

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Contribution des applications non
expansives en la théorie du point fixe et
applications**

Présenté par: Heddi Kaddouri
Khouloud Tamma

Soutenu devant le jury composé de

Adel. Aissaoui

MCA

Président

Univ. d'El Oued

Said. Beloul

MCB

Rapporteur

Univ. d'El Oued

Mohammed. Beggas

MAA

Examineur

Univ. d'El Oued

Année universitaire 2016 – 2017.

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier « **Allah** » le tous puissant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements :

À notre encadreur de mémoire **Dr. Said Beloul** Maître de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Un remerciement spécial et sincère au **Prof. Mohammed Tayeb Meftah**, de l'université de Ouargla et **Dr. Ishak Derrardjia**, de l'université de Annaba.

Un grand merci aussi à **M. Oussama Akmoum**, **M. Houamed Haroune** et **Dr. Naima Belouahem** pour leur aide et leur sympathie.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également à nos camarades de la promotion 2017 de Mathématiques et nos amis surtout **Ikram**, **Souad**, **Manal**, **Khaoula**, **Hafsia**, **Radhia** et **Samia** pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Table des matières

Introduction	1
1 Applications non expansives	3
1.1 Les espaces métriques	3
1.2 Suites dans les espaces métriques	5
1.3 Les espaces complets	8
1.4 Les espaces de Banach	8
1.4.1 Les espaces uniformément convexes	9
1.4.2 Les espaces réflexifs	10
1.5 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle	10
1.5.1 La convexité	10
1.5.2 La compacité	10
1.5.3 La coercivité	11
1.6 Applications non expansives	12
1.7 Quelques types des applications non expansives	16
1.7.1 Applications non expansives généralisées	16
1.7.2 Applications α -non expansives	19
1.7.3 Applications fermement non expansives	19
1.8 Point fixe	21
2 Quelques théorèmes du point fixe	23
2.1 Théorème du point fixe dans un espace métrique	23
2.2 Théorème du point fixe dans un espace de Banach	30

2.2.1	Pour des applications α -non expansives	30
2.2.2	Pour la somme de deux applications	34
3	Applications	38
3.1	Équations différentielles fonctionnelles à retard	38
3.1.1	Définitions	38
3.2	L'étude d'une équation différentielle fonctionnelle à retard	39
	Conclusion générale et perspective	54
	Bibliographie	55

Introduction générale

L'analyse est considérée comme l'une des sciences mathématiques, elle se développe dans ces dernières années par un afflux d'hypothèses et de théorèmes, en particulier dans la théorie du point fixe. Cette dernière est au coeur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non linéaires différents. Il y a différentes applications dans la topologie et dans les autres sciences telles que la physique, la chimie, la biologie et l'économie ... etc.

La première apparition de la théorie du point fixe était à la fin du 19ème siècle par le mathématicien polonais Banach intitulée, le principe de la contraction. Ce théorème est souvent mentionné comme le théorème du point fixe de Banach qui l'a énoncé en 1920 dans le cadre de la résolution des équations intégrales. Il est employé pour trouver des solutions approximatives et successives et l'existence d'une seule solution des équations notamment les équations différentielles. Ce théorème est appliqué dans l'espace métrique complet.

En 1930, Schauder a amélioré et généralisé le problème de l'existence et de l'unicité de Brower et insiste sur l'application continue sur un ensemble convexe et compact contrairement à Brower qui étudie seulement la compacité à cause de leur étude qui s'effectue sur la topologie.

Au cours de l'année 1955, Karasnoselskii a remarqué qu'il existe des difficultés pour l'intégrale dans certaines équations différentielles, pour cela il a mêlé entre le théorème de Banach et de Schauder, il est basé sur la décomposition de l'application étudiée en deux, l'une est une contraction et l'autre est continue et compacte. Ce théorème est très important pour trouver la solution de plusieurs équations intégrales ou différentielles. Depuis longtemps, le théorème de Krasnoselskii est resté un outil très efficace dans l'étude de beaucoup de

problèmes : il apporte certaines améliorations, telles que la notion de la contraction large due à Burton. Ce dernier mathématicien a présenté un nouveau théorème apparu sous le nom Karasnoselskii-Burton, qui remplace la condition de contraction de Karasnoselskii par une contraction large.

Récemment, plusieurs mathématiciens ont donné d'autres généralisations au théorème de Krasnoselskii où ils ont remplacé la condition de contraction large par des applications non expansives.

Dans ce mémoire, nous présenterons des définitions bien connues, et quelques théorèmes importants du point fixe pour certains types d'applications non expansives dans l'espace métrique et l'espace de Banach, et on va donner aussi une version pour le théorème de Krasnoselskii de type non expansive.

Nous avons réparti ces idées formant ce mémoire, en trois chapitres :

Le premier chapitre contient un rappel sur certaines notions utilisées tout le long de ce mémoire, comme : les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach, quelques éléments d'analyse fonctionnelle, certains types d'applications expansives en plus du théorème d'Ascoli-Arzelà et le point fixe.

Le deuxième chapitre est consacré à présenter quelques théorèmes du point fixe pour certains types d'applications non expansives, plus précisément les applications non expansives généralisées et les applications α -nonexpansives, ainsi le théorème de Krasnoselskii de type non expansive dans un espace de Banach.

Dans le troisième chapitre, on va appliquer le théorème de Karasnoselskii de type non expansive pour étudier l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle à retard.

Chapitre 1

Applications non expansives

Dans ce chapitre, on va donner quelques éléments essentiels d'analyse fonctionnelle, qui sont nécessaires, pour la suite de notre travail, comme les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach et quelques types d'applications non expansives, en particulier :

- Applications non expansives généralisées.
- Applications α -non expansives.
- Applications fermement non expansives.

1.1 Les espaces métriques

Définition 1.1.1. Soit E un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tout x, y et z de E :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrique),
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Exemple 1.1.1. $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ est une distance sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$$2. d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = \frac{|-1| |y - x|}{1 + |-1| |y - x|} = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|} = d(y, x).$$

3.

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} \\ &= \frac{|x - y + y - z|}{1 + |x - y + y - z|} \\ &\leq \frac{|x - y| + |y - z|}{1 + |x - y| + |y - z|} \\ &= \frac{|x - y|}{1 + |x - y| + |y - z|} + \frac{|y - z|}{1 + |x - y| + |y - z|} \\ &\leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|} \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Définition 1.1.2. On dit que deux distances d_1, d_2 sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que :

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y), \quad \text{pour tout } x, y \in E.$$

Exemple 1.1.2. Soit $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie de p distances sur E_i , on pose

$$E = \prod_{i=1}^p E_i,$$

et on définit sur le produit cartésien $E \times E$ deux distances comme suit

$$D_1(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i), \quad D_2(x, y) = \sum_{i=1}^p d_i(x_i, y_i),$$

pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de E .

On a

$$\sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^p d_i(x_i, y_i) \leq p \sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i),$$

donc

$$D_1(x, y) \leq D_2(x, y) \leq p D_1(x, y).$$

Alors D_1 et D_2 sont équivalentes, telles que $\alpha = 1, \beta = p$.

Définition 1.1.3. On appelle espace métrique tout ensemble non vide E muni d'une distance d . Cet espace sera noté par (E, d) .

Exemple 1.1.3. L'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ est dit métrique, lorsqu'il est muni d'une des distances suivantes :

1. $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$
2. $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 [f(t) - g(t)]^2 dt}.$
3. $d_\infty(f, g) = \max_{t \in [0; 1]} |f(t) - g(t)|.$

Définition 1.1.4. Une partie S d'un espace métrique $(E, | \cdot |)$ est dite bornée s'il existe une constante $L < \infty$ telle que $|x| \leq L$ pour tout $x \in S$. Une fonction f est dite bornée si son image est une partie bornée de E .

1.2 Suites dans les espaces métriques

Définition 1.2.1. (La convergence) Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge vers un point $l \in E$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_n, l) < \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq N_\varepsilon.$$

On écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ ou, $x_n \rightarrow l$.

Proposition 1.2.1. Toute suite convergente est bornée.

Preuve. Supposons que la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe alors, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel n :

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| \leq 1,$$

alors, $\forall n \geq N_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} |U_n| &= |U_n - l + l| \\ &\leq 1 + |l|, \end{aligned}$$

on a donc, $|U_n| \leq 1 + |l|$.

Notons $M = \max(|U_0|, |U_1|, \dots, |U_{N_\varepsilon-1}|, 1 + |l|)$. c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq M$.

Par conséquent, la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. □

Définition 1.2.2. (La continuité) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, f une application de E dans F , et a un point de E , on dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, d_E(x, a) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Si l'application f est continue en tout point a de E , on dit qu'elle est continue sur E ou tout simplement continue.

Proposition 1.2.2. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et f une application de E dans F . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en un point $a \in E$.

(ii) Pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers a , la suite $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Définition 1.2.3. (La continuité uniforme) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x, y \in E, d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

δ ne dépend pas de ε .

Remarque 1.2.1. Il est clair que la continuité uniforme sur E implique la continuité sur E .

Par contre, la réciproque est fausse, par exemple l'application $x \rightarrow x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.4. (Ensemble équicontinu des fonctions) Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f_n une suite de fonctions avec $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^P$.

On dit que $\{f_n\}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $t_1, t_2 \in U$ et $|t_1 - t_2| < \delta$ alors, $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.5. (Suites de Cauchy) On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E, d) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

et on écrit

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\longrightarrow 0 \\ n, m &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1. On munit l'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ par la distance fondamentale d_1 et on considère la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n(x) = \min(n, (\frac{1}{\sqrt{x}})) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout n et m de $\mathbb{N}^*$, avec $n > m$, on a :

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n - m) dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}} (\frac{1}{\sqrt{x}} - m) dx + \int_{\frac{1}{m^2}}^1 (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx \\ &= (\frac{1}{n}) - (\frac{m}{n^2}) + 2(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) - m(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

on prend $N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, on trouve que

$$n > m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.3. Toute suite convergente d'un espace métrique (E, d) est de Cauchy.

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite converge vers l , cela veut dire que

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\text{pour tout } n, m \geq N_\varepsilon : d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(l, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par conséquent, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. □

Remarque 1.2.2. Il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas, par exemple la suite $\{1 - (\frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace $] - 1; +1[$, mais cette suite est convergente dans $\mathbb{R}$ vers 1 dont $1 \notin] - 1; +1[$.

1.3 Les espaces complets

Définition 1.3.1. On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .

Exemple 1.3.1. $(\mathbb{R}^N, | \cdot |)$, $(\mathbb{C}^N, | \cdot |)$ sont des espaces complets.

Exemple 1.3.2. $(\mathbb{Q}^N, | \cdot |)$ n'est pas complet, on prend par exemple la suite $(1 + \frac{1}{n})^n$ qui converge vers e mais $e \notin \mathbb{Q}^N$.

1.4 Les espaces de Banach

Définition 1.4.1. Un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un espace normé si pour tout $x, y \in E$ il existe une fonction continue de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$),
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemple 1.4.1. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, si A est dans E , on pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors

$$\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|,$$

définit une norme sur E .

Exemple 1.4.2. L'espace $C([0;1], \mathbb{R})$ est dit normé, lorsqu'il est muni d'une des normes suivantes :

1. $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |f(t)|$. (La norme de la convergence uniforme)
2. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.
3. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f(t)]^2 dt}$.

Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Cependant, un espace métrique est toujours un espace normé même s'il possède une structure vectorielle car une distance est souvent associée à une norme.

Définition 1.4.2. On dit que deux normes $\|x\|_1, \|x\|_2$ sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 1$ telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 1.4.3. Un espace de Banach est un espace normé complet pour la distance associée à sa norme.

Exemple 1.4.3. L'espace $E = C([a; b], \mathbb{R}^n)$ des fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}^n$. Le nombre

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|,$$

où $|\cdot|$ est la norme dans $\mathbb{R}^n$, définit une norme rendant $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Exemple 1.4.4. On note l'espace des suites multiples bornées par :

$$l^\infty(Z^N) = \{x : Z^N \rightarrow K \mid \sup_{k \in Z^N} |x(k)| < \infty\},$$

et pour tout $x \in l^\infty(Z^N)$, on pose

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in Z^N} |x(k)| < \infty.$$

Alors $l^\infty(Z^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

1.4.1 Les espaces uniformément convexes

Définition 1.4.4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, on dit que E est uniformément convexe si pour tout $\varepsilon \in]0; 2]$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout x et y dans B_E

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Exemple 1.4.5. les espaces de Hilbert sont espaces uniformément convexes.

Lemme 1.4.1. [12] Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est uniformément convexe si et seulement si $\|\cdot\|^2$ est uniformément convexe sur des ensembles convexes bornés, c'est-à-dire pour chaque $r > 0$ et $\varepsilon \in]0; 2r]$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|tx + (1-t)y\|^2 \leq t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - t(1-t)\delta,$$

pour tout $t \in]0; 1[$ et pour tout $x, y \in rB_E$ avec $\|x - y\|^2 \geq \varepsilon$.

1.4.2 Les espaces réflexifs

Définition 1.4.5. *Un espace de Banach $(E, \| \cdot \|)$ est dit réflexif si l'injection canonique continue*

$$j(x)(f) := f(x),$$

est surjective.

Exemple 1.4.6. *les espaces $(L^p, \| \cdot \|_p)$, pour $1 < p < \infty$ sont espaces réflexifs.*

Théorème 1.4.1. (Millman) *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

1.5 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle

1.5.1 La convexité

Définition 1.5.1. *Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$ est dit convexe si pour tout $x, y \in S$ et pour tout $\lambda \in [0; 1]$, on a*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S.$$

Définition 1.5.2. (La fonction convexe) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I , si pour tout x, y de I et tout $\lambda \in [0; 1]$ on a*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Exemple 1.5.1. *La fonction $x \rightarrow |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car si $\lambda \in [0; 1]$, alors*

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1 - \lambda)y| = \lambda |x| + (1 - \lambda) |y|.$$

1.5.2 La compacité

Définition 1.5.3. (Les espaces métriques compacts) *On dit que (E, d) est un espace métrique compact si toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E admet une suite extraite converge vers un point de E .*

Définition 1.5.4. (Les parties compactes) *Une partie S de E est dite compacte si le sous-espace métrique (S, d) est compact.*

Exemple 1.5.2. Toute partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

Définition 1.5.5. (Les parties relativement compactes) Une partie S d'un espace métrique (E, d) est dite relativement compacte si son adhérence est une partie compacte de E . Par exemple, les parties relativement compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties bornées.

Définition 1.5.6. (Les applications compactes) Soient $(E, \| \cdot \|)$ et $(F, \| \cdot \|)$ deux espaces normés sur $\mathbb{K}$ et $f \in L(E, F)$. On dit que f est une application compacte si et seulement si une des trois propositions équivalentes suivantes sont vérifiées :

1. toute image d'un borné de E est relativement compacte dans F .
2. $f(B_E(0, 1))$ est relativement compacte dans F .
3. de toute suite bornée $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous suite telle que $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans F quand $k \rightarrow \infty$.

L'ensemble des applications compactes est noté par $K(E, F)$.

Exemple 1.5.3. Toute les applications de rang fini est compactes.

1.5.3 La coercivité

Une fonction f d'un sous-ensemble non vide S d'un espace de Banach $(E, \| \cdot \|)$ dans $\mathbb{R}$ est dite coercive si $f(z_n) \rightarrow \infty$ chaque fois que $\{z_n\}$ est une suite dans S telle que $\|z_n\| \rightarrow \infty$.

Théorème 1.5.1. (Ascoli-Arzelà) Soit (E, d) un espace métrique compact, (F, d) un espace métrique. Alors une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $A(x) := \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact dans F pour tout $x \in E$, et
- A est équicontinu.

Exemple 1.5.4. Soit $g : ([0; 1]) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, considérons l'équation intégrale suivante :

$$u(t) \rightarrow \int_0^t g(s, u(s))ds, \quad t \in [0; 1],$$

alors, l'opérateur de Hammerstein

$$G : C([0; 1]) \rightarrow C([0; 1])$$

$$u \rightarrow Gu,$$

tel que

$$Gu(t) = \int_0^t g(s, u(s)) ds,$$

est compact.

Preuve. Supposons l'ensemble $A = \{g \in C([0; 1]), \|g\| \leq M\}$. Comme g est continue et bornée, alors

$$\begin{aligned} |Gu(t)| &= \left| \int_0^t g(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |g(s, u(s))| ds \\ &\leq M \int_0^t ds = Mt \leq M, \quad \forall t \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Donc, G est borné.

Maintenant on va montrer que G est équicontinu,

pour $t_1, t_2 \in [0; 1]$ on a

$$\begin{aligned} |Gu(t_1) - Gu(t_2)| &= \left| \int_0^{t_1} g(s, u(s)) ds - \int_0^{t_2} g(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq M \int_{t_1}^{t_2} ds \\ &\leq M |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$ tel que, pour tout $t_1, t_2 \in [0; 1]$ et $|t_2 - t_1| \leq \delta$ alors

$$|Gu(t_1) - Gu(t_2)| \leq M\delta \leq \varepsilon,$$

d'où l'équicontinuité de G .

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, G est compact dans A . □

1.6 Applications non expansives

Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, on considère que f est une application de E dans F .

Définition 1.6.1. (*Application lipschitzienne*) Si K est un réel positif, on appelle application lipschitzienne de rapport K , toute application f vérifiant :

$$d_F(f(x), f(y)) \leq K d_E(x, y).$$

Eventuellement on précise : K -lipschitzienne.

Exemple 1.6.1. Soit $E \subset (\mathbb{R}_+, |\cdot|)$, on définit l'application f par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x},$$

on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \\ &= \left| \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \left| \frac{x + xy - y - yx}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \frac{|x - y|}{(1+y)(1+x)} \\ &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

C'est-à-dire f est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}_+$ donc, elle l'est aussi sur $\mathbb{R}$ (puisque f est impaire).

Remarque 1.6.1. Il est clair que, si f est lipschitzienne alors, f est uniformément continue mais le contraire n'est pas toujours juste, par exemple l'application $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais elle est non lipschitzienne.

Définition 1.6.2. (*Application contractante*) On appelle l'application f contraction si f est Lipschitzienne de rapport K , avec $0 < K < 1$.

Exemple 1.6.2. Soit $E = ([\frac{2}{3}; +\infty[, |\cdot|)$, on définit l'application f de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x+2},$$

on a $\forall x, y \in E$

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \frac{2x+6}{3x+2} - \frac{2y+6}{3y+2} \right| \\
&= \left| \frac{14(y-x)}{(3x+2)(3y+2)} \right| \\
&\leq \frac{14}{16} |x-y| \\
&= \frac{7}{8} |x-y|.
\end{aligned}$$

Donc, f est une contraction.

Définition 1.6.3. (*Application contraction large*) On dit que f est une contraction large si pour tout $\varphi, \psi \in S$ avec $\varphi \neq \psi$ alors, $d_F(f\varphi, f\psi) < d_E(\varphi, \psi)$ et si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) < 1$ tel que

$$\varphi, \psi \in S, d_E(\varphi, \psi) \geq \varepsilon \Rightarrow d_F(f\varphi, f\psi) \leq \delta(\varepsilon)d_E(\varphi, \psi).$$

Définition 1.6.4. (*Application contraction séparée*) On dit que l'application f est une contraction séparée si il existe deux fonctions $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. $\psi(0) = 0$, ψ est strictement croissante,
2. $\forall x, y \in S, d_F(f(x), f(y)) \leq \varphi(d_E(x, y))$, et
3. $\psi(r) \leq r - \varphi(r)$, pour $r > 0$.

Définition 1.6.5. (*Application contractive*) On appelle l'application f contractive si elle satisfaisant :

$$\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) < d_E(x, y).$$

Définition 1.6.6. (*Application non expansive*) On dit qu'une application f est non expansive si f est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) \leq d_E(x, y).$$

Exemple 1.6.3. Soit $E = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{R}^+$, on définit l'application f de S dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x},$$

on a $\forall x \in S$

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| \\
&= \left| \frac{1(1+y) - 1(1+x)}{(1+x)(1+y)} \right| \\
&= \left| \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \right| \\
&= \frac{|x-y|}{(1+y)(1+x)} \\
&\leq |x-y|.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire f est non expansive.

Remarque 1.6.2. $(f \text{ est une contraction}) \Rightarrow (f \text{ est contraction large}) \Rightarrow (f \text{ est contraction séparée}) \Rightarrow (f \text{ est non expansive})$.

Définition 1.6.7. (*Application pseudo-contractive*) Soit E est un espace de Banach, S un sous-ensemble de E et f est une application de S dans E , on dit que f est pseudo-contractive, si pour tout $x, y \in S$ et $r > 0$, on a

$$\|x - y\| \leq \|(1+r)(x - y) - r(f(x) - f(y))\|.$$

Proposition 1.6.1. Toute application non expansive est pseudo-contractive.

Preuve. Soit f est une application de E dans S , on suppose que f est non expansive.

On a, $\forall x, y \in S$ et $r > 0$:

$$\|(1+r)(x - y) - r(f(x) - f(y))\| \geq (1+r) \|x - y\| - r \|f(x) - f(y)\|,$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned}
(1+r) \|x - y\| - r \|f(x) - f(y)\| &= \|x - y\| + r[\|x - y\| - \|f(x) - f(y)\|] \\
&\geq \|x - y\| + r[0] \\
&= \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Donc, f est pseudo-contractive. □

1.7 Quelques types des applications non expansives

1.7.1 Applications non expansives généralisées

Définition 1.7.1. [9] Soit (E, d) un espace métrique non vide, une application $T : E \rightarrow E$ est dite satisfaisant la condition C si pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d(x, Tx) &\leq d(x, y) \\ \Rightarrow d(Tx, Ty) &\leq ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + c[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \end{aligned} \quad (1.1)$$

où $a \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $a + 2b + 2c = 1$.

Exemple 1.7.1. Soit $E = [-1; 1]$ et soit $T : E \rightarrow E$ est une application définie par :

$$Tx = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [0; \frac{3}{4}[\cup \frac{3}{4}; 1] = U, \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in [-1; 0[= V, \\ 0 & \text{si } x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

L'application T satisfait (1.1) avec $a = \frac{1}{2}$, $b = c = \frac{1}{8}$, c'est à dire

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq M(x, y),$$

où $M(x, y) = \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{8}[d(x, Tx) + d(y, Ty) + d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Preuve.

(i) Si $x, y \in U$, on a

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \frac{1}{2} |y - x| + \frac{1}{8}(2x + 2y + x + y + x + y) \\ &= \frac{1}{2} |y - x| + \frac{1}{2}(x + y) \\ &\geq |y - x| \\ &= d(Tx, Ty). \end{aligned}$$

(ii) Si $x, y \in V$, on a

$$\begin{aligned}
 M(x, y) &= \frac{1}{2} |y - x| - \frac{1}{8}(x + y) \\
 &\geq \frac{1}{2} |y - x| \\
 &= \frac{1}{2} d(x, y) \\
 &= d(Tx, Ty).
 \end{aligned}$$

(iii) Si $x \in U$ et $y \in V$, on a

$$\begin{aligned}
 M(x, y) &= \frac{1}{8}(7x - 5y) + \frac{1}{8} |y + x| \\
 &\geq |x + \frac{1}{2}y| \\
 &= d(Tx, Ty).
 \end{aligned}$$

(iv) Si $x \in V$ et $y \in U$, on a

$$\begin{aligned}
 M(x, y) &= \frac{1}{2}(y - x) + \frac{1}{4}(y - x) \\
 &= \frac{3}{4}(y - x) \\
 &\geq |\frac{x}{2} + y| \\
 &= d(Tx, Ty).
 \end{aligned}$$

(v) Si $x \in U$ et $y = \frac{3}{4}$, on a

$$\begin{aligned}
 M(x, y) &= \frac{1}{2} |x - \frac{3}{4}| + \frac{1}{8}(2x + \frac{3}{4} + x + x + \frac{3}{4}) \\
 &= \frac{1}{2} |x - \frac{3}{4}| + \frac{1}{2}x + \frac{3}{16},
 \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y) &\Rightarrow x \leq |x - \frac{3}{4}| \\
 &\Rightarrow 2x \leq \frac{3}{4} \\
 &\Rightarrow x \leq \frac{3}{8},
 \end{aligned}$$

alors, $M(x, y) = \frac{3}{8} + \frac{3}{16} \geq x = d(Tx, Ty)$.

(vi) Si $x \in V$ et $y = \frac{3}{4}$, on a

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - x\right) + \frac{1}{8}\left[-\frac{x}{2} + \frac{3}{4} - x + \frac{3}{4} - \frac{x}{2}\right] \\ &= -\frac{3x}{4} + \frac{9}{16} \\ &\geq \frac{1}{2} \\ &\geq -\frac{x}{2} \\ &= d(Tx, Ty). \end{aligned}$$

(vii) Si $x = \frac{3}{4}$ et $y \in U$, on a

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \frac{1}{2} \left| \frac{3}{4} - y \right| + \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} + 2y + y + \frac{3}{4} + y \right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{3}{4} - y \right| + \frac{y}{2} + \frac{3}{16}, \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y) &\Rightarrow \frac{3}{8} \leq \left| \frac{3}{4} - y \right| \\ &\Rightarrow y \leq \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

$$\text{alors } M(x, y) = \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{9}{16} \geq y = d(Tx, Ty).$$

(viii) Si $x = \frac{3}{4}$ et $y \in V$, on a

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - y\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4} - \frac{y}{2} - y + \frac{3}{4} - \frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{9}{16} - \frac{3y}{4} \\ &\geq \frac{1}{2} \\ &\geq -\frac{y}{2} \\ &= d(Tx, Ty), \end{aligned}$$

$$\text{car } \frac{y}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right].$$

(ix) Si $x = y$, on a $M(x, y) \geq d(Tx, Ty)$.

□

1.7.2 Applications α -non expansives

Définition 1.7.2. [3] Soit E un espace de Banach, soit S un sous-ensemble non vide de E , et soit α un nombre réel tel que $\alpha < 1$. Une application $T : S \rightarrow E$ est dite α -non expansive si :

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \alpha \|Tx - y\|^2 + \alpha \|Ty - x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - y\|^2, \text{ pour tout } x, y \in S.$$

1.7.3 Applications fermement non expansives

Définition 1.7.3. Soit E un espace de Banach et soit S un sous-ensemble non vide de E , on dit qu'une application $T : S \rightarrow E$ est fermement non expansive si :

$$\|Tx - Ty\| \leq \|r(x - y) + (1 - r)(Tx - Ty)\|, \text{ pour tout } r > 0 \text{ et } x, y \in S.$$

Exemple 1.7.2. L'application T qui est définie par $Tx = x$ est fermement non expansive.

Proposition 1.7.1. Soit E un espace de Banach, soit S un sous-ensemble non vide de E , et soit $T : S \rightarrow E$ est une application fermement non expansive. Alors T est α -non expansive pour tout nombre réel α tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Exemple 1.7.3. Soit E un espace de Banach, et soit $R, P : E \rightarrow E$ deux applications fermements non expansives telles que $R(E)$ et $P(E)$ sont contenus dans rB_E pour un certain nombre réel positif r . Soit α et δ des nombres réels tels que $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\delta \geq (1 + \frac{2}{\sqrt{\alpha}})r$. Alors, l'application $T : E \rightarrow E$ qui est définie par :

$$Tx = \begin{cases} Rx & \text{si } \|x\| \leq \delta, \\ Px & \text{si } \|x\| > \delta, \end{cases}$$

est α -non expansive.

Preuve. Notez que $\alpha(\delta - t)^2 \geq 4r^2$. Soit $x, y \in E$, il est clair de la proposition (1.7.1) que R et P sont des applications α -non expansives.

Pour montrer que l'application T est α -non expansive, il suffit de distinguer quatre cas :

- **Le premier cas** : Si $\|x\| \leq \delta$ et $\|y\| \leq \delta$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|^2 &= \|Rx - Ry\|^2 \\
&\leq \alpha \|Rx - y\|^2 + \alpha \|Ry - x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - y\|^2 \\
&= \alpha \|Tx - y\|^2 + \alpha \|Ty - x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - y\|^2 .
\end{aligned}$$

- **Le deuxième cas** : Si $\|x\| > \delta$ et $\|y\| > \delta$, on a :

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|^2 &= \|Px - Py\|^2 \\
&\leq \alpha \|Px - y\|^2 + \alpha \|Py - x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - y\|^2 \\
&= \alpha \|Tx - y\|^2 + \alpha \|Ty - x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - y\|^2 .
\end{aligned}$$

- **Le troisième cas** : Si $\|x\| \leq \delta$ et $\|y\| > \delta$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|^2 &= \|Rx - Py\|^2 \\
&\leq (\|Rx\| + \|Py\|)^2 \\
&\leq 4r^2 \\
&\leq \alpha(\delta - r)^2 \\
&\leq \alpha(\|y\| - \|Rx\|)^2 \\
&\leq \alpha \|Rx - y\|^2 \\
&= \alpha \|Tx - y\|^2 \\
&\leq \alpha \|Tx - y\|^2 + \alpha \|Ty - x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - y\|^2 .
\end{aligned}$$

- **Le quatrième cas** : Si $\|y\| \leq \delta$ et $\|x\| > \delta$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|^2 &= \|Px - Ry\|^2 \\
&\leq (\|Px\| + \|Ry\|)^2 \\
&\leq 4r^2 \\
&\leq \alpha(\delta - r)^2 \\
&\leq \alpha(\|x\| - \|Py\|)^2 \\
&\leq \alpha \|Py - x\|^2 \\
&= \alpha \|Ty - x\|^2 \\
&\leq \alpha \|Tx - y\|^2 + \alpha \|Ty - x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - y\|^2 .
\end{aligned}$$

Donc, T est α -non expansive.

□

Exemple 1.7.4. Soit $E = \mathbb{R}$, $S = [\sqrt{2}; \sqrt{3}]$, et soit $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels. Soit $T : S \rightarrow S$ est une application définie par :

$$Tx = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \sqrt{3} & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Maintenant nous montrons que T n'est pas α -non expansive. Au contraire, supposons qu'il existe $0 \leq \alpha < 1$ tel que :

$$|Tx - Ty|^2 \leq \alpha |Tx - y|^2 + \alpha |Ty - x|^2 + (1 - 2\alpha) |x - y|^2, \text{ pour chaque } x, y \in [\sqrt{2}; \sqrt{3}]$$

Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$ avec $\sqrt{2} < x < y < \sqrt{3}$. Alors, de ce qui précède, nous aurions

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 &\leq \alpha |\sqrt{2} - y|^2 + \alpha |\sqrt{3} - x|^2 + (1 - 2\alpha) |x - y|^2 \\ &< \alpha (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \alpha (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (1 - 2\alpha) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction. Alors, T n'est pas α -non expansive.

1.8 Point fixe

Définition 1.8.1. On dit que a est un point fixe d'une application f si :

$$f(a) = a.$$

Exemple 1.8.1. Soit g une application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 + 2x.$$

On a

$$g(x) = x \Leftrightarrow 1 + 2x = x \Leftrightarrow x = -1.$$

Alors, g admet un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.8.2. Soit h une application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

On a

$$h(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} - \arctan x = x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan x = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \arctan x.$$

Ce qui est impossible, car l'application $\tan$ n'est pas définie à $\frac{\pi}{2}$. Alors, h n'a pas de point fixe dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Quelques théorèmes du point fixe

Dans ce chapitre, on va citer quelques théorèmes du point fixe pour certains types d'applications non expansives, plus précisément les applications non expansives généralisées et les applications α -non expansives.

2.1 Théorème du point fixe dans un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $T : E \rightarrow E$ une application satisfait (1.1) c'est-à-dire si pour tout $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d(x, Tx) &\leq d(x, y) \\ \Rightarrow d(Tx, Ty) &\leq ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + c[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \end{aligned}$$

où $a \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $a + 2b + 2c = 1$.

On définit les deux suites $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit

$$d_n = d(T^n x, T^{n+1} x), \quad \text{pour } x \in E. \quad (2.1)$$

$$U_n = T^n x_0, \quad \text{pour } x_0 \text{ fixé.} \quad (2.2)$$

Lemme 2.1.1.

1. La suite qui est définie par (2.1) est décroissante.

2. La suite qui est définie par (2.2) converge vers un point $z \in E$.

Preuve.

1. Soit $x \in E$, puisque

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, Tx),$$

on trouve que

$$\begin{aligned} d(Tx, T^2x) &\leq ad(x, Tx) + b[d(x, Tx) + d(Tx, T^2x)] + c[d(x, T^2x) + d(Tx, Tx)] \\ &\leq ad(x, Tx) + b[d(x, Tx) + d(Tx, T^2x)] + c[d(x, Tx) + d(Tx, T^2x)] \\ &= (a + b + c)d(x, Tx) + (b + c)d(Tx, T^2x). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} d(Tx, T^2x) &\leq \frac{a + b + c}{1 - b - c}d(x, Tx) \\ &= d(x, Tx). \end{aligned}$$

Cela implique que la suite $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ est décroissante.

2. Maintenant, nous allons montrer qu'il existe un nombre non négatif $m < 2$ tel que

$$d(Tx, T^3x) \leq md_0,$$

sachant qu'on a

$$\begin{cases} d(x, T^2x) \geq d(x, Tx), \\ \text{ou} \\ d(x, T^2x) < d(x, Tx) \end{cases}$$

On a les deux cas suivants :

• **La première cas :**

Si

$$d(x, T^2x) \geq d(x, Tx),$$

alors

$$d(x, T^2x) \geq \frac{1}{2}d(x, Tx).$$

On passe à l'inégalité (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
d(Tx, T^3x) &\leq ad(x, T^2x) + b[d(x, Tx) + d(T^2x, T^3x)] + c[d(x, T^3x) + d(Tx, T^2x)] \\
&\leq ad(x, Tx) + ad(Tx, T^2x) + b[d(x, Tx) + d(T^2x, T^3x)] \\
&\quad + c[d(x, Tx) + d(Tx, T^3x) + d(Tx, T^2x)] \\
&\leq a(d_0 + d_1) + bd_0 + bd_2 + c[d_0 + d(Tx, T^3x) + d_1] \\
&\leq a(d_0 + d_0) + b(d_0 + d_0) + c(d_0 + d_0) + cd(Tx, T^3x),
\end{aligned}$$

alors

$$d(Tx, T^3x) \leq \frac{2a + 2b + 2c}{1 - c}d_0 = \frac{1 + a}{1 - c}d_0.$$

On pose $m_1 = \frac{1 + a}{1 - c}$, il est clair que $m_1 < 2$, parce que

$$a = 1 - 2b - 2c < 1 - 2c \Rightarrow 1 - a < 2(1 - c) \Rightarrow \frac{1 + a}{1 - c} < 2.$$

Cela signifie que

$$d(Tx, T^3x) \leq m_1 d_0.$$

• **La deuxième cas :**

Si

$$d(x, T^2x) < d(x, Tx),$$

puisque

$$d(Tx, T^2x) \leq ad(x, Tx) + b[d(x, Tx) + d(Tx, T^2x)] + c[d(x, T^2x) + d(Tx, Tx)],$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
d_1 &< ad_0 + bd_0 + bd_1 + cd_0 \\
&= (a + b + c)d_0 + bd_1 \\
&\Rightarrow d_1 < \frac{a + b + c}{1 - b}d_0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
d(Tx, T^3x) &\leq d(Tx, T^2x) + d(T^2x, T^3x) \\
&\leq d(Tx, T^2x) + d(Tx, T^2x) \\
&= 2d(Tx, T^2x) \\
&\leq \frac{2a + 2b + 2c}{1 - b}d_0 \\
&= \frac{1 + a}{1 - b}d_0.
\end{aligned}$$

On pose $m_2 = \frac{1 + a}{1 - b}$, il est clair que $m_2 < 2$ parce que

$$a = 1 - 2b - 2c < 1 - 2c \Rightarrow 1 - a < 2(1 - b) \Rightarrow \frac{1 + a}{1 - b} < 2.$$

Cela signifie que

$$d(Tx, T^3x) \leq m_2 d_0.$$

On prend $m = \max\{m_1, m_2\}$, on obtient

$$d(Tx, T^3x) \leq m d_0, \text{ pour tout } 0 < m < 2.$$

Puisque

$$\frac{1}{2}d(Tx, T^2x) \leq d(Tx, T^2x),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
d(T^2x, T^3x) &\leq ad(T^2x, Tx) + b[d(Tx, T^2x) + d(T^2x, T^3x)] + cd(Tx, T^3x) \\
&= ad_1 + bd_1 + bd_2 + cd(Tx, T^3x) \\
&\leq (a + 2b + mc)d_0 \\
&\Rightarrow d(T^2x, T^3x) \leq (a + 2b + mc)d_0.
\end{aligned}$$

On pose

$$k = a + 2b + mc,$$

alors

$$k < 1, \text{ et } d_2 \leq k d_0 \text{ pour tout } x \in E.$$

Soit $x_0 \in E$ et $U_n = T^n x_0$, alors

$$d_{n+2} \leq k d_n, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où

$$d_n = d(U_n, U_{n+1}).$$

Nous allons montrer que la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour tout $n \geq 0$, pour cela il suffit de prouver que

$$d_n \leq k^{\frac{n-1}{2}} d_0, \text{ pour tout } n \geq 0. \quad (2.3)$$

Et pour montrer (2.3), on distingue deux cas

• **La première cas :**

Pour tout entier pair $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} d_{n+2} &\leq k d_n \\ \Rightarrow d_n &\leq k d_{n-2} \\ &\leq k k d_{n-4} \\ &\vdots \\ &\leq k^{\frac{n}{2}} d_0 \\ &\leq k^{\frac{n-1}{2}} d_0. \end{aligned}$$

• **La deuxième cas :**

Pour tout entier impair $n \geq 1$,

si n est entier impair donc, $n - 1$ est entier pair, pour cela on prend $m = n - 1$

et on applique le cas où m est entier pair, on obtient

$$\begin{aligned} d_m &\leq k^{\frac{m}{2}} d_0 \\ \Rightarrow d_{n-1} &\leq k^{\frac{n-1}{2}} d_1 \\ \Rightarrow d_n &\leq d_{n-1} \leq k^{\frac{n-1}{2}} d_1 \leq k^{\frac{n-1}{2}} d_0 \\ \Rightarrow d_n &\leq k^{\frac{n-1}{2}} d_0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$d_n \leq k^{\frac{n-1}{2}} d_0, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On a $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$d(U_n, U_m) \leq d(U_n, U_{n+1}) + d(U_{n+1}, U_{n+2}) + \dots + d(U_{m-1}, U_m),$$

puisque $0 < k < 1$ alors

$$\begin{aligned} d(U_n, U_m) &\longrightarrow 0 \\ n, m &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, en plus on a E est un espace complet. Alors la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est converge vers un point $z \in E$.

□

Théorème 2.1.1. *Soit (E, d) une espace métrique complet non vide et $T : E \rightarrow E$ une application satisfaisant (1.1). Alors T admet un point fixe unique dans E .*

Preuve. D'après le lemme (2.1.1), on a la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $z \in E$. Maintenant nous allons montrer que le point z est l'unique point fixe de l'application T .

1. L'existence de point fixe

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d(z, U_n) < \frac{1}{2}d(U_n, U_{n+1}),$$

et

$$d(z, U_{n+1}) < \frac{1}{2}d(U_{n+1}, U_{n+2}),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} d_n = d(U_n, U_{n+1}) &\leq d(z, U_n) + d(z, U_{n+1}) \\ &< \frac{1}{2}(d_n + d_{n+1}) \\ &\leq \frac{1}{2}(d_n + d_n) \\ &= d_n. \end{aligned}$$

C'est une contradiction donc, pour tout $n \geq 0$ nous avons :

$$d(z, U_n) \geq \frac{1}{2}d(U_n, U_{n+1}),$$

ou

$$d(z, U_{n+1}) \geq \frac{1}{2}d(U_{n+1}, U_{n+2}).$$

- Si $d(z, U_n) \geq \frac{1}{2}d(U_n, U_{n+1})$, on trouve

$$d(Tz, U_{n+1}) \leq ad(U_n, z) + b[d(z, Tz) + d(U_n, U_{n+1})] + c[d(U_n, Tz) + d(z, U_n)].$$

Prenant $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} d(Tz, z) &\leq (b+c)d(Tz, z) \\ \Rightarrow d(Tz, z)(1-b-c) &\leq 0 \\ \Rightarrow d(Tz, z)(1-b-c) &= 0 \\ \Rightarrow d(Tz, z) &= 0 \\ \Rightarrow Tz &= z. \end{aligned}$$

- Si $d(z, U_{n+1}) \geq \frac{1}{2}d(U_{n+1}, U_{n+2})$, on trouve

$$d(Tz, U_{n+2}) \leq ad(U_{n+1}, z) + b[d(z, Tz) + d(U_{n+2}, U_{n+1})] + c[d(U_{n+1}, Tz) + d(z, U_{n+1})].$$

Prenant $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} d(Tz, z) &\leq (b+c)d(Tz, z) \\ \Rightarrow d(Tz, z)(1-b-c) &\leq 0 \\ \Rightarrow d(Tz, z)(1-b-c) &= 0 \\ \Rightarrow d(Tz, z) &= 0 \\ \Rightarrow Tz &= z. \end{aligned}$$

2. L'unicité de point fixe

Supposons qu'il existe deux points fixes z et y , tel que $z \neq y$.

On a

$$d(y, z) \geq \frac{1}{2}d(z, Tz) = 0.$$

En utilisant (1.1), on trouve que

$$\begin{aligned}
d(y, z) &= d(Ty, Tz) \leq ad(y, z) + b[d(y, y) + b(z, z)] + c[d(y, z) + d(y, z)] \\
&= (a + 2c)d(y, z) \\
&\Rightarrow d(y, z) \leq (a + 2c)d(y, z) \\
&\Rightarrow (a + 2c)d(y, z) = 0 \\
&\Rightarrow d(y, z) = 0 \\
&\Rightarrow y = z,
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. D'où l'unicité.

□

2.2 Théorème du point fixe dans un espace de Banach

2.2.1 Pour des applications α -non expansives

Théorème 2.2.1. [3] *Il existe une fonction linéaire bornée μ sur l^∞ telle que les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Si $\{t_n\} \in l^\infty$ et $t_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mu(\{t_n\}) \geq 0$,*
2. *Si $t_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mu(\{t_n\}) = 1$, et*
3. *$\mu(\{t_{n+1}\}) = \mu(\{t_n\})$ pour tout $\{t_n\} \in l^\infty$.*

μ est une fonction appelée *limite de Banach*, et la valeur de μ à $\{t_n\} \in l^\infty$ est notée par $\mu_n t_n$.

Proposition 2.2.1. [3] *Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace de Banach réflexif, soit S un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de E , et soit $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et coercive. Alors il existe $u \in S$ tel que $g(u) = \inf g(S)$.*

Lemme 2.2.1. *Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace de Banach, soit S un sous-ensemble non vide de E , et soit $T : S \rightarrow S$ une application α -non expansive pour un certain nombre réel α tel que $\alpha < 1$. On suppose que $\{T^n x\}$ est bornée pour certain $x \in S$. Alors*

$$\mu_n \| T^n x - Ty \|^2 \leq \mu_n \| T^n x - y \|^2,$$

pour toute limite de Banach μ et pour tout $y \in S$.

Preuve. Soit μ est limite de Banach, et soit $y \in S$ est donné. Puisque T est α -non expansive on trouve que

$$\|T^{n+1}x - Ty\|^2 \leq \alpha \|T^{n+1}x - y\|^2 + \alpha \|Ty - T^n x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|T^n x - y\|^2,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On prend

$$t_n = \|T^n x - Ty\|^2,$$

et comme μ est limite de Banach, on obtient

$$\begin{aligned} \mu_n \|T^n x - Ty\|^2 &\leq \alpha \mu_n \|T^n x - y\|^2 + \alpha \mu_n \|Ty - T^n x\|^2 + (1 - 2\alpha) \mu_n \|T^n x - y\|^2 \\ &\Rightarrow (1 - \alpha) \mu_n \|T^n x - Ty\|^2 \leq (1 - \alpha) \mu_n \|T^n x - y\|^2. \end{aligned}$$

Depuis $1 - \alpha > 0$, on obtient

$$\mu_n \|T^n x - Ty\|^2 \leq \mu_n \|T^n x - y\|^2.$$

□

Théorème 2.2.2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach uniformément convexe, soit S un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de E , et soit $T : S \rightarrow S$ une application α -non expansive pour un certain nombre réel α tel que $\alpha < 1$. Alors, T admet au moins un point fixe si et seulement s'il existe $x \in S$ tel que $\{T^n x\}$ est bornée.

Preuve.

1. On suppose que T admet un point fixe $x \in S$, donc

$$Tx = x,$$

cela veut dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x.$$

Alors, $\{T^n x\}$ est converge vers x ,

donc

$$\{T^n x\},$$

est bornée.

2. On suppose que $\{T^n x\}$ est bornée.

Soit $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(y) = \mu_n \|T^n x - y\|^2, \text{ pour tout } y \in S.$$

On affirme maintenant que g est convexe, continue et coercive.

En effet, on voit que $g = \mu \circ h$, où $h : S \rightarrow l^\infty$ est une fonction définie par :

$$h(y) = \|T^n x - y\|, \text{ pour tout } y \in S.$$

• La convexité

Pour tout y, z de S et tout λ dans $[0; 1]$ on a la fonction $f : S \rightarrow l^\infty$ qui définie par

$$f(y) = \|T^n x - y\|,$$

est convexe car

$$\begin{aligned} f(\lambda y + (1 - \lambda)z) &= \|T^n x - (\lambda y + (1 - \lambda)z)\| \\ &= \|\lambda(T^n x - y) + (1 - \lambda)(T^n x - z)\| \\ &\leq \lambda \|T^n x - y\| + (1 - \lambda) \|T^n x - z\| \\ &= \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(z), \end{aligned}$$

ainsi que la fonction carrée est convexe, la fonction h est aussi convexe, d'autre part la fonction limite de Banach μ est convexe(car elle est linéaire). Par conséquent, g est convexe.

• La continuité

Soit $\{y_m\}$ une suite dans S telle que $y_m \rightarrow y$ alors, on obtient

$$\begin{aligned} | \|T^n x - y_m\|^2 - \|T^n x - y\|^2 | &= | \|T^n x - y_m\| - \|T^n x - y\| | (\|T^n x - y_m\| + \|T^n x - y\|) \\ &\leq \|y_m - y\| \sup\{\|T^n x - y_m\| + \|T^n x - y\| : m, n \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, cela montre que la fonction h est continue pour tout $y \in S$. Par conséquent, g est continue.

• La coercivité

Si $\{z_m\}$ est une suite dans S tel que $\|z_m\| \rightarrow \infty$ alors, on a

$$\|T^n x - z_m\|^2 \geq (\|z_m\| - \|T^n x\|)^2 \geq \|z_m\| (\|z_m\| - 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n x\|),$$

c'est-à-dire $h(z_m) \rightarrow \infty$, cela signifie que la fonction h est coercive. Par conséquent, g est ainsi coercive.

D'après la proposition (2.2.1) il existe $u \in S$ tel que $g(u) = \inf g(S)$. Comme E est uniformément convexe, le point u sera unique.

En effet, on suppose qu'il existe $u_1, u_2 \in S$ tels que :

$$u_1 \neq u_2 \text{ et } g(u_1) = g(u_2) = \inf g(S).$$

D'après le lemme (1.4.1) on a $\| \cdot \|^2$ est uniformément convexe sur des ensembles convexes bornés, pour $\varepsilon = \|u_1 - u_2\| > 0$, on a $\delta > 0$, si on choisit $t = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \| (T^n x - u_1) - (T^n x - u_2) \| &= \| u_2 - u_1 \| > 0 \\ \Rightarrow \| \frac{(T^n x - u_1) + (T^n x - u_2)}{2} \|^2 & \\ \leq \frac{1}{2} \| T^n x - u_1 \|^2 + \frac{1}{2} \| T^n x - u_2 \|^2 - \delta, & \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela implique que

$$g\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \inf g(S) - \delta,$$

par ailleurs on a

$$\frac{u_1 + u_2}{2} \in S,$$

donc

$$\inf g(S) \leq g\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right).$$

C'est une contradiction.

Par conséquent, il existe un point unique $u \in S$ tel que $g(u) = \inf g(S)$.

D'après les hypothèses sur T , nous savons aussi que $Tu \in S$, et d'après le lemme (2.2.1) on trouve que :

$$g(Tu) \leq g(u),$$

d'autre part

$$g(u) = \inf g(S) \leq g(Tu),$$

donc

$$g(u) = g(Tu).$$

La fonction g est injective car pour tout $y_1, y_2 \in S$ on a

$$\begin{aligned}
g(y_1) &= g(y_2) \\
\Rightarrow \mu_n \|T^n x - y_1\|^2 &= \mu_n \|T^n x - y_2\|^2 \\
\Rightarrow \mu_n \|T^n x - y_1\|^2 - \mu_n \|T^n x - y_2\|^2 &= 0 \\
\Rightarrow \mu_n (\|T^n x - y_1\|^2 - \|T^n x - y_2\|^2) &= 0 \\
\Rightarrow (\|T^n x - y_1\|^2 - \|T^n x - y_2\|^2) &= 0 \\
\Rightarrow \|T^n x - y_1\|^2 &= \|T^n x - y_2\|^2 \\
\Rightarrow y_1 &= y_2,
\end{aligned}$$

par conséquent, $Tu = u$. Donc, u est un point fixe de T .

□

2.2.2 Pour la somme de deux applications

Théorème 2.2.3. (Schauder) Soit S un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ et $T : S \rightarrow S$ une application continue. Alors, T possède un point fixe.

Définition 2.2.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, une application $T : E \rightarrow E$ est dite ω -expansive s'il existe une fonction $\omega : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[$ telle que pour chaque $x, y \in E$ on a

$$\|Tx - Ty\| \geq \omega(\|x - y\|),$$

ω satisfaisante :

- $\omega(0) = 0$,
- $\omega(r) > 0$ pour $r > 0$, et
- ω est continue ou croissante.

Proposition 2.2.2. [5] Soit E un espace de Banach et soit S un sous-ensemble non vide borné, convexe et fermé de E . Si $T : S \rightarrow S$ est une application non expansive telle que $I - T$ est ω -expansive. Alors, T admet un point fixe unique dans S .

Théorème 2.2.4. (*Krasnoselskii de type non expansive*) Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace de Banach et soit S un sous-ensemble non vide, compact, convexe, borné et fermé de E . Si $A, B : S \longrightarrow E$ sont deux applications satisfaisant :

- (i) B est non expansive et $I - B$ est ω -expansive,
- (ii) A est continue et compacte, et
- (iii) Si $x, y \in S$ alors, $Bx + Ay \in S$.

Alors, il existe $x \in S$ tel que $x = Ax + Bx$.

Preuve. Pour chaque $y \in S$ fixé, l'application $M : S \longrightarrow S$ définie par : $Mz = Bz + Ay$ est non expansive et $I - M$ est ω -expansive.

En effet, pour tout $z_1, z_2 \in S$ on a

- L'application M est non expansive, car

$$\| Mz_2 - Mz_1 \| = \| Bz_2 + Ay - (Bz_1 + Ay) \| = \| Bz_2 - Bz_1 \| \leq \| z_2 - z_1 \| .$$

- L'application $I - M$ est ω -expansive, car

$$\begin{aligned} \| (I - M)z_2 - (I - M)z_1 \| &= \| Iz_2 - Mz_2 - (Iz_1 - Mz_1) \| \\ &= \| Iz_2 - (Bz_2 + Ay) - (Iz_1 - (Bz_1 + Ay)) \| \\ &= \| (I - B)z_2 - (I - B)z_1 \| \\ &\geq \omega \| z_2 - z_1 \| . \end{aligned}$$

D'après la proposition (2.2.2), il existe un point fixe unique de M dans S dit z , ce qui signifie que $Bz + Ay = z$, c'est-à-dire $(I - B)z = Ay$.

Maintenant nous allons montrer que l'application $(I - B)^{-1}$ existe, pour cela il suffit de prouver que l'application $(I - B) : S \longrightarrow (I - B)(S)$ est injective et surjective. En effet

- L'application $(I - B)$ est injective par ce que pour tout $z_1, z_2 \in S, z_1 \neq z_2$ on a

$$\begin{aligned} \| (I - B)z_2 - (I - B)z_1 \| &\geq \omega \| z_2 - z_1 \| \\ &> 0 \\ &\Rightarrow (I - B)z_2 \neq (I - B)z_1, \end{aligned}$$

alors, $I - B$ est injective.

- La surjectivité de l'application $(I - B)$ est evidente.

Donc, $(I - B)$ est bijective, cela implique que $(I - B)^{-1}$ existe.

Par consèquent

$$(I - B)^{-1}Ay = z \in S. \quad (2.4)$$

D'autre façon nous allons montrer que l'application $J^B : (I - B)^{-1} : (I - B)(S) \longrightarrow S$ est continue, on va voir ça en deux étapes :

- **Le premier étape** : Supposons que ω est une fonction continue, dans ce cas on considère que $\{x_n\}$ une suite dans $(I - B)(S)$ telle que $x_n \longrightarrow x \in (I - B)(S)$, on doit prouver que

$$J^B(x_n) \longrightarrow J^B(x).$$

Effectivement

$$\|x_n - x\| = \|(I - B)J^B(x_n) - (I - B)J^B(x)\| \geq \omega(\|J^B(x_n) - J^B(x)\|),$$

puisque $x_n \longrightarrow x$ et ω est une fonction continue, avec $\omega(0) = 0$ et $\omega(r) > 0$ pour $r > 0$ on passe à la limite on obtient :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \geq \omega(\lim_{n \rightarrow \infty} \|J^B(x_n) - J^B(x)\|) \geq 0,$$

cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J^B(x_n) - J^B(x)\| = 0.$$

Alors

$$J^B(x_n) \longrightarrow J^B(x).$$

- **Le deuxième étape** : Supposons que ω est une fonction croissante, on considère que $\{x_n\}$ une suite dans $(I - B)(S)$ telle que $x_n \longrightarrow x \in (I - B)(S)$, supposons que $J^B(x_n)$ ne converge pas vers $J^B(x)$, dans ce cas il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ telle que

$$\|J^B(x_{n_k}) - J^B(x)\| > \varepsilon, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, on définit $\delta = \omega(\varepsilon) > 0$. Puisque $\{x_n\}$ converge vers x , en particulier, on a

$$\|x_{n_k} - x\| < \delta.$$

Par conséquent

$$\delta = \omega(\varepsilon) \leq \omega(\| J^B(x_{n_k}) - J^B(x) \|) \leq \| x_{n_k} - x \| < \delta,$$

ce qui est une contradiction. Alors, J^B est une application continue.

On définit l'application T par :

$$T(z) = (J^B \circ Ay)(z), \text{ pour tout } z \in S,$$

d'après (2.4) on sait que $T(S) \subseteq S$, en utilisant l'argument ci-dessus, T est continue et compacte.

Alors, d'après le théorème de Schauder, T possède un point fixe unique z dans S . □

Chapitre 3

Applications

Ce chapitre à consacré d'appliquer certains théorème du point fixe étudiés dans le deuxième chapitre à l'étude l'existence et l'unicité da la solution pour une équations différentielles fonctionnelles à retard dans l'espace de Banach, plus précisément :

on va appliquer le théorème de Krasnoselskii de type non expansive pour prouver l'existence et l'unicité da la solution d'une équations différentielles fonctionnelles à retard.

3.1 Équations différentielles fonctionnelles à retard

3.1.1 Définitions

Soit $r \geq 0$ un réel donné. On note par $C([a; b], \mathbb{R}^d)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur l'intervalle $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour $[a; b] = [-r; 0]$ on pose

$$C_0 = C([-r; 0], \mathbb{R}^d),$$

et on désigne la norme d'un élément ϕ de C_0 par

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}.$$

où $|\cdot|$ est une norme dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.1.1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $L \geq 0$. Soient $x \in C([t_0 - r; t_0 + L], \mathbb{R}^d)$ et $t \in [t_0; t_0 + L]$.

On définit une fonction x_t , élément de C_0 , par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-r; 0].$$

Remarque 3.1.1. Pour tout t fixé, la fonction x_t est obtenue en considérant la restriction de la fonction x sur l'intervalle $[t - r; t]$, translatée sur $[-r; 0]$.

Définition 3.1.2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On appelle équation différentielle fonctionnelle à retard sur U une relation de la forme

$$x'(t) = f(t, x_t). \quad (3.1)$$

Définition 3.1.3. Soit x une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$

1. On dit que x est solution de l'équation (3.1) s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $L > 0$ tels que $x \in C([t_0 - r; t_0 + L[; \mathbb{R}^d)$, $(t; x_t) \in U$ et x vérifie la relation (3.1) pour tout $t \in [t_0; t_0 + L[$.
2. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\psi(t) \in C_0$ donnés, x est dite solution du problème à valeur initiale

$$x'(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0; \quad x_{t_0} = \psi(t). \quad (3.2)$$

s'il existe $L > 0$ tel que x soit solution de (3.1) sur $[t_0 - r; t_0 + L[$ et $x_{t_0} = \psi(t)$.

3. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\psi(t) \in C_0$ donnés, la solution du problème (3.2) est dite unique si deux solutions coïncident là où elles sont simultanément définies.

Remarque 3.1.2. Dans le cas où il y a unicité, la solution de (3.1) à valeur initiale ψ à t_0 (c'est-à-dire la solution du problème (3.2)) est notée par $x = x(t_0, 0, \psi(t))$.

3.2 L'étude d'une équation différentielle fonctionnelle à retard

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t - r(t)) + b(t)G(x(t), x(t - r(t))); \\ x(t) = \psi(t) \quad \text{si } t \in [m_0; 0], \end{cases} \quad (3.3)$$

où

$$\psi \in C([m_0; 0], \mathbb{R}) \text{ et } m_0 = \inf\{t - r(t) : t \geq 0\}.$$

Supposons aussi $a, b \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, avec $a(t) \geq 0$, $c \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à ses arguments, avec $h(0) = 0$ et $r \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que

$$r'(t) \neq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.4)$$

De plus, considérons que $G(x, y)$ est localement lipschitzienne par rapport aux deux variables x et y , c'est-à-dire il existe des constantes positives K_1 et K_2 telles que

$$|G(x, y) - G(z, w)| \leq K_1 \|x - z\| + K_2 \|y - w\| \text{ et } G(0, 0) = 0.$$

Dans cette section on va prouver l'existence et l'unicité de la solution de problème (3.3) en utilisant le théorème (2.2.4).

Lemme 3.2.1. *Supposons que la condition (3.4) est vérifiée. Alors, $x(t)$ est une solution de (3.3) si et seulement si*

$$\begin{aligned} x(t) = & [\psi(0) - \frac{c(0)}{1 - r'(0)}\psi(-r(0))]e^{-\int_0^t a(u)du} \\ & + \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ & + \frac{c(t)}{1 - r'(t)}x(t - r(t)) - \int_0^t \mu(s)x(s - r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ & + \int_0^t b(s)G(x(s), x(s - r(s)))e^{-\int_s^t a(u)du}ds, \end{aligned}$$

où

$$\mu(t) = \frac{(c'(t) + a(t)c(t))(1 - r'(t)) + c(t)r''(t)}{(1 - r'(t))^2}, \quad (3.5)$$

et

$$(Hx)(t) = x(t) - h(x(t)). \quad (3.6)$$

Preuve. Soit $x(t)$ est une solution de (3.3), en remarquant que l'équation

$$x'(t) = -a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t - r(t)) + b(t)G(x(t), x(t - r(t))),$$

est totalement non linéaire en x . La présence du terme $a(t)h(x(t))$ rend difficile l'application de variation des paramètres. Pour cela, nous rajoutons aux deux membres de l'équation un terme linéaire $a(t)x(t)$, on obtient

$$x'(t) + a(t)x(t) = a(t)x(t) - a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t - r(t)) + b(t)G(x(t), x(t - r(t))).$$

En multipliant les deux termes de l'équation ci-dessus par $e^{\int_0^t a(u)du}$ et puis en intégrant de 0 à t , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^t x'(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t a(s)x(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ &= \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t c(s)x'(s - r(s))e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ &+ \int_0^t b(s)G(x(s), x(s - r(s)))e^{\int_0^s a(u)du}ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_0^t x'(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds + x(s)e^{\int_0^s a(u)du} \Big|_0^t - \int_0^t x'(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ &= \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t c(s)x'(s - r(s))e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ &+ \int_0^t b(s)G(x(s), x(s - r(s)))e^{\int_0^s a(u)du}ds, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & x(t)e^{\int_0^t a(u)du} - x(0) \\ &= \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t c(s)x'(s - r(s))e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ &+ \int_0^t b(s)G(x(s), x(s - r(s)))e^{\int_0^s a(u)du}ds. \end{aligned}$$

En divisant les deux termes de l'équation ci-dessus par $e^{\int_0^t a(u)du}$, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \psi(0)e^{-\int_0^t a(u)du} + \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ &+ \int_0^t c(s)x'(s - r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds + \int_0^t b(s)G(x(s), x(s - r(s)))e^{-\int_s^t a(u)du}ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

D'autre part

$$\int_0^t c(s)x'(s - r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds = \int_0^t \frac{c(s)}{(1 - r'(s))} (1 - r'(s))x'(s - r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds.$$

En effectuant une intégration par partie avec

$$U = \frac{c(s)}{(1 - r'(s))}e^{-\int_s^t a(u)du}, \quad dV = (1 - r'(s))x'(s - r(s)),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t c(s)x'(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds &= \frac{c(t)}{(1-r'(t))}x(t-r(t)) - \frac{c(0)}{(1-r'(0))}\psi(-r(0))e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &\quad - \int_0^t \mu(s)x(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où $\mu(s)$ est donnée par l'expression (3.5), en remplaçant (3.8) dans (3.7), on trouve :

$$\begin{aligned} x(t) &= [\psi(0) - \frac{c(0)}{1-r'(0)}\psi(-r(0))]e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &\quad + \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ &\quad + \frac{c(t)}{1-r'(t)}x(t-r(t)) - \int_0^t \mu(s)x(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ &\quad + \int_0^t b(s)G(x(s), x(s-r(s)))e^{-\int_s^t a(u)du}ds. \end{aligned}$$

Puisque cette étape est réversible, le réciproque sera facile. Ce qui complète la preuve. $\square$

Pour appliquer le théorème (2.2.4), nous devons choisir un espace de Banach dépendant de la fonction initiale ψ et construire deux applications. Donc, soit S l'espace de Banach des fonctions bornée et continue $\varphi : [m_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ avec la norme supremum $\| \cdot \|$.

Soit $L > 0$, on définit l'ensemble :

$$S_\psi := \{\varphi \in S, \varphi \text{ est lipschitzienne, } |\varphi(t)| \leq L, \varphi(t) = \psi(t) \text{ si } t \in [m_0; 0]\}.$$

L'ensemble S_ψ est convexe, borné et fermé avec $\| \cdot \|$. En effet :

- On a pour $\forall \lambda \in [0; 1]$ et $\varphi, \phi \in S_\psi$

$$\begin{aligned} |\lambda\varphi + (1-\lambda)\phi| &\leq \lambda|\varphi| + (1-\lambda)|\phi| \\ &\leq L\lambda + (1-\lambda)L \\ &= L, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\lambda\varphi + (1-\lambda)\phi$ est borné, d'autre part on a

$$\begin{aligned} |\lambda\varphi(t_2) + (1-\lambda)\phi(t_2) - \lambda\varphi(t_1) - (1-\lambda)\phi(t_1)| &\leq \lambda|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| + (1-\lambda)|\phi(t_2) - \phi(t_1)| \\ &\leq \lambda k_1 |t_2 - t_1| + k_2(1-\lambda) |t_2 - t_1| \\ &= (\lambda k_1 + k_2(1-\lambda)) |t_2 - t_1|, \end{aligned}$$

on pose $K = \lambda k_1 + k_2(1 - \lambda)$

donc

$$| \lambda \varphi(t_2) + (1 - \lambda) \phi(t_2) - \lambda \varphi(t_1) - (1 - \lambda) \phi(t_1) | \leq K | t_2 - t_1 |,$$

cela implique que $\lambda \varphi + (1 - \lambda) \phi$ est lipschitzienne.

Par conséquent, S_ψ est convexe.

- Il est clair que S_ψ est borné.
- l'ensemble S_ψ est l'image réciproque de l'intervalle $[-L; L]$ par la fonction continue ψ . Autrement dit S_ψ est fermé.

Pour $\varphi \in S_\psi$ et $t \geq 0$, on définit les applications A, B et C sur S_ψ par :

$$\begin{aligned} (A\varphi)(t) &:= \frac{c(t)}{1 - r'(t)} \varphi(t - r(t)) + \int_0^t b(s) G(\varphi(s), \varphi(s - r(s))) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &- \int_0^t \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$(B\varphi)(t) := [\psi(0) - \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \psi(-r(0))] e^{-\int_0^t a(u) du} + \int_0^t a(s) (H\varphi)(s) e^{-\int_s^t a(u) du} ds, \quad (3.10)$$

et

$$(C\varphi)(t) := (A\varphi)(t) + (B\varphi)(t).$$

On dit que $x(t)$ est une solution de (3.3) si et seulement si C possède un point fixe φ dans l'espace S_ψ , et

$$\begin{cases} x(t, 0, \psi) = \varphi(t) & \text{pour } t \geq 0, \\ x(t, 0, \psi) = \psi(t) & \text{pour } m_0 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Soit

$$\alpha(t) = \frac{c(t)}{1 - r'(t)},$$

et supposons qu'il existe des constantes $k_1, k_2, k_3 > 0$, telles que pour $0 \leq t_1 < t_2$,

$$| \int_{t_1}^{t_2} a(u) du | \leq k_1 | t_2 - t_1 |, \quad (3.11)$$

$$| r(t_2) - r(t_1) | \leq k_2 | t_2 - t_1 |, \quad (3.12)$$

et

$$| \alpha(t_2) - \alpha(t_1) | \leq k_3 | t_2 - t_1 | . \quad (3.13)$$

Supposons aussi, pour $t \geq 0$,

$$| \mu(t) | \leq \delta a(t), \quad (3.14)$$

$$(K_1 + K_2) | b(t) | \leq \beta a(t), \quad (3.15)$$

$$\sup_{t \geq 0} | \alpha(t) | = \alpha_0, \quad (3.16)$$

de plus

$$J(\alpha_0 + \beta + \delta) < 1, \quad (3.17)$$

$$\max(| H(-L) |, | H(L) |) \leq \frac{2L}{J}, \quad (3.18)$$

où α, β, δ et J sont constantes avec $J > 3$.

On va choisir $\gamma > 0$ assez petit tel que

$$\left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \gamma + \frac{3L}{J} \leq L, \quad (3.19)$$

on va choisir γ dans la relation (3.19) du lemme (3.2.4), pour montrer que si $\varepsilon = L$ et si $\| \psi \| < \gamma$ alors, la solution satisfait $| x(t, 0, \psi) | < \varepsilon$.

Dans le lemme suivant nous allons prouver que pour une fonction h bien choisie, l'application H donnée par (3.6) est non expansive et $I - H$ est ω -expansive sur l'ensemble S_ψ , pour cela, on suppose les hypothèses suivantes sont vérifiées pour la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[-L; L]$ et différentiable sur $] - L; L[$,
- (ii) La fonction h est strictement croissante sur $[-L; L]$,
- (iii) $\sup_{t \in]-L; L[} h'(t) \leq 1$.

Lemme 3.2.2. *Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisante (i) – (iii). Alors, l'application H est non expansive et $I - H$ est ω -expansive sur l'ensemble S_ψ .*

Preuve. Si pour certain $t \in \mathbb{R}$ et $\phi(t) \neq \varphi(t)$, on a

$$\begin{aligned} |(H\phi)(t) - (H\varphi)(t)| &= |\phi(t) - h(\phi(t)) - \varphi(t) + h(\varphi(t))| \\ &= |\phi(t) - \varphi(t)| \left| 1 - \left(\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} \right) \right|. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Comme h est une fonction strictement croissante, donc

$$\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} > 0. \quad (3.21)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, définissons l'intervalle $U_t \subset [-L; L]$ par

$$U_t = \begin{cases}]\varphi(t); \phi(t)[& \text{si } \phi(t) > \varphi(t), \\]\phi(t); \varphi(t)[& \text{si } \phi(t) < \varphi(t). \end{cases}$$

Le théorème des accroissements finis implique que pour chaque t fixé dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel $c_t \in U_t$ tel que

$$\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} = h'(c_t),$$

par (i) et (iii), on trouve :

$$\begin{aligned} 0 \leq \inf_{u \in]-L; L[} h'(u) &\leq \inf_{u \in U_t} h'(u) \leq h'(c_t) \\ &\leq \sup_{u \in U_t} h'(u) \leq \sup_{u \in]-L; L[} h'(u) \leq 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ainsi, par (3.20) et (3.22), on obtient

$$|(H\phi)(t) - (H\varphi)(t)| \leq \left| 1 - \inf_{u \in]-L; L[} h'(u) \right| |\phi(t) - \varphi(t)|, \quad (3.23)$$

alors par (iii), on a

$$\|H\phi - H\varphi\| \leq \|\phi - \varphi\|.$$

Ceci montre que H est non expansive pour la norme supremum.

Maintenant, on choisit $\varepsilon \in]0; 1[$ et supposons que φ et ϕ sont deux fonctions dans S_ψ vérifiant

$$\varepsilon \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi(t) - \varphi(t)| = \|\phi - \varphi\|.$$

a) Si $|\phi(t) - \varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, pour $t \in \mathbb{R}$. Alors, de (3.22) et (3.23) on obtient

$$|(H\phi)(t) - (H\varphi)(t)| \leq |\phi(t) - \varphi(t)| \leq \frac{1}{2} \|\phi - \varphi\|. \quad (3.24)$$

Comme h est continue et strictement croissante, la fonction $h(u + \frac{\varepsilon}{2}) - h(u)$ atteint son minimum sur l'intervalle fermé et borné $[-L; L]$.

b) Si $\frac{\varepsilon}{2} < |\phi(t) - \varphi(t)|$, pour $t \in \mathbb{R}$.

On a deux cas

- **Le premier cas** : Supposons que $\phi(t) - \varphi(t) > \frac{\varepsilon}{2}$ alors

$$\phi(t) > \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(t),$$

donc

$$h(\frac{\varepsilon}{2} + \varphi(t)) - h(\varphi(t)) > h(\phi(t)) - h(\varphi(t)),$$

par ailleurs on a :

$$\min\{h(u + \frac{\varepsilon}{2}) - h(u)/u \in [-L; L]\} < h(\frac{\varepsilon}{2} + \varphi(t)) - h(\varphi(t)),$$

c'est-à-dire

$$h(\phi(t)) - h(\varphi(t)) > \min\{h(u + \frac{\varepsilon}{2}) - h(u)/u \in [-L; L]\}.$$

Ainsi on a

$$\frac{1}{\phi(t) - \varphi(t)} > \frac{1}{2L},$$

donc, on obtient

$$\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} > \lambda.$$

Par conséquent, on trouve que

$$1 \geq \frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} > \lambda,$$

où

$$\lambda := \frac{1}{2L} \min\{h(u + \frac{\varepsilon}{2}) - h(u)/u \in [-L; L]\} > 0.$$

- **Le deuxième cas** : De la même manière si on suppose $\phi(t) - \varphi(t) < -\frac{\varepsilon}{2}$.

On a (3.20) implique

$$|(H\phi)(t) - (H\varphi)(t)| \leq (1 - \lambda) \|\phi(t) - \varphi(t)\|. \quad (3.25)$$

Par conséquent, de (3.24) et (3.25), on trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|(H\phi)(t) - (H\varphi)(t)| \leq \eta \|\phi(t) - \varphi(t)\|,$$

où

$$\eta = \max\{\frac{1}{2}, 1 - \lambda\} < 1,$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\| (I - H)(\phi(t)) - (I - H)(\varphi(t)) \| &= \| \phi(t) - \varphi(t) - (H(\phi(t)) - H(\varphi(t))) \| \\
&\geq \| \phi(t) - \varphi(t) \| - \| H(\phi(t)) - H(\varphi(t)) \| \\
&\geq \| \phi(t) - \varphi(t) \| - \eta \| \phi(t) - \varphi(t) \| \\
&= (1 - \eta) \| \phi(t) - \varphi(t) \| .
\end{aligned}$$

Pour $\omega : [0; \infty[\longrightarrow [0; \infty[$ telle que $\omega(t) = (1 - \eta)(t)$, la fonction ω est continue et $\omega(0) = 0$.

Alors, $I - H$ est ω -expansive. $\square$

Lemme 3.2.3. *Si H est non expansive et $I - H$ est ω -expansive sur S_ψ , alors B est non expansive et $I - B$ est ω -expansive sur S_ψ .*

Preuve. Pour $\phi(t) \neq \varphi(t)$, on a

$$\begin{aligned}
| (B\phi)(t) - (B\varphi)(t) | &= \left| \int_0^t a(s)(H\phi)(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds + \int_0^t a(s)(H\varphi)(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds \right| \\
&\leq \int_0^t a(s) \| (H\phi)(s) - (H\varphi)(s) \| e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
&\leq \int_0^t a(s) \| \phi - \varphi \| e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
&\leq \| \phi - \varphi \| .
\end{aligned}$$

D'où B est non expansive sur S_ψ ,

par ailleurs, on choisit $\varepsilon \in]0; 1[$ alors, s d'après le lemme(3.2.2), on a

$$| (H\phi)(t) - (H\varphi)(t) | \leq \eta \| \phi(t) - \varphi(t) \| ,$$

par un calcul direct on trouve que

$$| (B\phi)(t) - (B\varphi)(t) | \leq \eta \| \phi(t) - \varphi(t) \| .$$

Donc

$$\begin{aligned}
\| (I - B)(\phi(t)) - (I - B)(\varphi(t)) \| &= \| \phi(t) - \varphi(t) - (B(\phi(t)) - B(\varphi(t))) \| \\
&\geq \| \phi(t) - \varphi(t) \| - \| B(\phi(t)) - B(\varphi(t)) \| \\
&\geq \| \phi(t) - \varphi(t) \| - \eta \| \phi(t) - \varphi(t) \| \\
&= (1 - \eta) \| \phi(t) - \varphi(t) \| .
\end{aligned}$$

Pour $\omega(t) = (1 - \eta)(t)$, la fonction ω est continue et $\omega(0) = 0$. Alors, $I - B$ est ω -expansive. $\square$

Lemme 3.2.4. *Supposons que (3.14), (3.15), (3.17), (3.18) et (3.19) sont vérifiées, pour A, B définies dans (3.9) et (3.10) respectivement, si $\varphi \in S_\psi$. Alors, $|(A\varphi)(t)| \leq \frac{L}{J} < L$ et $|(B\varphi)(t)| \leq L$.*

Preuve. On utilise les conditions (3.14), (3.15), (3.17) et l'expression (3.9) de l'application A on obtient

$$\begin{aligned}
|(A\varphi)(t)| &\leq \left| \frac{c(t)}{1 - r'(t)} \varphi(t - r(t)) \right| + \int_0^t |b(s)| |G(\varphi(s), \varphi(s - r(s)))| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
&\quad + \int_0^t |\mu(s)| |\varphi(s - r(s))| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
&\leq \alpha_0 L + \int_0^t (K_1 + K_2) |b(s)| L e^{-\int_s^t a(u) du} ds + L \int_0^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
&\leq L(\alpha_0 + \int_0^t \beta a(s) e^{-\int_s^t a(u) du} ds + \int_0^t \delta a(s) e^{-\int_s^t a(u) du} ds) \\
&\leq L(\alpha_0 + \beta + \delta) \\
&\leq \frac{L}{J} \\
&< L.
\end{aligned}$$

Alors, AS_ψ est borné par L .

Pour prouver que $|(B\varphi)(t)| \leq L$, on utilise les conditions (3.17), (3.18) et (3.19) et l'expression (3.10) de l'application B on obtient

$$\begin{aligned}
|B\varphi(t)| &\leq \left| \psi(0) - \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \psi(-r(0)) \right| e^{-\int_0^t a(u) du} + \int_0^t |a(s)(H\varphi)(s)| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
&\leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| e^{-\int_0^t a(u) du} + \frac{2L}{J} \int_0^t |a(s)| e^{-\int_s^t a(u) du} ds
\end{aligned}$$

si en choisissant une fonction initiale ψ avec une norme assez petit, disant $\|\psi\| < \gamma$ alors, d'après l'inégalité (3.18) on obtient

$$\begin{aligned}
|B\varphi(t)| &\leq \gamma \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) + \frac{2L}{J} \\
&\leq \gamma \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) + \frac{3L}{J} \\
&\leq L.
\end{aligned}$$

Alors BS_ψ est bornée par L . $\square$

Lemme 3.2.5. *Si les conditions (3.14) et (3.17) sont vérifiées, pour A, B définies dans (3.9) et (3.10) respectivement, et pour $\varphi, \phi \in S_\psi$. Alors*

$$|B\varphi + A\phi| < L.$$

Preuve. En utilisant les définitions (3.9), (3.10) pour A et B respectivement, puis par l'application de (3.14) et (3.17) on trouve :

$$\begin{aligned} |(B\varphi)(t) + (A\phi)(t)| &\leq (1 + |\frac{c(0)}{1-r'(0)}|) \|\psi\| e^{-\int_0^t a(u)du} + \alpha_0 L \\ &+ L \int_0^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &+ \int_0^t (K_1 + K_2) |b(s)| L e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \frac{2L}{J} \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq (1 + |\frac{c(0)}{1-r'(0)}|) \|\psi\| + (\alpha_0 + \beta + \delta)L + \frac{2L}{J} \\ &\leq (1 + |\frac{c(0)}{1-r'(0)}|) \|\psi\| + \frac{L}{J} + \frac{2L}{J} \\ &\leq (1 + (|\frac{c(0)}{1-r'(0)}|)\gamma) + \frac{3L}{J} \\ &\leq L. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.6. *Si les hypothèses (3.11), (3.14), (3.16) et (3.17) sont vérifiées. Alors, l'application A définie par (3.9) est continue et compacte sur S_ψ .*

Preuve.

1. La continuité

Soit $\varphi, \varphi_n \in S_\psi$, telle que $\varphi_n \rightarrow \varphi$, alors

$$\begin{aligned} |(A\varphi_n)(t) - (A\varphi)(t)| &\leq \{ \alpha_0 |\varphi_n(t-r(t)) - \varphi(t-r(t))| \\ &+ |\int_0^t b(s)[G(\varphi_n(s), \varphi_n(s-r(s))) - G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &+ |\int_0^t \mu(s)[\varphi_n(s-r(s)) - \varphi(s-r(s))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds | \} \\ &\leq \alpha_0 \|\varphi_n - \varphi\| + \int_0^t (K_1 + K_2) |b(s)| \|\varphi_n - \varphi\| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &+ \|\varphi_n - \varphi\| \int_0^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq (\alpha_0 + \beta + \delta) \|\varphi_n - \varphi\| \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq (\alpha_0 + \beta + \delta) \|\varphi_n - \varphi\| \leq \frac{1}{J} \|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

donc, $| (A\varphi_n)(t) - (A\varphi)(t) | \rightarrow 0$. Alors, A est continue.

2. La compacité

Pour montrer que A est compact, on va utiliser le théorème d'Ascoli-Arzelà c'est-à-dire à démontrer que l'ensemble AS_ψ est uniformément borné et équicontinue.

En effet,

Soit $\varphi \in S_\psi$ et soit $0 \leq t_1 < t_2$. Alors

$$\begin{aligned}
| (A\varphi)(t_2) - (A\varphi)(t_1) | &\leq \left| \frac{c(t_2)}{1 - r'(t_2)} \varphi(t_2) - r(t_2) - \frac{c(t_1)}{1 - r'(t_1)} \varphi(t_1) - r(t_1) \right| \\
&+ \left| \int_0^{t_2} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \right. \\
&- \left. \int_0^{t_1} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} ds \right| \\
&+ \left| \int_0^{t_2} b(s) G \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \right. \\
&- \left. \int_0^{t_1} b(s) G(\varphi(s), \varphi(s - r(s))) e^{\int_s^{t_1} a(u) du} ds \right|. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Par les hypothèses (3.12) et (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}
&| \alpha(t_2) \varphi(t_2 - r(t_2)) - \alpha(t_1) \varphi(t_1 - r(t_1)) | \\
&= | \alpha(t_2) \varphi(t_2 - r(t_2)) + \alpha(t_2) \varphi(t_1 - r(t_1)) - \alpha(t_2) \varphi(t_1 - r(t_1)) - \alpha(t_1) \varphi(t_1 - r(t_1)) | \\
&\leq | \alpha(t_2) | | \varphi(t_2 - r(t_2)) - \varphi(t_1 - r(t_1)) | + | \alpha(t_2) - \alpha(t_1) | | \varphi(t_1 - r(t_1)) | \\
&\leq \alpha_0 k | (t_2 - t_1) - (r(t_2) - r(t_1)) | + L k_3 | t_2 - t_1 | \\
&\leq (\alpha_0 k + \alpha_0 k k_2 | + L k_3) | t_2 - t_1 |, \quad (3.27)
\end{aligned}$$

où k est constant de Lipschitz pour φ . Par les hypothèses (3.11) et (3.14) on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{t_2} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds - \int_0^{t_1} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} ds \right| \\
= & \left| \int_0^{t_1} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} (e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} - 1) ds + \int_{t_1}^{t_2} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \right| \\
\leq & L \left| (e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u) du} - 1) \right| \int_0^{t_1} \delta a(s) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} + L \int_{t_1}^{t_2} |\mu(s)| e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \\
\leq & L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + L \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} d\left(\int_{t_1}^s |\mu(v)| dv\right) \\
\leq & L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + L\{[e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} \int_{t_1}^s |\mu(v)| dv]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} \int_{t_1}^s |\mu(v)| dv ds\} \\
\leq & L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + L \int_{t_1}^{t_2} |\mu(s)| ds (1 + \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds) \\
\leq & L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + 2L \int_{t_1}^{t_2} |\mu(s)| ds \\
\leq & L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + 2L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds \\
\leq & 3L\delta k_1 |t_2 - t_1|.
\end{aligned}$$

De même, par (3.11) et (3.15) nous déduisons

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{t_2} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds - \int_0^{t_1} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \\
&= \left| \int_0^{t_1} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} (e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} - 1) ds \right. \\
&+ \left. \int_{t_1}^{t_2} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right| \\
&\leq L \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} - 1 \right| \int_0^{t_1} \beta a(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} + (K_1 + K_2)L \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + (K_1 + K_2)L \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} d\left(\int_{t_1}^s |b(v)| dv\right) \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + (K_1 + K_2)L \{ [e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^s |b(v)| dv]_{t_1}^{t_2} \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^s |b(v)| dv ds \} \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + (K_1 + K_2)L \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| ds (1 + \int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds) \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + 2(K_1 + K_2)L \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| ds \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + 2L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds \\
&\leq 3L\beta k_1 |t_1 - t_2|.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ainsi, en remplaçant (3.27) et (3.28) dans (3.26) on obtient :

$$\begin{aligned}
|A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| &\leq (\alpha_0 k + \alpha_0 k k_2 + Lk_3) |t_2 - t_1| + 3L\delta k_1 |t_2 - t_1| + 3L\beta k_1 |t_2 - t_1| \\
&\leq K |t_2 - t_1|,
\end{aligned}$$

pour une constante $K > 0$. Ceci montre que $A\varphi$ est lipschitzienne.

On choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ alors, pour $|t_2 - t_1| \leq \delta$, on obtient

$$|A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| \leq K |t_2 - t_1| < \varepsilon.$$

Donc, AS_ψ est équicontinu.

Par conséquent, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà l'application A est compacte.

□

Théorème 3.2.1. *Soit $L > 0$. Supposons que les conditions (i), (iii) sont satisfaites. Si ψ est une fonction initiale assez petite alors, il existe une solution $x(t, 0, \psi)$ de (3.3) satisfaisante à $|x(t, 0, \psi)| \leq L$.*

Preuve. D'après des lemmes (3.2.4) et (3.26) on a A et B sont bornées par L , et lipschitziennes donc, A, B de S_ψ dans S_ψ , de lemme (3.2.5), on a pour des fonctions arbitraires

$$\varphi, \phi \in S_\psi, B\varphi + A\psi \in S_\psi,$$

et de lemme (3.2.6) on a A est continue et compacte

donc, toutes les conditions du théorème (2.2.4) sont satisfaites. Par conséquent, il existe une solution pour (3.3) vérifiant $|x(t, 0, \psi)| \leq L$. □

Conclusion générale et perspectives

La théorie du point fixe joue un rôle important dans l'analyse non linéaire et ce rôle réside dans la preuve de l'existence et l'unicité des solutions des différents types des équations.

Dans ce memoire, nous nous sommes concentrées sur la contribution des applications non expansives dans la théorie du point fixe pour prouver l'existence et l'unicité d'une équation différentielle à retard.

En premier lieu, nous avons rappelé quelques définitions de base, puis nous avons présenté certaines propriétés importantes concernant notre travail.

Au deuxième point, nous avons présenté quelques théorèmes de certaines applications non expansives en mettant l'accent sur la plus importante qui est celle de Karasnoselskii de type non expansive.

A la fin, nous avons appliqué ce théorème à un problème d'équation différentielle à retard pour l'existence et l'unicité.

Ce fameux théorème est très utilisé, aussi dans d'autres questions comme celle des applications pseudo-contractives récemment abordées dans la recherche en analyse fonctionnelle.

Bibliographie

- [1] R. P. Agarwal, Donal O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type mappings with applications*, Vol. 6, Springer, (2009).
- [2] A. Amini-Harandi, *Fixed point theorems for some generalized nonexpansive mapping in Banach spaces*, Vol. 15, No. 2 (2014), 279-285.
- [3] K. Aoyama, F. Kohsaka, *Fixed point theorem for α -nonexpansive mappings in Banach spaces*, *Nonlinear Analysis*, Vol. 74 (2011), 4387-4391.
- [4] I. Derrardjia, *Existence et stabilité par le théorème de point fixe de Krasnoselskii-Burton pour certaines équations différentielles fonctionnelles à retard*, thèse de Doctorat (LMD) en Mathématiques, Univ. Annaba, 2014.
- [5] J. Garcia-Falset, *Existence of fixed points for the sum of two operators*, *Math. Nachr.* 283, No. 12(2010), 1736–1757 .
- [6] J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster, T. Suzuki, *Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings*, *J. Math. Anal. Appl.* 375 (2011), 185–195.
- [7] I. Hezla, Souad. Benine, *Théorèmes de point fixe de type krasnoselskii et applications*, Mémoire de Master (LMD) en Mathématiques, Univ. El oued, 2014.
- [8] M. LAKRIB, *Stroboscopie et Moyennisation dans Les équations Différentielles Fonctionnelles à Retard*, thèse de Doctorat (LMD) en Mathématiques, U. Mulhouse, 2004.
- [9] O. Popescu, *Two generalizations of some fixed point theorems*, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 62(2011), 3912–3919.
- [10] Murray R. Spiegel, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, PhD thesis. Editions McGraw-Hill, America, (1974).
- [11] L. Schwartz, *Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Herman 1980.

- [12] C. Zalinescu, *Convex Analysis in General Vector spaces*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, 2002.

Résumé

Dans ce travail, après la définition de certains concepts de base de l'analyse fonctionnelle, nous avons étudié le théorème du point fixe se rapportant à chacune des applications α -non expansives et à chacune des applications non expansives généralisées. En plus nous avons abordé l'étude du théorème de Krasnoselskii du type non expansive et enfin, comme application, nous avons étudié l'existence et de l'unicité de la solution pour les équations différentielles à retard.

Mots clés: point fixe, applications non expansives, équations différentielles à retard.

Abstract

In this work, after defining some basic concepts of functional analysis, we have studied the fixed point relating to each of the non-expansive applications and to each of the generalized non-expansive applications. In addition, we studied α -non expansive type of Krasnoselskii's theorem and finally, as an application we have studied the existence and the uniqueness of the solution for the delay differential equations.

Keywords: fixed point, non expansive mappings, differential equations with delay.

ملخص

في هذا العمل، بعد تعريف بعض المفاهيم الأساسية في التحليل الدالي، قمنا بدراسة نظرية النقطة الثابتة التي تخص كلا من التطبيقات α غير توسيعية وتطبيقات غير توسيعية معممة. إضافة الى ذلك تطرقنا لدراسة نظرية كراسونسكي من نوع غير توسيعي. وفي الأخير طبقنا احدى النتائج في دراسة معادلة تفاضلية بتأخر لإثبات وجود و وحدانية الحل .

كلمات مفتاحية: النقطة الثابتة، التطبيقات غير توسيعية، المعادلات التفاضلية التأخرية.