

Remerciements

Nous remercions tout d'abord **Dieu** le tout puissant qui nous a données la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Nos vifs remerciements vont également à notre encadreur **Dr. Ben Ali Brahim** qui nous a guidées durant ce travaie par ses conseils et remarques qui étaient très utiles pour réaliser ce mémoire.

Nos remerciements vont également à nos familles par leurs aides morales et matérielles tout au long de notre scolarité.

Notations générales

\langle, \rangle	Le produit scalaire.
∂	La dérivée partielle.
\mathcal{A}^*	L'adjoint d'un opérateur \mathcal{A} .
$G(x, \xi)$	La fonction de Green.
$G^*(x, \xi)$	La fonction de Green d'un problème auto-adjoint.
$W(g, f)$	Le wronskien.
Δ	Le laplacien.
Y_l	La fonction de Neumann.
J_n	La fonction de Bessel.
K_n	La fonction de Bessel modifiée associée à Y_n .
I_n	La fonction de Bessel modifiée associée à J_n .
$H_n^{(1,2)}$	La fonction de Hankel.
\mathbb{R}	L'ensemble des nombres réels.
\mathbb{N}	L'ensemble des nombres naturels.
\mathbb{C}	L'ensemble des nombres complexes.
E	Energie.
$V(r, \theta)$	Le potentiel.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Notions de base	2
1.1 Équation différentielle linéaire homogène d'ordre n	2
1.1.1 Définitions	2
1.1.2 Théorèmes	2
1.2 Construction de la fonction de Green pour les équations différentielles ordinaires d'ordre n	3
1.2.1 Définition de la fonction de Green	4
1.2.2 Théorème d'unicité	4
1.3 Cas des équations différentielles du second ordre	7
1.3.1 Un cas particulier important	9
1.4 Résolution du problème aux limites à l'aide de la fonction de Green	11
1.5 Problèmes adjoint et auto-adjoint	13
1.6 Équation de Bessel	15
1.6.1 Propriétés	17
2 Résolution du problème du potentiel axi-symétrique	18
2.1 Section A : $E > v_1$	20
2.1.1 Région ($r > a$)	20
2.1.2 Région ($b \leq r \leq a$)	22
2.1.3 Région ($0 < r \leq b$)	24
2.1.4 Calcul des coefficients γ et δ	26
2.1.5 Calcul des coefficients α	28
2.1.6 Région Mixte	31
2.2 Section B : $v_0 < E < v_1$	35
2.2.1 Région ($r > a$)	35
2.2.2 Région ($b \leq r \leq a$)	35
2.2.3 Région ($0 < r \leq b$)	36
2.2.4 Calcul des coefficients γ_1 et δ_1	37
2.2.5 Calcul des coefficients α_1	38
2.2.6 Région Mixte	41
2.3 Section C : $E < v_0$	44
2.3.1 Région ($r > a$)	44
2.3.2 Région ($b \leq r \leq a$)	44
2.3.3 Région ($0 < r \leq b$)	46
2.3.4 Calcul des coefficients γ_2 et δ_2	46
2.3.5 Calcul des coefficients α_2	48
2.3.6 Région Mixte	52
Conclusion générale	56

Introduction générale

La mathématique constitue un outil essentiel pour trouver des solutions de quelques problèmes de mathématiques et de physique mathématique. Les problèmes à deux dimensions jouent un rôle important dans différents problèmes de la physique mathématique. Cependant, la quasi-totalité des problèmes réels nécessitent un traitement numérique. Très peu de situation pratique ouvre une voie un traitement analytique exact. Ces situations sont celles où le problème en question, est doué de symétrie de révolution. Dans ce cas précis, l'équation de Schrödinger est séparable et de plus, on peut la résoudre dans chaque région (sous forme de disque ou bien couronne) où le potentiel à la même forme (constant ou bien fonction de la variable r). La méthode de la fonction de Green est bien adaptée à ce genre de problème. Ces fonctions sont introduites par George Green en 1828 pour les besoins de l'électromagnétisme, utilisées par Neumann dans sa théorie du potentiel Newtonien et par Helmholtz en acoustique. Elles sont aussi un outil puissant en théorie quantique des champs après que Feynman les a popularisées sous le nom de propagateur dans sa formulation en intégrale de chemin de l'électrodynamique quantique.

Au premier chapitre, nous définissons tout d'abord la notion d'équation différentielle linéaire homogène (définitions, théorèmes). Ensuite, nous avons développé la théorie de la construction de la fonction de Green pour une équation différentielle ordinaire en appuyant la théorie par quelques exemples. Finalement, nous avons donné un aperçu sur le problème auto-adjoint, ainsi que les fonctions de Bessel et leurs propriétés.

Au deuxième chapitre, nous avons construit la fonction de Green relative à l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans l'espace à deux dimensions. Pour cela, nous avons la continuité de la fonction de Green et de sa dérivée au bord des régions que nous avons considérées. Le problème étudié, concerne l'étude d'une particule quantique qui se déplace dans un potentiel axe-symétrique en dimension 2. Nous avons supposé que le potentiel $V(r)$ soit constant par morceaux sur les différentes régions (que nous avons considérées des disques et couronnes). Tous les résultats trouvés, sont basés, comme il est attendu dans ce genre de problème, sont exprimés à l'aide des fonctions de Bessel. On termine notre mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Équation différentielle linéaire homogène d'ordre n

Considérons une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y = 0. \quad (1.1)$$

On suppose que a_1, a_2, \dots, a_{n-1} sont des constantes. Avant d'indiquer une méthode de résolution de l'équation (1.1), nous donnerons deux définitions qui nous seront utiles par la suite.

1.1.1 Définitions

1. Si on a pour tous les x du segment $[a, b]$ l'égalité

$$\varphi_n(x) = A_1 \varphi_1(x) + A_2 \varphi_2(x) + \dots + A_{n-1} \varphi_{n-1}(x),$$

où A_1, A_2, \dots, A_{n-1} sont des constantes non nulles, on dit que $\varphi_n(x)$ est une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$.

2. Les $n - 1$ fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ sont dites linéairement indépendantes si aucune d'elles ne peut être représentée comme combinaison linéaire des autres. [6]

Remarque 1.1.1 *Il résulte de ces définitions que si les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ sont linéairement dépendantes, il existe alors des constantes C_1, C_2, \dots, C_n ne sont pas toutes nulles et telles que l'on a, quel que soit x pris sur le segment $[a, b]$,*

$$C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) \neq 0.$$

Passons maintenant à la solution de l'équation (1.1), on a pour cette équation le théorème suivant :

1.1.2 Théorèmes

Si les fonctions y_1, y_2, \dots, y_n sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.1), sa solution générale est de la forme :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

où C_1, C_2, \dots, C_n sont des constantes arbitraires.

Si les coefficients de l'équation (1.1) sont constants, on trouve la solution générale tout comme pour l'équation du second ordre.

1. On forme l'équation caractéristique

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

2. On trouve les racines de l'équation caractéristique k_1, k_2, \dots, k_n .

3. Suivant le caractère des racines, on écrit les solutions particulières linéairement indépendantes en partant de ce qui suit :

(a) Il correspond à toute racine réelle simple k une solution particulière e^{kx} .

(b) Il correspond à toute couple de racines complexes conjuguées simples $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ et $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ deux solutions particulières $e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

(c) Il correspond à toute racine réelle k d'ordre de multiplicité r autant de solutions particulières linéairement indépendantes

$$e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1} e^{kx}.$$

(d) Il correspond à tout couple de racines complexes conjuguées $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, d'ordre de multiplicité μ , 2μ solutions particulières :

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Le nombre de ces solutions est égal au degré de l'équation caractéristique (qui est aussi l'ordre de l'équation différentielle proposée).

4. Ayant trouvé n solutions linéairement indépendantes y_1, y_2, \dots, y_n , on écrit la solution générale de l'équation différentielle proposée sous la forme :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

où C_1, C_2, \dots, C_n sont des constantes arbitraires. [6]

1.2 Construction de la fonction de Green pour les équations différentielles ordinaires d'ordre n

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles. Nous considérons le cas particulièrement important pour la physique, des équations différentielles du second ordre, et nous commençons par l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n .

Soit l'équation différentielle d'ordre n

$$L[y] = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad (1.2)$$

où les fonctions $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ sont continues sur $[a, b]$, $p_0(x) \neq 0$, sur $[a, b]$ avec les conditions aux limites

$$V_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \dots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.3)$$

les formes linéaires V_1, V_2, \dots, V_n en $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$ étant linéairement indépendantes.

Supposons que le problème aux limites homogène (1.2)-(1.3) admet la seule solution triviale $y(x) = 0$.

1.2.1 Définition de la fonction de Green

On appelle fonction de Green (ou fonction d'influence) du problème aux limites (1.2)-(1.3) la fonction $G(x, \xi)$ construite pour tout point ξ , $a < \xi < b$. Cette fonction jouit des 4 propriétés suivantes [3] :

1. $G(x, \xi)$ est continue et possède des dérivées continues par rapport à x jusqu'à l'ordre $(n-2)$ inclus pour $a \leq x \leq b$.
2. Sa $(n-1)$ -ième dérivée par rapport à x présente au point $x = \xi$ une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur $\frac{1}{p_0(\xi)}$, i.e

$$\frac{\partial^{(n-1)}G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{(n-1)}G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}} \Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

3. Dans chacun des intervalles $[a, \xi)$ et $(\xi, b]$ la fonction $G(x, \xi)$ considérée comme une fonction de x est solution de l'équation (1.2) :

$$L[G] = 0.$$

4. $G(x, \xi)$ vérifie les conditions aux limites (1.3) :

$$V_k(G) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

1.2.2 Théorème d'unicité

Théorème 1.2.1 *Si le problème aux limites (1.2)-(1.3) n'a pas de solution que la solution triviale $y(x) = 0$, l'opérateur L a une fonction de Green $G(x, \xi)$ et une seule. [3]*

Preuve. Soient $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ les solutions linéairement indépendantes de l'équation $L[y] = 0$. D'après la propriété (c), sur les intervalles $[a, \xi)$ et $(\xi, b]$ la fonction cherchée $G(x, \xi)$ doit être de la forme :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x) & \text{pour } a \leq x \leq \xi \\ b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x) & \text{pour } \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

avec $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des fonctions de ξ . En vertu de la continuité au point $x = \xi$ de la fonction $G(x, \xi)$ et de ses premières $(n-2)$ dérivées par rapport à x , nous avons

$$[b_1 y_1(\xi) + \dots + b_n y_n(\xi)] - [a_1 y_1(\xi) + \dots + a_n y_n(\xi)] = 0,$$

$$[b_1 y_1'(\xi) + \dots + b_n y_n'(\xi)] - [a_1 y_1'(\xi) + \dots + a_n y_n'(\xi)] = 0,$$

... ..

$$[b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + b_n y_n^{(n-2)}(\xi)] - [a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + a_n y_n^{(n-2)}(\xi)] = 0.$$

Et la condition (c) s'écrit

$$[b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + b_n y_n^{(n-1)}(\xi)] - [a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_n y_n^{(n-1)}(\xi)] = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Posons $C_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$.

Il vient le système des équations linéaires par rapport à $C_k(\xi)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) + \dots + C_n y_n(\xi) = 0 \\ C_1 y_1'(\xi) + C_2 y_2'(\xi) + \dots + C_n y_n'(\xi) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ C_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + C_2 y_2^{(n-2)}(\xi) + \dots + C_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0 \\ C_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + C_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Le déterminant du système (1.4) est égal à la valeur en $x = \xi$ du wronskien $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$, il n'est donc pas nul.

Aussi, le système (1.4) détermine-t-il de façon unique les fonctions $C_k(\xi)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Déterminons les fonctions $a_k(\xi)$ et $b_k(\xi)$ moyennant les conditions aux limites (1.3).

Notons $V_k(y)$ sous la forme :

$$V_k(y) = A_k(y) - B_k(y), \quad (1.5)$$

où

$$A_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)} y^{n-1}(a),$$

$$B_k(y) = \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \dots + \beta_k^{(n-1)} y^{n-1}(b).$$

En vertu des conditions (d) nous obtenons alors

$$V_k(G) = a_1 A_k(y_1) + a_2 A_k(y_2) + \dots + a_n A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + \dots + b_n B_k(y_n) = 0,$$

($k = 1, 2, \dots, n$).

Compte tenu de $a_k = b_k - C_k$, nous avons

$$(b_1 - C_1) A_k(y_1) + (b_2 - C_2) A_k(y_2) + \dots + (b_n - C_n) A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + \dots + b_n B_k(y_n) = 0,$$

($k = 1, 2, \dots, n$).

D'où, en vertu de (1.5)

$$b_1 V_k(y_1) + b_2 V_k(y_2) + \dots + b_n V_k(y_n) = C_1 A_k(y_1) + C_2 A_k(y_2) + \dots + C_n A_k(y_n), \quad (1.6)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Notons que le système (1.6) est linéaire en b_1, b_2, \dots, b_n . Son déterminant est :

$$\det \begin{pmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \dots & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \dots & V_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & \dots & V_n(y_n) \end{pmatrix} \neq 0$$

étant donné l'hypothèse de l'indépendance linéaire des formes V_1, V_2, \dots, V_n . Ainsi, le système d'équation (1.6) admet une solution unique en $b_1(\xi), b_2(\xi), \dots, b_n(\xi)$, et comme $a_k(\xi) = b_k(\xi) - C_k(\xi)$, les quantités $a_k(\xi)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sont également définies de façon unique. ■

Exemple 1.2.1 *Construisons la fonction de Green pour l'équation :*

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0.$$

Toutes les solutions sont de la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$, elles vérifient les conditions si $a = b = c = 0$.

Soit

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi)x^2 + b_1(\xi)x + c_1(\xi) & \text{pour } 0 \leq x \leq \xi \\ a_2(\xi)x^2 + b_2(\xi)x + c_2(\xi) & \text{pour } \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de G :

1. $G(x, \xi)$ est continue au point $x = \xi$, on a :

$$G(\xi^-, \xi) = G(\xi^+, \xi)$$

c'est-à-dire :

$$a_1(\xi)\xi^2 + b_1(\xi)\xi + c_1(\xi) = a_2(\xi)\xi^2 + b_2(\xi)\xi + c_2(\xi)$$

ou bien

$$(a_1(\xi) - a_2(\xi))\xi^2 + (b_1(\xi) - b_2(\xi))\xi + (c_1(\xi) - c_2(\xi)) = 0 \quad (1.7)$$

2. $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \xi)$ est discontinue au point $x = \xi$:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\xi^-, \xi) = 1$$

donc

$$2a_2(\xi) - 2a_1(\xi) = 1$$

ensuite

$$a_2(\xi) - a_1(\xi) = \frac{1}{2}. \quad (1.8)$$

3. Les propriétés de la fonction de Green entraînent

$$\begin{cases} c_1(\xi) = 0 \\ b_1(\xi) = 0 \\ c_2(\xi) + a_2(\xi) + b_2(\xi) = 0 \\ 2a_2(\xi) + b_2(\xi) = 0 \end{cases}$$

Soit maintenant

$$\begin{cases} c_1(\xi) = b_1(\xi) = 0 \\ c_2(\xi) = a_2(\xi) \\ b_2(\xi) = -2a_2(\xi) \end{cases} \quad (1.9)$$

La substitution de (1.9) et (1.8) de l'équation (1.7) donne :

$$\frac{1}{2}\xi^2 + 2a_2(\xi)\xi - a_2(\xi) = 0$$

afin que

$$a_2(\xi) = -\frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)}$$

aussi

$$\begin{cases} a_1(\xi) = -\frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)} \\ b_2(\xi) = \frac{\xi^2}{(2\xi - 1)} \\ c_2(\xi) = -\frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)}. \end{cases}$$

Enfin

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)}x^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq \xi \\ -\frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)}x^2 + \frac{\xi^2}{(2\xi - 1)}x - \frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)} & \text{pour } \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1.3 Cas des équations différentielles du second ordre

Soient p_0, p_1, p_2 trois fonctions continues sur $[a, b]$

$$L(y) = p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(b) = 0 \\ \beta_0 y(a) + \beta_1 y'(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(b) = 0. \end{cases}$$

On construit la fonction de Green de sur la base de deux solutions non proportionnelles y_1 et y_2 de (1.10) de la façon suivant :

Il existe donc pour chaque ξ des réels $a(\xi), b(\xi), c(\xi)$ et $d(\xi)$, tels que [3] :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a(\xi)y_1(x) + b(\xi)y_2(x) & \text{pour } x \in]a, \xi[\\ c(\xi)y_1(x) + d(\xi)y_2(x) & \text{pour } x \in]\xi, b[\end{cases}$$

Exemple 1.3.1 *Construisons la fonction de Green pour l'équation :*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Toutes les solutions sont de la forme $y(x) = ax + b$, elles vérifient les conditions si $a = 0$ et $b = 0$.

Soit

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi)x + b_1(\xi) & \text{pour } 0 \leq x \leq \xi \\ a_2(\xi)x + b_2(\xi) & \text{pour } \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de G :

1. $G(x, \xi)$ est continue au point $x = \xi$, on a :

$$G(\xi^-, \xi) = G(\xi^+, \xi)$$

c'est-à-dire :

$$a_1(\xi)\xi + b_1(\xi) = a_2(\xi)\xi + b_2(\xi)$$

alors

$$(a_2(\xi) - a_1(\xi))\xi + (b_2(\xi) - b_1(\xi)) = 0. \quad (1.11)$$

2. $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi)$ est discontinue au point $x = \xi$:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-, \xi) = 1$$

d'où

$$a_2(\xi) - a_1(\xi) = 1. \quad (1.12)$$

3.

$$G(0, \xi) = 0 \Rightarrow b_1(\xi) = 0 \quad (1.13)$$

$$G(1, \xi) = 0 \Rightarrow a_2(\xi) + b_2(\xi) = 0. \quad (1.14)$$

La substitution de (1.12) et (1.13) dans l'équation (1.11) donne :

$$\xi + b_2(\xi) = 0$$

donc

$$b_2(\xi) = -\xi. \quad (1.15)$$

La substitution de (1.15) dans l'équation (1.14) donne :

$$a_2(\xi) - \xi = 0$$

alors

$$a_2(\xi) = \xi. \quad (1.16)$$

La substitution de (1.16) et dans l'équation (1.12) donne :

$$-a_1(\xi) + \xi = 1$$

puis

$$a_1(\xi) = \xi - 1.$$

Finalement

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(\xi - 1) & \text{si } x \in]0; \xi[\\ \xi(x - 1) & \text{si } x \in]\xi; 1[\end{cases}$$

Exemple 1.3.2 Construisons la fonction de Green pour l'équation

$$y'' + y = 0, \quad (1.17)$$

avec les condition aux limites

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (1.18)$$

Toute solution de (1.17) est de la forme $y(x) = a \cos x + b \sin x$, pour que y vérifie (1.18) il faut $a = 0$ et $b = 0$, il existe donc une fonction de Green :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi) \cos x + b_1(\xi) \sin x & \text{si } x \in]0; \xi[\\ a_2(\xi) \cos x + b_2(\xi) \sin x & \text{si } x \in]\xi; \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de G :

(a) G est continue au point $x = \xi$, on a

$$G(\xi^-, \xi) = G(\xi^+, \xi)$$

c'est-à-dire :

$$a_1(\xi) \cos \xi + b_1(\xi) \sin \xi = a_2(\xi) \cos \xi + b_2(\xi) \sin \xi$$

ou

$$(a_1(\xi) - a_2(\xi)) \cos \xi + (b_1(\xi) - b_2(\xi)) \sin \xi = 0. \quad (1.19)$$

(b) $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi)$ est discontinue au point $x = \xi$:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-, \xi) = 1$$

alors

$$-(a_1(\xi) - a_2(\xi))\sin\xi + (b_1(\xi) - b_2(\xi))\cos\xi = -1. \quad (1.20)$$

(c)

$$G(0, \xi) = 0 \Rightarrow a_1(\xi) = 0 \quad (1.21)$$

$$G\left(\frac{\pi}{2}, \xi\right) = 0 \Rightarrow b_2(\xi) = 0. \quad (1.22)$$

La substitution de (1.21) et (1.22) dans l'équation (1.19) donne

$$-a_2(\xi)\cos\xi + b_1(\xi)\sin\xi = 0$$

puis

$$a_2(\xi) = \frac{b_1(\xi)\sin\xi}{\cos\xi}. \quad (1.23)$$

La substitution de (1.21) et (1.22) et (1.23) dans l'équation (1.20) donne

$$\frac{b_1(\xi)\sin\xi}{\cos\xi}\sin\xi + b_1(\xi)\cos\xi = -1$$

$$\Rightarrow b_1(\xi)\sin^2\xi + b_1(\xi)\cos^2\xi = -\cos\xi$$

$$\Rightarrow b_1(\xi) = -\cos\xi$$

$$\Rightarrow a_2(\xi) = -\sin\xi$$

enfin

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\cos\xi \sin x & \text{si } x \in]0; \xi[\\ -\sin\xi \cos x & \text{si } x \in]\xi; \frac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

1.3.1 Un cas particulier important

Construisons la fonction de Green pour l'équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\begin{aligned} (p(x)y')' + q(x)y &= 0, \\ p(x) &\neq 0 \text{ sur } [a, b], \quad p(x) \in C^1[a, b], \end{aligned} \quad (1.24)$$

avec les conditions aux limites

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (1.25)$$

Supposons que $y_1(x)$ est une solution de l'équation (1.24) définie par les conditions initiales

$$y_1(a) = 0, \quad y_1'(a) = \alpha \neq 0.$$

D'une façon générale, cette solution ne vérifie pas nécessairement la seconde condition aux limites, ce qui nous autorise à supposer que $y_1(b) \neq 0$. Les fonctions de la forme $C_1 y_1(x)$ avec

C_1 une constante quelconque sont évidemment solutions de (1.24) et vérifient la condition aux limites

$$y(a) = 0.$$

Trouvons de même une solution $y_2(x) \neq 0$ de (1.24) telle que

$$y_2(b) = 0.$$

Cette condition est vérifiée par toutes les solutions de la forme $C_2 y_2(x)$, où C_2 est une constante.

Cherchons la fonction de Green relative au problème (1.24)-(1.25) sous la forme

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1 y_1(x) & \text{pour } a \leq x \leq \xi \\ C_2 y_2(x) & \text{pour } \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de G :

(a) G est continue au point $x = \xi$, on a :

$$C_1 y_1(\xi) = C_2 y_2(\xi)$$

c'est-à-dire :

$$C_2 y_2(\xi) - C_1 y_1(\xi) = 0$$

(b) $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi)$ est discontinue au point $x = \xi$:

$$C_2 y_2'(\xi) - C_1 y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)},$$

donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) = 0 \\ -C_1 y_1'(\xi) + C_2 y_2'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} \end{cases} \quad (1.26)$$

Le déterminant du système (1.26) est le wronskien $W[y_1(x), y_2(x)] = W(x)$ calculé en $x = \xi$ pour les solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation (1.24), donc

$$W(\xi) \neq 0,$$

de sorte que C_1 et C_2 de (1.26) se définissent de suite :

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, \quad C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}.$$

Alors finalement [3]

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} & \text{pour } a \leq x \leq \xi \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(\xi)} & \text{pour } \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

Remarque 1.3.1 Le problème aux limites pour l'équation du second ordre de la forme :

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0, \quad (1.27)$$

et les conditions aux limites

$$y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

se ramène au problème considéré (1.24)-(1.25) :

1 En multipliant l'équation (1.27) par $P(x)$, où $P(x) = e^{\int p_1(x)dx}$ et on prend $q(x) = P(x)p_2(x)$

2 En utilisant le changement linéaire de fonction suivant :

$$Z(x) = Y(x) - \frac{B-A}{b-a}(x-a) - A,$$

on ramène les conditions aux limites (1.31) aux conditions nulles (1.25) mais au lieu de (1.24) on obtient l'équation avec le second membre $L[Z] = f(x)$, où

$$f(x) = -\left[A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)\right]q(x) - \frac{B-A}{b-a}P(x)p_1(x).$$

On construit cependant la fonction de Green relative au problème aux limites homogène

$$L[Z] = 0, Z(a) = Z(b) = 0,$$

qui coïncide complètement avec le problème (1.24)-(1.25). [3]

1.4 Résolution du problème aux limites à l'aide de la fonction de Green

Soit l'équation différentielle non homogène

$$L[y] = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = g(x), \quad (1.28)$$

et les conditions aux limites

$$V_1(y) = 0, V_2(y) = 0, \dots, V_n(y) = 0, \quad (1.29)$$

les formes linéaires V_1, V_2, \dots, V_n et $y(a), y'(a), \dots, y^{n-1}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{n-1}(b)$ étant linéairement indépendantes.

Théorème 1.4.1 Si $G(x, \xi)$ est la fonction de Green du problème aux limites homogène :

$$L[G] = 0,$$

$$V_k(G) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

la solution du problème aux limites (1.28)-(1.29) est donnée par la formule [7]

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi)d\xi.$$

Preuve. Montrons que $G(x, \xi)$ nous sert à déterminer la solution du problème linéaire non homogène suivant :

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = g(x) & a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Considérons le système :

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = g(x) & (1) \\ (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1), considérons $y(x)$ une solution de (1.30) et comme $G(x, \xi)$ vérifie l'équation homogène, on remplace $y(x) = G(x, \xi)$ dans (2) on obtient :

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = g(x) & (1) \\ (p(x)\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x})' + h(x)G(x, \xi) = 0 \text{ pour } \xi \text{ fixé dans } [a, b] & (2) \end{cases}$$

Multiplions (1) par $-G(x, \xi)$ et (2) par $y(\xi)$, et on obtient

$$-G(x, \xi)(py')' + y(p\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi})' = G(x, \xi)g(\xi)$$

ce qui s'écrit comme suite

$$\frac{d}{d\xi} [p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))] = G(x, \xi)g(\xi).$$

On intégrons de a à b on obtient :

$$[p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))]_a^b = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi)d\xi.$$

Compte tenu des conditions aux limites, et le fait que $G(x, \xi)$ est discontinue au point $x = \xi$

$$\begin{aligned} [p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))]_a^b &= [p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))]_a^x \\ &\quad + [p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))]_x^b \\ &= p(x)[y(x)\frac{\partial G(x, x_-)}{\partial \xi} - G(x, x)y'(x)] - p(a)[y(a)\frac{\partial G(x, a)}{\partial \xi} - G(x, a)y'(a)] \\ &\quad + p(b)[y(b)\frac{\partial G(x, b)}{\partial \xi} - G(x, b)y'(v)] - p(x)[y(x)\frac{\partial G(x, x_+)}{\partial \xi} - G(x, x)y'(x)] \\ &= p(x)y(x)[\frac{\partial G(x, x_-)}{\partial \xi} - \frac{\partial G(x, x_+)}{\partial \xi}] \\ &= p(x)y(x)\frac{1}{p(x)} \\ &= y(x) \end{aligned}$$

donc la solution du problème linéaire (1.30) est donnée par :

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi)d\xi.$$

■

Exemple 1.4.1 Soit le problème aux limites non homogène

$$y'' + y = \cos x,$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

On a la fonction de Green du problème aux limites homogène (1.17)-(1.18) est

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\cos\xi \sin x & \text{si } x \in]0; \xi[\\ -\sin\xi \cos x & \text{si } x \in]\xi; \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

D'après le théorème (1.4.1), la solution du problème aux limites non homogène (1.4.1)-(1.30) est donnée par la formule

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) \cos \xi d\xi.$$

$$y(x) = - \int_0^x \sin \xi \cos x \cos \xi d\xi - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos \xi \sin x \cos \xi d\xi.$$

Alors

$$y(x) = -\frac{\sin x}{4}(\pi - 2x).$$

1.5 Problèmes adjoint et auto-adjoint

Soit A un opérateur linéaire dans \mathbb{R}^n . L'opérateur adjoint A^* est défini par la relation $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$. Il est donné par la transposée A^T de la matrice A .

Dans le contexte des équations différentielles, considérons le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

sur $C([a, b])$ (où $[a, b]$ est un intervalle compact) et un problème aux limites donné par L, B_1, B_2 , tel que

$$\langle Ly, z \rangle = \langle y, L^*z \rangle,$$

pour toutes fonctions $y, z \in C^2([a, b])$ satisfaisant $B_1y = B_2y = 0$ et $B_1^*z = B_2^*z = 0$.

Théorème 1.5.1 *Considérons le problème*

$$Ly = 0, B_1y = 0, B_2y = 0,$$

où L satisfait les hypothèses est $\alpha_2 \in C^2([a, b])$, $\alpha_1 \in C^2([a, b])$ et $\alpha_0 \in C^0([a, b])$ avec $\alpha_2(x) \neq 0$ sur $[a, b]$, $\beta_2 \in C^2([a, b])$, $\beta_1 \in C^2([a, b])$ et $\beta_0 \in C^0([a, b])$ avec $\beta_2(x) \neq 0$ sur $[a, b]$ et où les vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ définissant B_1 et B_2 sont linéairement indépendants. Alors il existe

$$B_1^* = \gamma_1 z(a) + \gamma_2 z'(a) + \gamma_3 z(b) + \gamma_4 z'(b),$$

$$B_2^* = \delta_1 z(a) + \delta_2 z'(a) + \delta_3 z(b) + \delta_4 z'(b),$$

les coefficients γ_i et δ_i ne sont pas uniques, mais l'espace des fonctions z qui satisfont $B_1^*z = B_2^*z = 0$ est unique.[2]

Définition 1.5.1 *Si le problème L, B_1, B_2 satisfait les hypothèses du théorème (1.5.1), on appelle L^*, B_1^*, B_2^* , le problème aux limites adjoint.[2]*

Le problème est auto adjoint, si $L^ = L$ et si les conditions $B_1^* = B_2^* = 0$ sont équivalents à $B_1 = B_2 = 0$.*

*En développant l'expression pour L^*z on obtient*

$$L^*z = \alpha_2(x)z'' + (\alpha_2'(x) - \alpha_1(x))z' + (\alpha_2''(x) - \alpha_1'(x) + \alpha_0(x))z.$$

L'opérateur L est donc auto adjoint, si et seulement si $\alpha_2'(x) = \alpha_1(x)$, c-à-d, s'il est de la forme

$$L^*y = (\alpha_2(x)y')' + \alpha_0(x)y.$$

Proposition 1.5.1 *Sous les hypothèses du théorème (1.5.1) le problème*

$$Ly = 0, B_1y = 0, B_2y = 0,$$

possède une solution unique, si et seulement si le problème adjoint

$$L^*z = 0, B_1^*z = 0, B_2^*z = 0,$$

possède une solution unique.[2]

Preuve. Supposons que

$$Ly = 0, B_1y = 0, B_2y = 0,$$

possède une solution unique et notons par z une solution de

$$L^*z = 0, B_1^*z = 0, B_2^*z = 0.$$

Avec $y(x)$, solution de

$$Ly = z, B_1y = 0, B_2y = 0,$$

on obtient

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \langle Ly, z \rangle = \langle y, L^*z \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0.$$

Donc $z = 0$ et l'unicité de la solution du problème adjoint sont démontrées. ■

Proposition 1.5.2 *La fonction de Green d'un problème auto-adjoint est symétrique, i.e.*

$$G^*(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (1.31)$$

La réciproque est également vraie. [2]

Preuve. Pour démontrer la relation (1.31), considérons deux fonctions continues $f(x)$ et $g(x)$ et définissons

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$z(x) = \int_a^b G^*(x, \xi) g(\xi) d\xi.$$

Par la définition de la fonction de Green, les fonctions y et z satisfont

$$Ly = f, B_1y = B_2y = 0,$$

et

$$L^*z = g, B_1^*z = B_2^*z = 0.$$

La relation

$$\langle Ly, z \rangle = \langle y, L^*z \rangle$$

\Leftrightarrow

$$\langle f, z \rangle = \langle y, g \rangle$$

ou bien

$$\int_a^b \int_a^b G^*(x, \xi) f(x) g(\xi) d\xi dx = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) g(x) d\xi dx,$$

donc

$$\int_a^b \int_a^b G^*(x, \xi) f(x) g(\xi) d\xi dx = \int_a^b \int_a^b G(\xi, x) f(x) g(\xi) dx d\xi,$$

d'où

$$\int_a^b \int_a^b G^*(x, \xi) f(x) g(\xi) d\xi dx = \int_a^b \int_a^b G(\xi, x) f(x) g(\xi) d\xi dx,$$

enfin

$$\int_a^b \int_a^b (G^*(x, \xi) - G(\xi, x)) f(x) g(\xi) d\xi dx = 0.$$

Comme cette relation est vérifiée pour toutes fonctions continues f et g on en déduit la relation (1.31) ■

1.6 Équation de Bessel

Soit l'équation

$$y'' + t^{-1}y' + (1 - n^2t^{-2})y = 0, \quad (1.32)$$

cette équation s'appelle équation de Bessel d'ordre n . Pour n entier, la fonction de Bessel J_n est définie par une série et est une solution de l'équation différentielle (1.32).

Définition 1.6.1 *Soit n entier, la série*

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}, \quad (1.33)$$

est absolument convergente pour $t \in \mathbb{C}$, une et est solution de l'équation différentielle (1.32) pour $t \in \mathbb{R}$. La fonction J_n est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre n . [5]

Proposition 1.6.1 *Les fonctions de Bessel J_n ; $n \geq 1$ vérifient les relations de récurrence*

$$J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t), \quad (1.34)$$

$$J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) = 2J'_n(t), \quad (1.35)$$

de plus, $J'_0 = -J_1$. [5]

Théorème 1.6.1 *La famille des fonctions de Bessel (J_n) $n \geq 0$ est caractérisée par l'une des deux représentations suivantes [5] :*

1. *Les J_n sont données par la fonction génératrice*

$$J(x, t) = \exp((x - 1/x)/2) = J_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(t) [x + (-x^{-1})], \quad t > 0. \quad (1.36)$$

2. *La fonction J_n est donnée par la série entière (1.33). De plus, la suite (J_n) $n \geq 0$ vérifie la relation de récurrence*

$$tJ_{n-1}(t) = 2nJ_n(t) - tJ_{n+1}(t).$$

La fonction J_n a comme équivalents aux bornes de l'intervalle $(0; +\infty)$

$$J_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^n}{2^n n!}, \quad J_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos\left(t - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Remarque 1.6.1 Pour $t \in \mathbb{R}$, soit la variable θ telle que $x = e^{i\theta}$. La relation (1.36) s'écrit comme un développement en série de Fourier

$$e^{it \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t) e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \sin \theta - in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta - n\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (1.37)$$

d'après (1.37) on a

$$J_{-n}(t) = J_n(-t),$$

et

$$J_n(-t) = (-1)^n J_n(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.38)$$

lorsque n non entier égal à ν la fonction $J_{-\nu}$ est une solution de l'équation (1.32), et linéairement indépendante à J_ν . [5]

Proposition 1.6.2 Soit ν un réel, l'équation différentielle (1.32) est

$$y'' + t^{-1}y' + (1 - \nu^2 t^{-2})y = 0,$$

a deux solutions linéairement indépendantes J_ν, Y_ν . Cette seconde est appelée la fonction de Bessel de deuxième espèce. Elles sont définies par [5] :

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k},$$

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu(t) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu\pi},$$

et leurs développements asymptotiques sont

$$J_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\cos \left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right),$$

et

$$Y_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\sin \left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Théorème 1.6.2 Soit l'équation différentielle

$$y'' + t^{-1}y' - (1 + \nu^2 t^{-2})y = 0.$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel modifiées. La solution finie à l'origine et notée $I_\nu(t)$, et la seconde solution notée $K_\nu(t)$. Ces fonctions sont reliées par la relation [5]

$$K_\nu(t) = \frac{\pi (I_{-\nu}(t) - I_\nu(t))}{2 \sin \nu\pi}.$$

1.6.1 Propriétés

En utilisant la référence [5] on a :

1. Les fonctions $I_\nu(t)$ et $K_\nu(t)$ vérifient les relations de récurrence (1.34), (1.35), (1.38).
2. Si nous prenons l'argument des fonctions de Bessel $J_\nu(t)$ et $H_\nu^{(1)}(t)$ imaginaire, nous obtenons

$$J_\nu(it) = i^\nu I_\nu(t),$$

$$K_\nu(t) = \frac{\pi i}{2} (i)^\nu H_\nu^{(1)}(it),$$

où la fonction $H_\nu^{(1)}(t)$ s'appelle la fonction de Hankel ou fonction de Bessel de troisième espèce, ainsi la fonction $H_\nu^{(2)}(t)$ est la fonction de Hankel, elles sont définies par

$$H_\nu^{(1)}(t) = J_\nu(t) + iY_\nu(t), \quad H_\nu^{(2)}(t) = J_\nu(t) - iY_\nu(t).$$

3. Les Wronskiens des fonctions de Bessel précédentes sont donnés par :

$$W(J_\nu(t), Y_\nu(t)) = 2/\pi t,$$

$$W(I_\nu(t), K_\nu(t)) = -1/t,$$

$$W(H_\nu^{(1)}(t), H_\nu^{(2)}(t)) = -4i/\pi t.$$

4. Les comportements asymptotiques, m entier positif

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_m(t) \rightarrow \frac{x^m}{2^m \Gamma(m+1)},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} K_m(t) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -[\ln(\frac{t}{2}) + \gamma], m = 0, \\ \frac{\Gamma(m)}{2} (\frac{2}{x})^m, m \neq 0, \end{array} \right\}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} I_m(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^t \left[1 + 0 \left(\frac{1}{t} \right) \right],$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_m(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t} \left[1 + 0 \left(\frac{1}{x} \right) \right],$$

$$H_m^{(1)}(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp \left[i \left(t - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$H_m^{(2)}(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp \left[-i \left(t - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Chapitre 2

Résolution du problème du potentiel axi-symétrique

Dans ce chapitre, nous allons calculer les différents types de la fonction de Green pour le problème du potentiel symétrique à deux dimensions, selon les articles [1] et [4].

Soit le problème suivant :

$$\left(-\frac{\Delta}{2} + V(r, \theta) - E\right)\psi(r, \theta) = 0, \quad (2.1)$$

tel que $\theta \in [0, 2\pi], r > 0$.

avec (voir figure)

$$V(r, \theta) = \begin{cases} v_1 & \text{si } 0 \leq r \leq b \\ v_0 & \text{si } b \leq r \leq a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

tel que $v_1 > v_0$

et

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Donc l'équation (2.1) s'écrit

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta}{2} + E\right)\psi = 0 & \text{si } r > a \\ \left(\frac{\Delta}{2} - v_0 + E\right)\psi = 0 & \text{si } b \leq r \leq a \\ \left(\frac{\Delta}{2} - v_1 + E\right)\psi = 0 & \text{si } 0 \leq r \leq b. \end{cases} \quad (2.2)$$

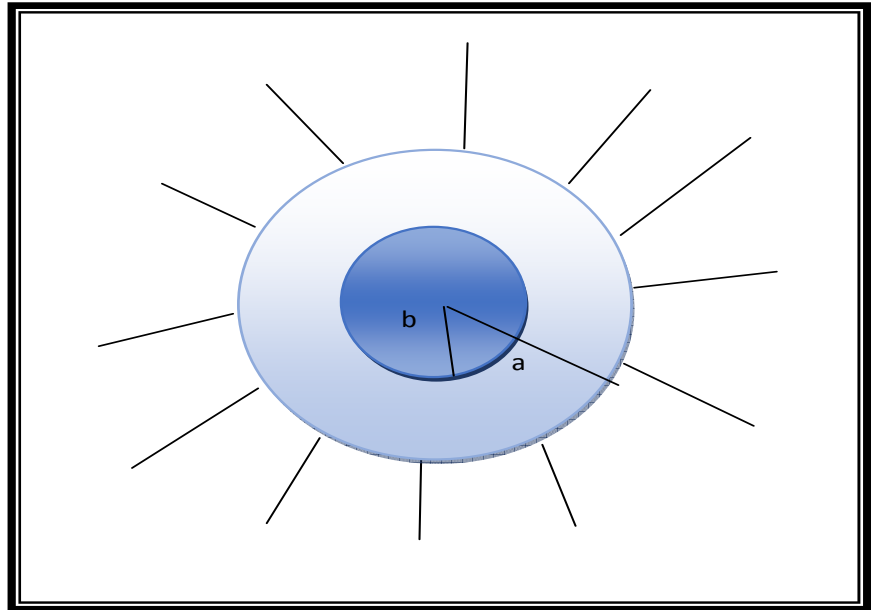


FIGURE 2.1 – Illustration des régions

2.1 Section A : $E > v_1$

2.1.1 Région ($r > a$) :

Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2E\right)\psi(r, \theta) = 0, \quad (2.3)$$

on utilise la méthode de séparation du variable, et on pose

$$\psi(r, \theta) = \psi_1(r)\psi_2(\theta),$$

on remplace dans l'équation (2.3) et on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2E\right)\psi_1(r)\psi_2(\theta) = 0.$$

On divise l'équation précédente sur $\psi_1(r)\psi_2(\theta) \neq 0$ et on obtient :

$$\frac{\psi_2(\theta)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_1(r) + \frac{\psi_1(r)}{r^2}\psi_2''(\theta) + 2E\psi_1(r)\psi_2(\theta)}{\psi_1(r)\psi_2(\theta)} = 0,$$

c-à-d :

$$\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_1(r)}{\psi_1(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\psi_2''(\theta)}{\psi_2(\theta)} + 2E = 0,$$

ou bien

$$r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_1(r) + 2Er^2 + \frac{\psi_2''(\theta)}{\psi_2(\theta)} = 0.$$

L'équation pour $\psi_2(\theta)$:

$$\frac{\psi_2''(\theta)}{\psi_2(\theta)} = -\omega^2,$$

c-à-d :

$$\psi_2''(\theta) + \omega^2\psi_2(\theta) = 0,$$

(ω réel) qui admet une solution générale de la forme

$$\psi_2(\theta) = C_2 e^{i\omega\theta},$$

et l'autre équation est

$$r^2\left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_1(r) = \omega^2\psi_1(r) - 2Er^2\psi_1(r),$$

ou

$$r^2\psi_1''(r) + r\psi_1'(r) + (2Er^2 - \omega^2)\psi_1(r) = 0,$$

en divisant par (r^2) on obtient :

$$\psi_1''(r) + \frac{1}{r}\psi_1'(r) + (2E - \frac{\omega^2}{r^2})\psi_1(r) = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$\psi_1(a) = A_1; \text{ et } B_1 = \lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_1(r) \text{ bornée.}$$

Posons $(k^2 = 2E)$ et $(l = w)$

$$\psi_1''(r) + \frac{1}{r}\psi_1'(r) + (k^2 - \frac{l^2}{r^2})\psi_1(r) = 0. \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) est l'équation de Bessel, qui admet deux solutions linéairement indépendantes notées $J_l(kr)$ et $Y_l(kr)$.

Le cas $a \leq r, r'$:

D'après l'équation (2.4) la fonction de Green est donnée par :

$$G^{(l,1,1)}(r, r') = \begin{cases} C(r')[Y_l(kr) - \beta(r')J_l(kr)] & \text{pour } a \leq r \leq r' \\ D(r')J_l(kr) & \text{pour } r' \leq r < \infty \end{cases}$$

puisque il n'y a pas de réflexion d'onde on a :

$$\beta(r') = 0,$$

c-à-d :

$$G^{(l,1,1)}(r, r') = \begin{cases} C(r')Y_l(kr) & \text{pour } a \leq r \leq r' \\ D(r')J_l(kr) & \text{pour } r' \leq r < \infty \end{cases}$$

d'après la continuité de la fonction de Green au point $r = r'$

$$G^{(l,1,1)}(r'_+, r') - G^{(l,1,1)}(r'_-, r') = 0$$

ou bien

$$D(r')J_l(kr') - C(r')Y_l(kr') = 0 \quad (2.5)$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ on a :

$$\frac{\partial G^{(l,1,1)}}{\partial r}(r'_+, r') - \frac{\partial G^{(l,1,1)}}{\partial r}(r'_-, r') = \frac{2}{\pi r'}$$

d'où

$$-C(r')Y_l'(kr') + D(r')J_l'(kr') = \frac{2}{\pi kr'} \quad (2.6)$$

d'après l'équation (2.5)

$$D(r') = \frac{C(r')Y_l(kr')}{J_l(kr')} \quad (2.7)$$

en substituant (2.7) dans (2.6) on obtient :

$$-C(r')Y_l'(kr') + \left[\frac{C(r')Y_l(kr')}{J_l(kr')} \right] J_l'(kr') = \frac{2}{\pi kr'}$$

alors

$$\frac{-C(r')Y_l'(kr')J_l(kr') + C(r')Y_l(kr')J_l'(kr')}{J_l(kr')} = \frac{2}{\pi kr'}$$

c-à-d :

$$\frac{-C(r')[Y_l'(kr')J_l(kr') - Y_l(kr')J_l'(kr')]}{J_l(kr')} = \frac{2}{\pi kr'} \quad (2.8)$$

sachant que la wronskien est donné par

$$\begin{aligned} W(J_l(kr'), Y_l(kr')) &= J_l(kr')Y_l'(kr') - Y_l(kr')J_l'(kr') \\ &= \frac{2}{\pi kr'}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

et en substituant (2.9) dans (2.8) on obtient :

$$-C(r')\frac{2}{\pi kr'} = \frac{2J_l(kr')}{\pi kr'}$$

puis

$$C(r') = -J_l(kr'), \quad (2.10)$$

aussi, en substituant (2.10) dans (2.7) on obtient :

$$D(r') = -Y_l(kr'),$$

enfin

$$G^{(l,1,1)}(r, r') = - \begin{cases} Y_l(kr)J_l(kr') & \text{pour } a \leq r \leq r' \\ Y_l(kr')J_l(kr) & \text{pour } r' \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.11)$$

2.1.2 Région ($b \leq r \leq a$) :

D'après l'équation (2.2) on considère l'équation différentielle suivante :

$$r^2\psi_1'' + r\psi_1' + 2r^2(E - v_0)\psi_1 = w^2\psi_1,$$

qui est équivalente à l'équation :

$$r^2\psi_1'' + r\psi_1' + [2r^2E - 2r^2v_0 - w^2]\psi_1 = 0,$$

qu'on divise par (r^2) pour obtenir :

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + (2(E - v_0) - \frac{w^2}{r^2})\psi_1 = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$\psi_1(b) = A_2; \quad \text{et} \quad \psi_1(a) = B_2.$$

Posons ($\mu^2 = 2(E - v_0)$) et ($l = w$)

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + (\mu^2 - \frac{l^2}{r^2})\psi_1 = 0. \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) est l'équation du Bessel, qui admet deux solutions linéairement indépendantes $J_l(\mu r)$ et $Y_l(\mu r)$.

Le cas $b \leq r', r \leq a$:

D'après l'équation (2.12) la fonction de Green est donnée comme par :

$$G^{(l,2,2)}(r, r') = \begin{cases} E(r')[Y_l(\mu r) - \delta(r')J_l(\mu r)] & \text{pour } b < r \leq r' \\ F(r')[Y_l(\mu r) - \gamma(r')J_l(\mu r)] & \text{pour } r' \leq r \leq a \end{cases}$$

où E, F, γ, δ sont des fonctions de r' .

La continuité de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$G^{(l,2,2)}(r'_+, r') - G^{(l,2,2)}(r'_-, r') = 0$$

donc

$$F(r')[Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')] - E(r')[Y_l(\mu r') - \delta(r')J_l(\mu r')] = 0$$

ensuite

$$F(r') = \frac{E(r')[Y_l(\mu r') - \delta(r')J_l(\mu r')]}{[Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')]}, \quad (2.13)$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$\frac{\partial G^{(l,2,2)}}{\partial r}(r'_+, r') - \frac{\partial G^{(l,2,2)}}{\partial r}(r'_-, r') = \frac{2}{\pi r'}$$

ou bien

$$F(r')[\mu Y_l'(\mu r') - \mu \gamma(r')J_l'(\mu r')] - E(r')[\mu Y_l'(\mu r') - \mu \delta(r')J_l'(\mu r')] = \frac{2}{\pi r'}$$

d'où

$$[F(r') - E(r')]Y_l'(\mu r') + [-F(r')\gamma(r') + E(r')\delta(r')]J_l'(\mu r') = \frac{2}{\pi \mu r'} \quad (2.14)$$

en substituant (2.13) dans (2.14) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{E(r')[Y_l(\mu r') - \delta(r')J_l(\mu r')]}{[Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')]} \right) - \left(\frac{E(r')[Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')]}{Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')} \right) \right] Y_l'(\mu r') \\ & + \left[- \left(\frac{E(r')[Y_l(\mu r') - \delta(r')J_l(\mu r')]}{[Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')]} \gamma(r') \right) + \left(\frac{E(r')[Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')]}{Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')} \delta(r') \right) \right] J_l'(\mu r') \\ & = \frac{2}{\pi \mu r'} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} & \frac{-E(r')\delta(r')Y_l'(\mu r')J_l(\mu r') + E(r')\gamma(r')J_l(\mu r')Y_l'(\mu r') - E(r')\gamma(r')J_l'(\mu r')Y_l(\mu r')}{[Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')]} \\ & + \left(\frac{-E(r')\delta(r')Y_l(\mu r')J_l'(\mu r')}{[Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')]} \right) = \frac{2}{\pi \mu r'} \end{aligned}$$

ou

$$E(r')\delta(r')[Y_l(\mu r')J_l'(\mu r') - Y_l'(\mu r')J_l] + E(r')\gamma(r')[J_l(\mu r')Y_l'(\mu r') - J_l'(\mu r')Y_l(\mu r')]$$

$$= \frac{2}{\pi\mu r'} [Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')] \quad (2.15)$$

sachant que la wronskien est donné par

$$\begin{aligned} W(J_l(\mu r'), Y_l(\mu r')) &= J_l(\mu r')Y_l'(\mu r') - J_l'(\mu r')Y_l(\mu r') \\ &= \frac{2}{\pi\mu r'}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

et en substituant (2.16) dans (2.15) on obtient :

$$E(r')\delta(r')\left(-\frac{2}{\pi\mu r'}\right) + E(r')\gamma(r')\left(\frac{2}{\pi\mu r'}\right) = \frac{2}{\pi\mu r'} [Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')]$$

ensuite

$$E(r')(\delta(r') - \gamma(r')) = [Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')]$$

c-à-d :

$$E(r') = \frac{Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r')}{\gamma(r') - \delta(r')}, \quad (2.17)$$

en substituant (2.17) dans (2.13) on obtient :

$$F(r') = \frac{Y_l(\mu r') - \delta(r')J_l(\mu r')}{\gamma(r') - \delta(r')},$$

alors finalement

$$G^{(l,2,2)}(r, r') = \frac{1}{\gamma(r') - \delta(r')} \begin{cases} (Y_l(\mu r') - \gamma(r')J_l(\mu r'))(Y_l(\mu r) - \delta(r')J_l(\mu r)) \\ \quad \text{pour } b < r \leq r' \\ (Y_l(\mu r') - \delta(r')J_l(\mu r'))(Y_l(\mu r) - \gamma(r')J_l(\mu r)) \\ \quad \text{pour } r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.18)$$

2.1.3 Région ($0 < r \leq b$) :

D'après l'équation (2.2) on considère l'équation différentielle suivante :

$$r^2\psi_1'' + r\psi_1' + 2r^2(E - v_1)\psi_1 = w^2\psi_1,$$

qui est équivalente à l'équation :

$$r^2\psi_1'' + r\psi_1' + [2r^2E - 2r^2v_1 - w^2]\psi_1 = 0,$$

qu'on divise par (r^2) pour obtenir :

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + \left(2(E - v_1) - \frac{w^2}{r^2}\right)\psi_1 = 0, \quad (2.19)$$

avec les conditions aux limites

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi_1(r) = A_3; \quad \text{et } \psi_1(b) = B_3.$$

Posons ($\mu_1^2 = 2(E - v_1)$) et ($l = w$)

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + \left(\mu_1^2 - \frac{l^2}{r^2}\right)\psi_1 = 0. \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) est l'équation du Bessel, qui admet deux solutions linéairement indépendantes $J_l(\mu_1 r)$ et $Y_l(\mu_1 r)$.

Le cas $0 < r', r \leq b$:

D'après l'équation (2.20) la fonction de Green est donnée comme par :

$$G^{(l,4,4)}(r, r') = \begin{cases} A(r')J_l(\mu_1 r) & \text{pour } 0 < r \leq r' \\ B(r')[Y_l(\mu_1 r) - \alpha(r')J_l(\mu_1 r)] & \text{pour } r' \leq r \leq b \end{cases}$$

où A, B, α sont des fonctions de r' .

La continuité de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$G^{(l,4,4)}(r'_+, r') - G^{(l,4,4)}(r'_-, r') = 0$$

donc

$$B(r')[Y_l(\mu_1 r') - \alpha(r')J_l(\mu_1 r')] - A(r')J_l(\mu_1 r') = 0$$

ensuite

$$B(r')Y_l(\mu_1 r') - [A(r') + \alpha(r')B(r')]J_l(\mu_1 r') = 0, \quad (2.21)$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$\frac{\partial G^{(l,4,4)}}{\partial r}(r'_+, r') - \frac{\partial G^{(l,4,4)}}{\partial r}(r'_-, r') = \frac{2}{\pi r'}$$

ou bien

$$B(r')[\mu_1 Y_l'(\mu_1 r') - \mu_1 \alpha(r')J_l'(\mu_1 r')] - \mu_1 A(r')J_l'(\mu_1 r') = \frac{2}{\pi r'}$$

d'où

$$B(r')Y_l'(\mu_1 r') - [A(r') + \alpha(r')B(r')]J_l'(\mu_1 r') = \frac{2}{\pi \mu_1 r'}, \quad (2.22)$$

d'après l'équation (2.21)

$$A(r') = \frac{B(r')[Y_l(\mu_1 r') - \alpha(r')J_l(\mu_1 r')]}{J_l(\mu_1 r')}, \quad (2.23)$$

en substituant (2.23) dans (2.22) on obtient :

$$B(r')Y_l'(\mu_1 r') - \left[\frac{B(r')[Y_l(\mu_1 r') - \alpha(r')J_l(\mu_1 r')]}{J_l(\mu_1 r')} + \alpha(r')B(r') \right] J_l'(\mu_1 r') = \frac{2}{\pi \mu_1 r'},$$

$$B(r')[J_l(\mu_1 r')Y_l'(\mu_1 r') - Y_l(\mu_1 r')J_l'(\mu_1 r')] = \frac{2J_l(\mu_1 r')}{\pi \mu_1 r'}, \quad (2.24)$$

sachant que la wronskien est donné par

$$W(J_l(\mu_1 r'), Y_l(\mu_1 r')) = J_l(\mu_1 r')Y_l'(\mu_1 r') - Y_l(\mu_1 r')J_l'(\mu_1 r') = \frac{2}{\pi \mu_1 r'}, \quad (2.25)$$

et en substituant (2.25) dans (2.24) on obtient :

$$B(r') \frac{2}{\pi \mu_1 r'} = \frac{2J_l(\mu_1 r')}{\pi \mu_1 r'}$$

donc

$$B(r') = J_l(\mu_1 r') \quad (2.26)$$

aussi, en substituant (2.26) dans (2.23) on obtient :

$$A(r') = Y_l(\mu_1 r') - \alpha(r')J_l(\mu_1 r'),$$

enfin

$$G^{(l,4,4)}(r, r') = \begin{cases} (Y_l(\mu_1 r') - \alpha(r')J_l(\mu_1 r'))J_l(\mu_1 r) & \text{pour } 0 < r \leq r' \\ (Y_l(\mu_1 r) - \alpha(r')J_l(\mu_1 r))J_l(\mu_1 r) & \text{pour } r' \leq r \leq b \end{cases} \quad (2.27)$$

2.1.4 Calcul des coefficients γ et δ

D'après la symétrie de la fonction de Green

$$\gamma(a) = \gamma(r) = \gamma(r'),$$

et

$$\delta(a) = \delta(r) = \delta(r').$$

Selon les conditions de Dirichlet-Neumann de la fonction de Green au point $r = a$

$$G^{(l,1,1)}(a, r') \big|_{r'=a} = G^{(l,2,2)}(a, r') \big|_{r'=a}$$

c-à-d :

$$\frac{1}{\gamma(a) - \delta(a)} [Y_l(\mu a) - \gamma(a)J_l(\mu a)][Y_l(\mu a) - \delta(a)J_l(\mu a)] = -Y_l(ka)J_l(ka) \quad (2.28)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} G^{(l,1,1)}(a, r') \big|_{r'=a} = \frac{\partial}{\partial r} G^{(l,2,2)}(a, r') \big|_{r'=a}$$

d'où

$$\frac{\mu}{\gamma(a) - \delta(a)} [Y_l'(\mu a) - \gamma(a)J_l'(\mu a)][Y_l(\mu a) - \delta(a)J_l(\mu a)] = -kY_l'(ka)J_l(ka) \quad (2.29)$$

d'après les équations (2.28) et (2.29) on a le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma(a) - \delta(a)} [Y_l(\mu a) - \gamma(a)J_l(\mu a)][Y_l(\mu a) - \delta(a)J_l(\mu a)] = -Y_l(ka)J_l(ka) & (a) \\ \frac{\mu}{\gamma(a) - \delta(a)} [Y_l'(\mu a) - \gamma(a)J_l'(\mu a)][Y_l(\mu a) - \delta(a)J_l(\mu a)] = -kY_l'(ka)J_l(ka) & (b) \end{cases}$$

on divise l'équation (a) par (b) on trouve

$$\frac{Y_l(ka)}{kY_l'(ka)} = \frac{Y_l(\mu a) - \gamma(a)J_l(\mu a)}{\mu[Y_l'(\mu a) - \gamma(a)J_l'(\mu a)]}$$

alors

$$kY_l'(ka)Y_l(\mu a) - k\gamma(a)Y_l'(ka)J_l(\mu a) = \mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka) - \mu\gamma(a)Y_l(ka)J_l'(\mu a)$$

puis

$$\gamma(a)(Y_l(ka)J_l'(\mu a) - kY_l'(ka)J_l(\mu a)) = \mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)Y_l(\mu a)$$

ensuite

$$\gamma(a) = \frac{\mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)Y_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka)J_l'(\mu a) - kY_l'(ka)J_l(\mu a)} \quad (2.30)$$

d'après l'équation (2.28)

$$-(\gamma(a) - \delta(a))Y_l(ka)J_l(ka) = Y_l(\mu a)[Y_l(\mu a) - \gamma(a)J_l(\mu a)] - \delta(a)J_l(\mu a)[Y_l(\mu a) - \gamma(a)J_l(\mu a)],$$

ainsi

$$\delta(a)[J_l(\mu a)Y_l(\mu a) - \gamma(a)J_l^2(\mu a) + Y_l(ka)J_l(ka)] = Y_l^2(\mu a) - \gamma(a)J_l(\mu a)Y_l(\mu a) + \gamma(a)Y_l(ka)J_l(ka),$$

enfin

$$\delta(a) = \frac{Y_l^2(\mu a) - \gamma(a)[J_l(\mu a)Y_l(\mu a) - Y_l(ka)J_l(ka)]}{J_l(\mu a)Y_l(\mu a) - \gamma(a)J_l^2(\mu a) + Y_l(ka)J_l(ka)}.$$

Posons

$$\delta(a) = \frac{U(\mu, a, k)}{V(\mu, a, k)} \quad (2.31)$$

telle que :

$$\begin{cases} U = Y_l^2(\mu a) - \gamma(a)[J_l(\mu a)Y_l(\mu a) - Y_l(ka)J_l(ka)] \\ V = J_l(\mu a)Y_l(\mu a) - \gamma(a)J_l^2(\mu a) + Y_l(ka)J_l(ka) \end{cases} \quad (2.32)$$

en substituant (2.30) dans (2.32) on obtient :

$$\begin{cases} U = Y_l^2(\mu a)(\mu Y_l(ka)J_l'(\mu a) - kY_l'(ka)J_l(\mu a)) - (\mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)Y_l(\mu a)) \\ \quad (J_l(\mu a)Y_l(\mu a) - Y_l(ka)J_l(ka)) \\ V = (J_l(\mu a)Y_l(\mu a) + Y_l(ka)J_l(ka))(\mu Y_l(ka)J_l'(\mu a) - kY_l'(ka)J_l(\mu a)) - J_l^2(\mu a) \\ \quad (\mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)Y_l(\mu a)) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} U = \mu Y_l^2(\mu a)Y_l(ka)J_l'(\mu a) - kY_l^2(\mu a)Y_l'(ka)J_l(\mu a) - \mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka)J_l(\mu a)Y_l(\mu a) \\ \quad - kY_l(ka)J_l(ka)Y_l'(ka)Y_l(\mu a) + kY_l^2(\mu a)Y_l'(ka)J_l(\mu a) + \mu Y_l'(\mu a)Y_l^2(ka)J_l(ka) \\ V = \mu J_l(\mu a)Y_l(\mu a)Y_l(ka)J_l'(\mu a) - kY_l'(ka)J_l^2(\mu a)Y_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a)Y_l^2(ka)J_l(ka) \\ \quad - kY_l'(ka)J_l(\mu a)Y_l(ka)J_l(ka) - \mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka)J_l^2(\mu a) + kJ_l^2(\mu a)Y_l'(ka)Y_l(\mu a) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} U = Y_l(\mu a)Y_l(ka)(\mu Y_l(\mu a)J_l'(\mu a) - \mu Y_l'(\mu a)J_l(\mu a)) + \mu Y_l'(\mu a)Y_l^2(ka)J_l(ka) \\ \quad - kY_l(ka)J_l(ka)Y_l'(ka)Y_l(\mu a) \\ V = J_l(\mu a)Y_l(ka)(\mu J_l'(\mu a)Y_l(\mu a) - \mu J_l(\mu a)Y_l'(\mu a)) - kY_l'(ka)J_l(\mu a)Y_l(ka)J_l(ka) \\ \quad + \mu J_l'(\mu a)Y_l^2(ka)J_l(ka) \end{cases} \quad (2.33)$$

sachant que la wronskien est donné par

$$\begin{aligned} W(J_l(\mu a), Y_l(\mu a)) &= J_l(\mu a)Y_l'(\mu a) - Y_l(\mu a)J_l'(\mu a) \\ &= \frac{2}{\pi \mu a}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

et en substituant (2.34) dans (2.33) on obtient :

$$\begin{cases} U = -\frac{2}{\pi a}Y_l(\mu a)Y_l(ka) + J_l(ka)(\mu Y_l'(\mu a)Y_l^2(ka) - kY_l(ka)Y_l'(ka)Y_l(\mu a)) \\ V = -\frac{2}{\pi a}J_l(\mu a)Y_l(ka) + J_l(ka)(-kY_l'(ka)J_l(\mu a)Y_l(ka) + \mu J_l'(\mu a)Y_l^2(ka)) \end{cases} \quad (2.35)$$

enfin, la substituant (2.35) dans (2.31) on obtient :

$$\delta(a) = \frac{-2Y_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(\mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)Y_l(\mu a))}{-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(-kY_l'(ka)J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a)Y_l(ka))}. \quad (2.36)$$

2.1.5 Calcul des coefficients α

D'après la symétrie de la fonction de Green

$$\alpha(b) = \alpha(r) = \alpha(r').$$

Selon les conditions de Dirichlet-Neumann de la fonction de Green au point $r = b$

$$G^{(l,2,2)}(b, r') \big|_{r'=b} = G^{(l,4,4)}(b, r') \big|_{r'=b}$$

donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma(b) - \delta(b)} [Y_l(\mu b) - \gamma(b)J_l(\mu b)][Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b)] \\ &= [Y_l(\mu_1 b) - \alpha(b)J_l(\mu_1 b)]J_l(\mu_1 b) \end{aligned} \quad (2.37)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} G^{(l,2,2)}(b, r') \big|_{r'=b} = \frac{\partial}{\partial r} G^{(l,4,4)}(b, r') \big|_{r'=b}$$

afin que

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\gamma(b) - \delta(b)} [Y_l(\mu b) - \gamma(b)J_l(\mu b)][Y_l'(\mu b) - \delta(b)J_l'(\mu b)] \\ &= \mu_1 [Y_l'(\mu_1 b) - \alpha(b)J_l'(\mu_1 b)]J_l(\mu_1 b) \end{aligned} \quad (2.38)$$

d'après les équations (2.37) et (2.38) on a le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma(b) - \delta(b)} [Y_l(\mu b) - \gamma(b)J_l(\mu b)][Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b)] \\ = [Y_l(\mu_1 b) - \alpha(b)J_l(\mu_1 b)]J_l(\mu_1 b) & (c) \\ \frac{\mu}{\gamma(b) - \delta(b)} [Y_l(\mu b) - \gamma(b)J_l(\mu b)][Y_l'(\mu b) - \delta(b)J_l'(\mu b)] \\ = \mu_1 [Y_l'(\mu_1 b) - \alpha(b)J_l'(\mu_1 b)]J_l(\mu_1 b) & (d) \end{cases}$$

on divise l'équation (c) par (d) on trouve

$$\frac{Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b)}{\mu(Y_l'(\mu b) - \delta(b)J_l'(\mu b))} = \frac{Y_l(\mu_1 b) - \alpha(b)J_l(\mu_1 b)}{\mu_1 [Y_l'(\mu_1 b) - \alpha(b)J_l'(\mu_1 b)]}$$

alors

$$\begin{aligned} & \mu Y_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta(b)J_l'(\mu b)) - \mu \alpha(b)J_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta(b)J_l'(\mu b)) \\ &= \mu_1 Y_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b)) - \mu_1 \alpha(b)J_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \alpha(b)(\mu J_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta(b)J_l'(\mu b)) - \mu_1 J_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b))) \\ &= \mu Y_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta(b)J_l'(\mu b)) - \mu_1 Y_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b)) \end{aligned}$$

puis

$$\alpha(b) = \frac{\mu Y_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta(b)J_l'(\mu b)) - \mu_1 Y_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b))}{\mu J_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta(b)J_l'(\mu b)) - \mu_1 J_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b))}$$

enfin

$$\alpha(b) = \frac{(\mu Y_l(\mu_1 b)Y_l'(\mu b) - \mu_1 Y_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta(b)J_l(\mu b)) + \delta(b)(\mu_1 Y_l'(\mu_1 b)J_l(\mu b) - \mu Y_l(\mu_1 b)J_l'(\mu b)))}{(\mu J_l(\mu_1 b)Y_l'(\mu b) - \mu_1 J_l'(\mu_1 b)Y_l(\mu b) + \delta(b)(\mu_1 J_l(\mu b)J_l'(\mu_1 b) - \mu J_l(\mu_1 b)J_l'(\mu b)))}$$

Posons

$$\alpha(b) = \frac{Z(\mu_1, \mu, b)}{W(\mu_1, \mu, b)} \quad (2.39)$$

telle que

$$\begin{cases} Z = (\mu Y_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 Y_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) + \delta(b) (\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) - \mu Y_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) \\ W = (\mu J_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 J_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) + \delta(b) (\mu_1 J_l(\mu b) J_l'(\mu_1 b) - \mu J_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) \end{cases} \quad (2.40)$$

d'après le calcul précédent le équation (2.36) on a cette cas

$$\delta(b) = \frac{-2Y_l(\mu b) + \pi b J_l(\mu_1 b) (\mu Y_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) Y_l'(\mu_1 b))}{-2J_l(\mu b) + \pi b J_l(\mu_1 b) (-\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) + \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b))} \quad (2.41)$$

en substituant (2.41) dans (2.40) on obtient :

$$\begin{cases} Z = (\mu Y_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 Y_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) (-2J_l(\mu b) + \pi b J_l(\mu_1 b) (-\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) \\ + \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b))) + (\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) - \mu Y_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) (-2Y_l(\mu b) + \pi b J_l(\mu_1 b) \\ (\mu Y_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) Y_l'(\mu_1 b))) \\ W = (\mu J_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 J_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) (-2J_l(\mu b) + \pi b J_l(\mu_1 b) (-\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) + \\ \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b))) + (\mu_1 J_l(\mu b) J_l'(\mu_1 b) - \mu J_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) (-2Y_l(\mu b) + \pi b J_l(\mu_1 b) \\ (\mu Y_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) Y_l'(\mu_1 b))) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} Z = -2J_l(\mu b) (\mu Y_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 Y_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) + \pi b J_l(\mu_1 b) (-\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) \\ + \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b)) (\mu Y_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 Y_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) - 2Y_l(\mu b) (\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) \\ - \mu Y_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) + \pi b J_l(\mu_1 b) (\mu Y_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) Y_l'(\mu_1 b)) \\ (\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) - \mu Y_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) \\ W = -2J_l(\mu b) (\mu J_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 J_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) + \pi b J_l(\mu_1 b) (-\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) \\ + \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b)) (\mu J_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 J_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) - 2Y_l(\mu b) (\mu_1 J_l(\mu b) J_l'(\mu_1 b) \\ - \mu J_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) + \pi b J_l(\mu_1 b) (\mu Y_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) Y_l'(\mu_1 b)) \\ (\mu_1 J_l(\mu b) J_l'(\mu_1 b) - \mu J_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) \end{cases}$$

c-à-d :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = -2\mu Y_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) + 2\mu_1 Y_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b) J_l(\mu b) - 2\mu_1 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) Y_l'(\mu_1 b) \\ \quad + 2\mu Y_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b) \\ W = -2\mu J_l(\mu b) J_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) + 2\mu_1 J_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b) J_l(\mu b) - 2\mu_1 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) J_l'(\mu_1 b) \\ \quad + 2\mu Y_l(\mu b) J_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b) + \pi b J_l(\mu_1 b) (\mu^2 Y_l'(\mu b) J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) \\ \quad - \mu \mu_1 Y_l(\mu b) J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l'(\mu_1 b) - \mu \mu_1 Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) \\ + \mu_1^2 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) Y_l'(\mu_1 b) J_l'(\mu_1 b) + \mu \mu_1 Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l'(\mu_1 b) - \mu^2 Y_l'(\mu b) J_l'(\mu b) \\ Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) - \mu_1^2 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) Y_l'(\mu_1 b) J_l'(\mu_1 b) + \mu \mu_1 Y_l(\mu b) J_l'(\mu b) Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = -2\mu Y_l(\mu_1 b) (Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) - Y_l(\mu b) J_l'(\mu b)) \\ W = -2\mu J_l(\mu_1 b) (Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) - J_l'(\mu b) Y_l(\mu b)) + \pi b J_l(\mu_1 b) ((-Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) + J_l'(\mu b) \\ Y_l(\mu b)) \mu \mu_1 Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + (Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) - J_l'(\mu b) Y_l(\mu b)) \mu \mu_1 J_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu_1 b)) \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{-4Y_l(\mu_1 b)}{\pi b} \\ W = \frac{-4J_l(\mu_1 b)}{\pi b} + 2\mu_1 J_l(\mu_1 b) (J_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu_1 b) - Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)) \end{array} \right.$$

ensuite

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{-4Y_l(\mu_1 b)}{\pi b} \\ W = \frac{-4J_l(\mu_1 b)}{\pi b} + \frac{-4J_l(\mu_1 b)}{\pi b} \end{array} \right.$$

afin que

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{-4Y_l(\mu_1 b)}{\pi b} \\ W = \frac{-8J_l(\mu_1 b)}{\pi b} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

alors, la substituant (2.42) dans (2.39) on obtient :

$$\alpha(b) = \frac{Y_l(\mu_1 b)}{2J_l(\mu_1 b)},$$

enfin, la substitution des expressions de $\alpha(b)$, $\gamma(a)$ et $\delta(a)$ dans les systèmes (2.11), (2.18) et (2.27) respectivement, on trouve :

$$G^{(l,1,1)}(r, r') = - \begin{cases} Y_l(kr) J_l(kr') & \text{pour } a \leq r \leq r' \\ Y_l(kr') J_l(kr) & \text{pour } r' \leq r < \infty \end{cases}$$

et
posons

$$T = \gamma(a) - \delta(a)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka) J_l'(\mu a) - k Y_l'(ka) J_l(\mu a)} - \frac{-2Y_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a))}{-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (-k Y_l'(ka) J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))} \\ &= \frac{-4Y_l(ka)}{\pi a (\mu Y_l(ka) J_l'(\mu a) - k Y_l'(ka) J_l(\mu a)) (-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (-k Y_l'(ka) J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka)))} \end{aligned}$$

telle que :

$$G^{(l,2,2)}(r, r') = \frac{1}{T} \left\{ \begin{array}{l} (Y_l(\mu r) - \\ \frac{-2Y_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a))}{-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (-k Y_l'(ka) J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))} \times \\ J_l(\mu r)) (Y_l(\mu r') - \frac{\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka) J_l'(\mu a) - k Y_l'(ka) J_l(\mu a)} J_l(\mu r')) \\ \text{pour } b < r \leq r' \\ (Y_l(\mu r') - \\ \frac{-2Y_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a))}{-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (-k Y_l'(ka) J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))} \times \\ J_l(\mu r')) (Y_l(\mu r) - \frac{\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka) J_l'(\mu a) - k Y_l'(ka) J_l(\mu a)} J_l(\mu r)) \\ \text{pour } r' \leq r \leq a \end{array} \right.$$

et

$$G^{(l,4,4)}(r, r') = \left\{ \begin{array}{l} Y_l(\mu_1 r') J_l(\mu_1 r) - \frac{Y_l(\mu_1 b)}{2J_l(\mu_1 b)} J_l(\mu_1 r') J_l(\mu_1 r) \quad \text{pour } 0 < r \leq r' \\ (Y_l(\mu_1 r) J_l(\mu_1 r') - \frac{Y_l(\mu_1 b)}{2J_l(\mu_1 b)} J_l(\mu_1 r) J_l(\mu_1 r')) \quad \text{pour } r' \leq r \leq b \end{array} \right.$$

2.1.6 Région Mixte

1) Région $b \leq r \leq a \leq r'$:

$$G^{(l,2,1)}(r, r') = H_1(\mu r) Z_1(kr'),$$

où

$$H_1(\mu r) = \frac{1}{\lambda_1(r') - \eta_1(r')} [Y_l(\mu r) - \lambda_1(r') J_l(\mu r)],$$

et

$$Z_1(kr') = -J_l(kr'),$$

donc

$$G^{(l,2,1)}(r, r') = \frac{-1}{\lambda_1(r') - \eta_1(r')} [Y_l(\mu r) - \lambda_1(r') J_l(\mu r)] J_l(kr')$$

d'après le condition de Dirichlet de la fonction de Green au point $r = a$

$$G^{(l,2,1)}(a, r') \big|_{r'=a} = G^{(l,1,1)}(a, r') \big|_{r'=a}$$

\Rightarrow

$$\frac{-1}{\lambda_1(a) - \eta_1(a)} [Y_l(\mu a) - \lambda_1(a) J_l(\mu a)] J_l(ka) = -Y_l(ka) J_l(ka) \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial G^{(l,2,1)}}{\partial r}(a, r') \big|_{r'=a} = \frac{\partial G^{(l,1,1)}}{\partial r}(a, r') \big|_{r'=a}$$

ou bien

$$\frac{-\mu}{\lambda_1(a) - \eta_1(a)} (Y_l'(\mu a) - \lambda_1(a) J_l'(\mu a)) J_l(ka) = -k Y_l'(ka) J_l(ka) \quad (2.44)$$

on divise l'équation (2.43) par (2.44) on trouve :

$$\frac{Y_l(\mu a) - \lambda_1(a) J_l(\mu a)}{\mu [Y_l'(\mu a) - \lambda_1(a) J_l'(\mu a)]} = \frac{Y_l(ka)}{k Y_l'(ka)}$$

puis

$$k Y_l'(ka) Y_l(\mu a) - k \lambda_1(a) J_l(\mu a) Y_l'(ka) = \mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - \mu \lambda_1(a) J_l'(\mu a) Y_l(ka)$$

donc

$$\lambda_1(a) = \frac{k Y_l'(ka) Y_l(\mu a) - \mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka)}{k J_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka)}, \quad (2.45)$$

selon l'équation (2.43)

$$[Y_l(\mu a) - \lambda_1(a) J_l(\mu a)] = (\lambda_1(a) - \eta_1(a)) Y_l(ka)$$

d'où

$$Y_l(\mu a) - \lambda_1(a) J_l(\mu a) = \lambda_1(a) Y_l(ka) - \eta_1(a) Y_l(ka)$$

ensuite

$$\eta_1(a) = \frac{\lambda_1(a) [Y_l(ka) + J_l(\mu a)] - Y_l(\mu a)}{Y_l(ka)} \quad (2.46)$$

en substituant (2.45) dans (2.46) on obtient :

$$\eta_1(a) = \frac{(k Y_l'(ka) Y_l(ka) - \mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka)) (Y_l(ka) + J_l(\mu a))}{Y_l(ka) (k J_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))} \\ - \frac{Y_l(\mu a) (k J_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))}{Y_l(ka) (k J_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))}$$

c-à-d :

$$\eta_1(a) = \frac{k Y_l'(ka) Y_l(ka) Y_l(\mu a) - \mu Y_l'^2(ka) Y_l'(\mu a) + \mu Y_l(ka) (Y_l(\mu a) J_l'(\mu a) - Y_l'(\mu a) J_l(\mu a))}{Y_l(ka) (k J_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))}$$

d'où

$$\eta_1(a) = \frac{kY_l'(ka)Y_l(\mu a) - \mu[Y_l'(\mu a)Y_l(ka) - \frac{2}{\pi\mu a}]}{[kJ_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu Y_l(ka)J_l'(\mu a)]}.$$

donc

$$G^{(l,2,1)}(r, r') = \frac{-\pi a}{2} [kJ_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu Y_l(ka)J_l'(\mu a)][Y_l(\mu r) - \frac{kY_l'(ka)Y_l(\mu a) - \mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka)}{kJ_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu Y_l(ka)J_l'(\mu a)}J_l(\mu r)]J_l(kr')$$

alors finalement

$$G^{(l,2,1)}(r, r') = \frac{-\pi a}{2} [(kJ_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu Y_l(ka)J_l'(\mu a))Y_l(\mu r) - (kY_l'(ka)Y_l(\mu a) - \mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka))J_l(\mu r)]J_l(kr').$$

Remarque 2.1.1 Pour la région $b \leq r' \leq a \leq r$ le même calcul le cas précédent conduit à la fonction de Green $G^{(l,1,2)}(r, r')$.

2) Région $r' \leq b \leq r \leq a$:

$$G^{(l,2,4)}(r, r') = H_2(\mu r)Z_2(\mu_1 r'),$$

où

$$H_2(\mu r) = \frac{1}{\lambda_2(r') - \eta_2(r')} [Y_l(\mu r) - \eta_2(r')J_l(\mu r)],$$

et

$$Z_2(\mu_1 r') = J_l(\mu_1 r'),$$

donc

$$G^{(l,2,4)}(r, r') = \frac{1}{\lambda_2(r') - \eta_2(r')} [Y_l(\mu r) - \eta_2(r')J_l(\mu r)]J_l(\mu_1 r'),$$

d'après le condition de Dirichlet de la fonction de Green au point $r = b$

$$G^{(l,2,4)}(b, r') \big|_{r'=b} = G^{(l,4,4)}(b, r') \big|_{r'=b}$$

ou bien

$$\frac{1}{\lambda_2(b) - \eta_2(b)} [Y_l(\mu b) - \eta_2(b)J_l(\mu b)]J_l(\mu_1 b) = [Y_l(\mu_1 b) - \alpha(b)J_l(\mu_1 b)]J_l(\mu_1 b) \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial G^{(l,2,4)}}{\partial r}(b, r') \big|_{r'=b} = \frac{\partial G^{(l,4,4)}}{\partial r}(b, r') \big|_{r'=b}$$

alors

$$\frac{\mu}{\lambda_2(b) - \eta_2(b)} [Y_l'(\mu b) - \eta_2(b)J_l'(\mu b)]J_l(\mu_1 b) = \mu_1 [Y_l'(\mu_1 b) - \alpha(b)J_l'(\mu_1 b)]J_l(\mu_1 b) \quad (2.48)$$

la substitution de $\alpha(b) = \frac{Y_l(\mu_1 b)}{2J_l(\mu_1 b)}$ dans (2.47) et (2.48) on trouve :

$$\frac{1}{\lambda_2(b) - \eta_2(b)} [Y_l(\mu b) - \eta_2(b)J_l(\mu b)] = Y_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) \quad (2.49)$$

et

$$\frac{\mu}{\lambda_2(b) - \eta_2(b)} [Y'_l(\mu b) - \eta_2(b)J'_l(\mu b)] = \mu_1 [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] \quad (2.50)$$

on divise l'équation (2.49) par (2.50) on trouve :

$$\frac{Y_l(\mu b) - \eta_2(b)J_l(\mu b)}{\mu [Y'_l(\mu b) - \eta_2(b)J'_l(\mu b)]} = \frac{Y_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b)}{\mu_1 [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}]}$$

donc

$$\begin{aligned} & \mu_1 Y_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu_1 \eta_2(b) J_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] \\ &= \mu Y'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) - \mu \eta_2(b) J'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) \end{aligned}$$

afin que

$$\begin{aligned} & \mu_1 Y_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu Y'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) \\ &= \mu_1 \eta_2(b) J_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu J'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) \end{aligned}$$

d'où

$$\eta_2(b) = \frac{\mu_1 Y_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu Y'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)}{\mu_1 J_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu J'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)} \quad (2.51)$$

d'après l'équation (2.49)

$$Y_l(\mu b) - \eta_2(b)J_l(\mu b) = \lambda_2(b)Y_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) - \eta_2(b)Y_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b)$$

$$\lambda_2(b) = \frac{Y_l(\mu b) + \eta_2(b)(Y_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) - J_l(\mu b))}{Y_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b)} \quad (2.52)$$

en substituant (2.51) dans (2.52) on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_2(b) &= \frac{Y_l(\mu b)(\mu_1 J_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu J'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b))}{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) (\mu_1 J_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu J'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b))} \\ &+ \frac{(Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) - J_l(\mu b)) (\mu_1 Y_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu Y'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b))}{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) (\mu_1 J_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu J'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b))} \\ &= \frac{\mu_1 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu Y_l(\mu b) J'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)}{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) (\mu_1 J_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu J'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b))} \\ &+ \frac{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) [\mu_1 Y_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu Y'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)]}{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) (\mu_1 J_l(\mu b) [Y'_l(\mu_1 b)J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi\mu_1 b}] - \mu J'_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-\mu_1 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] + \mu Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)}{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) (\mu_1 J_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b))} \\
& = \frac{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) [\mu_1 Y_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu Y_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)]}{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) (\mu_1 J_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b))} \\
& + \frac{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) [-\mu Y_l(\mu b) J_l'(\mu b) + \mu Y_l'(\mu b) J_l(\mu b)]}{Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) (\mu_1 J_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b))}
\end{aligned}$$

donc

$$\lambda_2(b) = \frac{\mu_1 Y_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu (Y_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) - \frac{2}{\pi \mu b})}{\mu_1 J_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)}.$$

ou

$$\begin{aligned}
G^{(l,2,4)}(r, r') &= \frac{b\pi}{2} [\mu_1 J_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)] \\
& [Y_l(\mu r) - \frac{\mu_1 Y_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu Y_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)}{\mu_1 J_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)} J_l(\mu r)] J_l(\mu_1 r')
\end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned}
G^{(l,2,4)}(r, r') &= \frac{b\pi}{2} [Y_l(\mu r) (\mu_1 J_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu J_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)) \\
& - (\mu_1 Y_l(\mu b) [Y_l'(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b) + \frac{2}{\pi \mu_1 b}] - \mu Y_l'(\mu b) Y_l(\mu_1 b) J_l(\mu_1 b)) J_l(\mu r)] J_l(\mu_1 r').
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.2 Pour le région $r \leq b \leq r' \leq a$ le même calcul le cas précédent conduit à la fonction de Green $G^{(l,4,2)}(r, r')$.

2.2 Section B : $v_0 < E < v_1$

2.2.1 Région ($r > a$) :

On a :

$$G^{(l,1,1)}(r, r') = - \begin{cases} Y_l(kr) J_l(kr') & \text{pour } a \leq r \leq r' \\ Y_l(kr') J_l(kr) & \text{pour } r' \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.53)$$

2.2.2 Région ($b \leq r \leq a$) :

On a :

$$G^{(l,2,2)}(r, r') = \frac{1}{\gamma_1(r') - \delta_1(r')} \begin{cases} (Y_l(\mu r') - \gamma_1(r') J_l(\mu r')) (Y_l(\mu r) - \delta_1(r') J_l(\mu r)) & \text{pour } b < r \leq r' \\ (Y_l(\mu r') - \delta_1(r') J_l(\mu r')) (Y_l(\mu r) - \gamma_1(r') J_l(\mu r)) & \text{pour } r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.54)$$

2.2.3 Région ($0 < r \leq b$) :

D'après l'équation (2.19)

Posons $(\mu'_1)^2 = -\mu_1^2$ où $\mu_1^2 = 2(v_1 - E) < 0$ et $\mu'_1 = i\mu_1$ et $l = w$, on a :

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + ((\mu'_1)^2 - \frac{l^2}{r^2})\psi_1 = 0,$$

c-à-d :

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + ((i\mu_1)^2 - \frac{l^2}{r^2})\psi_1 = 0,$$

alors

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' - (\mu_1^2 + \frac{l^2}{r^2})\psi_1 = 0. \quad (2.55)$$

L'équation (2.55) est l'équation du Bessel modifiée, qui admet deux solutions linéairement indépendantes $I_l(\mu_1 r)$ et $K_l(\mu_1 r)$.

Le cas $0 < r', r \leq b$:

D'après l'équation (2.55) la fonction de Green est donnée comme par :

$$G^{(l,5,5)}(r, r') = \begin{cases} A(r')I_l(\mu_1 r) & \text{pour } 0 < r \leq r' \\ B(r')[K_l(\mu_1 r) - \alpha_1(r')I_l(\mu_1 r)] & \text{pour } r' \leq r \leq b \end{cases}$$

où A, B, α_1 sont des fonctions de r' .

La continuité de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$G^{(l,5,5)}(r'_+, r') - G^{(l,5,5)}(r'_-, r') = 0$$

donc

$$B(r')[K_l(\mu_1 r') - \alpha_1(r')I_l(\mu_1 r')] - A(r')I_l(\mu_1 r') = 0$$

ensuite

$$B(r')K_l(\mu_1 r') - [A(r') + \alpha_1(r')B(r')]I_l(\mu_1 r') = 0 \quad (2.56)$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$\frac{\partial G^{(l,5,5)}}{\partial r}(r'_+, r') - \frac{\partial G^{(l,5,5)}}{\partial r}(r'_-, r') = \frac{2}{\pi r'}$$

d'où

$$B(r')[\mu_1 K'_l(\mu_1 r') - \mu_1 \alpha_1(r')I'_l(\mu_1 r')] - \mu_1 A(r')I'_l(\mu_1 r') = \frac{2}{\pi r'}$$

puis

$$B(r')K'_l(\mu_1 r') - [A(r') + \alpha_1(r')B(r')]I'_l(\mu_1 r') = \frac{2}{\pi \mu_1 r'} \quad (2.57)$$

selon l'équation (2.56)

$$A(r') = \frac{B(r')[K_l(\mu_1 r') - \alpha_1(r')I_l(\mu_1 r')]}{I_l(\mu_1 r')} \quad (2.58)$$

en substituant (2.58) dans (2.57) on obtient :

$$B(r')K'_l(\mu_1 r') - \left[\frac{B(r')[K_l(\mu_1 r') - \alpha_1(r')I_l(\mu_1 r')]}{I_l(\mu_1 r')} + \alpha_1(r')B(r') \right] I'_l(\mu_1 r') = \frac{2}{\pi \mu_1 r'}$$

$$B(r')[I_l(\mu_1 r')K_l'(\mu_1 r') - K_l(\mu_1 r')I_l'(\mu_1 r')] = \frac{2I_l(\mu_1 r')}{\pi \mu_1 r'} \quad (2.59)$$

sachant que la wronskien est donné par

$$W(I_l(\mu_1 r'), K_l(\mu_1 r')) = I_l(\mu_1 r')K_l'(\mu_1 r') - K_l(\mu_1 r')I_l'(\mu_1 r') = \frac{-1}{\mu_1 r'}, \quad (2.60)$$

et en substituant (2.60) dans (2.59) on obtient :

$$B(r')\left(\frac{-1}{\mu_1 r'}\right) = \frac{2I_l(\mu_1 r')}{\pi \mu_1 r'}$$

ou

$$B(r') = \frac{-2}{\pi} I_l(\mu_1 r') \quad (2.61)$$

aussi, en substituant (2.61) dans (2.58) on obtient :

$$A(r') = \frac{-2}{\pi} [K_l(\mu_1 r') - \alpha_1(r')I_l(\mu_1 r')]$$

enfin

$$G^{(l,5,5)}(r, r') = \frac{-2}{\pi} \begin{cases} (K_l(\mu_1 r') - \alpha_1(r')I_l(\mu_1 r'))I_l(\mu_1 r) & \text{pour } 0 < r \leq r' \\ (K_l(\mu_1 r) - \alpha_1(r')I_l(\mu_1 r))I_l(\mu_1 r') & \text{pour } r' \leq r \leq b \end{cases} \quad (2.62)$$

2.2.4 Calcul des coefficients γ_1 et δ_1

D'après la symétrie de la fonction de Green

$$\gamma_1(a) = \gamma_1(r) = \gamma_1(r'),$$

et

$$\delta_1(a) = \delta_1(r) = \delta_1(r').$$

Selon les conditions de Dirichlet-Neumann de la fonction de Green au point $r = a$

$$G^{(l,1,1)}(a, r') \big|_{r'=a} = G^{(l,2,2)}(a, r') \big|_{r'=a}$$

alors

$$\frac{1}{\gamma_1(a) - \delta_1(a)} [Y_l(\mu a) - \gamma_1(a)J_l(\mu a)][Y_l(\mu a) - \delta_1(a)J_l(\mu a)] = -Y_l(ka)J_l(ka) \quad (2.63)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} G^{(l,1,1)}(a, r') \big|_{r'=a} = \frac{\partial}{\partial r} G^{(l,2,2)}(a, r') \big|_{r'=a}$$

ou bien

$$\frac{\mu}{\gamma_1(a) - \delta_1(a)} [Y_l'(\mu a) - \gamma_1(a)J_l'(\mu a)][Y_l(\mu a) - \delta_1(a)J_l(\mu a)] = -kY_l'(ka)J_l(ka) \quad (2.64)$$

d'après les équations (2.63) et (2.64), on a le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma_1(a) - \delta_1(a)} [Y_l(\mu a) - \gamma_1(a)J_l(\mu a)][Y_l(\mu a) - \delta_1(a)J_l(\mu a)] = -Y_l(ka)J_l(ka) & (a_1) \\ \frac{\mu}{\gamma_1(a) - \delta_1(a)} [Y_l'(\mu a) - \gamma_1(a)J_l'(\mu a)][Y_l(\mu a) - \delta_1(a)J_l(\mu a)] = -kY_l'(ka)J_l(ka) & (b_1) \end{cases}$$

Après certain calculs on trouve :

$$\gamma_1(a) = \frac{\mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)Y_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka)J_l'(\mu a) - kY_l'(ka)J_l(\mu a)}.$$

et

$$\delta_1(a) = \frac{-2Y_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(\mu Y_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)Y_l(\mu a))}{-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(-kY_l'(ka)J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a)Y_l(ka))}. \quad (2.65)$$

2.2.5 Calcul des coefficients α_1

D'après la symétrie de la fonction de Green

$$\alpha_1(b) = \alpha_1(r) = \alpha_1(r').$$

Selon les conditions de Dirichlet-Neumann de la fonction de Green au point $r = b$

$$G^{(l,2,2)}(b, r') \big|_{r'=b} = G^{(l,5,5)}(b, r') \big|_{r'=b}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_1(b) - \delta_1(b)} [Y_l(\mu b) - \gamma_1(b)J_l(\mu b)][Y_l(\mu b) - \delta_1(b)J_l(\mu b)] \\ &= \frac{-2}{\pi} [K_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \end{aligned} \quad (2.66)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} G^{(l,2,2)}(b, r') \big|_{r'=b} = \frac{\partial}{\partial r} G^{(l,5,5)}(b, r') \big|_{r'=b}$$

alors

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\gamma_1(b) - \delta_1(b)} [Y_l(\mu b) - \gamma_1(b)J_l(\mu b)][Y_l'(\mu b) - \delta_1(b)J_l'(\mu b)] \\ &= \frac{-2\mu_1}{\pi} [K_l'(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l'(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \end{aligned} \quad (2.67)$$

d'après les équations (2.66) et (2.67) on a le système :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_1(b) - \delta_1(b)} [Y_l(\mu b) - \gamma_1(b)J_l(\mu b)][Y_l(\mu b) - \delta_1(b)J_l(\mu b)] \\ &= \frac{-2}{\pi} [K_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \end{aligned} \right. \quad (c_1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\mu}{\gamma_1(b) - \delta_1(b)} [Y_l(\mu b) - \gamma_1(b)J_l(\mu b)][Y_l'(\mu b) - \delta_1(b)J_l'(\mu b)] \\ &= \frac{-2\mu_1}{\pi} [K_l'(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l'(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \end{aligned} \right. \quad (d_1)$$

on divise l'équation (c₁) par (d₁) on trouve

$$\frac{Y_l(\mu b) - \delta_1(b)J_l(\mu b)}{\mu(Y_l'(\mu b) - \delta_1(b)J_l'(\mu b))} = \frac{K_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)}{\mu_1[K_l'(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l'(\mu_1 b)]}$$

c-à-d :

$$\begin{aligned} & \mu K_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta_1(b)J_l'(\mu b)) - \mu \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta_1(b)J_l'(\mu b)) \\ &= \mu_1 K_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta_1(b)J_l(\mu b)) - \mu_1 \alpha_1(b)I_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta_1(b)J_l(\mu b)) \end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned} & \alpha_1(b)(\mu I_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta_1(b)J_l'(\mu b)) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta_1(b)J_l(\mu b))) \\ &= \mu K_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta_1(b)J_l'(\mu b)) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta_1(b)J_l(\mu b)) \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_1(b) = \frac{\mu K_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta_1(b)J_l'(\mu b)) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta_1(b)J_l(\mu b))}{\mu I_l(\mu_1 b)(Y_l'(\mu b) - \delta_1(b)J_l'(\mu b)) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b)(Y_l(\mu b) - \delta_1(b)J_l(\mu b))}$$

enfin

$$\alpha_1(b) = \frac{(\mu K_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b) (Y_l(\mu b))) + \delta_1(b) (\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) - \mu K_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b))}{(\mu I_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) + \delta_1(b) (\mu_1 J_l(\mu b) I_l'(\mu_1 b) - \mu I_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b))}$$

Posons

$$\alpha_1(b) = \frac{Z_1(\mu_1, \mu, b)}{W_1(\mu_1, \mu, b)} \quad (2.68)$$

telle que

$$\begin{cases} Z_1 = (\mu K_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b) (Y_l(\mu b))) + \delta_1(b) (\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) - \mu K_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) \\ W_1 = (\mu I_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) + \delta_1(b) (\mu_1 J_l(\mu b) I_l'(\mu_1 b) - \mu I_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) \end{cases} \quad (2.69)$$

d'après le calcul précédent le équation (2.65) on a cette cas

$$\delta_1(b) = \frac{-2Y_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b) (\mu Y_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b))}{-2J_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b) (-\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) + \mu J_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b))} \quad (2.70)$$

en substitution (2.70) dans (2.69) on trouve :

$$\begin{cases} Z_1 = (\mu K_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) (-2J_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b) (-\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) \\ \quad + \mu J_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b))) + (\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) - \mu K_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) (-2Y_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b) \\ \quad (\mu Y_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b))) \\ W_1 = (\mu I_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) (-2J_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b) (-\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) \\ \quad + \mu J_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b))) + (\mu_1 J_l(\mu b) I_l'(\mu_1 b) - \mu I_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) (-2Y_l(\mu b) \\ \quad + \pi b I_l(\mu_1 b) (\mu Y_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b))) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} Z_1 = -2J_l(\mu b) (\mu K_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b) (-\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) \\ \quad + \mu J_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b)) (\mu K_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) - 2Y_l(\mu b) (\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) \\ \quad - \mu K_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b) (\mu Y_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b)) \\ \quad (\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) - \mu K_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) \\ W_1 = -2J_l(\mu b) (\mu I_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b) (-\mu_1 K_l'(\mu_1 b) J_l(\mu b) \\ \quad + \mu J_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b)) (\mu I_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b)) - 2Y_l(\mu b) (\mu_1 J_l(\mu b) I_l'(\mu_1 b) \\ \quad - \mu I_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b) (\mu Y_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) - \mu_1 Y_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b)) \\ \quad (\mu_1 J_l(\mu b) I_l'(\mu_1 b) - \mu I_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b)) \end{cases}$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = -2\mu K_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) + 2\mu_1 K_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b) J_l(\mu b) - 2\mu_1 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b) \\ \quad + 2\mu Y_l(\mu b) K_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b) \\ W_1 = -2\mu J_l(\mu b) I_l(\mu_1 b) Y_l'(\mu b) + 2\mu_1 I_l'(\mu_1 b) Y_l(\mu b) J_l(\mu b) - 2\mu_1 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) I_l'(\mu_1 b) \\ \quad + 2\mu Y_l(\mu b) I_l(\mu_1 b) J_l'(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b) (\mu^2 Y_l'(\mu b) J_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) \\ \quad - \mu \mu_1 Y_l(\mu b) J_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l'(\mu_1 b) - \mu \mu_1 Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) \\ + \mu_1^2 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b) I_l'(\mu_1 b) + \mu \mu_1 Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l'(\mu_1 b) - \mu^2 Y_l'(\mu b) J_l'(\mu b) \times \\ \quad K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \mu_1^2 Y_l(\mu b) J_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b) I_l'(\mu_1 b) + \mu \mu_1 Y_l(\mu b) J_l'(\mu b) K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) \end{array} \right.$$

ensuite

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = -2\mu K_l(\mu_1 b) (Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) - Y_l(\mu b) J_l'(\mu b)) \\ W_1 = -2\mu I_l(\mu_1 b) (Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) - J_l'(\mu b) Y_l(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b) ((-Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) + J_l'(\mu b) \\ Y_l(\mu b)) \mu \mu_1 K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) + (Y_l'(\mu b) J_l(\mu b) - J_l'(\mu b) Y_l(\mu b)) \mu \mu_1 I_l'(\mu_1 b) K_l(\mu_1 b)) \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = \frac{-4K_l(\mu_1 b)}{\pi b} \\ W_1 = \frac{-4I_l(\mu_1 b)}{\pi b} + 2\mu_1 I_l(\mu_1 b) (I_l'(\mu_1 b) K_l(\mu_1 b) - K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)) \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = \frac{-4K_l(\mu_1 b)}{\pi b} \\ W_1 = \frac{-4I_l(\mu_1 b)}{\pi b} + \frac{2I_l(\mu_1 b)}{b} \end{array} \right.$$

afin que

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = \frac{-4K_l(\mu_1 b)}{\pi b} \\ W_1 = \frac{2I_l(\mu_1 b)(\pi - 2)}{\pi b} \end{array} \right. \quad (2.71)$$

ainsi, la substituant (2.71) dans (2.68) on obtient :

$$\alpha_1(b) = \frac{2K_l(\mu_1 b)}{(2 - \pi)I_l(\mu_1 b)}.$$

Enfin, la substitution des expressions de $\alpha_1(b)$, $\gamma_1(a)$ et $\delta_1(a)$ dans les systèmes (2.53), (2.54) et (2.62) respectivement, on trouve :

$$G^{(l,1,1)}(r, r') = - \begin{cases} Y_l(kr) J_l(kr') & \text{pour } a \leq r \leq r' \\ Y_l(kr') J_l(kr) & \text{pour } r' \leq r < \infty \end{cases}$$

posons

$$T_1 = \gamma_1(a) - \delta_1(a)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka) J_l'(\mu a) - k Y_l'(ka) J_l(\mu a)} - \frac{-2 Y_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a))}{-2 J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (-k Y_l'(ka) J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))} \\
&= \frac{-4 Y_l(ka)}{\pi a (\mu Y_l(ka) J_l'(\mu a) - k Y_l'(ka) J_l(\mu a)) (-2 J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (-k Y_l'(ka) J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka)))}
\end{aligned}$$

telle que :

$$G^{(l,2,2)}(r, r') = \frac{1}{T_1} \left\{ \begin{array}{l} (Y_l(\mu r) - \\ \frac{-2 Y_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a))}{-2 J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (-k Y_l'(ka) J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))} \times \\ J_l(\mu r) (Y_l(\mu r') - \frac{\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka) J_l'(\mu a) - k Y_l'(ka) J_l(\mu a)} J_l(\mu r')) \\ \text{pour } b < r \leq r' \\ (Y_l(\mu r') - \\ \frac{-2 Y_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a))}{-2 J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (-k Y_l'(ka) J_l(\mu a) + \mu J_l'(\mu a) Y_l(ka))} \times \\ J_l(\mu r') (Y_l(\mu r) - \frac{\mu Y_l'(\mu a) Y_l(ka) - k Y_l'(ka) Y_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka) J_l'(\mu a) - k Y_l'(ka) J_l(\mu a)} J_l(\mu r)) \\ \text{pour } r' \leq r \leq a \end{array} \right.$$

et

$$G^{(l,5,5)}(r, r') = \frac{-2}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} (K_l(\mu_1 r') - \frac{2 K_l(\mu_1 b)}{(2 - \pi) I_l(\mu_1 b)} I_l(\mu_1 r')) I_l(\mu_1 r) \quad \text{pour } 0 < r \leq r' \\ (K_l(\mu_1 r) - \frac{2 K_l(\mu_1 b)}{(2 - \pi) I_l(\mu_1 b)} I_l(\mu_1 r)) I_l(\mu_1 r') \quad \text{pour } r' \leq r \leq b \end{array} \right.$$

2.2.6 Région Mixte

1) Région $0 < r' \leq b \leq r \leq a$:

$$G^{(l,2,5)}(r, r') = H_3(\mu r) Z_3(\mu_1 r'),$$

où

$$H_3(\mu r) = \frac{1}{\lambda_3(r') - \eta_3(r')} [Y_l(\mu r) - \eta_3(r') J_l(\mu r)],$$

et

$$Z_3(\mu_1 r') = \frac{-2}{\pi} I_l(\mu_1 r'),$$

donc

$$G^{(l,2,5)}(r, r') = \frac{-2}{\pi (\lambda_3(r') - \eta_3(r'))} [Y_l(\mu r) - \eta_3(r') J_l(\mu r)] I_l(\mu_1 r'),$$

d'après la condition de Dirichlet de la fonction de Green au point $r = b$

$$G^{(l,2,5)}(b, r') \big|_{r'=b} = G^{(l,5,5)}(b, r') \big|_{r'=b}$$

alors

$$\frac{-2}{\pi(\lambda_3(b) - \eta_3(b))} [Y_l(\mu b) - \eta_3(b)J_l(\mu b)]I_l(\mu_1 b) = \frac{-2}{\pi} [K_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial G^{(l,2,5)}}{\partial r}(b, r') \big|_{r'=b} = \frac{\partial G^{(l,5,5)}}{\partial r}(b, r') \big|_{r'=b}$$

ensuite

$$\frac{-2\mu}{\pi(\lambda_3(b) - \eta_3(b))} [Y'_l(\mu b) - \eta_3(b)J'_l(\mu b)]I_l(\mu_1 b) = \frac{-2\mu_1}{\pi} [K'_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I'_l(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \quad (2.73)$$

on divise l'équation (2.72) par (2.73) on trouve :

$$\frac{Y_l(\mu b) - \eta_3(b)J_l(\mu b)}{\mu[Y'_l(\mu b) - \eta_3(b)J'_l(\mu b)]} = \frac{K_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)}{\mu_1[K'_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I'_l(\mu_1 b)]}$$

puis

$$\begin{aligned} & \mu_1 Y_l(\mu b) [K'_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I'_l(\mu_1 b)] - \eta_3(b) \mu_1 J_l(\mu b) [K'_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I'_l(\mu_1 b)] \\ &= \mu Y'_l(\mu b) [K_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)] - \eta_3(b) \mu J'_l(\mu b) [K_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)] \end{aligned}$$

d'où

$$\eta_3(b) = \frac{\mu_1 Y_l(\mu b) [K'_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I'_l(\mu_1 b)] - \mu Y'_l(\mu b) [K_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)]}{\mu_1 J_l(\mu b) [K'_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I'_l(\mu_1 b)] - \mu J'_l(\mu b) [K_l(\mu_1 b) - \alpha_1(b)I_l(\mu_1 b)]}$$

la substitution de $\alpha_1(b) = \frac{2K_l(\mu_1 b)}{(2 - \pi)I_l(\mu_1 b)}$ dans $\eta_3(b)$ on trouve :

$$\eta_3(b) = \frac{\mu_1 Y_l(\mu b) [-\pi K'_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}] + \mu \pi Y'_l(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)}{\mu_1 J_l(\mu b) [-\pi K'_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}] + \mu \pi J'_l(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)} \quad (2.74)$$

d'après l'équation (2.72) on a :

$$[Y_l(\mu b) - \eta_3(b)J_l(\mu b)] = (\lambda_3(b) - \eta_3(b))[(2 - \pi)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - 2K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]$$

ou bien

$$-\pi \lambda_3(b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) = Y_l(\mu b) - \eta_3(b) [J_l(\mu b) + \pi K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]$$

ainsi

$$\lambda_3(b) = \frac{Y_l(\mu b) - \eta_3(b) [J_l(\mu b) + \pi K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]}{-\pi K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)} \quad (2.75)$$

en substituant (2.74) dans (2.75) on obtient :

$$\lambda_3(b) = \frac{Y_l(\mu b) [\mu_1 J_l(\mu b) (-\pi K'_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi J'_l(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]}{-\pi K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) [\mu_1 J_l(\mu b) (-\pi K'_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi J'_l(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{[J_l(\mu b) + \pi K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)][\mu_1 Y_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi Y_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]}{- \pi K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)[\mu_1 J_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]} \\
&= \frac{-\mu_1\pi Y_l(\mu b)J_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b}Y_l(\mu b)J_l(\mu b) + \mu\pi Y_l(\mu b)J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)}{- \pi K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)[\mu_1 J_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]} \\
&+ \frac{\mu_1\pi Y_l(\mu b)J_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) + \frac{2}{b}Y_l(\mu b)J_l(\mu b) - \mu\pi Y_l'(\mu b)J_l(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)}{- \pi K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)[\mu_1 J_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]} \\
&+ \frac{- \pi K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)[\mu_1 Y_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi Y_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]}{- \pi K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)[\mu_1 J_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]} \\
&= \frac{K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)[-\frac{2}{b} - \pi[\mu_1 Y_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi Y_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]]}{- \pi K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)[\mu_1 J_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]}
\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda_3(b) = \frac{-\frac{2}{b} - \pi[\mu_1 Y_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi Y_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]}{- \pi[\mu_1 J_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu\pi J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]}$$

alors

$$\begin{aligned}
G^{(l,2,5)}(r, r') &= -b[\mu_1 J_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{\mu_1 b}) + \mu\pi J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)][Y_l(\mu r) \\
&\quad - \frac{\mu_1 Y_l(\mu b)[-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}] + \mu\pi Y_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)}{\mu_1 J_l(\mu b)[-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{\mu_1 b}] + \mu\pi J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)} J_l(\mu r)]I_l(\mu_1 r')
\end{aligned}$$

alors finalement

$$\begin{aligned}
G^{(l,2,5)}(r, r') &= -b[Y_l(\mu r)(\mu_1 J_l(\mu b)(-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{\mu_1 b}) + \mu\pi J_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)) \\
&\quad - (\mu_1 Y_l(\mu b)[-\pi K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}] + \mu\pi Y_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b))J_l(\mu r)]I_l(\mu_1 r').
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 Pour la région $0 < r \leq b \leq r' \leq a$ un calcul similaire au calcul précédent conduit à la fonction de Green $G^{(l,5,2)}(r, r')$.

2.3 Section C : $E < v_0$

2.3.1 Région ($r > a$) :

On a :

$$G^{(l,1,1)}(r, r') = - \begin{cases} Y_l(kr)J_l(kr') & \text{pour } a \leq r \leq r' \\ Y_l(kr')J_l(kr) & \text{pour } r' \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.76)$$

2.3.2 Région ($b \leq r \leq a$) :

D'après l'équation (2.19)

Posons $\mu'^2 = -\mu^2$ où $\mu^2 = 2(E - v_0) > 0$ et $\mu' = i\mu$ et $l = w$, on a :

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + (\mu'^2 - \frac{l^2}{r^2})\psi_1 = 0$$

ou bien

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + ((i\mu)^2 - \frac{l^2}{r^2})\psi_1 = 0$$

alors

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' - ((\mu)^2 + \frac{l^2}{r^2})\psi_1 = 0. \quad (2.77)$$

L'équation (2.77) est l'équation du Bessel modifiée, qui admet deux solutions linéairement indépendantes $I_l(\mu r)$ et $K_l(\mu r)$.

Le cas $b \leq r', r \leq a$:

D'après l'équation (2.77) la fonction de Green est donnée par :

$$G^{(l,3,3)}(r, r') = \begin{cases} E(r')[K_l(\mu r) - \delta_2(r')I_l(\mu r)] & \text{pour } b < r \leq r' \\ F(r')[K_l(\mu r) - \gamma_2(r')I_l(\mu r)] & \text{pour } r' \leq r \leq a \end{cases}$$

où E, F, γ_2, δ_2 sont des fonctions de r' .

La continuité de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$G^{(l,3,3)}(r'_+, r') - G^{(l,3,3)}(r'_-, r') = 0$$

donc

$$F(r')[K_l(\mu r') - \gamma_2(r')I_l(\mu r')] - E(r')[K_l(\mu r') - \delta_2(r')I_l(\mu r')] = 0$$

ensuite

$$F(r') = \frac{E(r')[K_l(\mu r') - \delta_2(r')I_l(\mu r')]}{[K_l(\mu r') - \gamma_2(r')I_l(\mu r')]} \quad (2.78)$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$\frac{\partial G^{(l,3,3)}}{\partial r}(r'_+, r') - \frac{\partial G^{(l,3,3)}}{\partial r}(r'_-, r') = \frac{2}{\pi r'}$$

ou

$$F(r')[\mu K_l'(\mu r') - \mu \gamma_2(r')I_l'(\mu r')] - E(r')[\mu K_l'(r') - \delta_2(r')I_l'(\mu r')] = \frac{2}{\pi r'}$$

puis

$$[F(r') - E(r')]K_l'(\mu r') + [-F(r')\gamma_2(r') + E(r')\delta_2(r')]I_l'(\mu r') = \frac{2}{\pi \mu r'} \quad (2.79)$$

en substituant (2.78) dans (2.79) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{E(r') [K_l(\mu r') - \delta_2(r') I_l(\mu r')]}{[K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')]} \right) - \left(\frac{E(r') [K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')]}{K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')} \right) \right] K_l'(\mu r') \\ & + \left[- \left(\frac{E(r') [K_l(\mu r') - \delta_2(r') I_l(\mu r')]}{[K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')]} \gamma_2(r') \right) + \left(\frac{E(r') [K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')]}{K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')} \delta_2(r') \right) \right] I_l'(\mu r') \\ & = \frac{2}{\pi \mu r'} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{-E(r') \delta_2(r') K_l'(\mu r') I_l(\mu r') + E(r') \gamma_2(r') I_l(\mu r') K_l'(\mu r') - E(r') \gamma_2(r') I_l'(\mu r') K_l(\mu r')}{[K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')]} \\ & + \left(\frac{-E(r') \delta_2(r') K_l(\mu r') I_l'(\mu r')}{[K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')]} \right) = \frac{2}{\pi \mu r'} \end{aligned}$$

afin que

$$\begin{aligned} & E(r') \delta_2(r') [K_l(\mu r') I_l'(\mu r') - K_l'(\mu r') I_l] + E(r') \gamma_2(r') [I_l(\mu r') K_l'(\mu r') - I_l'(\mu r') K_l(\mu r')] \\ & = \frac{2}{\pi \mu r'} [K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')] \end{aligned} \quad (2.80)$$

sachant que la wronskien est donné par

$$\begin{aligned} W(I_l(\mu r'), K_l(\mu r')) &= I_l(\mu r') K_l'(\mu r') - I_l'(\mu r') K_l(\mu r') \\ &= \frac{-1}{\mu r'}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

et en substituant (2.81) dans (2.80) on obtient :

$$E(r') \delta_2(r') \left(\frac{1}{\mu r'} \right) + E(r') \gamma_2(r') \left(\frac{-1}{\mu r'} \right) = \frac{2}{\pi \mu r'} [K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')]$$

d'où

$$-E(r') (\delta_2(r') - \gamma_2(r')) = \frac{2}{\pi} [K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')]$$

alors

$$E(r') = \frac{-2(K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r'))}{\pi(\gamma_2(r') - \delta_1(r'))}, \quad (2.82)$$

en substituant (2.82) dans (2.78) on obtient :

$$F(r') = \frac{-2(K_l(\mu r') - \delta_2(r') I_l(\mu r'))}{\pi(\gamma_2(r') - \delta_2(r'))},$$

enfin

$$G^{(l,3,3)}(r, r') = \frac{-2}{\pi(\gamma_2(r') - \delta_2(r'))} \begin{cases} (K_l(\mu r') - \gamma_2(r') I_l(\mu r')) \times \\ (K_l(\mu r) - \delta_2(r') I_l(\mu r)) & \text{pour } b < r \leq r' \\ (K_l(\mu r') - \delta_2(r') I_l(\mu r')) \times \\ (K_l(\mu r) - \gamma_2(r') I_l(\mu r)) & \text{pour } r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.83)$$

2.3.3 Région ($0 < r \leq b$) :

On a :

$$G^{(l,5,5)}(r, r') = \frac{-2}{\pi} \begin{cases} (K_l(\mu_1 r') - \alpha_2(r')I_l(\mu_1 r'))I_l(\mu_1 r) & \text{pour } 0 < r \leq r' \\ (K_l(\mu_1 r) - \alpha_2(r')I_l(\mu_1 r))I_l(\mu_1 r') & \text{pour } r' \leq r \leq b \end{cases} \quad (2.84)$$

2.3.4 Calcul des coefficients γ_2 et δ_2

D'après la symétrie de la fonction de Green

$$\gamma_2(a) = \gamma_2(r) = \gamma_2(r'),$$

et

$$\delta_2(a) = \delta_2(r) = \delta_2(r').$$

Aussi, les conditions de Dirichlet-Neumann de la fonction de Green au point $r = a$

$$G^{(l,1,1)}(a, r') \big|_{r'=a} = G^{(l,3,3)}(a, r') \big|_{r'=a}$$

alors

$$\frac{-2}{\pi(\gamma_2(a) - \delta_2(a))} [K_l(\mu a) - \gamma_2(a)I_l(\mu a)][K_l(\mu a) - \delta_2(a)I_l(\mu a)] = -Y_l(ka)J_l(ka) \quad (2.85)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} G^{(l,1,1)}(a, r') \big|_{r'=a} = \frac{\partial}{\partial r} G^{(l,3,3)}(a, r') \big|_{r'=a}$$

donc

$$\frac{-2\mu}{\pi(\gamma_2(a) - \delta_2(a))} [K_l'(\mu a) - \gamma_2(a)I_l'(\mu a)][K_l(\mu a) - \delta_2(a)I_l(\mu a)] = -kY_l'(ka)J_l(ka) \quad (2.86)$$

selon les équations (2.85) et (2.86) on a le système :

$$\begin{cases} \frac{-2}{\pi(\gamma_2(a) - \delta_2(a))} [K_l(\mu a) - \gamma_2(a)I_l(\mu a)][K_l(\mu a) - \delta_2(a)I_l(\mu a)] = -Y_l(ka)J_l(ka) & (a_2) \\ \frac{-2\mu}{\pi(\gamma_2(a) - \delta_2(a))} [K_l'(\mu a) - \gamma_2(a)I_l'(\mu a)][K_l(\mu a) - \delta_2(a)I_l(\mu a)] = -kY_l'(ka)J_l(ka) & (b_2) \end{cases}$$

on divise l'équation (a₂) par (b₂) on trouve

$$\frac{Y_l(ka)}{kY_l'(ka)} = \frac{K_l(\mu a) - \gamma_2(a)I_l(\mu a)}{\mu[K_l'(\mu a) - \gamma_2(a)I_l'(\mu a)]}$$

ensuite

$$kY_l'(ka)K_l(\mu a) - k\gamma_2(a)Y_l'(ka)I_l(\mu a) = \mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) - \mu\gamma_2(a)Y_l(ka)I_l'(\mu a)$$

puis

$$\gamma_2(a)(\mu Y_l(ka)I_l'(\mu a) - kY_l'(ka)I_l(\mu a)) = \mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)K_l(\mu a)$$

d'où

$$\gamma_2(a) = \frac{\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)K_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka)I_l'(\mu a) - kY_l'(ka)I_l(\mu a)}. \quad (2.87)$$

D'après l'équation (2.85)

$$\pi(\gamma_2(a) - \delta_2(a))Y_l(ka)J_l(ka) = 2K_l(\mu a)[K_l(\mu a) - \gamma_2(a)I_l(\mu a)] - 2\delta_2(a)I_l(\mu a)[K_l(\mu a) - \gamma_2(a)I_l(\mu a)]$$

alors

$$\begin{aligned} \delta_2(a)[2I_l(\mu a)K_l(\mu a) - 2\gamma_2(a)I_l^2(\mu a) - \pi Y_l(ka)J_l(ka)] &= 2K_l(\mu a)[K_l(\mu a) - \gamma_2(a)I_l(\mu a)] \\ &\quad - \pi\gamma_2(a)Y_l(ka)J_l(ka) \end{aligned}$$

afin que

$$\begin{aligned} \delta_2(a)[2I_l(\mu a)Y_l(\mu a) - 2\gamma_2(a)I_l^2(\mu a) - \pi Y_l(ka)J_l(ka)] &= 2K_l^2(\mu a) - 2\gamma_2(a)I_l(\mu a)K_l(\mu a) \\ &\quad - \pi\gamma_2(a)Y_l(ka)J_l(ka) \end{aligned}$$

ainsi

$$\delta_2(a) = \frac{2K_l^2(\mu a) - \gamma_2(a)[2I_l(\mu a)K_l(\mu a) + \pi Y_l(ka)J_l(ka)]}{2I_l(\mu a)K_l(\mu a) - 2\gamma_2(a)I_l^2(\mu a) - \pi Y_l(ka)J_l(ka)}$$

posons

$$\delta_2(a) = \frac{U_2(\mu, a, k)}{V_2(\mu, a, k)} \quad (2.88)$$

telle que :

$$\begin{cases} U_2 = 2K_l^2(\mu a) - \gamma_2(a)[2I_l(\mu a)K_l(\mu a) + \pi Y_l(ka)J_l(ka)] \\ V_2 = 2I_l(\mu a)K_l(\mu a) - 2\gamma_2(a)I_l^2(\mu a) - \pi Y_l(ka)J_l(ka) \end{cases} \quad (2.89)$$

en substituant (2.87) dans (2.89) on obtient :

$$\begin{cases} U_2 = 2K_l^2(\mu a)(\mu Y_l(ka)I_l'(\mu a) - kY_l'(ka)I_l(\mu a)) - (\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)K_l(\mu a)) \\ \quad (2I_l(\mu a)K_l(\mu a) + \pi Y_l(ka)J_l(ka)) \\ V_2 = (2I_l(\mu a)K_l(\mu a) - \pi Y_l(ka)J_l(ka))(\mu Y_l(ka)I_l'(\mu a) - kY_l'(ka)I_l(\mu a)) - 2I_l^2(\mu a) \\ \quad (\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)K_l(\mu a)) \end{cases}$$

ensuite

$$\begin{cases} U_2 = 2\mu K_l^2(\mu a)Y_l(ka)I_l'(\mu a) - 2kK_l^2(\mu a)Y_l'(ka)I_l(\mu a) - 2\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka)I_l(\mu a)K_l(\mu a) \\ \quad + \pi kY_l(ka)J_l(ka)Y_l'(ka)K_l(\mu a) + 2kK_l^2(\mu a)Y_l'(ka)I_l(\mu a) - \pi\mu K_l'(\mu a)Y_l^2(ka)J_l(ka) \\ V_2 = 2\mu I_l(\mu a)K_l(\mu a)Y_l(ka)I_l'(\mu a) - 2kY_l'(ka)I_l^2(\mu a)K_l(\mu a) - \pi\mu I_l'(\mu a)Y_l^2(ka)J_l(ka) \\ \quad + k\pi Y_l'(ka)I_l(\mu a)Y_l(ka)J_l(ka) - 2\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka)I_l^2(\mu a) + 2kI_l^2(\mu a)Y_l'(ka)K_l(\mu a) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} U_2 = 2K_l(\mu a)Y_l(ka)(\mu K_l(\mu a)I_l'(\mu a) - \mu K_l'(\mu a)I_l(\mu a)) - \pi\mu K_l'(\mu a)Y_l^2(ka)J_l(ka) \\ \quad + \pi kY_l(ka)J_l(ka)Y_l'(ka)K_l(\mu a) \\ V_2 = 2I_l(\mu a)Y_l(ka)(\mu I_l'(\mu a)K_l(\mu a) - \mu I_l(\mu a)K_l'(\mu a)) + \pi kY_l'(ka)I_l(\mu a)Y_l(ka)J_l(ka) \\ \quad - \pi\mu I_l'(\mu a)Y_l^2(ka)J_l(ka) \end{cases} \quad (2.90)$$

sachant que la wronskien est donné par

$$\begin{aligned} W(I_l(\mu a), K_l(\mu a)) &= I_l(\mu a)K_l'(\mu a) - K_l(\mu a)I_l'(\mu a) \\ &= \frac{-1}{\mu a}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

et en substituant (2.91) dans (2.90) on obtient :

$$\begin{cases} U_2 = \frac{2}{a}K_l(\mu a)Y_l(ka) + \pi J_l(ka)(-\mu K_l'(\mu a)Y_l^2(ka) + kY_l(ka)Y_l'(ka)K_l(\mu a)) \\ V_2 = \frac{2}{a}I_l(\mu a)Y_l(ka) + \pi J_l(ka)(kY_l'(ka)I_l(\mu a)Y_l(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l^2(ka)) \end{cases} \quad (2.92)$$

enfin, la substitution (2.92) dans (2.88) on obtient :

$$\delta_2(a) = \frac{2K_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(-\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) + kY_l'(ka)K_l(\mu a))}{2I_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(+kY_l'(ka)I_l(\mu a) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka))}, \quad (2.93)$$

2.3.5 Calcul des coefficients α_2

D'après la symétrie de la fonction de Green

$$\alpha_2(b) = \alpha_2(r) = \alpha_2(r').$$

Aussi, les conditions de Dirichlet-Neumann de la fonction de Green au point $r = b$

$$G^{(l,3,3)}(b, r') \big|_{r'=b} = G^{(l,5,5)}(b, r') \big|_{r'=b}$$

donc

$$\begin{aligned} &\frac{-2}{\pi(\gamma_2(b) - \delta_2(b))} [K_l(\mu b) - \gamma_2(b)I_l(\mu b)][K_l(\mu b) - \delta_2(b)I_l(\mu b)] \\ &= \frac{-2}{\pi} [K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \end{aligned} \quad (2.94)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} G^{(l,3,3)}(b, r') \big|_{r'=b} = \frac{\partial}{\partial r} G^{(l,5,5)}(b, r') \big|_{r'=b}$$

ensuite

$$\begin{aligned} &\frac{-2\mu}{\pi(\gamma_2(b) - \delta_2(b))} [K_l(\mu b) - \gamma_2(b)I_l(\mu b)][K_l'(\mu b) - \delta_2(b)I_l'(\mu b)] \\ &= \frac{-2}{\pi} \mu_1 [K_l'(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l'(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \end{aligned} \quad (2.95)$$

d'après les équations (2.94) et (2.95) on a le système :

$$\begin{cases} \frac{-2}{\pi(\gamma_2(b) - \delta_2(b))} [K_l(\mu b) - \gamma_2(b)I_l(\mu b)][K_l(\mu b) - \delta_2(b)I_l(\mu b)] \\ = \frac{-2}{\pi} [K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) & (c_2) \\ \frac{-2\mu}{\pi(\gamma_2(b) - \delta_2(b))} [K_l(\mu b) - \gamma_2(b)I_l(\mu b)][K_l'(\mu b) - \delta_2(b)I_l'(\mu b)] \\ = \frac{-2}{\pi} \mu_1 [K_l'(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l'(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) & (d_2) \end{cases}$$

on divise l'équation (c_2) par (d_2) on trouve

$$\frac{K_l(\mu b) - \delta_2(b)I_l(\mu b)}{\mu(K_l'(\mu b) - \delta_2(b)I_l'(\mu b))} = \frac{K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)}{\mu_1[K_l'(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l'(\mu_1 b)]}$$

donc

$$\begin{aligned} & \mu K_l(\mu_1 b)(K_l'(\mu b) - \delta_2(b)I_l'(\mu b)) - \mu \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)(K_l'(\mu b) - \delta_2(b)I_l'(\mu b)) \\ &= \mu_1 K_l'(\mu_1 b)(K_l(\mu b) - \delta_2(b)I_l(\mu b)) - \mu_1 \alpha_2(b)I_l'(\mu_1 b)(K_l(\mu b) - \delta_2(b)I_l(\mu b)) \end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned} & \alpha_2(b)(\mu I_l(\mu_1 b)(K_l'(\mu b) - \delta_2(b)I_l'(\mu b)) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b)(K_l(\mu b) - \delta_2(b)I_l(\mu b))) \\ &= \mu K_l(\mu_1 b)(K_l'(\mu b) - \delta_2(b)I_l'(\mu b)) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b)(K_l(\mu b) - \delta_2(b)I_l(\mu b)) \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_2(b) = \frac{\mu K_l(\mu_1 b)(K_l'(\mu b) - \delta_2(b)I_l'(\mu b)) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b)(K_l(\mu b) - \delta_2(b)I_l(\mu b))}{\mu I_l(\mu_1 b)(K_l'(\mu b) - \delta_2(b)I_l'(\mu b)) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b)(K_l(\mu b) - \delta_2(b)I_l(\mu b))}$$

alors

$$\alpha_2(b) = \frac{(\mu K_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b)(K_l(\mu b)) + \delta_2(b)(\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) - \mu K_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b)))}{(\mu I_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b)) + \delta_2(b)(\mu_1 I_l(\mu b)I_l'(\mu_1 b) - \mu I_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b))}$$

Posons

$$\alpha_2(b) = \frac{Z_2(\mu_1, \mu, b)}{W_2(\mu_1, \mu, b)} \quad (2.96)$$

telle que

$$\begin{cases} Z_2 = (\mu K_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b)(K_l(\mu b)) + \delta_2(b)(\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) - \mu K_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b))) \\ W_2 = (\mu I_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b)) + \delta_2(b)(\mu_1 I_l(\mu b)I_l'(\mu_1 b) - \mu I_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b)) \end{cases} \quad (2.97)$$

d'après le calcul précédent l'équation (2.93) devient

$$\delta_2(b) = \frac{2K_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b)(-\mu K_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b) + \mu_1 K_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b))}{2I_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b)(+\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) - \mu I_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b))} \quad (2.98)$$

en substituant (2.98) dans (2.97) on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_2 = (\mu K_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b))(2I_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b)(+\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) \\ - \mu I_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b))) + (\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) - \mu K_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b))(2K_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b) \\ (-\mu K_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b) + \mu_1 K_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b))) \\ W_2 = (\mu I_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b))(2I_l(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b)(\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) \\ - \mu I_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b))) + (\mu_1 I_l(\mu b)I_l'(\mu_1 b) - \mu I_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b))(2K_l(\mu b) \\ + \pi b I_l(-\mu_1 b)(\mu K_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b) + \mu_1 K_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b))) \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_2 = 2I_l(\mu b)(\mu K_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b)(\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) \\ - \mu I_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b))(\mu K_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 K_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b)) + 2K_l(\mu b)(\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) \\ - \mu K_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b)(-\mu K_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b) + \mu_1 K_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b)) \\ (\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) - \mu K_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b)) \\ W_2 = 2I_l(\mu b)(\mu I_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b)(+\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu b) \\ - \mu I_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b))(\mu I_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - \mu_1 I_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b)) + 2K_l(\mu b)(\mu_1 I_l(\mu b)I_l'(\mu_1 b) \\ - \mu I_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b)(-\mu K_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b) + \mu_1 K_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b)) \\ (\mu_1 I_l(\mu b)I_l'(\mu_1 b) - \mu I_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b)) \end{array} \right.$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_2 = 2\mu K_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b)I_l(\mu b) - 2\mu_1 K_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b)I_l(\mu b) + 2\mu_1 K_l(\mu b)I_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b) \\ - 2\mu K_l(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b) \\ W_2 = 2\mu I_l(\mu b)I_l(\mu_1 b)K_l'(\mu b) - 2\mu_1 I_l'(\mu_1 b)K_l(\mu b)I_l(\mu b) + 2\mu_1 K_l(\mu b)I_l(\mu b)I_l'(\mu_1 b) \\ - 2\mu K_l(\mu b)I_l(\mu_1 b)I_l'(\mu b) + \pi b I_l(\mu_1 b)(-\mu^2 K_l'(\mu b)I_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) \\ + \mu\mu_1 K_l(\mu b)I_l'(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l'(\mu_1 b) + \mu\mu_1 K_l'(\mu b)I_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) \\ - \mu_1^2 K_l(\mu b)I_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b)I_l'(\mu_1 b) - \mu\mu_1 K_l'(\mu b)I_l(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l'(\mu_1 b) + \mu^2 K_l'(\mu b)I_l'(\mu b) \\ K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) + \mu_1^2 K_l(\mu b)I_l(\mu b)K_l'(\mu_1 b)I_l'(\mu_1 b) - \mu\mu_1 K_l(\mu b)I_l'(\mu b)K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)) \end{array} \right.$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_2 = 2\mu K_l(\mu_1 b)(K_l'(\mu b)I_l(\mu b) - K_l(\mu b)I_l'(\mu b)) \\ W_2 = 2\mu I_l(\mu_1 b)(K_l'(\mu b)I_l(\mu b) - I_l'(\mu b)K_l(\mu b)) + \pi b I_l(\mu_1 b)((K_l'(\mu b)I_l(\mu b) - I_l'(\mu b) \\ K_l(\mu b))\mu\mu_1 K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) + (-K_l'(\mu b)I_l(\mu b) + I_l'(\mu b)K_l(\mu b))\mu\mu_1 I_l'(\mu_1 b)K_l(\mu_1 b)) \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_2 = \frac{-2K_l(\mu_1 b)}{b} \\ W_2 = \frac{-2I_l(\mu_1 b)}{b} + \pi\mu_1 I_l(\mu_1 b)(I_l'(\mu_1 b)K_l(\mu_1 b) - K_l'(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)) \end{array} \right.$$

ensuite

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_2 = \frac{-2K_l(\mu_1 b)}{b} \\ W_2 = \frac{-2I_l(\mu_1 b)}{b} + \frac{\pi I_l(\mu_1 b)}{b} \end{array} \right.$$

afin que

$$\begin{cases} Z_2 = \frac{-2K_l(\mu_1 b)}{b} \\ W_2 = \frac{I_l(\mu_1 b)(\pi - 2)}{b} \end{cases} \quad (2.99)$$

alors, la substituant (2.99) dans (2.96) on obtient :

$$\alpha_2(b) = \frac{2K_l(\mu_1 b)}{(2 - \pi)I_l(\mu_1 b)}$$

enfin, la substitution des expressions de $\alpha_2(b)$, $\gamma_2(a)$ et $\delta_2(a)$ dans les systèmes (2.76), (2.83) et (2.84) respectivement, on trouve :

$$G^{(l,1,1)}(r, r') = - \begin{cases} Y_l(kr)J_l(kr') & \text{pour } a \leq r \leq r' \\ Y_l(kr')J_l(kr) & \text{pour } r' \leq r < \infty \end{cases}$$

posons

$$T_2 = \gamma_2(a) - \delta_2(a)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)K_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka)I_l'(\mu a) - kY_l'(ka)I_l(\mu a)} - \frac{2K_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(-\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) + kY_l'(ka)K_l(\mu a))}{2I_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(+kY_l'(ka)I_l(\mu a) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka))} \\ &= \frac{-2Y_l(ka)}{a\pi(\mu Y_l(ka)I_l'(\mu a) - kY_l'(ka)I_l(\mu a))(2I_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(-kY_l'(ka)I_l(\mu a) + \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)))} \end{aligned}$$

telle que :

$$G^{(l,3,3)}(r, r') = \frac{-2}{\pi T_2} \begin{cases} (K_l(\mu r) - \frac{2K_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(-\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) + kY_l'(ka)K_l(\mu a))}{2I_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(+kY_l'(ka)I_l(\mu a) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka))} \times \\ I_l(\mu r))(K_l(\mu r') - \frac{\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)K_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka)I_l'(\mu a) - kY_l'(ka)I_l(\mu a)} I_l(\mu r')) \\ \text{pour } b < r \leq r' \\ (K_l(\mu r') - \frac{2K_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(-\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) + kY_l'(ka)K_l(\mu a))}{2I_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(+kY_l'(ka)I_l(\mu a) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka))} \times \\ I_l(\mu r'))(K_l(\mu r) - \frac{\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka) - kY_l'(ka)K_l(\mu a)}{\mu Y_l(ka)I_l'(\mu a) - kY_l'(ka)I_l(\mu a)} I_l(\mu r)) \\ \text{pour } r' \leq r \leq a \end{cases}$$

et

$$G^{(l,5,5)}(r, r') = \frac{-2}{\pi} \begin{cases} (K_l(\mu_1 r') - \frac{2K_l(\mu_1 b)}{(2 - \pi)I_l(\mu_1 b)} I_l(\mu_1 r')) I_l(\mu_1 r) & \text{pour } 0 < r \leq r' \\ (K_l(\mu_1 r) - \frac{2K_l(\mu_1 b)}{(2 - \pi)I_l(\mu_1 b)} I_l(\mu_1 r)) I_l(\mu_1 r') & \text{pour } r' \leq r \leq b \end{cases}$$

2.3.6 Région Mixte

1) Région $b \leq r \leq a \leq r'$:

$$G^{(l,3,1)}(r, r') = H_4(\mu r) Z_4(\mu_1 r'),$$

où

$$H_4(\mu r) = \frac{-2}{\pi(\lambda_4(r') - \eta_4(r'))} [K_l(\mu r) - \lambda_4(r') I_l(\mu r)],$$

et

$$Z_4(\mu_1 r') = -J_l(kr'),$$

alors

$$G^{(l,3,1)}(a, r') = \frac{2}{\pi(\lambda_4(r') - \eta_4(r'))} [K_l(\mu r) - \lambda_4(r') I_l(\mu r)] J_l(kr'),$$

d'après le condition de Dirichlet de la fonction de Green au point $r = a$

$$G^{(l,3,1)}(a, r') \big|_{r'=a} = G^{(l,1,1)}(a, r') \big|_{r'=a}$$

donc

$$\frac{2}{\pi(\lambda_4(a) - \eta_4(a))} [K_l(\mu a) - \lambda_4(a) I_l(\mu a)] J_l(ka) = -Y_l(ka) J_l(ka) \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial G^{(l,3,1)}}{\partial r}(a, r') \big|_{r'=a} = \frac{\partial G^{(l,1,1)}}{\partial r}(a, r') \big|_{r'=a}$$

ensuite

$$\frac{2\mu}{\pi(\lambda_4(a) - \eta_4(a))} [K_l'(\mu a) - \lambda_4(a) I_l'(\mu a)] J_l(ka) = -kY_l'(ka) J_l(ka) \quad (2.101)$$

on divise l'équation (2.100) par (2.101) on trouve :

$$\frac{K_l(\mu a) - \lambda_4(a) I_l(\mu a)}{\mu [K_l'(\mu a) - \lambda_4(a) I_l'(\mu a)]} = \frac{Y_l(ka)}{kY_l'(ka)}$$

ainsi

$$kY_l'(ka) K_l(\mu a) - k\lambda_4(a) I_l(\mu a) Y_l'(ka) = \mu K_l'(\mu a) Y_l(ka) - \mu \lambda_4(a) I_l'(\mu a) Y_l(ka)$$

puis

$$kY_l'(ka) K_l(\mu a) - \mu K_l'(\mu a) Y_l(ka) = \lambda_4(a) [kI_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a) Y_l(ka)]$$

d'où

$$\lambda_4(a) = \frac{kY_l'(ka) K_l(\mu a) - \mu K_l'(\mu a) Y_l(ka)}{kI_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a) Y_l(ka)} \quad (2.102)$$

d'après l'équation (2.100)

$$2K_l(\mu a) - 2\lambda_4(a) I_l(\mu a) = -\pi \lambda_4(a) Y_l(ka) + \pi \eta_4(a) Y_l(ka)$$

ou bien

$$\eta_4(a) = \frac{2K_l(\mu a) + \lambda_4(a) [-2I_l(\mu a) + \pi Y_l(ka)]}{\pi Y_l(ka)} \quad (2.103)$$

en substituant (2.102) dans (2.103) on obtient :

$$\eta_4(a) = \frac{2K_l(\mu a)[kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)]}{\pi Y_l(ka)[kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)]} \\ + \frac{[-2I_l(\mu a) + \pi Y_l(ka)][kY_l'(ka)K_l(\mu a) - \mu K_l'(\mu a)Y_l(ka)]}{\pi Y_l(ka)[kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)]}$$

afin que

$$\eta_4(a) = \frac{2kK_l(\mu a)I_l(\mu a)Y_l'(ka) - 2\mu K_l(\mu a)I_l'(\mu a)Y_l(ka) - 2kK_l(\mu a)I_l(\mu a)Y_l'(ka)}{\pi Y_l(ka)[kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)]} \\ + \frac{2\mu K_l'(\mu a)I_l(\mu a)Y_l(ka) + k\pi K_l(\mu a)Y_l'(ka)Y_l(ka) - \pi\mu K_l'(\mu a)Y_l^2(ka)}{\pi Y_l(ka)[kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)]}$$

alors

$$\eta_4(a) = \frac{Y_l(ka)(k\pi K_l(\mu a)Y_l'(ka) - \frac{2}{a} - \pi\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka))}{\pi Y_l(ka)[kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)]}$$

d'où

$$\eta_4(a) = \frac{(k\pi K_l(\mu a)Y_l'(ka) - \frac{2}{a} - \pi\mu K_l'(\mu a)Y_l(ka))}{\pi[kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)]}$$

ou

$$G^{(l,3,1)}(r, r') = a(kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka))[K_l(\mu r) \\ - \frac{kY_l'(ka)K_l(\mu a) - \mu K_l'(\mu a)Y_l(ka)}{kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)}I_l(\mu r)]J_l(kr)$$

finalemt

$$G^{(l,3,1)}(r, r') = a[K_l(\mu r)(kI_l(\mu a)Y_l'(ka) - \mu I_l'(\mu a)Y_l(ka)) \\ - (kY_l'(ka)K_l(\mu a) - \mu K_l'(\mu a)Y_l(ka))I_l(\mu r)]J_l(kr).$$

Remarque 2.3.1 Pour la région $b \leq r' \leq a \leq r$ un calcul identique au précédent conduit à la fonction de Green $G^{(l,1,3)}(r, r')$.

2) Région $0 < r' \leq b \leq r \leq a$:

$$G^{(l,3,5)}(r, r') = H_5(\mu r)Z_5(\mu_1 r'),$$

où

$$H_5(\mu r) = \frac{-2}{\pi(\lambda_5(r') - \eta_5(r'))}[K_l(\mu r) - \eta_5(r')I_l(\mu r)],$$

et

$$Z_5(\mu_1 r') = \frac{-2}{\pi}I_l(\mu_1 r'),$$

donc

$$G^{(l,3,5)}(r, r') = \frac{4}{\pi^2(\lambda_7(r') - \eta_5(r'))}[K_l(\mu r) - \eta_5(r')I_l(\mu r)]I_l(\mu_1 r'),$$

d'après la condition de Dirichlet de la fonction de Green au point $r = b$

$$G^{(l,3,5)}(b, r') \big|_{r'=b} = G^{(l,5,5)}(b, r') \big|_{r'=b}$$

ensuite

$$\frac{4}{\pi^2(\lambda_5(b) - \eta_5(b))} [K_l(\mu b) - \eta_5(b)I_l(\mu b)]I_l(\mu_1 b) = \frac{-2}{\pi} [K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial G^{(l,3,5)}}{\partial r}(b, r') \Big|_{r'=b} = \frac{\partial G^{(l,5,5)}}{\partial r}(b, r') \Big|_{r'=b}$$

alors

$$\frac{4\mu}{\pi^2(\lambda_5(b) - \eta_5(b))} [K'_l(\mu b) - \eta_5(b)I'_l(\mu b)]I_l(\mu_1 b) = \frac{-2\mu_1}{\pi} [K'_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I'_l(\mu_1 b)]I_l(\mu_1 b) \quad (2.105)$$

on divise l'équation (2.104) par (2.105) on trouve :

$$\frac{K_l(\mu b) - \eta_5(b)I_l(\mu b)}{\mu[K'_l(\mu b) - \eta_5(b)I'_l(\mu b)]} = \frac{K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)}{\mu_1[K'_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I'_l(\mu_1 b)]}$$

puis

$$\begin{aligned} \mu_1 K_l(\mu b)[K'_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I'_l(\mu_1 b)] - \eta_5(b)\mu_1 I_l(\mu b)[K'_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I'_l(\mu_1 b)] = \\ \mu K'_l(\mu b)[K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)] - \mu\eta_5(b)I'_l(\mu b)[K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)] \end{aligned}$$

afin que

$$\begin{aligned} \mu_1 K_l(\mu b)[K'_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I'_l(\mu_1 b)] - \mu K'_l(\mu b)[K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)] = \\ \eta_5(b)[\mu_1 I_l(\mu b)[K'_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I'_l(\mu_1 b)] - \mu I'_l(\mu b)[K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)]] \end{aligned}$$

d'où

$$\eta_5(b) = \frac{\mu_1 K_l(\mu b)[K'_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I'_l(\mu_1 b)] - \mu K'_l(\mu b)[K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)]}{\mu_1 I_l(\mu b)[K'_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I'_l(\mu_1 b)] - \mu I'_l(\mu b)[K_l(\mu_1 b) - \alpha_2(b)I_l(\mu_1 b)]}$$

la substitution de $\alpha_2(b) = \frac{2K_l(\mu_1 b)}{(2 - \pi)I_l(\mu_1 b)}$ dans $\eta_5(b)$ on trouve :

$$\eta_5(b) = \frac{\mu_1 K_l(\mu b)[- \pi K'_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}] + \mu\pi K'_l(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)}{\mu_1 I_l(\mu b)[- \pi K'_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}] + \mu\pi I'_l(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)} \quad (2.106)$$

d'après l'équation (2.104) on a :

$$2[K_l(\mu b) - \eta_5(b)I_l(\mu b)] = -\pi(\lambda_5(b) - \eta_5(b))[(2 - \pi)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - 2K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]$$

ainsi

$$-\pi^2\lambda_5(b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) = -2K_l(\mu b) - \eta_5(b)[-2I_l(\mu b) + \pi^2 K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]$$

donc

$$\lambda_5(b) = \frac{2K_l(\mu b) + \eta_5(b)[-2I_l(\mu b) + \pi^2 K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)]}{\pi^2 K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)} \quad (2.107)$$

en substituant (2.106) dans (2.107) on obtient :

$$\lambda_5(b) = \frac{2K_l(\mu b)(\mu_1 I_l(\mu b)[- \pi K'_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}] + \mu\pi I'_l(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b))}{\pi^2 K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b)(\mu_1 I_l(\mu b)[- \pi K'_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}] + \mu\pi I'_l(\mu b)K_l(\mu_1 b)I_l(\mu_1 b))}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{[-2I_l(\mu b) + \pi^2 K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)] [\mu_1 K_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi K_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]}{\pi^2 K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) [\mu_1 I_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]} \\
& = \frac{-2\mu_1 \pi K_l(\mu b) I_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{4}{b} K_l(\mu b) I_l(\mu b) + 2\mu \pi K_l(\mu b) I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)}{\pi^2 K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) [\mu_1 I_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]} \\
& + \frac{2\mu_1 \pi K_l(\mu b) I_l(\mu b) K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) + \frac{4}{b} K_l(\mu b) I_l(\mu b) - 2\mu \pi K_l'(\mu b) I_l(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)}{\pi^2 K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) [\mu_1 I_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]} \\
& + \frac{\pi^2 K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) [\mu_1 K_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi K_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]}{\pi^2 K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) [\mu_1 I_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]} \\
& = \frac{\pi K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) (\frac{2}{b} + \pi [\mu_1 K_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi K_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]}{\pi^2 K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) [\mu_1 I_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]}
\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda_5(b) = \frac{\frac{2}{b} + \pi [\mu_1 K_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi K_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]}{\pi [\mu_1 I_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)]}$$

alors

$$\begin{aligned}
G^{(l,3,5)}(r, r') &= \frac{2b}{\pi} [\mu_1 I_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{\mu_1 b}) + \mu \pi I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)] [K_l(\mu r) \\
& - \frac{\mu_1 K_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi K_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)}{\mu_1 I_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{\mu_1 b}) + \mu \pi I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)} I_l(\mu r)] I_l(\mu_1 r')
\end{aligned}$$

enfin

$$\begin{aligned}
G^{(l,3,5)}(r, r') &= \frac{2b}{\pi} [K_l(\mu r) (\mu_1 I_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{\mu_1 b}) + \mu \pi I_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)) \\
& - (\mu_1 K_l(\mu b) (-\pi K_l'(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b) - \frac{2}{b\mu_1}) + \mu \pi K_l'(\mu b) K_l(\mu_1 b) I_l(\mu_1 b)) I_l(\mu r)] I_l(\mu_1 r').
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.2 Dans la région $0 < r \leq b \leq r' \leq a$ un calcul similaire au précédent donne la fonction de Green $G^{(l,5,3)}(r, r')$.

Conclusion générale

Notre travail a porté sur la recherche de la fonction de Green pour le problème d'un potentiel continu par morceaux sur des régions à symétrie circulaire. En fait, c'est un potentiel multi-sauts sur ces régions. L'équation traitée est celle de Schrödinger. Nous avons utilisé la continuité de la fonction de Green et de sa dérivée sur les frontières entre les différentes régions pour trouver la solution. Les conditions aux limites utilisées sont souvent adaptées aux problèmes qu'on rencontre en mécanique quantique dans les problèmes de diffusion et aussi, pour les spectres discrets. Ce genre de problème, peut être étendu à un espace à N dimensions et aussi, à des potentiels non nécessairement constants par morceaux.

Bibliographie

- [1] B. Benali, B. Boudjedaa, M. T. Meftah, *Acta Physica Polonica A Vol.124.No.1*, 636-640(2013).
- [2] E. Hairer, *Calcul différentiel équations différentielles, Genève 24, Juin 1999*.
- [3] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, *Équations Intégrales - Traduction française Editions Mir 1977, Moscou*.
- [4] S. Kukla, U. Siedlecka, I. Zamorska, *Sci. Res. Inst. Math. Computer Sci.11 (1)*, 53-62 (2012).
- [5] Murray R. Spiegel, Ph. D, *Theory and Problems of Fourier Analysis with Application to Boundary Value Problems, Editions McGraw-Hill, America, 1974*.
- [6] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral tome 2- Traduction française Editions Mir 1980. Moscou*.
- [7] H. Reinhard, *Équations aux dérivées partielles-Bordas, Paris, 1991*.