

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Présenté par:

AOUIOUECHE Khadidja

AOUN Nora

FETHIZA AMARA Nour Elhouda

Thème

**Groupes résolubles et
nilpotents**

Soutenu le 01 juin 2014
Devant le jury composé de:

Mr. YOMBOI Ahmed Amin
Mr. CHAYAI Ahmed
Mr. SAID AMEUR Meziane

MC (B) Univ. El Oued Président
MA (B) Univ. ElOued examinateur
MA (B) Univ. ElOued Rapporteur

Remerciements

Avant toute chose, nous remercions Dieu de nous avoir donné toute cette force, qui nous a permis d'arriver à bon port.

*Tout le respect et les mots de remerciement à notre encadreur "**Saïd Ameur Meziane**", pour son soutien, son aide, ses conseils directifs, et son suivi durant la réalisation de ce mémoire de fin d'étude.*

Nous remercions vivement tous les membres du jury d'avoir accepté de juger notre travail.

Un grand remerciement destiné à l'ensemble de nos enseignants et enseignantes qui ont contribué à notre formation, depuis le cycle primaire jusqu'au cursus universitaire.

Enfin, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos familles, et tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin durant la réalisation de ce travail.

Table des matières

Notation	1
Introduction générale	2
1 Les éléments des groupes	3
1.1 Les groupes	3
1.2 Les Sous-groupes	4
1.3 sous groupes normaux (distingués ou invariants)	5
1.4 Le groupe quotient	7
1.5 Groupe simple	8
1.6 Groupe dérivé	9
1.6.1 Commutateurs	9
1.6.2 Groupe dérivé	9
1.7 Les divers types de groupes	10
1.7.1 Groupe abélien	10
1.7.2 Groupe cyclique	10
1.7.3 p -groupe	11
1.7.4 Groupe symétrique	11
2 Morphismes et les séries des groupes	13
2.1 Morphismes	13
2.1.1 Noyau et image d'un morphisme	14

2.1.2	Les théorèmes des morphismes	15
2.2	série de sous groupe	15
2.3	Sous série normal	16
2.4	Série normal	16
2.5	Série dérivé	17
2.6	Série central	17
2.6.1	série central inférieure	17
2.6.2	série central supérieure	18
2.6.3	Série centrale descedante	18
2.7	Série composition	18
2.8	Filtrations et théorème de Jordan-Hölder	19
3	Groupes résolubles et nilpotents	21
3.1	Groupes résolubles	21
3.2	Groupes nilpotents	26
	Conclusion générale	32
	Bibliographie	32

Notations

$x \in X$	x est un élément de X .
$A \subset B$	A est un sous-ensemble propre de B .
$ G $	Ordre de groupe G .
$e_G, 1_G$	Element neutre de G .
$H \leq G$	H est un sous-groupe de G .
$H \triangleleft G$	H est un sous-groupe distingué de G .
$Z(G)$	Centre de groupe G .
$N_G(H)$	Normalisateur de groupe H relativement a G .
$[x : y]$	Commutateur des x et y d'un groupe G .
$D(G) = [G : G]$	Groupe dérivée d'un groupe G .
$(H : G)$	L'indix de H relativement a G .
$\text{hom}(G : H)$	Monomorphisme de G vers H .
$\ker(f)$	Noyau de morphisme.
$\text{Im}(f)$	Image de morphisme.
$H \cong G$	H isomorphe a G .

Introduction générale

La résolubilité et la nilpotence des groupes a un grand intérêt dans plusieurs domaines mathématiques.

Dans ce mémoire nous traitent résolubilité des groupes qui a grand intérêt dans l'algèbre abstraite comme la nilpotence des groupes.

Pour cela on a rappelé dans le premier chapitre les principaux définitions des groupes, sous-groupes aussi on présente des propriétés fondamentales lies aux structures algébriques des groupes.

Dans le deuxième chapitre on a présente les définitions de morphisme des groupes et les séries (suites) des groupes précisons quelque relation entre les séries et si propriétés.

Enfin dans le troisième chapitre nous ferons une études sur les groupes résolubles et les groupes nilpotents et donnons une idée simple sur de différence entre les groupes résolubles et les groupes nilpotents avec des exemples.

Chapitre 1

Les éléments des groupes

Dans ce chapitre, nous donnons quelques généralités sur les groupes. Rappelons ses définitions fondamentales et les types les plus importants, les groupes les plus utilisés dans le domaine des mathématiques et certaines des caractéristiques fondamentales de la tâche avec des exemples.

1.1 Les groupes

Définition 1.1.1 .

On appelle groupe tout ensemble G muni d'une loi de composition interne vérifiant les 3 axiomes suivants:

L'axiome d'associativité.

L'axiome de l'élément neutre.

L'axiome du symétrique.

Si de plus la loi est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien.

Formules pour un groupe G muni d'une loi $$: $G^2 \rightarrow G$*

*$(x, y) \rightarrow x * y$ est le composé de $x * y$*

*$x * (y * z) = (x * y) * z$: pour l'associativité.*

*$x * e = e * x = x$: pour l'élément neutre e .*

*$x * y = y * x = e$: pour le symétrique y de x .*

*$x * y = y * x$: pour la commutativité.*

Ces formules sont valable pour tous les éléments x, y, z du groupe G .

Exemple 1.1.1 .

- 1) $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe .
- 2) (\mathbb{R}, \cdot) n'est pas un groupe.

Remarque 1.1.1 .

- 1) La loi $*$ du groupe peut être désigné par d'autres symboles : celui de l'addition, de la multiplication, de la composition, etc...
- 2) On dit le groupe additif \mathbb{Z} parce que le loi est l'addition.
Le groupe multiplicatif $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ parce que la loi est multiplication.
- 3) l'élément neutre est noté 0 dans les groupes additifs , 1 dans les groupes multiplicatifs, etc...

Définition 1.1.2 .

On appelle ordre d'un groupe le nombre de ses éléments. noté $O(G)$ ou $|G| = \text{card}G$.

L'ordre d'un élément x d'un groupe est l'ordre du sous-groupe qu'il engendre : c'est le plus petit entier naturel n tel que le composé $x * x * \dots * x$ de n fois x soit l'élément neutre, en abrégé on écrit : $x^n = e$ (ou $nx = e$).

Remarque 1.1.2 .

- 1) Un groupe d'ordre fini est dit groupe fini .
- 2) Un groupe d'ordre infini est dit groupe infini .

1.2 Les Sous-groupes

Définition 1.2.1 .

On appelle sous-groupe d'un groupe $(G, *)$ toute partie non vide H de G qui est - elle même un groupe pour la loi induite par la loi $*$ du groupe G .

On appelle loi induite sur H par la loi $*$ la loi $*'$ définie sur H par $*' : H^2 \rightarrow H$, $(x, y) \rightarrow x *' y = x * y$, prenant les mêmes valeurs que $*$ sur H .

Définition 1.2.2 .

*H est un sous-groupe du groupe $(G, *)$ ssi :*

$$\forall x, y \in H \quad x * y^{-1} \in H \Rightarrow H \leq G.$$

Exemple 1.2.1 .

Soit $\mathbb{R}[x]$ le groupe additif des polynomes en x et H la partie $\mathbb{R}[x]$ formée des polynomes qui s'annulent pour $x = 10$

soient 2 polynomes:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

dans H ; par définition de H , on a $p(10) = q(10) = 0$.

*Calculons le composé $p(x) * q(x)^{-1}$*

*Puisque $q(x)^{-1} = -b_0 - b_1x - \dots - b_nx^n = -q(x)$, alors $p(x) * q(x)^{-1} = p(x) - q(x)$;*

ce polynome prend la valeur $p(10) - q(10) = 0 + 0 = 0$;

D'où $p(x) - q(x) \in H$; d'après définition, H est un sous-groupe de $\mathbb{R}[x]$.

Définition 1.2.3 .

*Soit $(G, *)$ un groupe et $E \subset G$ un sous ensemble de G . Le sous-groupe engendré par E est la plus petit sous groupe de G contenant E .*

Par exemple si $E = \{2\}$ et le groupe est (\mathbb{R}^, \times) , le sous-groupe engendré par E est $H = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.*

Pour le prouver: il faut montrer que H est un sous-groupe, que $2 \in H$, et que si H' est un autre sous-groupe contenant 2 alors $H \subset H'$.

1.3 sous groupes normaux (distingués ou invariants)

Définition 1.3.1 .

*On appelle sous-groupes normal d'un groupe $(G, *)$ tout sous-groupe H de G tel que $x * h * x^{-1} \in H$ pour tous les élément $x \in G$ et $h \in H$.*

*On désigne par xHx^{-1} l'ensemble $xHx^{-1} = \{x * h * x^{-1} \mid x \in G, h \in H\}$.*

Alors H est normal si $xHx^{-1} = H$.

Cette formule s'écrit aussi $xH = Hx$, on écrit alors: $H \triangleleft G$.

Exemple 1.3.1 .

1) $K = \langle (123) \rangle \leq S_3$ alors:

$$\sigma \circ K = K \circ \sigma, \quad \forall \sigma \in S_3$$

K sous-groupe normal de S_3 , ($K \triangleleft S_3$).

2) Si $H = \langle (12) \rangle \leq S_3$ alors :

$$(1\ 3) \circ H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$

$$H \circ (1\ 3) = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$(1\ 3) \circ H \neq H \circ (1\ 3)$$

H n'est pas sous-groupe normal, ($H \not\triangleleft S_3$).

Remarque 1.3.1 .

1) Dans un groupe commutatif, tous les sous-groupes sont normaux .

2) Dans un groupe non commutatif, il y a un sous-groupe non normal au moins .

3) Dans le cas général, les deux sous-groupes «triviaux» de G , est $\{e\}$ et G sont normaux dans G .

Théorème 1.3.1 (Theorème de Lagrange) [2]

Soit G est un groupe fini, d'ordre de tout sous-groupe H de G divise l'ordre de G .

En effet les classes à gauche constituent une partition de G et le cardinal de aH est le même que celui de H puisque les translations à gauche sont des bijections de G sur G .

Définition 1.3.2 .

Normalisateur de sous-groupe H d'un groupe G

$$N_G(H) = \{g \in G / gHg^{-1} = H\}.$$

Définition 1.3.3 .

Sous-groupe maximal .

Soit M est un sous-groupe de G on dit que M est maximal ssi:

Soit $H \leq G$ si $M \leq H \leq G$ on a $H = M$ ou $H = G$.

1.4 Le groupe quotient

Définition 1.4.1 .

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G .

Alors:

Il existe une unique structure de groupe sur G/H telle que la surjection canonique $p : G \rightarrow G/H$ (qui à tout a associe sa classe $\bar{a} = aH = Ha$) soit un morphisme de groupes.

Le groupe G/H ainsi obtenu s'appelle le groupe quotient de G par H .

Remarque 1.4.1 .

1) L'élément neutre de G/H est $\bar{e} = H$.

2) Si G est abélien, on peut donc quotienter par n'importe quel sous-groupe, mais il est facile de voir que la définition est toujours fautive si H n'est pas distingué dans G (G/H est juste un ensemble), vu que la propriété voulue implique que H est le noyau du morphisme de groupes p .

3) Le groupe Z/nZ est le quotient de Z par le sous-groupe nZ .

Proposition 1.4.1 [2].

Si G est un groupe fini et H un sous-groupe, alors on a:

$$|(G/H)| = |(H/G)| = |G| / |H|.$$

En particulier l'ordre du groupe quotient G/H (quand H est distingué) est le quotient des ordres de G et H .

Définition 1.4.2 .

On appelle centre d'un groupe G l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres.

Soit $(G, *)$ un groupe, noté multiplicativement, de neutre e .

$$Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G, gz = zg\}$$

$$Z(x) = \{g \in G, gx = xg, x \in G\} \text{ centre de } x.$$

$Z(G)$ est un sous-groupe de G .

Proposition 1.4.2 .

- 1) $Z(G)$ est un sous-groupe caractéristique (et donc normal) de G .
- 2) Tout sous-groupe de $Z(G)$ est sous-groupe normal de G .
- 3) $Z(G)$ est abélien.

Exemple 1.4.1 .

- 1) Le centre d'un groupe abélien G est le groupe G entier, c'est-à-dire:

$$Z(G) = G$$

- 2) Le centre du groupe alterné A_n est trivial pour $n \geq 4$.

Définition 1.4.3 .

Soit $x \in X$; on appelle stabilisateur de x (ou fixateur de x) et on note H_x le sous-groupe de G formé des éléments $g \in G$ qui fixent x (i.e tels que $g.x = x$).

telle que: $\text{Stab } x = \{g \in G \mid x.g = x\}$.

Définition 1.4.4 .

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G .

On a $H \text{ car } G$ si pour tout automorphisme de G , $\varphi \in \text{aut } G / \varphi(H) = H$.

Remarque 1.4.2 .

- 1) Si $H \text{ car } G \implies H \triangleleft G$.
- 2) $Z(G), G$ sont des sous-groupes caractéristique de G .

1.5 Groupe simple

Définition 1.5.1 .

On dit qu'un groupe G est simple lorsqu'il a exactement deux sous-groupes normaux: $\{1\}$ et G .

Exemple 1.5.1 .

- 1) Les seuls groupes abéliens simples sont les groupes cycliques d'ordre premier, c'est-à-dire les groupes Z/pZ avec p premier.
- 2) Le groupe alterné A_n est simple si $n \geq 5$.

1.6 Groupe dérivé

1.6.1 Commutateurs

Définition 1.6.1 .

Le commutateur de deux éléments $g \in G$ et $h \in G$ est par définition l'élément $[g, h]$ défini par:

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Le commutateur mesure le défaut de commutation des éléments g et h :

$$gh = [g, h] hg \text{ et donc: } [g, h] = e \iff gh = hg$$

En particulier, dans un groupe abélien G , tous les commutateurs valent l'élément neutre e .

Proposition 1.6.1 .

1) L'inverse du commutateur de g et de h est le commutateur de h et de g :

$$[g, h]^{-1} = [h, g]$$

2) L'ensemble des commutateurs est stable par les automorphismes de G . Pour tout automorphisme ψ et pour tous g et h dans G :

$$\psi([g, h]) = [\psi(g), \psi(h)]$$

3) Pour tous g, h et K dans G , on a :

$$[g, hk] = [g, h] \cdot h [g, h] h^{-1}$$

1.6.2 Groupe dérivé

Définition 1.6.2 .

L'ensemble des commutateurs est stable par l'inverse mais pas nécessairement par composition. Il n'est pas, en général, un sous-groupe de G . Le sous-groupe engendré par les commutateurs est appelé le **groupe dérivé** de G , noté $D(G)$ ou $[G, G]$.

$$D(G) = [G, G] = \langle \{[g, h] \mid (g, h) \in G^2\} \rangle$$

$$D^2(G) = [D(G), D(G)]$$

En particulier tout élément de $D(G)$ est un produit fini de commutateurs. Comme l'image d'un commutateur par un endomorphisme de groupe est un commutateur, le groupe

dérivé est stable par tout endomorphisme de G : c'est un sous-groupe pleinement caractéristique de G . En particulier, c'est un sous-groupe caractéristique, et donc normal, de G .

Remarque 1.6.1 .

Soit G un groupe d'ordre fini on a $D(G) \triangleleft G$.

Exemple 1.6.1 .

Le groupe dérivé du groupe symétrique S_n est le groupe alterné A_n .

1.7 Les divers types de groupes

1.7.1 Groupe abélien

Définition 1.7.1 .

On dit qu'un groupe $(G, *)$ est abélien ou commutatif, lorsque la loi de composition interne du groupe est commutative, c'est à-dire lorsque :

$$\text{Pour tous } x, y \in G, \quad x * y = y * x$$

Exemple 1.7.1 .

Le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ des entiers avec l'addition.

1.7.2 Groupe cyclique

Définition 1.7.2 .

Un groupe cyclique est un groupe fini engendré par un seul éléments:

$$C = \{a, a * a = a^2, a^2 * a = a^3, \dots, a^{n-1} * a = a^n = e\}$$

Pour la notation multiplicative.

$$C = \{a, a + a = 2a, 2a + a = 3a, \dots, (n - 1)a + a = na = e = 0\}$$

Pour la notation additive.

Exemple 1.7.2 .

Groupe cyclique le groupe $(G, *)$ telle que $G : \{1, -1, i, -i\}$ est un groupe cyclique fini engendré par (i) ou $(-i)$ parce que:

$$i^1 = i$$

$$i^2 = i * i = -1$$

$$i^3 = i * i * i = -i$$

$$i^4 = i * i * i * i = 1$$

1.7.3 p-groupe

Définition 1.7.3 .

Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe fini est un p -groupe si son ordre est une puissance de p (en particulier, un groupe réduit à l'élément neutre est un p -groupe).

Exemple 1.7.3 .

\mathbb{Z} c'est un p -groupe.

1.7.4 Groupe symétrique

Définition 1.7.4 .

Soit E un ensemble non vide tel que $E = \{1, 2, \dots, n\}$, désignons par S_n l'ensemble des permutations de E i.e des bijectifs de E dans E , si φ et $f \in S_n$. La loi de composition a aussi définie est associative. Admet un élément neutre qui est l'identité Id_E et toute application φ admet un symétrique qui est un application réciproque $\varphi^{-1} \in S_n$. Le groupe (S_n, \circ) est dit groupe symétrique de E si, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, le groupe symétrique associative sera noté S_n .

Proposition 1.7.1 [1].

Le groupe symétrique (S_n, \circ) admet $n!$ éléments ($|S_n| = n!$).

Notation 1.7.1 .

Toute permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

soit τ et $\sigma \in S_3$, la permutation $\sigma \circ \tau$, appelée permutation produit de τ et σ est définie

par

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma \circ \tau(1) & \sigma \circ \tau(2) & \dots & \sigma \circ \tau(n) \end{pmatrix}$$

avec $\sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i))$.

Exemple 1.7.4 .

le groupe S_3 a $3! = 6$ permutation à savoir

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Morphismes et les séries des groupes

Dans ce chapitre, nous définirons les morphisme et ses propriétés et applications et certaines types. Ensuite, nous eximinons les séries des sous-groupes et quelques exemples, enfin, nous rappellons la filtration et théorème de Jordan-Hölder.

2.1 Morphismes

Définition 2.1.1 .

Un morphisme de groupes est une application ϕ d'un groupe G dans un groupe H qui respecte les opérations :

$$\forall g, g' \in G, \phi(gg') = \phi(g)\phi(g')$$

Théorème 2.1.1 (*Théorème de factorisation*) [2]

Soit $f : G \rightarrow D(G)$ un morphisme de groupes. Alors il existe un unique morphisme de groupes $\tilde{f} : G/\ker f \rightarrow D(G)$ tel que $f = \tilde{f} \circ p$. De plus \tilde{f} est unjectif d'image $\text{Im } f$, i.e.

$$G/\ker f \cong \text{Im } f.$$

Remarque 2.1.1 .

- 1) *Tout morphisme transporte l'élément neutre en l'élément neutre.*
- 2) *Le symétrique de l'image de x est l'image du symétrique de x .*
- 3) *ϕ et ϕ^{-1} transportent les sous-groupes en des sous-groupes.*

2.1.1 Noyau et image d'un morphisme

Définition 2.1.2 .

Soit φ un morphisme de G vers H .

On appelle noyau d'un morphisme φ , noté $\ker(\varphi)$, l'ensemble des antécédents de l'élément neutre, i.e :

$$\ker \varphi = \{ x : x \in G, \varphi(x) = e_H \} \leq G$$

On appelle l'image d'un morphisme φ , noté $\text{Im}(\varphi)$, s'écrit :

$$\text{Im} \varphi = \{ y : y \in H, \exists x \in G, \varphi(x) = y \} \leq H$$

Proposition 2.1.1 [5].

1) Soient deux morphismes de groupes $f : G \rightarrow D(G)$ et $g : D(G) \rightarrow D^2(G)$ est alors $g \circ f : G \rightarrow D^2(G)$ est un morphisme de groupe.

2) Si $f : G \rightarrow D(G)$ est un morphisme bijectif alors $f^{-1} : D(G) \rightarrow G$ est aussi un morphisme de groupes.

3) Pour tout $x \in G$ $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Remarque 2.1.2 .

Soit $f : G \rightarrow D(G)$ un morphisme des groupes .

1) Pour tout $x \in G : x \in \ker(f) \iff f(x) = e_{D(G)}$.

2) Pour tout $y \in D(G) : y \in \text{Im}(f) \iff \exists x \in G / y = f(x)$.

Proposition 2.1.2 .

Soit $f : G \rightarrow D(G)$ un morphisme de groupes .

1) $\ker f$ est un sous-groupe de G .

2) $\text{Im} f$ est un sous-groupe de $D(G)$.

3) f est injectif si et seulement si $\ker f = (e_G)$.

4) f est surjectif si et seulement si $\text{Im} f = D(G)$.

Remarque 2.1.3 .

Si un morphisme de G vers $D(G)$ est bijectif, son application réciproque est aussi un morphisme.

Les deux groupes sont dits isomorphes, et l'on écrit :

$$G \cong D(G)$$

2.1.2 Les théorèmes des morphismes

Automorphisme

Un isomorphisme d'un groupe dans lui-même s'appelle un automorphisme.

L'ensemble des automorphismes de G est un groupe pour la loi de composition ou rond; il est noté $Aut(G)$:

$$Aut(G) = \{ f_i : f_i : G \rightarrow G \}$$

1) **Endomorphisme** : $f : G \rightarrow H$ telle que : f injectif.

2) **Monomorphisme** : $f : G \rightarrow H$ telle que : f surjectif.

3) **Isomorphisme** : $f : G \rightarrow H$ telle que : f bijectif.

Application

On considère l'automorphisme intérieur :

$$\phi : G \rightarrow Aut(G), g \rightarrow \phi_g$$

Où ϕ_g est l'automorphisme défini par :

$$\phi_g : G \rightarrow G, h \rightarrow ghg^{-1}$$

On a alors :

$$\ker(\phi) = Z(G)$$

$$\text{Im}(\phi) = \text{Int}(G)$$

Le sous-groupe $\text{Int}(G)$ est appelé groupe des automorphismes intérieurs de G .

On peut en déduire, d'après les théorèmes d'isomorphisme :

$$G/Z(G) \cong \text{Int}(G).$$

2.2 série de sous groupe

Définition 2.2.1 .

Une suite de sous-groupe d'un groupe fini ou non fini et une suite de sous-groupe définit comme suite :

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq \dots$$

2.3 Sous série normal

Définition 2.3.1 .

Une sous-série normal de groupe G est une suite de sous-groupes finis ou infinis.

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq G_3 \geq \dots \geq G_n \geq \dots \text{ où } G_{i+1} \triangleleft G_i$$

Exemple 2.3.1 .

$Z \geq 2Z \geq 4Z \geq \dots$, est une sous-série normal de groupe additif Z .

2.4 Série normal

Définition 2.4.1 .

Une sous-série normal de groupe G est un série des sous-groupes satisfié :

$$G_0 = G \geq G_1 \geq G_2 \geq G_3 \dots \geq G_n \geq \dots$$

Elle est appelée une série normal si $G_i \triangleleft G$ pour tout i .

Exemple 2.4.1 .

$Z \geq 2Z \geq 4Z \geq \dots$ fini ou non finis est une sous-série normal.

Remarque 2.4.1 .

Une série normal du groupe G est une sous-série normal, mais l'inverse n'est pas vrai. Puisque un sous-série normal n'est pas nécessairement série normal.

Exemple 2.4.2 .

Le groupe D_4 a une sous-série normal

$$\{\rho_0\} \triangleleft \{\rho_0, \mu_1\} \triangleleft \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} \triangleleft D_4, \text{ mais ce n'est pas une série normal dans } D_4$$

puisque

$$\{\rho_0, \mu_1\} \not\triangleleft D_4.$$

2.5 Série dérivé

Définition 2.5.1 .

Le série dérivé est donné par la formule :

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)} : G^{(i)}] \text{ et } G^{(i)} \triangleleft G \text{ pour tous } i.$$

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots \geq G^{(i)} \geq \dots, (\text{sous-série normal}).$$

Exemple 2.5.1 .

$$G = S_3, \{1\} \triangleleft A_3 \triangleleft S_3, (\text{i.e } D(S_3) = A_3).$$

2.6 Série central

Définition 2.6.1 .

Une série central pour un groupe G est une chaîne de sous-groupes

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_n$$

Satisfie : $G_i \trianglelefteq G$ et $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ pour tout i .

2.6.1 série central inférieure

Définition 2.6.2 .

Le série central inférieure de G est la chaîne de sous-groupe G définir par :

$$\gamma_0(G) = G$$

$$\gamma_1(G) = [\gamma_0(G) : G] = [G : G] = D(G)$$

$$\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G) : G] \text{ pour } i \geq 1.$$

$$\text{De tel que: } \gamma_0(G) = G \geq \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots$$

Remarque 2.6.1 .

Soit G un groupe.

- 1) Si H est sous-groupe de G , alors $\gamma_i(H) \leq \gamma_i(G)$ pour tous i .
- 2) Si $\phi : G \rightarrow K$, est un homomorphisme surjectif alors $\phi(\gamma_i(G)) = \gamma_i(K)$ pour tous i .
- 3) $\gamma_i(G)$ est un sous-groupe caractéristique d'un groupe G pour tout i .

2.6.2 série central supérieure

Définition 2.6.3 .

Le série central supérieure $Z_i(G)$ pour $i \geq 0$ est une chaîne de sous-groupe du groupe G définis par :

$$Z_0 = \langle 1 \rangle.$$

$$Z_1 = (G).$$

Soit $\varphi : G \rightarrow G/Z_1, Z_2 = \varphi^{-1}(Z(G/Z_1))$ si $Z_1 \triangleleft Z_2$

Ou $Z_i = \varphi^{-1}(Z(G/Z_{i-1}))$ pour $i \geq 1$, alors nous obtenons la série suivants :

$$\langle 1 \rangle = Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_n \leq \dots, \text{appelé une série central supérieure d'un groupe } G.$$

2.6.3 Série centrale descendante

Définition 2.6.4 .

Soit G un groupe. On appelle suite centrale descendante de G la suite $Z_n(G)_{n \geq 1}$ de sous-groupes de G définie par récurrence par :

$$Z_1(G) = G$$

$$Z_{n+1}(G) = [G, Z_n(G)] \text{ pour } n \geq 1$$

Pour tout $n \geq 1, Z_n(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G .

Proposition 2.6.1 [4].

On a $[Z_i(G), Z_j(G)] \subset Z_{i+j}(G)$ pour tout $i \geq 1$ et tout $j \geq 1$.

On raisonne par récurrence sur i , la proposition étant claire pour $i = 1$ et tout $j \geq 1$.

Soit $j \geq 1$; on a $[Z_{i+1}(G), Z_j(G)] = [(G, Z_i(G)), Z_j(G)]$.

Or $[(Z_i(G), Z_j(G)), G] \subset [Z_{i+j}(G), G]$ (par hypothèse de récurrence).

Donc $[Z_i(G), Z_j(G), G] \subset C^{i+j+1}G$.

De même $[(Z_j(G), G), Z_i(G)]$ est contenu dans $Z_{i+j+1}(G)$.

2.7 Série composition

Définition 2.7.1 .

Une sous-série normal de groupe G .

$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_n = \{1\}$ est appelé série composition de G si G_{i+1} est a proper maximal normal sous-groupe de G_i (equivalent a G_i/G_{i+1} est trival simple facteur).

Exemple 2.7.1 .

$G = (Z_{12}, +)$ a une série composition

$$G = Z_{12} \geq G_1 = 2Z_{12} \geq G_2 = 4Z_{12} \geq G_3 = \{0\}.$$

Avec :

$$G/G_1 \cong Z_2$$

$$G_1/G_2 \cong Z_2$$

$$G_2/G_3 \cong Z_3$$

2.8 Filtrations et théorème de Jordan-Hölder

Définition 2.8.1 .

Une filtrations du groupe G est une suite finie $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous-groupes telle que :

$$G_0 = \{1\} \leq G_1 \leq \dots \leq G_i \leq \dots \leq G_n = G$$

Avec G_i normal dans G_{i+1} , pour $0 \leq i \leq n - 1$.

On appelle gradué de G (associé à la filtration $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$) et on note $gr(G)$ la suite des $gr_i(G) = G_i/G_{i-1}$, pour $1 \leq i \leq n$.

Définition 2.8.2 .

Une filtration $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ de G est dite de Jordan-Hölder si G_i/G_{i-1} est simple pour tout $1 \leq i \leq n$.

Proposition 2.8.1 [4].

Si G est fini, G possède une suite de Jordan-Hölder.

Si $G = \{1\}$, on a la suite de Jordan-Hölder triviale ($n = 0$).

Si G est simple, on prend $n = 1$. Si G n'est pas simple, on raisonne par récurrence sur l'ordre de G . Soit $N \subset G$, N normal dans G d'ordre maximal. Alors G/N est simple, car sinon il existerait M normal dans G contenant strictement N et distinct de G . Comme $|N| < |G|$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et si $(N_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une suite de Jordan-Hölder pour N , alors $(N_0, \dots, N_{n-1}, N, G)$ en est une pour G .

Théorème 2.8.1 (Jordan-Hölder) [4]

Soit G un groupe fini et soit $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite de Jordan-Hölder de G . Le gradué de G , à permutation près des indices, ne dépend pas de la suite choisie.

Il suffit de montrer que si S est un groupe simple fixé et si $n(G, (G_i), S)$ est le nombre de j tels que G_j/G_{j-1} est isomorphe à S , alors $n(G, (G_i), S)$ ne dépend pas de la suite (G_i) .

On commence par une remarque : si H est un sous-groupe de G , une filtration (G_i) sur G induit une filtration (H_i) sur H définie par $H_i = G_i \cap H$. De même, si N est normal, on a une filtration sur G/N définie par $(G/N)_i = G_i / (G_i \cap N)$.

$$\{1\} \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow \{1\}$$

se conserve par filtration:

$$\{1\} \rightarrow N_i/N_{i-1} \rightarrow G_i/G_{i-1} \rightarrow (G/N)_i / (G/N)_{i-1} \rightarrow \{1\}$$

d'où finalement la suite exacte

$$\{1\} \rightarrow gr_i(N) \rightarrow gr_i(G) \rightarrow gr_i(G/N) \rightarrow \{1\}.$$

Exemple 2.8.1 .

1) Filtration de S_3 : A_3 est normal dans S_3 et A_3 est cyclique d'ordre 3. D'où la filtration

$$\{1\} \leq A_3 \leq S_3.$$

2) Filtration de S_4 : A_4 est normal dans S_4 avec $(S_4 : A_4) = 2$. Dans A_4 , il existe un sous-groupe normal D de type (2.2) : $D = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ avec

$$\sigma_1 = (a, b)(c, d),$$

$$\sigma_2 = (a, c)(b, d),$$

$$\sigma_3 = (a, d)(b, c).$$

On a donc la filtration

$$\{1\} \leq \{1, \sigma_i\} \leq D \leq A_4 \leq S_4.$$

L'ordre des quotients successifs est 2, 2, 3, 2. Le choix de i étant arbitraire, il n'y a pas unicité de la filtration.

Remarque 2.8.1 .

Filtration de S_n pour $n \geq 5$: le groupe A_n étant simple, on a la filtration $\{1\} \leq A_n \leq S_n$.

Chapitre 3

Groupes résolubles et nilpotents

Dans ce chapitre, nous étudions en profondeur sur les groupes résolubles et les groupes nilpotents. Mention leurs définitions et des exemples, des caractéristiques les plus importantes et la différence entre eux, ensuite leur donner les plus importantes grandes théories avec des preuves.

3.1 Groupes résolubles

Définition 3.1.1 .

Soit G un groupe, on dit que G est résoluble s'il existe une suite finie.

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

Avec pour tout $i \in [1, n]$, $G_{i-1} \triangleleft G_i$ et G_i/G_{i-1} abélien.

Exemple 3.1.1 .

Les groupes S_n sont résolubles si et seulement si $n \leq 4$.

$G = S_3$ on a la série $\{1\} \triangleleft A_3 \triangleleft S_3$

$$S_3/A_3 \cong Z_2$$

$A_3/\{1\} = Z_3$ sont abéliens donc S_3 est résoluble.

Théorème 3.1.1 .

H sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble.

Preuve. .

$$H \leq G \quad \forall x, y \in H \quad [x, y] \in D'(G)$$

$$D(H) \leq D(G)$$

$$D^{(i)}(H) \leq D^{(i)}(G) \quad \forall i \in I \quad D^n(G) = \{1\}$$

$$\text{donc } \exists r \in I \quad D^{(r)}(G) = 1$$

$$D^{(r)}(H) = 1. \quad \blacksquare$$

Théorème 3.1.2 [4].

Soit H un sous-groupe de G . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) H contient $D(G)$.
- 2) H est normal et G/H est abélien.

Ainsi $G/D(G)$ est le plus grand quotient abélien de G .

On peut itérer le procédé et définir la suite des sous-groupes dérivés de G :

$$D^0G = G$$

$$D^nG = [D^{n-1}G, D^{n-1}G] \text{ pour } n \geq 1$$

$$\text{On a } G \geq D^1G \geq D^2G \geq \dots$$

Théorème 3.1.3 [6].

Soit G un groupe et soit n un entier ≥ 1 . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) G est résoluble de classe $\leq n$.
- 2) Il existe une suite $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = \{1\}$ de sous-groupes normaux de G tel que G_i/G_{i+1} soit abélien pour $0 \leq i \leq n-1$.

2') Il existe une suite $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = \{1\}$ de sous-groupes de G tels que G_i soit normal dans G_{i-1} et que G_{i-1}/G_i soit abélien, pour $1 \leq i \leq n$.

3) Il existe un sous-groupe abélien A normal dans G tel que G/A soit résoluble de classe $\leq n-1$.

Démonstration. .

$1 \implies 2)$ Posons $G_i = D^iG$ pour tout $i \geq 0$. Puisque $D(G)$ est stable par tout automorphisme (même non intérieur!) de G , D^iG est normal dans tout i . La suite $(G_i)_{i \geq 0}$ ainsi définis vérifie donc (2).

$2 \implies 2'$) Est trivial .

$2' \implies 1$) Par récurrence sur K on voit que $D^K G \subset G_K$ pour tout K , d'où $D^n G = \{1\}$.

$1 \implies 3$) On prend $A = D^{n-1} G$.

$3 \implies 1$) D'après l'implication $(1) \implies (2)$, appliquée à G/A et à $n-1$, il existe une suite:

$A_0 = G \geq A_1 \dots \geq A_{n-1} = A$ de sous-groupes normaux de G telle que la suite des

quotients :

$$G/A \geq A_1/A \geq \dots \geq A_{n-1}/A = \{1\}$$

Vérifie la condition (2). Alors la suite :

$$G \geq A_1 \geq \dots \geq A_{n-1} \geq \{1\}$$

Vérifie la condition (2) et l'implication $(2) \implies (1)$ appliquée à G et à n permet de conclure . ■

Remarque 3.1.1 .

Tout sous-groupe (et tout groupe quotient) d'un groupe résoluble de classe $\leq n$ est résoluble de classe $\leq n$.

Proposition 3.1.1 [4].

Soit G un groupe fini et soit $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = \{1\}$ une suite de Jordan-Hölder de G . Pour que G soit résoluble, il faut et il suffit que G_i/G_{i+1} soit cyclique d'ordre premier. Pour $0 \leq i \leq n-1$.

Remarquons d'abord que si un groupe est simple et résoluble, alors son groupe dérivé, étant normal, est réduit à $\{1\}$; le groupe est donc abélien et, étant simple, est cyclique d'ordre premier. La proposition en résulte.

Exemple 3.1.2 .

- 1) Les groupes S_n sont résolubles si et seulement si $n \leq 4$.
- 2) Un groupe simple non abélien n'est pas résoluble.

Théorème 3.1.4 [4].

Soit G un groupe, on pose :

$$D^0(G) = G$$

$$D^1(G) = D(G)$$

$D^i(G) = D^i(D^{i-1}(G))$ pour tout $i \geq 2$.

Alors G est résoluble si et seulement s'il existe un entier n tel que $D^n(G) = \{1\}$.

Démonstration. .

S'il existe n tel que $D^n(G) = \{1\}$, alors chaque $D^i(G)/D^{i-1}(G)$ est un groupe abélien par définition du sous-groupe dérivé donc G est résoluble via la suite des $D^i(G)$. Notons que chaque $D^i(G)$ est distingué dans G tout entier parce que le sous-groupe dérivé d'un groupe H est caractéristique dans H , et cette propriété est transitive .

En sens inverse si G est résoluble, soit $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite comme dans la définition. Alors G/G_{n-1} est abélien donc $G_{n-1} \geq D(G)$. Par récurrence sur i , on a $G_{n-1} \geq D^i(G)$ (si $G_{n-i+1} \geq D^{i-1}(G)$, alors comme G_{n-i+1}/G_{n-i} est abélien.

On a $G_{n-i} \geq D(G_{n-i+1}) \geq D(D^{i-1}(G)) = D^i(G)$.

Pour $i = n$ cela donne $D^n(G) = \{1\}$. ■

Définition 3.1.2 .

S'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $G^{(n)} = 1$, on dit que G est résoluble.

Le plus petit entier $n \geq 0$ vérifiant $G^{(n)} = \{1\}$ est appelé la classe de résolubilité de G .

Les deux lemmes suivants se montrent facilement par récurrence.

Lemme 3.1.1 .

Si H est un sous-groupe de G , on a $H^{(K)} \leq G^{(K)}$ pour tout entier $K \geq 0$.

Lemme 3.1.2 .

Si $f : G_1 \rightarrow G_2$ est un homomorphisme de groupe, on a $f(G^{(K)}) = (f(G))^{(K)}$ pour tout entier $K \geq 0$.

Théorème 3.1.5 [2].

Soient G un groupe résoluble de classe r et H est un sous-groupe. Alors :

- 1) H est résoluble de classe $\leq r$.
- 2) si H est normal dans G , G/H est résoluble de classe $\leq r$.

Démonstration. .

1) C'est une conséquence immédiate du lemme(3.2.1)

2) Si π est la projection canonique de G sur G/H on a $\pi(G^{(r)}) = \pi(\{1\}) = \{1\}$, mais d'après le lemme(3.2.2) $\pi(G^r) = \pi(G)^r = (G/H)^{(r)}$, d'où $(G/H)^{(r)} = \{1\}$ ■

Théorème 3.1.6 [4].

Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G . Alors, si H et G/H sont résolubles (de classe respectives r et s), le groupe G est résoluble (de classe $\leq r + s$).

Démonstration. .

Soit π est la projection canonique de G sur G/H . En utilisant le lemme (3.2.2), on peut écrire : $\pi(G^{(s)}) = \pi(G)^{(s)} = (G/H)^{(s)} = \{1\}$.

Donc $G^{(s)} \leq H$. D'après le lemme (3.2.1), $(G^{(s)})^{(r)} = G^{(s+r)} \leq H^{(r)}$ d'où $G^{(s+r)} = \{1\}$ car $H^{(r)} = \{1\}$. ■

Théorème 3.1.7 [2].

Pour un groupe G , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) G est résoluble.

2) Il existe une suite décroissante finie $(H_K)_{K=0, \dots, n}$ de sous-groupes de G telle que :

$$\{1\} = H_n \triangleleft H_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

Les quotients H_K/H_{K+1} sont abéliens (pour $K = 0, \dots, n-1$).

Démonstration. .

1 \implies 2) Si G est résoluble de classe n , la suite définie par :

$$H_K = G^{(K)} \quad (K = 0, 1, \dots, n) \text{ convient.}$$

2 \implies 1) Il suffit de montrer par récurrence que $G^{(K)} \leq H_K$ ($K = 0, 1, \dots, n$). L'inclusion étant triviale pour $K = 0$, supposons que l'on ait $G^{(k)} \leq H_k$.

On en déduit que $G^{(k)} = G^{(k+1)} \leq H'_k$. Or, H_k/H_{k+1} est abélien, donc d'après le théorème (3.1.2), on a $H'_k \leq H_{k+1}$.

Soit G un groupe quelconque, une suite $(H_K)_{K=0, 1, \dots, n}$ de G telle que :

$$\{1\} = H_n \triangleleft H_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G.$$

Est appelée une série de G de longueur n . Les groupes H_K/H_{K+1} ($K = 0, 1, \dots, n-1$) sont les quotients (ou les facteurs) de la série, l'entier n est la longueur de la série. Bien qu'il soit fait ici un autre choix, il faut noter que la longueur d'une série $(H_K)_{K=0, 1, \dots, n}$ est souvent définie comme le nombre de quotients H_K/H_{K+1} ($K = 0, 1, \dots, n-1$)

non réduits à l'unité. Il est clair que ces définitions ne sont pas équivalentes.

La proposition précédente peut alors se formuler en ces termes : un groupe est résoluble si et seulement si il possède une série à quotients abéliens. ■

3.2 Groupes nilpotents

Définition 3.2.1 .

On dit qu'un groupe G est nilpotent s'il existe une suite finie

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

Avec pour tout $i \in [1, n]$, $G_i \triangleleft G$ et G_i/G_{i-1} inclus dans le centre de G/G_{i-1}

Cela signifie donc que G se déduit de $\{1\}$ par une suite finie d'extensions centrales (une extension $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$ est dit centrale si N est inclus dans le centre de G).

Remarque 3.2.1 .

Un groupe abélien est nilpotent.

Soit G un groupe abélien donc $Z(G) = 1$

Proposition 3.2.1 [3].

Si G est un groupe, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) G est nilpotent, de classe $\leq n$.
- 2) Il existe une suite finie $(H_K)_{K=0,1,\dots,n}$ de sous groupes normaux de G telle que :

$$\{1\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$$

Avec $H_{K+1}/H_K \leq Z(G/H_K)$ pour $K = 0, 1, \dots, n-1$.

Démonstration. .

$1 \implies 2$) Il suffit de prendre $H_K = Z_K(G)$ pour $K = 0, 1, \dots, n$.

$2 \implies 1$) A l'aide d'une récurrence sur K .

Montrons l'inclusion $H_K \subseteq Z_K(G)$ pour $K = 0, 1, \dots, n$ (d'où $Z_n(G) = G$).

L'inclusion étant trivial pour $K = 0$, supposons que l'on ait $H_K \subseteq Z_K(G)$.

Soient $h \in H_{K+1}$ et $x \in G$. Puisque $H_{K+1}/H_K \leq Z(G/H_K)$, on a $[h, x] \in H_K$, d'où $[h, x] \in Z_K(G)$.

En d'autres termes, la classe de h modulo $Z_K(G)$ est dans $Z(G/Z_K(G)) = Z_{K+1}(G)/Z_K(G)$.

D'où $h \in Z_{K+1}(G)$, ce qui prouve l'inclusion $H_{K+1} \subseteq Z_{K+1}(G)$.

Si A et B sont deux parties d'un groupe G , on note $[A, B]$ le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[a, b]$, avec $a \in A, b \in B$.

On définit une suite $(\gamma_K(G))_{K \geq 1}$ de sous-groupes de G par :

$$\gamma_1(G) = G.$$

$$\gamma_{K+1}(G) = [\gamma_K(G), G] \text{ pour tout entier } K \geq 1.$$

Vérifions par récurrence que les sous-groupes $\gamma_K(G)$ ($K \geq 1$) sont normaux dans G : le résultat étant clair pour $K = 1$, supposons que $\gamma_K(G)$ soit normal dans G pour un entier $K \geq 1$ donné.

Le sous-groupe $\gamma_{K+1}(G)$ étant engendré par les éléments de la forme $[y, x]$ ($x \in G, y \in \gamma_K(G)$), il suffit de montrer que $z^{-1}[y, x]z = [z^{-1}yz, z^{-1}xz] \in \gamma_{K+1}$ car $z^{-1}yz \in \gamma_K(G)$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où le résultat.

De plus, la suite $(\gamma_K(G))_{k \geq 1}$ est décroissante pour la relation d'inclusion car pour $x \in G$ et $y \in \gamma_K(G)$, on a $[y, x] = y^{-1}(x^{-1}yx) \in \gamma_K(G)$ d'où $\gamma_{K+1}(G) \leq \gamma_K(G)$. Par définition, la suite $(\gamma_K(G))_{K \geq 1}$ est appelée la suite centrale descendante de G . ■

Lemme 3.2.1 .

Soient H et K deux sous-groupes normaux d'un groupe G , engendrés respectivement par $R \subseteq H$ et $S \subseteq K$. Alors $[H, K]$ est engendré par les éléments de la forme $x^{-1}[a, b]x$ ($a \in R, b \in S, x \in G$).

Démonstration. .

Notons L le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme :

$$x^{-1}[a, b]x \text{ (} a \in R, b \in S, x \in G \text{)}.$$

La relation $x^{-1}[a, b]x = [x^{-1}ax, x^{-1}bx]$ montre que L est inclus dans $[H, K]$. Pour établir l'inclusion $[H, K] \leq L$, il suffit de montrer que les éléments de la forme $[a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r}, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\beta_s}]$ ($a_1, \dots, a_r \in R, b_1, \dots, b_s \in S, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \{-1, 1\}$) sont dans L . ■

Corollaire 3.2.1 .

Soit G un groupe engendré par une partie $S \subseteq G$. Supposons que pour un entier fixé $n > 0$, on prend $[a_1, \dots, a_n] = 1$ pour tout $a_1, \dots, a_n \in S$. Alors G est nilpotent, de classe $< n$.

Théorème 3.2.1 [3].

Pour tout entier $n \geq 1$, $\gamma_n(G)$ est engendré par les éléments de la forme $[x_1, \dots, x_n]$, ($x_1, \dots, x_n \in G$).

Corollaire 3.2.2 .

Un groupe G est nilpotent si et seulement si il existe un entier $n \geq 1$ telque $[x_1, \dots, x_n] = 1$ quel que soit $x_1, \dots, x_n \in G$. Si n est le plus petit entier vérifiant cette condition, la classe de nilpotence de G est égale à $(n - 1)$.

Corollaire 3.2.3 .

Soient G est un groupe nilpotent de classe n et H un sous-groupe de G .

Alors :

- 1) H est nilpotent de classe $\leq n$.
- 2) Si H est normal dans G , alors G/H est nilpotent de classe $\leq n$.

Corollaire 3.2.4 .

Soient G_1, \dots, G_n des groupes nilpotents de classes respectives n_1, \dots, n_K . Alors le produit direct $G_1 \times \dots \times G_K$ est nilpotent de classe $\max(n_1, \dots, n_K)$.

Corollaire 3.2.5 .

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G inclus dans $Z(G)$ (H est donc normal dans G).

Si G/H est nilpotent de classe n , alors G est nilpotent, de classe $\leq n + 1$.

Démonstration. .

Pour tout $x_1, \dots, x_n \in G$, on a $[x_1, \dots, x_n] \in H$, d'où, pour tout $x_{n+1} \in G$,
 $[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = 1$ car $H \leq Z(G)$. ■

Remarque 3.2.2 .

Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G le fait que H et G/H soient nilpotents n'entraîne pas la nilpotence de G .

Exemple 3.2.1 .

Le sous-groupe alterné A_3 est un sous-groupe normal du groupe symétrique S_3 .

Les groupes A_3 et S_3/A_3 sont nilpotents (ils sont en fait commutatifs), mais S_3 n'est pas nilpotent puisque son centre est réduit à l'unité.

Proposition 3.2.2 [4].

Soient G un groupe nilpotent et H un sous-groupe normal de G . Alors, si H est distinct de $\{1\}$, $H \cap Z(G)$ est aussi distinct $\{1\}$.

Démonstration. .

Soit $h \in H \setminus \{1\}$. Considérons l'ensemble E de entiers $n > 0$ vérifiant :

$$[h, x_1, \dots, x_n] = 1 \text{ pour tout } x_1, \dots, x_n \in G.$$

Cet ensemble étant non vide (il contient tout entier supérieur ou égal à la classe de nilpotence de G), notons K son plus petit élément. L'entier $K - 1$ n'est pas dans E : il existe donc des éléments a_1, \dots, a_{K-1} dans G tels que $u = [h, a_1, \dots, a_{K-1}] \neq 1$ ($u = h$ si $K = 1$).

Par contre K est dans E , d'où l'égalité $[u, x_K] = [h, a_1, \dots, a_{K-1}, x_K] = 1$.

Pour tout $x_K \in G$.

En d'autres termes, l'élément u est dans $Z(G)$. Mais il est aussi dans H ($h \in H$ et $H \triangleleft G$), d'où l'existence d'un élément distinct de 1 dans $H \cap Z(G)$. ■

Proposition 3.2.3 [2].

Soit G un groupe nilpotent, dont tous les sous-groupes maximaux (s'il existe) sont normaux.

Alors, on a l'inclusion $D(G) \leq \phi(G)$.

Démonstration. .

La proposition est triviale si G ne possède pas de sous-groupes maximaux. Sinon, soit M un sous-groupe maximal quelconque. Le groupe quotient G/M ne possédant pas de sous-groupe propre distinct de l'unité, il est cyclique d'ordre premier; en particulier, il est abélien, d'où l'inclusion $D(G) \leq M$, qui entraîne $D(G) \leq \phi(G)$.

D'après le corollaire (3, 1), un groupe nilpotent vérifie l'hypothèse de la proposition précédente. ■

Corollaire 3.2.6 .

Dans un groupe nilpotent, on a l'inclusion $D(G) \leq \phi(G)$.

Théorème 3.2.2 [4].

Si H est un sous-groupe de G , les assertions suivantes sont équivalentes :

1) H est normal dans G et G/H est abélien .

2) $D(G) \leq H$.

Démonstration. .

$1 \implies 2$) Si G/H est abélien, on a $[x, y] \in H$ pour tout $x, y \in G$, d'où l'inclusion $D(G) \leq H$.

$2 \implies 1$) Pour $x \in G, h \in H$, on a $x^{-1}hx = h[h, x] \in H$ car $[h, x] \in H$, donc H est normal dans G . De plus $[x, y]$ est dans H pour tout $x, y \in G$, donc G/H est abélien.

La suite dérivé de G est la suite $(G^{(K)})_{K \geq 0}$ de sous-groupes de G définie par $G^{(0)} = G$ et $G^{(K+1)} = G^{(K)'$ pour tout entier $K \geq 0$. ■

Théorème 3.2.3 [3].

Soient G un groupe nilpotent et H un sous-groupe de G alors :

1) Il existe une suite croissante finie $(H_K)_{K=0,1,\dots,n}$ de sous-groupes de G telle que

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$$

(on dit que H est sous normal dans G).

2) Si $H \neq G$, le normalisateur de H dans G est distinct de H (on dit que G vérifie la condition du normalisateur).

Démonstration. .

1) Si n désigne la classe de nilpotence de G , vérifions que la suite définie par:

$H_K = HZ_K(G)$ ($K = 0, 1, \dots, n$) convient.

Les inclusions

$$\{1\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \triangleleft Z_{n-1}(G) \leq Z_n(G) = G$$

Entraînent

$$H = HZ_0(G) \leq HZ_1(G) \leq \dots \triangleleft HZ_{n-1}(G) \leq HZ_n(G) = G$$

Clairement, H normalise H et $Z_K(G)$, donc H normalise $HZ_K(G)$. De plus $Z_{K+1}(G)$ normalise aussi $HZ_K(G)$: en effet, l'égalité $Z_{K+1}(G)/Z_K(G) = Z(G/Z_K(G))$ entraîne que pour tout $x \in HZ_K(G)$, $z \in Z_{K+1}(G)$, on a $[x, z] = y \in Z_K(G)$.

D'où $z^{-1}xz = xy \in HZ_K(G)$.

On en déduit que $HZ_{K+1}(G)$ normalise $HZ_K(G)$, d'où le résultat .

2) Si K est le plus grand entier tel que $HZ_K(G) = H$, $HZ_{K+1}(G)$ contient strictement le sous-groupe $H = HZ_K(G)$, en même temps qu'il le normalise. ■

Corollaire 3.2.7 .

Dans un groupe nilpotent, les sous-groupes maximaux (s'il en existe) sont normaux.

Théorème 3.2.4 [4].

p-groupes finis sont nilpotent.

Démonstration. .

$Z_{r+1}(G)/Z_r(G) = Z(G/Z_r(G))$. Depuis le centre d'un p-groupe non trivial est non triviale, $Z_r(G) < Z_{r+1}(G)$ à moins $Z_r(G) = G$. ■

Théorème 3.2.5 [2].

Sous-groupes et groupes quotients des groupes nilpotents sont nilpotent.

Démonstration. .

Supposons que $Z_n(G) = G$ et soit $H \leq G$. Pour chaque r , $Z_r(H) \geq Z_r(G) \cap H$ et si $Z_n(H) = H$.

Supposons maintenant que H est normal dans G . Pour chaque r .

$Z_r(G)H/H \geq Z_r(G/H)$ et ainsi $Z_n(G/H)$ est trivial.

Clairement, si G est nilpotent de classe n alors la classe de nilpotence de chaque sous-groupe et chaque groupe quotient de G est inférieur ou égal à n . ■

Proposition 3.2.4 [2].

Un groupe G est nilpotent si et seulement s'il existe une filtration $(G_i)_{1 \leq i \leq n+1}$.

Telle que :

$$G_1 = G \geq G_2 \geq \dots \geq G_{n+1} = \{1\}$$

Avec $(G, G_i) \leq G_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Proposition 3.2.5 [4].

Tout groupe nilpotent est résoluble.

Démonstration. .

C'est une conséquence du résultat suivant : pour tout groupe G et pour tout entier $K \geq 0$, on a l'inclusion $G^{(K)} \leq \gamma_{2^K}(G)$. En effet, si G est nilpotent de classe c , en choisissons K tel que $2^K > c$, on aura $G^{(K)} = \{1\}$. Montrons donc par récurrence l'inclusion

précédente. Pour $K = 0$, le résultat est trivial. Suppose que $G^{(K)} \leq \gamma_{2^K}(G)$. On a alors $G^{(K+1)} = [G^{(K)}, G^{(K)}] \leq [\gamma_{2^K}(G), \gamma_{2^K}(G)]$.

Mais $[\gamma_{2^K}(G), \gamma_{2^K}(G)] \leq \gamma_{2^{K+2K}}(G) = \gamma_{2^{K+1}}(G)$ d'après la proposition(1.6) d'ou l'inclusion $G^{(K+1)} \leq \gamma_{2^{K+1}}(G)$. ■

Remarque 3.2.3 .

On dit qu'un groupe G est une extension d'un groupe A par un groupe B s'il existe un sous-groupe $H \triangleleft G$ tel que H et G/H soient respectivement isomorphisme à A et B . La proposition (2.5.5) enonce qu'une extension d'un groupe résoluble par un groupe résoluble est résoluble. On résume cela en disant que la propriété de résolubilité est stable par extension. Par contre, la nilpotence n'est pas stable par extension : comme on l'a déjà noté (cf .remaeque suivant le corollaire(1.5)).

Exemple 3.2.2 .

le groupe symétrique S_3 est une extension du groupe abélien A_3 par le groupe $S_3/A_3 \simeq Z/2Z$ mais S_3 n'est pas nilpotent. Notons que S_3 est résoluble (de classe 2).

une groupe résoluble n'est donc pas nécessairement nilpotent.

Conclusion générale

A la fin de ce mémoire et après l'étude de cette importante partie de la théorie des groupes, nous avons déduit que cet objet joue un grand rôle à l'étude et à l'investigation dans le domaine de la théorie des groupes (les groupes fini résolubilité et nilpotence), nous soustrait que ce cela un document convenable pour la prochains études en mathématique.

Bibliographie

- [1] AMARA HITTA, COURS D'ALGEBRE ET EXERCICES CORRIGES 2^{ème} EDITION(2006) U. DE PICARDIE DE PARIS VI.
- [2] DAVID HARARI, ALGEBRE-1-GROUPES.
- [3] GERARD ENDIMIONI COURS D,E,A.
- [4] JEAN-PIERRE-SERRE(GROUPE-FINI)-C,E,N,S-DE-JEUNES FILLES(STRASBOURG-PARIS-2004).
- [5] JEAN-PIERRE EXOFIER(TOUTE L'ALGEBRE DE LA LICENCE) 2^{ème} EDITION UNIVERSITE DE RENNES-1(2004).
- [6] JOHN,B, FRAHEUGH-AFIRST COURE IN ABSTRACTALGEBRA 3^{ème} EDITION UNIVERSITY OF RHODE-ISLAND(2004).
- [7] M.ZITOUNI-ALGEBRE-OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES ALGER(1993).

Résumé

Dans notre mémoire, nous traitent partie un important des théorie des groupes c'est les groupes finis résolubilité et nilpotence de cela nous rappellent les principaux définitions des groupes, sous-groupes et aussi les propriétés fondamentales des séries des sous-groupes.

On présent en dernière chapitre un étude intensive sur les groupes résolubles et les groupes nilpotents avec une idée simple de comparant (entre les groupes résoluble et les groupes nilpotents) avec des exemples import.

Mots clés:

Les groupes / Les groupes dérivés / Sous-groupes / séries des groupes / morphisme / Les groupes résolubles / Les groupes nilpotent.

Abstract

In our memoire, we treat a partion theoris groups is solvable and nilpotent finite groups that we rappellent the main definitions of groups, subgroups and also fondamentales properties series of subgroups.

We present in section dernière intensive study of solvable groups and nilpotent groups with a simple idea comparant (between solvable groups and nilpotent groups) with examples matter.

Keys words:

Groups / derive groups / subgroups / series of subgroups / morphism / solvables groups / nilpotents groups.

المنتھية التحليلية ، المنتھية ، المهم نظرية وهي التعاريف الرئيسية الجزئية. الأساسية الاخير بسيطة بينهما) التحليلية (مهمة. المفتاحية: / / / /