+0), f(x-0)$:	les limites à droite et à gauche de f .
$\tilde{f}$:	le prolongement de f.
$\Vert . \Vert$:	la norme.
$\vert . \vert$:	la valeur absolue.
E :	sous ensemble de $\mathbb{R}^N$.
$\sup\limits_{x \in \mathbb{k}} f(x)$:	la borne supérieur de fonction f sur l'ensemble $\mathbb{k}$.

Table des matières

Introduction générale

En1807, Fourier ebloni le monde en déclarant qu'une fonction peut être représentée comme combinaison linéaire en fonction de cosinus et sinus, et est donnée les formules pour calculer les coefficients de cette combiniason (coefficients Fourier) .

C'est ce qu'on appelle séries de Fourier

Le découvert de Fourier a fait un grand impact et il est le considére permet les grandes théories de l'analyse au $19^{émé}$ siécle, il est necessaire dans l'étude quelque des probèmes de physiques sur tout dans l'analyse . Comme la plus part des questions mathématiques élévation de confusion par l'etude séries de Fourier, plusieurs écrites étaient éditionnés autour l'éqation de déagremme une fonction la série de Fourier et la convergence de cette série .

L'analyse de Fourier s'interesse à étudier quelques outils mathématiques pour résoudre des problèmes aux autres domaines .

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à donner définitions et théorèmes principales sur les séries numériques et les séries des fonctions , où on va donner des définitions de convergence des séries (simple, uniforme et norme).

Le deuxiéme chapitre, est consacré à définir la série de Fourier , le plus part des chercheurs ont pour but de trouver les conditions suffisantes(théorème de Dirchlet), pour qu'une fonction f ait un développement en séries de Fourier convergente sur un intrvalle I (Égalite de Parseval).

Le troiséme chapitre contient des applications pratiques de la série de Fourier dans la calcule de somme de série fonctionnelle

Chapitre 1

Notions préliminaires

Nous rappelons ci-dessous quelques théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui sont fondamentaux pour l'etude des séries numériques et série des fonctions.

1.1 Séries numériques

1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires des séries

Soit (U_n) une suite de nombres complexes. Associons, à cette suite, la suite (S_n) définie par

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n \tag{1.1.1}$$

On appelle série de terme général U_n le couple $((U_n), (S_n))$ constitué des deux suites (U_n) et (S_n) .

La suite (S_n) est appelée suite des sommes partielles et le terme S_n, est la n-ième somme partielle de la série $((U_n), (S_n))$.

La série $((U_n), (S_n))$ est dite convergente si la suite (S_n) des sommes partielles est convergente. La limite $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ est alors appelée somme de la série $((U_n), (S_n))$ et est notée $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$, ou encore

$$S = U_0 + U_1 + ... + U_n + ... \tag{1.1.2}$$

La série est dite divergent si elle n'est pas convergente.[3]

Condition 1.1.1 ***(nécessaire de convergence)*** *:Si la série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ *est convergente, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0.$ [1]

Preuve. Puisque $\lim S_n = \lim S_{n-1} = S$,on a

$$\lim U_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \tag{1.1.3}$$

■

a) Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ est convergente alors $\forall k$: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} U_n$ est convergente;

b) Si $\exists k$: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} U_n$ est convergente alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ est convergente;

c) Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ est convergente alors $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=k}^{\infty} U_n = 0.$

Preuve. Pour $m > k$,on a

$$S_m = U_0 + ... + U_m = S_{k-1} + S_{k.m} \tag{1.1.4}$$

ou $S_{k.m} = U_k + ... + U_m$

Les assertions (a) et (b) résultent de (1.1.4) en faisant $m \longrightarrow \infty$. Ainsi les séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$, $\sum\limits_{n=k}^{\infty} U_n$ convergent simultanément quel que soit k , et l'on a pour les sommes

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = S_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} U_n. \tag{1.1.5}$$

L'assertion (c) en résulte en faisant $k \longrightarrow \infty$.

Ainsi la nature d'une série (convergence ou divergence) est celle de n'importe lequel de ses restes. ■

1.1.2 Séries absolument convergentes et semi convergentes

Une série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \mid U_n \mid$ est convergente.

Toute série absolument convergente est convergente.

Une série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ est dite semi convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.[2]

1.1.3 Séries à termes positifs

Condition de convergence

La condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série à termes positifs est donnée par:

Théorème 1.1.1 *Pour qu'une série à termes positifs soit convergente il faut, et il suffit, que la suite de ses somme partielles soit majorée.*[6]

Preuve. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ une série à termes positifs. Comme $U_n \geq 0$,la suite des sommes partielle $\{S_n\}$ est croissante. On sait, d'aprés l'étude des limites, que pour qu'une telle suite soit convergente il faut, et il suffit,qu'elle soit majorée. Le théorème est donc démontré. ■

Corollaire 1.1.1 *Pour qu'une série à termes positifs soit divergente il faut, et il suffit,que*

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (S_n) = +\infty. \tag{1.1.6}$$

On écrira

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n < +\infty \tag{1.1.7}$$

si la série est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n = +\infty \tag{1.1.8}$$

si la série est divergente.

1.1.4 Séries à termes de signes quelconques

Régle d'Abel

Théorème 1.1.2 *(régle d'Abel)*

Soit $\sum_{n\geqslant 0} U_n V_n$ séries numérique tell que:

(a) Lasuit (U_n) des nombres réelles monotone et tend vers à 0

(b) $\exists M > 0, \forall n : \left|\sum_{k=0}^{n} V_k\right| \leqslant M.$ [3]

1.2 Séries des fonctions

Définition 1.2.1 *Soit (U_n)une suite de fonction à valeurs complexes définies sur un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}$. Associons à cette suite,la suite de fonction (S_n) définie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k \tag{1.2.1}$$

On appelle série de fonctions (sur E) de terme général U_n le couple $((U_n), (S_n))$ constitué des deux suites (U_n) et (S_n) .

La fonction S_n est appelée $n-$iéme somme partielle de la série .

Comme pour les séries numérique,la série de fonctions $((U_n),\ (S_n))$ sera notée

$$\sum_n U_n, \text{ ou } \sum_{n=0}^{\infty} U_n, \text{ ou } u_0 + u_1 + ... + u_n + ... \tag{1.2.2}$$

On considére également les séries de la forme $\sum\limits_{n=k}^{\infty} U_n,\ k > 0$.[6]

Définition 1.2.2 *La série $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} U_k$ est appelée reste d'ordre n de la série $\sum\limits_{k} U_k$.*

Définition 1.2.3 *On dira que $\sum\limits_{n} U_n$ est convergente en $x_0 \in E$ si la série numérique $\sum\limits_{n} U_n(x)$ est convergente .*

Définition 1.2.4 *On dira que $\sum\limits_{n} U_n$ est convergente sur E $(resp.x \in A)$ .Dans ce cas ,on dit que $\sum\limits_{n} U_n$ est sempliment convergente sur E $(resp.sur\ A)$.*

On a donc les équivalences

$$\sum_n U_n \text{ converge en } x_0 \iff \sum_n U_n(x_0) \text{ converge } \iff (S_n(x_0)) \text{ converge} \tag{1.2.3}$$

$$\sum_n U_n \text{ converge sur } E \iff \forall x \in E,\ \sum_n U_n(x) \text{ converge } \iff (S_n) \text{ converge sur } E. \tag{1.2.4}$$

Ainsi, la convergence simple d'une série sur E équivaut à la convergence simple de la suite de ses sommes partielles (S_n) sur E .[6]

Définition 1.2.5 *On dit que* $\sum_n U_n$ *est absolument convergente sur* E *si la série* $\sum_n |U_n|$ *est convergente sur* E*.Il est immédait que toute série de fonctions absolument convergete .*

En reprenant le théorème sur le produit de deux séries numériques absolument convergentes,on déduit facilement le résultat suivant:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$, $\sum_{n=0} V_n$ deux séries de fonctions absolument convergentes sur E. Alors leur produit (de Cauchy)

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n \text{tel que:} W_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + ... + u_n v_0. \tag{1.2.5}$$

est encore une série absolument convergente sur E et l'on a pour les sommes

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n \right). \tag{1.2.6}$$

1.3 Convergence uniforme

Définition 1.3.1 *Soit* $\sum_n U_n, U_n : E \to \mathbb{C}$*,une série de fonction . On dit que cette série est uniformement convergente sur* E *si la suite* (S_n) *de ses sommes partielles est uniformément convergente sur* E *(vers la somme de la série bien entendu).*[1]

Théorème 1.3.1 *(Critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries) pour qu'une série* $\sum_n U_n, U_n : E \to \mathbb{C}$*,soit uniformément convergente sur* E *il faut,et il suffit ,que* [6]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \quad \forall n \qquad \forall p \geq 1 \left[n > N \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right\| < \varepsilon \right] \tag{1.3.1}$$

ou, ce qui revient au même ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \quad \forall n \qquad \forall p \geq 1 \left[n > N \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x) \right\| < \varepsilon \right] \tag{1.3.2}$$

où $$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x) \right\| = \sup \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x) \right|. \tag{1.3.3}$$

1.4 Convergence normale

Définition 1.4.1 *Soit* $\sum\limits_n U_n, U_n : E \to \mathbb{C}$,*une série de fonction . On dit que cette série est normalemement convergente sur* E *si la série numérique*

$$\sum_n \|U_n\|\,,\text{où } \|U_n\| = \sup_{x\in E} |U_n(x)|\,. \tag{1.4.1}$$

est convergente .[1]

Théorème 1.4.1 *Si la série* $\sum\limits_n U_n$ *est normalement convergente sur* E*, alors elle est uniformément convergente sur* E *.*

Preuve. On a

$$\forall n \quad \forall p \geq 1 : \|U_{n+1} + ... + U_{n+p}\| \leq \|U_{n+1}\| + ... + \|U_{n+p}\|\,. \tag{1.4.2}$$

d'ou la convergente uniforme de $\sum\limits_n U_n$ d'après le critère de Cauchy . ∎

Théorème 1.4.2 *Soit* $\sum\limits_n U_n, U_n : E \to \mathbb{C}$ *une série de fonction . S'il existe une série numérique à termes positifs convergente,* $\sum\limits_n C_n$,*telle que*

$$\forall n\ \forall x \in E : |U_n(x)| \leq C_n, \tag{1.4.3}$$

alors la série $\sum\limits_n U_n$ est normalement (donc uniformément)convergente sur E.

Théorème 1.4.3 *(régle d'Abel pour la convergence uniforme)*

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_n V_n$,une série de fonction tell que $(U_n), (V_n)$ deux suits fonction définie sur ensemble non vide E dans $\mathbb{R}$ vérifiant:

(a) (U_n) monotone $\forall x \in E$ et converge uniformement vers la fonction nulle.

(b) La suite de sommes partielles $(\sum\limits_{k=0}^{n} V_k)_n$ sont bornée.

Alors la série $\sum\limits_n U_n V_n$ est uniformément convergente sur$E$.[4]

1.5 Convergence uniforme et propriétés des sommes des séries de fonctions

Théorème 1.5.1 *Soit* $\sum_n U_n, U_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ *une série de fonctions uniformément convergente sur* $[a,b]$ *. Si toutes les fonctions* U_n *sont continues en* $x_0 \in [a,b]$*, la somme* S *de la série est continue en* x_0.

Théorème 1.5.2 *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} U_n, U_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ *une série de fonctions uniformément convergente sur* $[a,b]$ *. Si les fonctions* U_n *sont intégrables sur* $[a,b]$*, alors il en est de même de la somme* S *de la série et l'on a*

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b U_n(x)\, dx \right). \tag{1.5.1}$$

En outre ,la série $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x U_n(t)\, dt$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $\int_a^x S(t)\, dt$.[6]

Théorème 1.5.3 *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} U_n, U_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ *une série de fonctions dont les termes* U_n *sont continument dérivables sur* $[a,b]$*, c'est -à-dire* $U_n \in C^1[a,b]$ *. Si*

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ est convergente au moins en un point $x_0 \in [a,b]$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} U_n'$ est uniformément convergente sur $[a,b]$,

alors

- la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ est uniformément convergente sur $[a,b]$;
- sa somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$ est continument dérivable sur $[a,b]$ et l'on a

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(x). \tag{1.5.2}$$

Chapitre 2

Les séries de Fourier

Les travaux de J.B.J Fourier (1791-1867) sont montré que certaines fonctions périodiques peuvent être représentées comme la somme d'une série de fonction trigonométrique . A cet effet , nous devons étudier les propriétés d'une telle série .

2.1 Les séries trigonométriques

Définition 2.1.1 *On considére dans tout ce chapitre les séries trigonométriques de la forme*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{2.1.1}$$

ou $l > 0$ est une nombre réel fixé .

Si la série $\sum |a_n| + |b_n|$ converge, la série trigonométrique

absolument et uniformément, sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout x , on a l'inégalité

$$|a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x| \leqslant |a_n| + |b_n| .$$

On appelle série trigonométrique(réelle)une série de fonctions

$$\sum u_n(x) \text{ tel que : } u_n(x) = a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x \text{ , } x \in \mathbb{R}.$$

$\{a_n\}, \{b_n\}$et$\{w_n\}$étant des suites de nombres réels.

On utilisera la notation $\frac{a_0}{2}$au lieu de a_0 pour désigner le premier terme de la série (2.1.1) afin d'avoir une expresssion de a_n valable quel que soit $n \in \mathbb{N}$.[5]

2.1.1 La forme complexe de série trigonométrique

on a :

$$\begin{cases} e^{i\frac{n\pi}{l}x} = \cos\frac{n\pi}{l}x + i\sin\frac{n\pi}{l}x \\ e^{-i\frac{n\pi}{l}x} = \cos\frac{n\pi}{l}x - i\sin\frac{n\pi}{l}x \end{cases} \tag{2.1.2}$$

ensuite

$$\begin{cases} \cos\frac{n\pi}{l}x = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{n\pi}{l}x} + e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\right) \\ \sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{n\pi}{l}x} - e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\right) \end{cases} \tag{2.1.3}$$

alors:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi}{l}x} + e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\right)+\frac{b_n}{2i}\left(e^{i\frac{n\pi}{l}x} - e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\right) \tag{2.1.4}$$

$$= \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi}{l}x} + e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\right)-i\frac{b_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi}{l}x} - e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\right) \tag{2.1.5}$$

$$= \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi}{l}x} + \left(\frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}\right)e^{-i\frac{n\pi}{l}x} \tag{2.1.6}$$

Donc :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi}{l}x} + \left(\frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}\right)e^{-i\frac{n\pi}{l}x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \tag{2.1.7}$$

tel que:

$$\lambda_n \in \mathbb{C} \qquad \lambda_n = \begin{cases} \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} & ,n \geq 1 \\ \frac{a_0}{2} & ,n = 0 \\ \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2} & ,n \leq -1 \end{cases}$$

Définition 2.1.2 *la suite de fonctions*

$$1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, ..., \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, ... \tag{2.1.8}$$

($l > 0$ étant fixé)est appelée systéme trigonométrique.

Naturellement, toutes les fonctions de cette suite admettent la période commune $2l$.[1]

2.1.2 Orthogonalité

le systéme trigonométrique posséde la propiété suivante (dite propriété d'orthogonalité):

$$\forall n, m : \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi}{l}t \cos\frac{n\pi}{l}t\ dt = \int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi}{l}t \sin\frac{n\pi}{l}t\ dt = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ 1 & si\ n = m \end{cases} \tag{2.1.9}$$

$$\forall n, m : \int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi}{l}t \cos\frac{n\pi}{l}t\ dt = 0. \tag{2.1.10}$$

Vérification immédiate par calcul direct .

On traduit les relations (2.1.10) en disant que le systéme trigonométrique est orthogonal sur$[-l, l]$.Il est facile de voir que le systéme (2.1.8) est en fait orthogonal sur tout intervalle de longueur $2l$.

Proposition 2.1.1 *Si la série (2.1.1) est converge sur $[-l, l]$ alors sa somme $S\ (x)$ est une fonction périodique de période $2l$.si la convergence est uniformement alors les coefficients de la série sont :*

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} S\,(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} S\,(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\ dx \\ b_n = \dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} S\,(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\ dx \end{cases}$$

Preuve. : On a

$$\begin{cases} \cos\left[\dfrac{n\pi}{l}(x + 2l)\right] = \cos\left(\dfrac{n\pi}{l}x + 2n\pi\right) = \cos\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right) \\ \sin\left[\dfrac{n\pi}{l}(x + 2l)\right] = \sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x + 2n\pi\right) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right) \end{cases} \tag{2.1.11}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad S(x+2l) = S(x) \tag{2.1.12}$$

$\forall p \in \mathbb{N}$, $S(x)\cos\frac{p\pi}{l}x = \frac{a_0}{2}\cos\frac{p\pi}{l}x + \sum a_n \cos\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{p\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{p\pi}{l}x$

alors

$$\int_{-l}^{l} S(x)\cos\frac{p\pi}{l}x\ dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{p\pi}{l}x\ dx + \sum a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\ \cos\frac{p\pi}{l}x\ dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\ \cos\frac{p\pi}{l}x\ dx \tag{2.1.13}$$

si $p=0$: $l\ a_0 = \int_{-l}^{l} S\ (x)\,dx$ alors $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S\ (x)\,dx$

si $p \geq 1$: $l\ a_p = \int_{-l}^{l} S\ (x)\cos\frac{p\pi}{l}x\ dx$ alors $a_p = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S\ (x)\cos\frac{p\pi}{l}x\ dx.$ ■

par le méme methode on a:

$$lb_p = \int_{-l}^{l} S(x)\sin\frac{p\pi}{l}xdx \ \ alors\ b_p = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S(x)\sin\frac{p\pi}{l}xdx. \tag{2.1.14}$$

2.2 Probléme de la représentation d'une fonction par sa série de Fourier

Définition 2.2.1 *soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction $2l$ −périodique localement intégrable. La série trigonométrique:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{2.2.1}$$

où

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\ (t)\cos\frac{n\pi}{l}t\ dt \quad , n = 0,1,2,... \tag{2.2.2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\ (t)\sin\frac{n\pi}{l}t\ dt \quad , n = 1,2,... \tag{2.2.3}$$

s'appelle série de Fourier de f (suivant le systéme (2)) .On dit que les nombres a_n ,b_n sont les coefficients de Fourier de f .[5]

Remarque 2.2.1 *Pour voir la raison de l'apparition des cofficients (2.2.3), considérons une série trigonométrique (2.1.1) convergeant uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $2l-$ *périodique et partout dérivable . Alors* f *est partout représentable par sa série de Fourier, c'est-à-dire*

$$\forall x : f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{2.2.4}$$

Théorème 2.2.2 ***(Dini)*** *Soit* $f \in R_{2l}$. *Si* f *vérifie au point* x_0 *les propriétés suivantes:*

(a) $f\ (x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_{0+}} f\ (x), \qquad f\ (x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_{0-}} f\ (x)$ *existent,*

(b) $\exists \delta > 0$ *tel que*

$$\int_0^{\delta} \frac{|\ f\ (x_0 + t) - f\ (x_0 + 0) - f\ (x_0 - 0) + f\ (x_0 - t)\ |}{t} dt < +\infty, \tag{2.2.5}$$

alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers le valeur

$$\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]. \tag{2.2.6}$$

[4]

Lemme 2.2.1 ***(Riemann)*** *Soit* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable. Alors:*[1]

$$\lim_{\lambda \to +\varkappa} \int_a^b g(t) \sin \lambda t dt = \lim_{\lambda \to +\varkappa} \int_a^b g(t) \cos \lambda t dt = 0. \tag{2.2.7}$$

Démonstration. f une fonction intégrable sur $[a, b]$ implique pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b \tag{2.2.8}$$

■

et une fonction en escalier , $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, telle que :

$$|f\ \ (t) - g\ \ (t)| < \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)} \tag{2.2.9}$$

$$\left|\int_a^b (f\ \ (t) - g\ \ (t)) \cos \alpha t dt\right| \leq \int_a^b |f\ \ (t) - g\ \ (t)|\, |\cos \alpha t|\, dt \leq \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)} \int_a^b dt = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2.10}$$

Or , dans chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, la fonction g est constante et vérifie :

$$g\ \ |]x_k, x_{k+1}[\ (x) = c_k \tag{2.2.11}$$

On a alors :

$$\int_a^b g\,(t) \cos \alpha t dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g\,(t) \cos \alpha t dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos \alpha t dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left[\frac{\sin \alpha t}{\alpha}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} \tag{2.2.12}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\sin \alpha x_{k+1} - \sin \alpha x_k\right) \underset{\alpha \to\ \pm\infty}{\longrightarrow 0} . \tag{2.2.13}$$

Et par suite :

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} \int_a^b g\ \ (x) \cos \alpha x dx = 0. \tag{2.2.14}$$

De méme façon démontre que :

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} \int_a^b g\,(x) \sin \alpha x dx = 0. - + \tag{2.2.15}$$

Théorème 2.2.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique localement intégrable. Supposons qu'au point x_0*

(a) $f\ \ (x_0 + 0) = \lim_{x \to x_{0+}} f\ \ (x)$, $\quad f\ \ (x_0 - 0) = \lim_{x \to x_{0-}} f\ \ (x)$ existent;
(b*) les limites (finies):

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x\ \to x_{0+}} \frac{f\ \ (x) - f\ \ (x_0 + 0)}{x - x_0}, \quad f\ \ '(x_0 - 0) = \lim_{x\ \to x_{0-}} \frac{f\ \ (x) - f\ \ (x_0 - 0)}{x - x_0}$$

existent. Alors la série de Fourier de f converge en $x_0$vers la valeur

$$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]. \tag{2.2.16}$$

Le résultat du théorème est encore vrai si l'hypothése de dérivabilité de f partout est remplacée par l'existence des dérivées (finies) à gauche et àdroite (voir hypothèse (b*) du théorème (2.2.3) en tout point de $\mathbb{R}$. [1]

Théorème 2.2.4 *(**Dirichlet**) Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction $2l-$ périodique satisfaisant aux conditions suivantes (appellées conditions Dirichlet):*

D1) les discontinuités de f (si elle existent) sont de prémiere espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini .

D2) f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x = \begin{cases} f\ (x) \\ \dfrac{f\ (x+0)+f\ (x-0)}{2}\ \text{si } f \text{ est discontinue en } x. \end{cases} \tag{2.2.17}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout l'intervalle ou la fonction f est continue.

Les notations $f\ (x+0)$ et $f\ (x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x. [5]

2.3 Développement en série de Fourier des fonctions définies sur un intervalle

Par définition, développer une fonction f en série de Fourier, c'est représenter f par une série de Fourier. On considère souvent des fonctions qui ne sont définies que sur un intervalle

$[\alpha,\beta]$ et on pose la question de savoir si ces fonctions peuvent etre développées en série de Fourier.

On peut fournir une solution à ce problème en utilisant par exemple le résultat suivant:

Théorème 2.3.1 *Soit* $f : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction intégrable vérifiant les propriétés:*

(a_1) $\forall x \in [\alpha,\beta]$,les valeurs $f\ (x+0)$, $f\ (x-0)$ existent;[1]

(b_1) $\forall x \in [\alpha,\beta]$,les valeurs (finies) $f\ '(x+0)$, $f\ '(x-0)$ existent. (Naturellement aux points α,β, il s'agit uniquement des valeurs
$(\alpha+0)$, $f\ (\beta-0)$, $f\ '(\alpha+0)$, $f\ '(\beta-0)$.)

Alors:

$$(i)\ \forall x \in [\alpha,\beta] : \frac{f\ (x\ +\ 0)\ +\ f\ (x\ -\ 0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{\beta\ -\ \alpha}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{\beta\ -\ \alpha}x. \tag{2.3.1}$$

(ii) Pour α ou β, on a

$$\begin{aligned}\frac{f\ (\alpha\ +\ 0)\ +\ f\ (\beta\ -\ 0)}{2} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi\alpha}{\beta\ -\ \alpha} + b_n \sin\frac{2n\pi\alpha}{\beta\ -\ \alpha} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi\beta}{\beta\ -\ \alpha} + b_n \sin\frac{2n\pi\beta}{\beta\ -\ \alpha}.\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

où

$$a_n = \frac{2}{\beta\ -\ \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\cos\frac{2n\pi}{\beta\ -\ \alpha}tdt, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{\beta\ -\ \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\sin\frac{2n\pi}{\beta\ -\ \alpha}tdt, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.3.3}$$

2.3.1 Série de Fourier des fonctions paires ou impaires

On vérifie facilement que $\int_{-\alpha}^{\alpha} g\ (t)\ dt = 0$ si g est intégrable et impaire.

Il en résulte que si $f \in R_{2l}$ alors

- Si f est impaire alors la fonction $t \mapsto f\ (t) \cos \frac{\pi n}{l} t$ est impaire $\Longrightarrow a_n = 0$.
- Si f est impaire alors la fonction $t \mapsto f\ (t) \sin \frac{\pi n}{l} t$ est paire $\Longrightarrow b_n = 0$.

pour tout n.

Autrement dit; la série de Fourier d'une fonction impaire (resp. paire) ne contient que des sinus (resp. cosinus).

Soit f une fonction $2l-$ périodique définie sur un intervalle $[-l, l]$, on va prolonger f sur $[-l, l]$ de façon impaire :

$$f_1(x) = \begin{cases} -f\ (-x) & pour\ \ -l \leq x < 0 \\ f\ (x) & pour\ \ 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.3.4}$$

ou bien :

On va prolonger f sur $[-l, l]$ de façon paire :

$$f_2(x) = \begin{cases} -f\ (-x) & pour\ \ -l \leq x < 0 \\ f\ (x) & pour\ \ 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.3.5}$$

et d'appliquer ensuite à f_1 ou à f_2 le théoréme (2.2.2).

On aboutit au développement de f (au moins sur $]0, l[$) en série de Fourier ne contenant que des sinus (pour f_1) ou des cosinus (pour f_2).[1]

Exemple 2.3.1 ***(impaire) :*** *Soit* $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f\ (x) = x$.

Sa série de Fourier est contient que des sinus puisque f est impaire, alors $a_n = 0, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Un calcul élémentaire donne:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\ dx, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^* \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin nx\ dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

En la série de Fourier associe de f est : $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx\ dx$.

Exemple 2.3.2 ***(paire) :*** *Soit* $g : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $g\ (x) = |\ x\ |$ *.g une fonction de période* 2π *:*

$$g(x) = \begin{cases} x & : x \in [0, \pi] \\ -x & : x \in [-\pi, 0] \end{cases} \tag{2.3.6}$$

La fonction g étant paire $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Sa série de Fourier est contient que des cosinus, alors $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Un calcul élémentaire donne:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos nx dx \tag{2.3.7}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi \tag{2.3.8}$$

$$a_n = 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \tag{2.3.9}$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2p \quad ; \ p \in \mathbb{N} \\ \dfrac{-4}{(2n + 1)^2 \pi}, & n = 2p + 1 \ ; p \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.3.10}$$

En fin la série de Fourier associe de f est : $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} \cos(2n + 1)x$

2.4 Convergence en moyenne des série de Fourier

2.4.1 Égalite de Parseval

Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = 2l > 0$ alors on a pour a réel quelconque:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f^{\,2}(x) dx = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \tag{2.4.1}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ ou } n \in \mathbb{N} \tag{2.4.2}$$

Preuve.

$$\frac{1}{2l}\int_{a}^{a+2l} f^{\,2}(x)dx = \frac{1}{2l}\int_{a}^{a+2l}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right)^2 dt \tag{2.4.3}$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{a+2l}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right)^2 dt \tag{2.4.4}$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{a+2l}\left(\begin{array}{c} a_n^2\cos^2\frac{n\pi}{l}t + b_n^2\sin\frac{n\pi}{l}t \\ +2a_nb_n\cos\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}t \end{array}\right) dt \tag{2.4.5}$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{a+2l}\left[\begin{array}{c} a_n^2\left(1-\cos\frac{2n\pi}{l}t\right)+ \\ b_n^2\left(1-\cos\frac{2n\pi}{l}t\right) \\ +2a_nb_n\sin\frac{2n\pi}{l}t \end{array}\right] dt \tag{2.4.6}$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}\left(a_n^2 + b_n^2\right) dt \tag{2.4.7}$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}. \tag{2.4.8}$$

■

Lemme 2.4.1 *Soit $f \in R\,[a,b]$. Alors pour tout naturel n et pour tout polynome trigonométrique*

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\ \cos\frac{k\pi}{l}x\ + \beta_n\ \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

on a

$$\int_a^b (f\ (t) - S_n\ (f;t))^2\ dt\ \le\ \int_a^b (f\ (t) - T_n\ (t))^2\ dt, \tag{2.4.9}$$

ce qui signifie que, parmi les polynomes trigonométriques T_n, la somme partielle $S_n(f\ ,\ .)$ de la série de Fourier de f fournit la meilleure approximation en moyenne (et ceci pour tout n).[1]

Preuve. Notons a_n , b_n , les coefficients de Fourier de f . On a, en tenant compte des relations (2.4.9)

$$\int_a^b (f(t) - T_n(t))^2\, dt = \int_a^b f^2(t)\, dt - 2\int_a^b f(t)\, T_n(t)\, dt + \int_a^b T^2(t)\, dt \tag{2.4.10}$$

$$= \int_a^b f^2(t)\, dt - 2l\left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k + \acute{\beta}_k b_k\right] \tag{2.4.11}$$

$$+ l\left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \beta_k^2\right] \tag{2.4.12}$$

$$= \int_a^b f^2(t)\, dt + l\begin{bmatrix} \frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} \\ +\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 \\ (\beta_k - b_k)^2 \\ -\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.4.13}$$

pour $\alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$,on aura en particulier

$$\int_a^b (f(t) - S_n(f,t))^2\, dt = \int_a^b f^2(t)\, dt - l\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \geq 0 \tag{2.4.14}$$

Alors (2.4.13) et (2.4.14) impliquent

$$\int_a^b (f(t) - T_n(t))^2\, dt = \int_a^b (f(t) - S_n(f,t))^2\, dt \tag{2.4.15}$$

$$+ l\left[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^{2+} (\beta_k - b_k)^2\right] \tag{2.4.16}$$

d'où la relation (2.4.9). ■

On a l'inégalité, dite inégalité de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{l}\int_a^b f^{\ 2}(t)dt. \tag{2.4.17}$$

Elle découle aussitot de (2.4.14).

Dans ce qui suit, on démontrera qu'en fait, il y a égalité dans (2.4.17) .

Lemme 2.4.2 *Pour toute fonction continue* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *on a*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b (f(t) - S_n(f;t))^2 dt = 0. \tag{2.4.18}$$

Pour toute fonction intégrable $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b (f(t) - S_n(f;t))^2 dt = 0. \tag{2.4.19}$$

Corollaire 2.4.1 *Pour toute fonction intégrable* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,*on a la relation, dite égalité de Parseval*

$$\frac{1}{l} \int_a^b f^{\ 2}\ dt \ = \ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{2.4.20}$$

La démonstration est immédiate compte tenu de (2.4.14).

Cette relation se traduit en disant que le systéme trigonométrique (2.3.3) est total dans l'espace $R\,[a,b]$,ou autrement, que toute fonction $f \in R\,[a,b]$ peut être approximée en moyenne quadratique par des polynomes trigonométriques [5] .

Chapitre 3

Application de série de Fourier pour calculer la somme de série

Les applications de série de Fourier sont differents, on va etudier qeulque application de la série de Fourier et rechercher la somme des séries numériques .

C'est ce que nous allons essayer d'études dans ce chapitre.

1) Calcule la somme:

$$S_1(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2} \cos nx, S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\ (1-(-1)^n e^{\pi})}{\pi(1 + n^2)} \sin nx, \quad (3.0.1)$$

$$S_3 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} (\cos nx - n \sin nx) \right) \quad (3.0.2)$$

On va utiluser la fonction $f(x) = e^x$.

a) Calculer la somme $S_1(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2} \cos nx$

Notons $\tilde{f}_i$, $i = 1, 2, 3$, le prolongement de f à $\mathbb{R}$ tout entier.$\tilde{f}_i$ sera une fonction de période 2π qui vaut exactement e^x pour tout x dans $]0, \pi[$. Choisissons un prolongement pair et posons: $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in]0, \pi[\\ e^{-x} & \text{si } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$

/ãÐßÑÉ ÊÎÑÌí/douib/NOLBI701.gif

Figure 3.0.1 : graphe de fonction $f(x)$

/ãÐßÑÉ ÊÎÑÌí/douib/NOLBL202.gif

Figure 3.0.2 : graphe de la fonction $S_1(x)$ identique à celui de $\tilde{f}_1$

b) Calculer la somme $S_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n\,(1-(-1)^n e^{\pi})}{\pi(1 + n^2)} \sin nx$. Choisissons un prolongement impair et posons :

$$\tilde{f}_2(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x \in]0,\pi[\\ -e^{-x} & \text{si } x \in]-\pi,0[\end{cases}$$

On remarque que $\tilde{f}_2$ est une fonction impaire mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle est

discontinue en tout point de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le calcul des cœfficients donne :

$$a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{2n\,(1-(-1)^n e^{\pi})}{\pi(1 + n^2)}. \tag{3.0.3}$$

On a alors :

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\,(1-(-1)^n e^{\pi})}{\pi(1 + n^2)} \sin nx = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x \in]0,\pi[\\ e^{-x} & \text{si } x \in]-\pi,0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi \end{cases} \tag{3.0.4}$$

/ãÐßÑÉ ÊÎÑÌí/douib/NOLBP403.gif

Figure 3.0.3 : graphe de la fonction $\tilde{f}_2$

c) Calculer la somme $S_3 = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left(\dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+1} (\cos nx - n \sin nx) \right)$. Choisissons un prolongement ni pair ni impair et posons : $\tilde{f}_3 = e^{x}$ si $x \in]-\pi,\pi[$. On remarque que $\tilde{f}$ est une fonction discontinue en tout point de la forme $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On a le résultat final :

/ãÐßÑÉ ÊÎÑÌí/douib/NOLBTM04.gif
Figure 3.0.4 : graphe de la serie $S_2(x)$

$$S_3 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx \; - \; n\sin nx)\right) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in \left]-\pi, \pi\right[\\ \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} & \text{si } x = \pm\pi \end{cases} \tag{3.0.5}$$

On a obtenu trois séries différentes qui valent exactement e^x sur l'intervalle $]0, \pi[$. On pouvait choisir d'autres prolongements et obtenir d'autres séries.

/ãÐßÑÉ ÊÎÑÌí/douib/NOLBVP05.gif
Figure 3.0.5 : graphe de la fonction $f_3(x)$

/ãÐßÑÉ ÊÎÑÌí/douib/NOLBZC06.gif
Figure 3.0.6 : graphe de la série $S_3(x)$

2) Calculer la somme: $S_4(x) = \frac{4\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, $\forall x \in \mathbb{R}$

On va utiluser la fonction $f(x) = x^2$ si $x \in]-\pi, \pi]$

f est une fonction pair, continue pour tout $x \in \mathbb{R}$. toutes les conditions du théorème de Dirichlet sont verifiées et comme f continue, alors f est développable en série de Fourier.

f est paire alors $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et l'on :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3} \tag{3.0.6}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{2}{\pi}(\left[\frac{t^2 \sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2t\sin nt}{n}dt \tag{3.0.7}$$

$$= \frac{-4}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt dt = \frac{-4}{\pi}(\left[\frac{t\cos nt}{-n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nt}{n}dt) = \frac{4(-1)^n}{n^2} \tag{3.0.8}$$

/ãÐßÑÉ ÊÎÑÌí/douib/NOLC8R07.gif
Figure 3.0.7 : graphe de la fonction $f(x)$ et celui $S_{4(x)}$

comme $f(x) = S_4(x)$ il résulte, car f est développable en série Fourier, alors:

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \frac{4\pi^2}{3}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.0.9}$$

3) Calculer la somme $S_5(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)}\sin 2nx$:

On va utiluser la fonction $f(x) = \cos x$ pour $x \in \,]0, \pi]$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \,]0, \pi[\\ -\cos x & \text{si } x \in \,]-\pi, 0[\end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est une fonction impaire de periode2π , continue partout sur $\mathbb{R}$ sauf aux points $x = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, où elle n'est pas définie, et coincide avec la fonction f sur $]0, \pi[$. Elle admet donc un développement de Fourier.

Comme f' est impaire alors: $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, et on a:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x)dx \tag{3.0.10}$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{-\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} = \frac{2n((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)} \text{ si } n \neq 1 \tag{3.0.11}$$

pour

$$n = 1, b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x \sin x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x dx = 0 \tag{3.0.12}$$

finalement on a:

$$b_{2n+1} = 0 \text{ et } b_{2n} = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \tag{3.0.13}$$

$$\forall x \in \,]0, \pi[\quad \cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\pi}\frac{n}{(4n^2-1)}\sin 2nx \tag{3.0.14}$$

Remarque 3.0.1 *La demi somme aux points de discontinuité est égale à* 0*. On a donc*

$$S_5(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1} = \begin{cases} \cos x \text{ si } x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,(2k+1)\pi[\\ -\cos x \text{ si } x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}](2k+1)\pi,(2k+2)\pi[\\ 0 \text{ si } x = k\pi \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{3.0.15}$$

La fonction $S_5(x)$ est périodique de période π.

/ãÐßÑÉ ÊÎÑÌí/douib/NOLCDX08.gif
Figure 3.0.8 : graphe de la fonction $S_5(x)$

Quelques développements intéressants.

1) $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $x \in [-\pi,\pi]$

$$\cos\alpha x = \frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{\pi(n^2-\alpha^2)}\right) \tag{3.0.16}$$

2) Fonction impaire de période $2l$.

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin\frac{2n\pi x}{l} = \begin{cases} \sin\frac{\pi x}{l} \text{ pour } 0 \leqslant x < \frac{l}{2} \\ 0 \text{ pour } \frac{l}{2} < x \leqslant l \\ \frac{1}{2} \text{ pour } x = \frac{l}{2} \end{cases} \tag{3.0.17}$$

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{-\pi-x}{2} \text{ pour } -2\pi < x < 0 \\ \frac{\pi-x}{2} \text{ pour } 0 < x < 2\pi \\ 0 \text{ pour } x = 0, x = 2\pi, x = -2\pi \end{cases} \tag{3.0.18}$$

4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} \frac{3x^2+6\pi x+2\pi^2}{12} \text{ pour } -2\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases} \tag{3.0.19}$$

5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3\pi x + 2\pi^2}{12} \text{ pour } -2\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2}{12} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases} \tag{3.0.20}$$

Conclusion Générale

Les applications de série de Fourier et de ces généralisations sont trés nombreuses, cette série joue un rôle imporant pour calculer la somme des séries numériques et des fonctions . On obtient ici des sommes de quelques séries posés pour expliquer comment pouvoir appliquer cette série pour simplifier le calcul de la somme d'un série, l'objectif de notre travail .

En mathématique, l'analyse de Fourier a aussi une grande importance dans le calcul, plus la série de Fourier, qui est détaillé ici avec l'étude des théorèmes et propriétés importantes sur cette série et sa convergente .

Ce travail contient de trés bons résultats pour le calcul des sommes des séries par l'application de la série de Fourier avec les propiétés des séries numériques et séries des fonctions, cette application est s'exprimée par le calcul de somme de quelques séries .

Bibliographie

[1] Armel Mercier, Analyse de Fourie et calcul opérationnel, 1954.

[2] BENHAMOUD.T, Observation d'un systéme bidimensionnel gouvermé par des équations aux dérivées partielles,Mémoire Magister,Universite Mentouri Constantine, 2010.

[3] Gérard .D, Francis. D et Max .H, Mathimatiques MPSI-PCSI,2013.

[4] JACQUES DOUCHET, Analyse recueil d'exercices et l'aide-mémoire vol.1 ,2003.

[5] J.BASS,Cours de mathématiques tome III boulevard saint-oermain, Paris,1971.

[6] SOAUSSEN KALLEL-JALLOULI, Mathématique II analyse centre de publication universitaire, Tunis, 2002.

Résumé

Dans cette mémoire, nous avons parlé à branches est très importants de l'analyse fonctionnelle, séries de Fourier et de leurs applications. Lorsque nous avons abordé le concept de série de Fourier. Et comment déployer notre classe a continué de série de Fourier. Comme nous avons abordé le concept de séries numériques et séries des fonctions. Convergences où nous avons étudié ces séries. Dans le dernier nous avons présenté certaines des applications de ces séries dans le calcul des séries numériques.

ملخص:

في هذه المذكرة تطرقنا إلى فرع مهم جدا من فروع التحليل التابعي سلاسل فوري وفصلنا كيفية نشر تابع إلى سلسلة فوري،كما تطرقنا إلى مفهوم السلاسل العددية وسلاسل التوابع حيث درسنا تقاربات هذه السلاسل وفي الأخير قدمنا بعض تطبيقات هذه السلاسل في حساب مجاميع السلاسل العددية.