



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de  
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR ELOUED  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

# MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

## Thème

# Etude quantitative des équations différentielles avec effets impulsifs

Présenté par : Djaballah Souad  
Mansouri Salima

Soutenu publiquement devant le jury composé de

|                        |      |           |               |
|------------------------|------|-----------|---------------|
| Dr. Rehouma Abdelhamid | MCB. | Président | Univ. El Oued |
| Dr. Nisse Khadidja     | MCA. | Encadreur | Univ. El Oued |
| Dr. Messai Aoun        | MAA. | Examineur | Univ. El Oued |
| Mohammed Saleh         |      |           |               |

Année universitaire 2018 – 2019

# *Dédicaces*

Nous dédions ce travail à :

nos chers parents qui nous ont toujours soutenue,

nos frères et nos surs,

nos amies,

et à tous ceux qui nous ont encouragé durant notre carrière d'étude et nos professeurs  
du primaire au supérieur.

# *Remerciements*

Nous remercions notre Dieu que nous avons allégé le chemin de savoir et la connaissance et nous avons aidé sur ce devoir et nous réussissons de terminer ce travail.

Nous remercions tous ce qu'ont contribué de près ou de loin de faire ce travail et de résoudre nos problèmes.

Nous souhaitons d'exprimer nos remerciements à notre directeur de mémoire, le professeur "**Nisse Khadidja**" de Mathématique à l'université de **Hamma Lakhder - El-Oued**, pour son aide et ses conseils, qui ont été d'un soutien très précieux.

Enfin, nous dédions ce travail à nos chers parents, nos frères et nos surs pour leurs soutien précieux ainsi qu'à toutes nos amis qui nous encourageons pendant nos études.

# Table des matières

|                                                                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Notations</b>                                                                                                   | <b>1</b>  |
| <b>Introduction</b>                                                                                                | <b>2</b>  |
| <b>1 Préliminaires</b>                                                                                             | <b>4</b>  |
| 1.1 Notions et propriétés élémentaires sur les opérateurs compacts . . . . .                                       | 4         |
| 1.2 L'espace des fonctions continues par morceaux . . . . .                                                        | 6         |
| 1.3 Quelques théorèmes de point fixe . . . . .                                                                     | 7         |
| 1.4 La dérivation sous le signe intégrale . . . . .                                                                | 7         |
| <b>2 Équations différentielles impulsives du premier ordre à valeurs aux limites périodiques</b>                   | <b>9</b>  |
| 2.1 Description d'un système différentiel impulsif et types typiques . . . . .                                     | 9         |
| 2.1.1 Composantes caractérisant un système différentiel impulsif . . . . .                                         | 9         |
| 2.1.2 Systèmes avec temps d'impulsions fixés . . . . .                                                             | 10        |
| 2.1.3 Systèmes avec temps d'impulsions variables . . . . .                                                         | 11        |
| 2.2 Quelques résultats d'existence . . . . .                                                                       | 11        |
| 2.2.1 Position des problèmes et notations . . . . .                                                                | 11        |
| 2.2.2 Le cas linéaire . . . . .                                                                                    | 12        |
| 2.2.3 Le cas semi-linéaire . . . . .                                                                               | 18        |
| <b>3 Système de deux equations différentielles impulsives à valeurs aux limites non-périodiques et application</b> | <b>23</b> |
| 3.1 Position du problème et hypothèses considérés . . . . .                                                        | 24        |
| 3.2 Système d'équations intégrales équivalent et forme opérationnel . . . . .                                      | 25        |
| 3.3 Quelques résultats d'existence . . . . .                                                                       | 28        |
| 3.3.1 Premier résultat : Existence . . . . .                                                                       | 33        |
| 3.3.2 Deuxième résultat : Existence et unicité . . . . .                                                           | 36        |

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.4 Application à une classe d'équations différentielles impulsives du deuxième ordre . . . . . | 39        |
| <b>Conclusion</b>                                                                               | <b>42</b> |
| <b>Références</b>                                                                               | <b>42</b> |

# Notations

$\mathbb{R}$  : L'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$  : L'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{R}^n$  : Espace vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels.

$C = C(E, F)$  : L'ensemble des fonctions continues de  $E$  dans  $F$ .

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  : Ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ .

$N(t), M(t)$  : Deux ensembles dans  $\Omega$ , pour chaque  $t \in \mathbb{R}^+$ .

$\mathcal{L}(E, F)$  : l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ .

$\mathcal{K}(E, F)$  : l'ensemble des opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ .

$x(t_j^+)$  :  $\doteq \lim_{t \rightarrow t_j^+} x(t)$

$x(t_j^-)$  :  $\doteq \lim_{t \rightarrow t_j^-} x(t)$

# Introduction

DE nombreux processus d'évolution se caractérisent par le fait qu'ils subissent soudainement un changement d'état à certains moments. Ces processus sont sujets à des perturbations à court terme dont la durée est négligeable par rapport à la durée du processus [2],[16]. Par conséquent, il est naturel de supposer que ces perturbations agissent instantanément, c'est à dire sous la forme d'impulsions. Ainsi, les équations différentielles impulsives, intervient naturellement dans la modélisation de plusieurs phénomènes d'évolution observés dans le monde réel, tels que : des modèles de rythme de rupture en médecine et en biologie, des modèles de contrôle optimaux en économie, la pharmacocinétique et les systèmes à modulation de fréquence [2],[16].

Il n'est pas une nouvelle idée de faire une étude exhaustive des équations différentielles ordinaires avec impulsions. ces problèmes ont été considérés au début du développement de la mécanique non linéaire et a attiré l'attention des physiciens parce qu'ils ont donné la possibilité de décrire adéquatement les processus dans les systèmes oscillants non linéaires. Un exemple bien connu d'un tel problème est le modèle d'une horloge Krut'lov et Bogolyubov ont montré en 1937 dans leur monographie classique Introduction à la mécanique non linéaire que pour une étude des systèmes d'équation différentielle avec impulsions, il est possible d'appliquer des méthodes d'approximation utilisées en mécanique non linéaire.

Une équation différentielles impulsive est décrite par trois composantes, à savoir : une équation différentielles à temps continu qui régit l'état du système entre les impulsions, une équation d'impulsion qui modélise un saut impulsif défini par une fonction de saut à l'instant où une impulsion se produit, et un critère de saut qui définit un ensemble d'événements de saut dans lesquels l'équation d'impulsion est active [1].

Les spécificités liées à l'étude des équations différentielles impulsives et les difficultés rencontrés dans leurs investigations, on rendu ce domaine de recherche beaucoup plus riche, en comparaison avec les équation différentielles sans effets impulsifs [4],[16].

Le thème de recherche abordé dans ce mémoire s'inscrit dans cette branche de la théorie des équation différentielles, et précisément nous traitons la question d'existence des solutions pour les équations différentielles impulsives soumises à différents types de condition aux limites. L'approche employée dans ce travail, est fondée principalement sur la théorie du point fixe.

Ce mémoire se compose de trois chapitres divisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions, propriétés et théorèmes dont ont a besoin dans la suite de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une lecture détaillé de quelques résultats d'existence, connus dans la littérature mathématiques [8],[9],[10], pour les équations différentielles impulsives (linéaires et semi-linéaires) du premier ordre avec condition aux limites périodiques.

Dans le troisième chapitre, et en se basant sur le travail [8], où plusieurs résultats d'existence pour certaines équations différentielles impulsives dans le cas vectoriel sont obtenus, nous allons expliciter et présenter avec plus de détail deux résultats d'existence, après les avoir adaptés au système de deux équation différentielles impulsives du premier ordre suivant

$$(S.I) \begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)), & t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)), & t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p \\ \Delta x(t_k) \doteq x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)), & k = 1, \dots, p \\ \Delta y(t_k) \doteq y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)), & k = 1, \dots, p \end{cases}$$

Soumis à la condition aux limites non-périodique suivante

$$\begin{cases} a_1 x(0) + b_1 x(T) = \alpha_1 \\ a_2 y(0) + b_2 y(T) = \alpha_2 \end{cases}$$

Notons que les auteurs dans [8] on considéré le cas d'une seule impulsion, et l'étude faite dans ce chapitre porte une légère généralisation dans ce contexte, où nous allons considéré le cas de plusieurs impulsions. De plus, et à titre d'application, nous allons employé cette étude pour tirer des résultats d'existence pour une classe d'équations différentielles impulsives du deuxième ordre avec conditions aux limites anti-périodiques.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Nous allons introduire des notions, des définitions et des théorèmes qui nous seront utiles dans les différents chapitres de ce mémoire.

### 1.1 Notions et propriétés élémentaires sur les opérateurs compacts

**Définition 1.1.** Voir [13] (Page 75 )

Soient  $(X, d)$  et  $(Y, d')$  deux espaces métriques,  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $a$  un élément de  $X$  . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \forall x \in X, \quad d(x, a) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

**Définition 1.2.** Voir[13](Page 78)

Soient  $(X, d), (Y, d')$  deux espaces métriques et  $f : X \rightarrow Y$  une application.

1. On dit que  $f$  est **uniformément continue** si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x, z \in X$  vérifiant  $d(x, z) < \eta$ , on ait  $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$ .
2. On dit que  $f$  est **lipschitzienne** s'il existe une constante  $k \geq 0$ , appelé rapport de  $f$ , tel que pour tout  $x, z \in X$ , on ait  $d'(f(x), f(z)) \leq k d(x, z)$ . Si de plus  $k \in [0, 1[$ , on dit que  $f$  est **contractante**.

**Proposition 1.1.** Voir[13](Page 76)

Soient  $(X, d)$  et  $(Y, d')$  deux espaces métriques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. On considère  $a$  un élément de  $X$ . L'application  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$  convergente vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(a)$  .

**Théorème 1.1.** Voir[13](Page 232)

Soient  $(E_1, \|\cdot\|_1), (E_2, \|\cdot\|_2)$  deux espaces normés et  $f : E_1 \rightarrow E_2$  une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe un nombre  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in E_1$ , on ait  $\|f(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$ .
- (ii)  $f$  est bornée sur la sphère  $S = \{x \in E_1; \|x\|_1 = 1\}$ .
- (iii)  $f$  est lipschitzienne.
- (iv)  $f$  est uniformément continue.
- (v)  $f$  est continue.
- (vi)  $f$  est continue en 0.

**Définition 1.3. (équicontinu)** Voir[3] (Page 29)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace Banach, un sous-ensemble  $\mathcal{B} \subset C([0, T], E)$  est appelé équicontinu si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que  $\|x(t_1) - x(t_2)\| < \epsilon$  pour tout  $x(\cdot) \in \mathcal{B}$  et  $t_1, t_2 \in [0, T]$  vérifiant  $|t_1 - t_2| < \delta$ .

**Définition 1.4.** Voir[13] (Page 120)

Soient  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ . On dit que  $A$  est relativement compacte si  $\overline{A}$  est compact.

**Corollaire 1.1.** Voir[13](Page 125)

Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $A$  une partie de  $X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i)  $A$  est relativement compacte.
- (ii) Il existe une partie compacte de  $X$  contenant  $A$
- (iii) Toute suite dans  $A$  possède une sous-suite convergente dans  $X$ .

**Théorème 1.2. (Ascoli-Arzelà)** Voir[3] (Page 29)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace Banach, un sous-ensemble  $M \subset C([0, T], E)$  est relativement compact si et seulement si

- (1)  $M$  est équicontinu et
- (2) pour chaque  $t \in [0, T], M(t) = \{x(t) : x(\cdot) \in M\}$  est relativement compact dans  $E$ .

**Corollaire 1.2. (Arzelà-Ascoli).** Voir[15] (Page 15)

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et soit  $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ . Alors on a

- (i)  $\mathcal{F}$  est relativement compact si et seulement si il est bornée et équicontinu.
- (ii)  $\mathcal{F}$  est compact si et seulement si il est fermé, borné, et équicontinu.

**Définition 1.5. (*Opérateur compact*)** Voir[3] (Page 28)

Soit  $E$  est espace normé. une application  $T : D(T) \subset E \rightarrow E$  est appelé compact si  $T$  transforme chaque sous-ensemble borné de  $D(T)$  à un sous-ensemble relativement compact dans  $E$ . On dit que  $T$  est complètement continu si  $T$  est continu et compact.

**Proposition 1.2.** Voir[7] (Page 90)

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces de Banach .

Si  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $S \in \mathcal{K}(F, G)$  [resp  $T \in \mathcal{K}(E, F)$  et  $S \in \mathcal{L}(F, G)$ ], alors  $S \circ T \in \mathcal{K}(E, F)$ .

## 1.2 L'espace des fonctions continues par morceaux

**Définition 1.6.** Voir [2, 16]

Soient  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels qui satisfait  $t_k < t_{k+1}$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ ,  $J$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ .

On note par  $PC(J, \mathbb{R}^n)$ , l'espace des fonctions  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui vérifient :

- 1)  $\psi$  est continue pour tout  $t \in J$  tel que  $t \neq t_k$ .
- 2)  $\psi$  est continue à gauche pour tout  $t \in J$ .
- 3)  $\psi$  possède une discontinuité de première espèce pour tout  $t_k \in J$ .

De même, on dit que  $\psi \in PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ , si  $\psi$  et  $\psi'$  appartiennent à  $PC(J, \mathbb{R}^n)$ .

Ce qui suit, résulte directement de la définition précédente.

**Conséquence 1.1.** Avec les notations introduite dans la Définition 1.6,  $\psi \in PC(J, \mathbb{R}^n)$  si :

- Pour chaque  $t_k$  tel que  $]t_k, t_{k+1}[ \subset J$ ,  $\psi \in C([t_k, t_{k+1}[, \mathbb{R}^n)$ .
- Pour chaque  $t_k \in J$ , les deux limites suivantes (la limite à droite et la limite à gauche) :

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} \psi(t) \doteq \psi(t_k^-) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_k^+} \psi(t) \doteq \psi(t_k^+)$$

existe et de plus  $\psi(t_k^-) = \psi(t_k)$ .

**Théorème 1.3.** Voir [2, 16]

$PC(J, \mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{PC} \doteq \sup \{|x(t)| \mid t \in J\} \quad , x \in PC(J, \mathbb{R}^n)$$

$PC^1(J, \mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{PC^1} \doteq \|x\|_{PC} + \|x'\|_{PC} \quad , x \in PC^1(J, \mathbb{R}^n)$$

**Définition 1.7.** Voir[5](page 24)

Soit  $\mathcal{F} \subset PC(J, \mathbb{R}^n)$ , on dit que l'ensemble  $\mathcal{F}$  est quasi-équicontinu dans  $J$  si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{F}$ , et tout  $\tau_1, \tau_2 \in ]t_k, t_{k+1}] \cap J$ , si  $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$ , Alors

$$|x(\tau_1) - x(\tau_2)| < \epsilon$$

La version du théorème d'Ascoli-Arzelà dans l'espace  $PC(J, \mathbb{R}^n)$ , est donné par le théorème suivant.

**Théorème 1.4. (Critère de compacité)** Voir[5](page 24)

L'ensemble  $\mathcal{F} \subset PC(J, \mathbb{R}^n)$  est relativement compact si et seulement si :

1.  $\mathcal{F}$  est uniformément borné, c'est-à-dire  $\|x\| \leq c$  pour chaque  $x \in \mathcal{F}$  et certains  $c > 0$  ;
2.  $\mathcal{F}$  est quasi-équicontinu dans  $J$ .

## 1.3 Quelques théorèmes de point fixe

**Définition 1.8.** Voir [12] (page 141)

On dit que  $a$  est un point fixe pour une application  $f$  si l'on a :

$$f(a) = a$$

**Théorème 1.5. (Théorème du point fixe)** Voir [13] (page 93)

Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $f : X \rightarrow X$  une application contractante de rapport  $k$ . Alors on a

1. L'application  $f$  possède un unique point fixe  $a \in X$ .
2. Pour tout  $x \in X$ , on a  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x)$  et  $d(a, f^n(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x))$ , pour tout  $n \geq 0$ , où  $f^0 = id_X$  et  $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$  l'application  $f$  composée avec elle-même  $n$  fois.

**Théorème 1.6. (Schaefer)** Voir[6](page 29)

Soit  $E$  un espace normé, et  $T : E \rightarrow E$  un opérateur compact. Alors, soit

- (i) l'équation  $x = \lambda Tx$  a une solution pour  $\lambda = 1$  où
- (ii) l'ensemble  $\{x \in E, x = \lambda Tx, \lambda \in ]0, 1[ \}$  est non borné.

## 1.4 La dérivation sous le signe intégrale

**Théorème 1.7. (fondamental du calcul différentiel)** Voir [14] (page 2)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, alors la fonction  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = \int_a^b f(t)dt$  est dérivable et  $F'(x) = f(x)$ .

**Théorème 1.8. (*Théorème de Leibniz*)** Voir [11] (page 177)

Soit  $A \subset \mathbb{R}$  ouvert, soit  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalle compact et soit  $f$  une fonction continue de  $A \times I$  dans  $\mathbb{R}$  alors

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

est continue dans  $A$ . Si de plus, la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe et continue sur  $A \times I$ , alors  $g$  est continûment différentiable sur  $A$  et

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

**Remarque 1.1.** Si  $f$  est continue par morceaux sur tout intervalle de  $[a, b]$ , alors :

1.  $F$  (définie si-dessus) est bien définie et de plus elle est continue.
2.  $F$  est dérivable en tout  $x_0 \in [a, b]$  où  $f$  est continue et  $F'(x_0) = f(x_0)$ .
3. Si  $f$  n'est pas continue en  $x_0$ , alors  $F$  n'est pas dérivable en  $x_0$ .

En appliquant la loi de dérivation d'une fonction composée à la fonction

$$\tilde{f}(a(x), b(x), x) \doteq \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt$$

on déduit du Théorème 1.8, le théorème suivant

**Théorème 1.9.** Voir [14] (page 3)

Soient  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continûment différentiables,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sont continus, alors

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = b'(x) f(x, b(x)) - a'(x) f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

# Chapitre 2

## Équations différentielles impulsives du premier ordre à valeurs aux limites périodiques

### 2.1 Description d'un système différentiel impulsif et types typiques

Nous présentons dans cette section, une description générale d'un processus évolutif soumis à des effets impulsifs. Nous donnons ensuite deux types typiques de ces systèmes. On doit noter que toutes les informations fournies dans cette partie, sont un résumé tiré des livres [2], [16].

#### 2.1.1 Composantes caractérisant un système différentiel impulsif

Un système différentiel impulsif, est caractérisé par la donnée des trois composantes suivantes :

- (a) un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2.1}$$

où  $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble ouvert,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace euclidien de dimension  $n$  et  $\mathbb{R}^+$  l'ensemble des réels positifs.

- (b) les ensembles  $M(t), N(t) \subset \Omega$  pour chaque  $t \in \mathbb{R}^+$ , et  
(c) l'opérateur  $A(t) : M(t) \rightarrow N(t)$  pour chaque  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Pour  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$  une solution de (2.1) de condition initiale  $x(t_0) = x_0$ .

Le processus d'évolution se comporte comme suit :

Le point  $P_t = (t, x(t))$  commence son mouvement à partir du point initial  $P_{t_0} = (t_0, x_0)$  et se déplace le long de la courbe  $\{(t, x) : t \geq t_0, x = x(t)\}$  jusqu'à l'instant  $t_1 > t_0$  auquel le point  $P_t$ , rencontre l'ensemble  $M(t)$ .

En  $t = t_1$ , l'opérateur  $A(t)$  transfère le point  $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$  en un point

$P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+) \in N(t_1)$  où  $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$ . En suite, le point  $P_t$  continue à avancer sur la courbe avec  $x(t) = x(t, t_1, x_1^+)$  comme solution de (2.1) de condition initiale  $P_{t_1} = (t_1, x_1^+)$  jusqu'à ce qu'il rencontre l'ensemble  $M(t)$  à l'instant suivant  $t_2 > t_1$ .

Puis, encore une fois, le point  $P_{t_2} = (t_2, x(t_2))$  est transféré au point

$$P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+) \in N(t_2) \text{ où } x_2^+ = A(t_2)x(t_2).$$

Comme précédemment le point  $P_t$  continue d'avancer avec  $x(t) = x(t, t_2, x_2^+)$  comme solution de (2.1) de condition initiale  $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+)$ .

Ainsi, le processus d'évolution continue à avancer tant que la solution du système (2.1) existe.

Les moments  $t_i$  pendant lesquels le point  $P_t$  rencontre l'ensemble  $M(t)$  sont appelés moments d'impulsions.

### 2.1.2 Systèmes avec temps d'impulsions fixés

Pour ce type de système, l'ensemble  $M(t)$  représente une suite de plan  $t = t_k$  où  $\{t_k\}$  est une suite de temps telle que  $t_k \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$

L'opérateur  $A(t)$  est alors défini seulement pour  $t = t_k$  par la donnée d'une suite d'opérateurs  $A(k)$  défini par :

$$A(k) : \Omega \rightarrow \Omega, \quad x \rightarrow A(k)x = x + I_k(x)$$

où  $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$ .

Par conséquence, l'ensemble  $N(t)$  est aussi défini pour  $t = t_k$  par  $N(k) = A(k)M(k)$ .

Ainsi, avec le choix décrit ci-dessus des ensembles  $M(k)$ ,  $N(k)$  et de l'opérateur  $A(t)$ , un modèle mathématique d'un système différentiel impulsif dans lequel des impulsif se produisent dans des instants fixés, est décrit par :

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq t_k, k = 1, 2, \dots \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k \end{cases} \quad (2.2)$$

où pour  $t = t_k$ ,  $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$  et  $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h)$ ,  $x(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h)$

La solution  $x(t)$  de (2.2) satisfait :

$$(1) \quad x'(t) = f(t, x(t)), t \in ]t_k, t_{k+1}],$$

$$(2) \quad \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

### 2.1.3 Systèmes avec temps d'impulsions variables

Ce type de système est caractérisé par la donnée d'une suite de surfaces  $S_k : t = \tau_k(x), k = 1, 2, \dots$ , telle que  $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty$ . Alors, on a le système différentiel impulsif suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = I_k(x), t = \tau_k(x), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.3)$$

**Remarque 2.1.** Notons que la dépendance des temps d'impulsion  $t_k$  à la solution  $x$ , exprimé par la relation  $t_k = \tau_k(x_k)$ , rend l'étude de ce type de système (à temps d'impulsion variable) plus difficile par rapport aux système à temps d'impulsion fixés.

## 2.2 Quelques résultats d'existence

Cette section est une explicitation et une lecture détaillé de quelques résultats d'existence, connus dans la littérature mathématiques [9, 10, 8], pour les équations différentielles impulsives (linéaires et semi-linéaires) du premier ordre avec conditions aux limites périodiques.

### 2.2.1 Position des problèmes et notations

Considérons l'intervalle  $J = [0, T]$ , tel que  $T > 0$  et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et  $J' = J - \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$

On s'intéresse par la suite, à l'étude de l'équation différentielle impulsive du premier ordre à valeurs aux limites périodiques suivante :

$$u'(t) = F(t, u(t)), \quad t \in J, t \neq t_j, j = 1, \dots, p \quad (2.4)$$

$$u(0) = u(T) \quad (2.5)$$

$$u(t_j^+) = u(t_j^-) + I_j(u(t_j)), \quad j = 1, \dots, p \quad (2.6)$$

Où  $I_j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), j = 1, \dots, p$ .

On considère l'espace de Banach

$$PC(J, \mathbb{R}) = \left\{ u : J \rightarrow \mathbb{R} : u|_{(t_j, t_{j+1})} \in C(t_j, t_{j+1}), \exists u(t_j^-) = u(t_j), u(t_j^+), j = 1, \dots, p \right\}$$

muné de la norme

$$\|u\|_{PC} = \sup_{t \in J} |u(t)|$$

De plus, on considère l'espace de Banach

$$PC^1(J, \mathbb{R}) = \left\{ u \in PC(J, \mathbb{R}) : u|_{(t_j, t_{j+1})} \in C^1(t_j, t_{j+1}), \exists u'(t_j^-), u'(t_j^+), j = 1, \dots, p \right\}$$

menu de la norme

$$\|u\|_{PC^1} = \|u\|_{PC} + \|u'\|_{PC}$$

On commence par l'étude du problème (2.4)-(2.5)-(2.6) dans le cas linéaire, c'est à dire, lorsque

$$F(t, u(t)) = f(t) - \lambda u(t), \quad t \in J', \quad (2.7)$$

où  $f \in PC(J, \mathbb{R})$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . On note le problème dans ce cas, par  $(\mathcal{P}L)$

**Remarque 2.2.** Notons que  $(\mathcal{P}L)$  n'est pas vraiment un problème linéaire puisque les fonctions d'impulsion ne sont pas nécessairement linéaires.

Cependant, si  $I_j, j = 1, \dots, p$ , sont linéaires, alors  $(\mathcal{P}L)$  est un problème impulsif linéaire.

Ensuite, nous considérons le cas semi linéaire, c'est à dire lorsque

$$F(t, u(t)) = g(t, u(t)) - \lambda u(t), \quad t \in J', \quad (2.8)$$

où  $g(\cdot, u) \in PC(J, \mathbb{R})$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . On note le problème dans ce cas, par  $(\mathcal{P}SL)$

### 2.2.2 Le cas linéaire

**Lemme 2.1.**  $u \in PC^1(J, \mathbb{R})$  est une solution de  $(\mathcal{P}L)$  si, et seulement si  $u \in PC(J, \mathbb{R})$  est solution de

$$u(t) = \int_0^T K(t, s) f(s) ds + \sum_{j=1}^p K(t, t_j) I_j(u(t_j)), \quad t \in J \quad (2.9)$$

Où

$$K(t, s) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \begin{cases} e^{-\lambda(t-s)}, & 0 \leq s \leq t \leq T \\ e^{-\lambda(T+t-s)}, & 0 \leq t < s \leq T \end{cases} \quad (2.10)$$

**Preuve.** Soit  $u \in PC^1(J, \mathbb{R})$  une solution de  $(\mathcal{P}L)$ .

On pose  $y(t) = e^{\lambda t} u(t), t \in J$

On a  $e^{\lambda t} \in C^\infty(J)$  alors  $y \in PC^1(J, \mathbb{R})$

Ainsi  $y$  satisfait le problème à valeurs aux limites impulsives suivant

$$y'(t) = f^*(t), t \in J' \quad (2.11)$$

$$y(0) = y(T) e^{-\lambda T} \quad (2.12)$$

$$y(t_j^+) = y(t_j^-) + I_j^*(y(t_j)) \quad (2.13)$$

Où  $f^*(t) = e^{\lambda t} f(t)$  et  $I_j^*(x) = e^{\lambda t_j} I_j(e^{-\lambda t_j} x)$

Si  $t \in ]t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, p$ , l'intégration de l'équation ( 2.11 ) sur  $]t_j, t]$  , donne

$$y(t) = y(t_j^+) + \int_{t_j}^t f^*(s) ds \quad (2.14)$$

De même, l'intégration de l'équation ( 2.11 ) sur  $]t_{j-1}, t_j]$  , donne

$$y(t_j^-) = y(t_{j-1}^+) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} f^*(s) ds \quad (2.15)$$

En introduisant de (2.13) dans (2.14), on obtient donc

$$y(t) = y(t_j^-) + I_j^*(y(t_j)) + \int_{t_j}^t f^*(s) ds$$

La substitution de (2.15) dans l'équation précédente, donne

$$y(t) = y(t_{j-1}^+) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} f^*(s) ds + I_j^*(y(t_j)) + \int_{t_j}^t f^*(s) ds$$

Donc, si  $t \in ]t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, p$  on obtient

$$y(t) = y(t_{j-1}^+) + \int_{t_{j-1}}^t f^*(s) ds + I_j^*(y(t_j)) \quad (2.16)$$

Nous avons aussi, en intégrant (2.11) entre  $t_{j-2}$  et  $t_{j-1}$

$$y(t_{j-1}^-) = y(t_{j-2}^+) + \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} f^*(s) ds$$

avec

$$y(t_{j-1}^+) = y(t_{j-1}^-) + I_{j-1}^*(y(t_{j-1}))$$

L'utilisation des deux équations précédentes dans (2.16) nous donne alors

$$y(t) = y(t_{j-2}^+) + \int_{t_{j-2}}^t f^*(s) ds + I_j^*(y(t_j)) + I_{j-1}^*(y(t_{j-1}))$$

En répétant successivement la procédure ci-dessus, on obtient

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f^*(s) ds + \sum_{t_j \leq t} I_j^*(y(t_j)) \quad t \in J \quad (2.17)$$

Ainsi cette formule pour  $t = T$  avec ( 2.12 ), donne

$$y(0) = \frac{1}{e^{\lambda T} - 1} \int_0^T f^*(s) ds + \frac{1}{e^{\lambda T} - 1} \sum_{j=1}^p I_j^*(y(t_j))$$

En substituant cette valeur dans (2.17), nous obtenons pour chaque  $t \in J$

$$y(t) = \frac{1}{e^{\lambda T} - 1} \int_0^T f^*(s) ds + \frac{1}{e^{\lambda T} - 1} \sum_{j=1}^p I_j^*(y(t_j)) + \int_0^t f^*(s) ds + \sum_{t_j \leq t} I_j^*(y(t_j))$$

donc

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{e^{-\lambda t}}{e^{\lambda T} - 1} \int_0^T f^*(s) ds + \frac{e^{-\lambda t}}{e^{\lambda T} - 1} \sum_{j=1}^p I_j^*(y(t_j)) + e^{-\lambda t} \int_0^t f^*(s) ds + e^{-\lambda t} \sum_{t_j \leq t} I_j^*(y(t_j)) \\
&= \frac{e^{-\lambda t}}{e^{\lambda T} - 1} \int_0^T e^{\lambda s} f(s) ds + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds \\
&\quad + \frac{e^{-\lambda t}}{e^{\lambda T} - 1} \sum_{j=1}^p e^{\lambda t_j} I_j(u(t_j)) + e^{-\lambda t} \sum_{t_j \leq t} e^{\lambda t_j} I_j(u(t_j)) \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{1 - e^{-\lambda T}} \int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds + \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{1 - e^{-\lambda T}} \int_t^T e^{\lambda s} f(s) ds + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds \\
&\quad + \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{1 - e^{-\lambda T}} \sum_{t_j \leq t} e^{\lambda t_j} I_j(u(t_j)) + \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{1 - e^{-\lambda T}} \sum_{t < t_j \leq T} e^{\lambda t_j} I_j(u(t_j)) + e^{-\lambda t} \sum_{t_j \leq t} e^{\lambda t_j} I_j(u(t_j)) \\
&= \int_0^t \left[ \frac{e^{-\lambda(t-s+T)}}{1 - e^{-\lambda T}} + e^{-\lambda(t-s)} \right] f(s) ds + \int_t^T \frac{e^{-\lambda(t+T-s)}}{1 - e^{-\lambda T}} f(s) ds \\
&\quad + \sum_{t_j \leq t} \left[ \frac{e^{-\lambda(t+T-t_j)}}{1 - e^{-\lambda T}} + e^{-\lambda(t-t_j)} \right] I_j(u(t_j)) + \sum_{t < t_j \leq T} \frac{e^{-\lambda(t+T-t_j)}}{1 - e^{-\lambda T}} I_j(u(t_j)) \\
&= \int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{1 - e^{-\lambda T}} f(s) ds + \int_t^T \frac{e^{-\lambda(t+T-s)}}{1 - e^{-\lambda T}} f(s) ds \\
&\quad + \sum_{t_j \leq t} \frac{e^{-\lambda(t-t_j)}}{1 - e^{-\lambda T}} I_j(u(t_j)) + \sum_{t < t_j \leq T} \frac{e^{-\lambda(t+T-t_j)}}{1 - e^{-\lambda T}} I_j(u(t_j)) \\
&= \int_0^T K(t, s) f(s) ds + \sum_{j=1}^p K(t, t_j) I_j(u(t_j))
\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que  $u \in PC(J, \mathbb{R})$  satisfait (2.21).

Soit

$$v(t) = \int_0^T K(t, s) f(s) ds, \quad t \in J$$

Et pour  $j = 1, \dots, p$

$$w_j(t) = K(t, t_j) I_j(u(t_j)), \quad t \in J$$

Ainsi  $v \in PC^1(J, \mathbb{R})$  et c'est la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} u'(t) + \lambda u(t) = f(t), & t \in J' \\ u(0) = u(T), \end{cases} \quad (2.18)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^T K(t, s) f(s) ds = \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds + \int_t^T e^{-\lambda(T+t-s)} f(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \left[ \underbrace{\frac{d}{dt} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds}_{\mathbf{A}_1} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_t^T e^{-\lambda(T+t-s)} f(s) ds}_{\mathbf{A}_2} \right] \end{aligned}$$

On a d'après le Théorème 1.9

$$A_1(t) = e^{-\lambda(t-t)} f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds = f(t) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds$$

Et

$$A_2(t) = -e^{-\lambda(T+t-t)} f(t) + \int_t^T \frac{\partial}{\partial t} e^{-\lambda(T+t-s)} f(s) ds = -e^{-\lambda T} f(t) - \lambda \int_t^T e^{-\lambda(T+t-s)} f(s) ds$$

Donc

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \left[ f(t) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds - e^{-\lambda T} f(t) - \lambda \int_t^T e^{-\lambda(T+t-s)} f(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \left[ (1 - e^{-\lambda T}) f(t) - \lambda \left( \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds + \int_t^T e^{-\lambda(T+t-s)} f(s) ds \right) \right] \\ &= f(t) - \lambda \int_0^T K(t, s) f(s) ds = f(t) - \lambda v(t) \end{aligned}$$

Alors

$$v'(t) + \lambda v(t) = f(t)$$

$v$  vérifie la condition aux limites, on a

$$v(0) = \int_0^T K(0, s) f(s) ds = \int_0^T \frac{e^{-\lambda(T-s)}}{1 - e^{-\lambda T}} f(s) ds = \int_0^T K(T, s) f(s) ds = v(T)$$

La fonction  $w_j, j = 1, \dots, p$  est la solution du problème

$$\begin{cases} w_j'(t) + \lambda w_j(t) = 0, t \in J - \{t_j\} \\ w_j(0) = w_j(T) \\ w_j(t_j^+) = w_j(t_j^-) + I_j(u(t_j)) \end{cases}$$

En effet, on a

$$w_j'(t) = \frac{d}{dt} w_j(t) = \frac{d}{dt} [K(t, t_j) I_j(u(t_j))] = I_j(u(t_j)) \frac{d}{dt} K(t, t_j)$$

Et

$$\frac{d}{dt} K(t, t_j) = \frac{-\lambda}{1 - e^{-\lambda T}} \begin{cases} e^{-\lambda(t-t_j)}, & 0 \leq t_j \leq t \leq T \\ e^{-\lambda(T+t-t_j)}, & 0 \leq t < t_j \leq T \end{cases}$$

$$= -\lambda K(t, t_j)$$

Donc

$$w_j'(t) = -\lambda K(t, t_j) I_j(u(t_j)) = -\lambda w_j(t)$$

Alors

$$w_j'(t) + \lambda w_j(t) = 0$$

$w_j$  satisfait la condition aux limites, an effet

$$w_j(0) = K(0, t_j) I_j(u(t_j)) = \frac{e^{-\lambda(T-t_j)}}{1 - e^{-\lambda T}} I_j(u(t_j)) = K(T, t_j) I_j(u(t_j)) = w_j(T)$$

$w_j$  vérifie la condition d'impulsion, en effet

$$w_j(t_j^+) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} w_j(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} K(t, t_j) I_j(u(t_j)) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} I_j(u(t_j))$$

Et

$$w_j(t_j^-) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} w_j(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} K(t, t_j) I_j(u(t_j)) = \frac{e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}} I_j(u(t_j))$$

Donc

$$w_j(t_j^+) - w_j(t_j^-) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} I_j(u(t_j)) - \frac{e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}} I_j(u(t_j)) = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}} I_j(u(t_j)) = I_j(u(t_j))$$

En conséquence  $u = v + \sum_{j=1}^p w_j$  est une solution de  $(\mathcal{PL})$  □

Le lemme suivant découle immédiatement du Lemme 2.1

**Lemme 2.2.** *Les solutions du problème  $(\mathcal{PL})$  sont les points fixes de l'opérateur*

$$A : PC(J, \mathbb{R}) \rightarrow PC(J, \mathbb{R})$$

défini par

$$[Au](t) = \int_0^T K(t, s) f(s) ds + \sum_{j=1}^p K(t, t_j) I_j(u(t_j))$$

**Remarque 2.3.** *Bien que le problème différentiel linéaire (2.4)-(2.5) possède une solution unique  $v \in PC^1(J, \mathbb{R}) \cup C(J, \mathbb{R})$  pour toute  $f \in PC(J, \mathbb{R})$  le problème impulsif  $(\mathcal{PL})$  n'est pas toujours résolu même pour  $f = 0$*

**Exemple 2.1.** *Considérons le  $(\mathcal{PL})$  avec  $\lambda = 1, f = 0, j = 1$  et  $I_1(x) = (e^T - 1)x + 1$ .*

*La solution générale de l'équation  $u' + u = 0$  soumis à l'impulsion  $u(t_1^+) = u(t_1^-) + I_1(u(t_1))$  est*

$$u(t) = \begin{cases} u(0)e^{-t}, & t \in [0, t_1] \\ [u(0)e^{-t_1} + I_1(u(0)e^{-t_1})]e^{-(t-t_1)}, & t \in ]t_1, T] \end{cases}$$

Cette solution satisfait la condition aux limites périodique (2.5) si et seulement si

$$u(0) = \left[ u(0)e^{-t_1} + I_1 \left( u(0)e^{-t_1} \right) \right] e^{-(T-t_1)}$$

C'est-à-dire

$$u(0)e^{-t_1} (e^T - 1) = I_1 \left( u(0)e^{-t_1} \right)$$

Par la définition de  $I_1$ , il n'existe pas de condition initiale  $u(0)$  satisfaisant cette dernière égalité. par conséquent, le problème n'a pas de solution .

Dans cet exemple, la fonction d'impulsion n'est pas linéaire. Nous présentons maintenant un autre exemple avec impulsion linéaire, de sorte que le problème ( $\mathcal{PL}$ ) vraiment un problème linéaire, mais sans solution .

**Exemple 2.2.** Nous définissons maintenant le problème ( $\mathcal{PL}$ ) avec  $\lambda = 1, j = 1$ , et  $I_1(x) = cx, c = (e^T - 1)$ , et  $f \in PC(J, \mathbb{R})$ ,  $e^T f_1 + f_2 \neq 0$  où

$$f_1 = \int_0^{t_1} e^{-(T-s)} f(s) ds, \quad f_2 = \int_{t_1}^T e^{-(T-s)} f(s) ds$$

Dans ce cas, la solution générale de (2.4) et (2.5) est

$$u(t) = \begin{cases} u(0)e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} f(s) ds, & t \in [0, t_1] \\ u(t_1^+) e^{-(t-t_1)} + \int_{t_1}^t e^{-(t-s)} f(s) ds, & t \in ]t_1, T] \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} u(t_1^+) &= u(t_1^-) + I_1(u(t_1)) \\ u(t_1^-) &= u(t_1) = u(0)e^{-t_1} + \int_0^{t_1} e^{-(t_1-s)} f(s) ds \end{aligned}$$

Ainsi,  $u$  satisfait à la condition (2.5) si et seulement si

$$u(0) = (c + 1)u(0)e^{-T} + e^T \int_0^{t_1} e^{-(T-s)} f(s) ds + \int_{t_1}^T e^{-(T-s)} f(s) ds$$

Cette condition n'est pas remplie pour aucune condition initiale  $u(0)$  puisque  $e^T f_1 + f_2 \neq 0$ .

**Théorème 2.1.** Supposons qu'il existe des constantes positives  $l_j, j = 1, \dots, p$ , telles que

$$|I_j(x) - I_j(y)| \leq l_j |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

Si

$$e^{|\lambda|T} \sum_{j=1}^p l_j < |1 - e^{-\lambda T}| \quad (2.20)$$

alors le problème ( $\mathcal{PL}$ ) posséder une solution unique pour tout  $f \in PC(J, \mathbb{R})$ .

**Preuve.** Soit  $u, v \in PC(J, \mathbb{R})$ , et  $t \in J$ . on a donc

$$\begin{aligned} |(Au)(t) - (Av)(t)| &= \left| \sum_{j=1}^p K(t, t_j) [I_j(u(t_j)) - I_j(v(t_j))] \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^p \sup_{t \in J} |K(t, t_j)| l_j |u(t_j) - v(t_j)| \\ &\leq \frac{e^{|\lambda|T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \|u - v\|_{PC} \sum_{j=1}^p l_j \end{aligned}$$

et par suite

$$\|Au - Av\|_{PC} \leq \frac{e^{|\lambda|T} \sum_{j=1}^p l_j}{|1 - e^{-\lambda T}|} \|u - v\|_{PC}$$

Ainsi,  $A$  est une contraction et il admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème  $(\mathcal{PL})$ .  $\square$

### 2.2.3 Le cas semi-linéaire

En suivant la même démarche utilisé dans la preuve du Lemme 2.1, on démontre le résultat suivant :

**Lemme 2.3.**  $u \in PC^1(J, \mathbb{R})$  est une solution de  $(\mathcal{PSL})$  si et seulement si  $u \in PC(J, \mathbb{R})$  est une solution de

$$u(t) = \int_0^T K(t, s)g(s, u(s))ds + \sum_{j=1}^p K(t, t_j) I_j(u(t_j)), \quad t \in J \quad (2.21)$$

où  $K$  est défini par l'équation (2.10).

**Lemme 2.4.** Les solutions de  $(\mathcal{PSL})$  sont les points fixes de l'opérateur

$$B : PC(J, \mathbb{R}) \rightarrow PC(J, \mathbb{R})$$

défini par

$$[Bu](t) = \int_0^T K(t, s)g(s, u(s))ds + \sum_{j=1}^p K(t, t_j) I_j(u(t_j)) \quad (2.22)$$

**Lemme 2.5.** On suppose que  $g, I_j, (j = 1, \dots, p)$  sont des fonctions continues, de plus, il existe des constantes positives  $c_j, l$ , telles que

$$\begin{aligned} |g(t, v)| &\leq l |v|, & v \in \mathbb{R}, t \in J' \\ |I_j(v)| &\leq c_j |v|, & v \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Alors l'opérateur  $B$  défini par l'équation (2.22) est continue et compacte.

**Preuve.** (i)  $B$  est continue

soit  $u_n$  une suite qui converge vers  $u$  dans  $PC(J, \mathbb{R})$  On a

$$\begin{aligned}
 |Bu_n(t) - Bu(t)| &= \left| \int_0^T K(t, s)g(s, u_n(s))ds + \sum_{j=1}^P K(t, t_j)I_j(u_n(t_j)) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^T K(t, s)g(s, u(s))ds - \sum_{j=1}^P K(t, t_j)I_j(u(t_j)) \right| \\
 &= \left| \int_0^T K(t, s) [g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))] ds + \sum_{j=1}^P K(t, t_j) [I_j(u_n(t_j)) - I_j(u(t_j))] \right| \\
 &\leq \int_0^T |K(t, s) [g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))]| ds + \sum_{j=1}^P |K(t, t_j) [I_j(u_n(t_j)) - I_j(u(t_j))]| \\
 &\leq \int_0^T \sup_{t \in J} |K(t, s)| |g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))| ds + \sum_{j=1}^P \sup_{t \in J} |K(t, s)| |I_j(u_n(t_j)) - I_j(u(t_j))| \\
 &\leq \frac{e^{|\lambda|T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \int_0^T |g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))| ds + \frac{e^{|\lambda|T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \sum_{j=1}^P |I_j(u_n(t_j)) - I_j(u(t_j))| \\
 &= \frac{e^{|\lambda|T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \left[ \int_0^T |g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))| ds + \sum_{j=1}^P |I_j(u_n(t_j)) - I_j(u(t_j))| \right]
 \end{aligned}$$

Donc

$$\|Bu_n - Bu\|_{PC} \leq \frac{e^{|\lambda|T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \left[ \int_0^T |g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))| ds + \sum_{j=1}^P |I_j(u_n(t_j)) - I_j(u(t_j))| \right]$$

Puisque  $g, I_j$ , ( $j = 1, \dots, p$ ) sont continus, alors

$$|g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))| \longrightarrow 0 \quad , \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

$$|I_j(u_n(t_j)) - I_j(u(t_j))| \longrightarrow 0 \quad , \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

par suite, on a

$$\|Bu_n - Bu\|_{PC} \longrightarrow 0 \quad , \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

Soit  $D \subset PC(J, \mathbb{R})$  un ensemble borné, alors il existe  $M > 0$

tel que,  $\forall u \in D, \|u\| \leq M$

Alors

$$\begin{aligned}
 |g(t, u)| &\leq lM \doteq L \quad \forall u \in D, t \in J' \\
 |I_j(u)| &\leq c_j M \doteq M_j, \quad \forall u \in D, j = 1, \dots, p
 \end{aligned}$$

(ii)  $B(D)$  est uniformément borné.

$$\begin{aligned}
 |(Bu)(t)| &\leq \left| \int_0^T K(t, s) g(s, u(s)) ds + \sum_{j=1}^p K(t, t_j) I_j(u(t_j)) \right| \\
 &\leq \int_0^T |K(t, s) g(s, u(s))| ds + \sum_{j=1}^p |K(t, t_j) I_j(u(t_j))| \\
 &\leq \int_0^T L |K(t, s)| ds + \sum_{j=1}^p |K(t, t_j)| M_j \\
 &\leq L \int_0^T \sup_{t \in J} |K(t, s)| ds + \sum_{j=1}^p \sup_{t \in J} |K(t, t_j)| M_j \\
 &\leq \frac{L}{|\lambda|} + \frac{e^{|\lambda|T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \sum_{j=1}^p M_j
 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\|Bu\|_{PC} \leq \frac{L}{|\lambda|} + \frac{e^{|\lambda|T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \sum_{j=1}^p M_j$$

(iii)  $B(D)$  est quasi-équicontinu

Pour tout  $\tau_1, \tau_2 \in [t_{j-1}, t_j] \cap J, u \in D$ , On a

$$\begin{aligned}
 |(Bu)(\tau_1) - (Bu)(\tau_2)| &= \left| \int_0^T K(\tau_1, s) g(s, u) ds + \sum_{j=1}^p K(\tau_1, t_j) I_j(u) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^T K(\tau_2, s) g(s, u) ds - \sum_{j=1}^p K(\tau_2, t_j) I_j(u) \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \right| \left| \int_0^{\tau_1} g(s, u) e^{-\lambda(\tau_1-s)} ds - \int_0^{\tau_2} g(s, u) e^{-\lambda(\tau_2-s)} ds \right| \\
 &\quad + \left| \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \right| \left| \sum_{0 < t_j < \tau_1} I_j(u) e^{-\lambda(\tau_1-t_j)} - \sum_{0 < t_j < \tau_2} I_j(u) e^{-\lambda(\tau_2-t_j)} \right| \\
 &\quad + \frac{e^{-\lambda T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \int_0^T |g(s, u) (e^{-\lambda(\tau_1-s)} - e^{-\lambda(\tau_2-s)})| ds \\
 &\quad + \frac{e^{-\lambda T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \left| \sum_{j=1}^p I_j(u) (e^{-\lambda(\tau_1-t_j)} - e^{-\lambda(\tau_2-t_j)}) \right| \\
 &\leq \left| \int_0^{\tau_1} g(s, u) e^{-\lambda(\tau_1-s)} ds - \int_0^{\tau_2} g(s, u) e^{-\lambda(\tau_2-s)} ds \right| \\
 &\quad + \sum_{0 < t_j < \tau_1} M_j |e^{-\lambda(\tau_1-t_j)} - e^{-\lambda(\tau_2-t_j)}| \\
 &\quad + \frac{e^{-\lambda T}}{|1 - e^{-\lambda T}|} \left[ L \int_0^T |e^{-\lambda(\tau_1-s)} - e^{-\lambda(\tau_2-s)}| ds + \sum_{j=1}^p M_j |e^{-\lambda(\tau_1-t_j)} - e^{-\lambda(\tau_2-t_j)}| \right]
 \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$|(Bu)(\tau_1) - (Bu)(\tau_2)| \rightarrow 0, \quad \text{quand} \quad |\tau_1 - \tau_2| \rightarrow 0$$

Par suit  $B(D)$  est relativement compact, alors  $B$  opérateur compact.  $\square$

**Théorème 2.2.** *On suppose que  $g, I_j$ , ( $j = 1, \dots, p$ ) sont des fonctions continues, de plus, il existe des constantes positives  $\alpha_j, \beta$ , telles que*

$$\begin{aligned} |g(t, v)| &\leq \beta |v|, \quad v \in \mathbb{R}, t \in J' \\ |I_j(v)| &\leq \alpha_j, \quad v \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

et

$$\frac{\beta}{|\lambda|} < 1 \quad (2.23)$$

Alors le problème  $(\mathcal{PSL})$  admet au moins une solution.

**Preuve.** On a d'après le Lemme 2.4, les solutions de  $(\mathcal{PSL})$  sont les points fixes de l'opérateur  $B$ , pour  $\mu \in [0, 1]$ , considérons l'équation

$$u = \mu Bu \quad (2.24)$$

Si  $u$  est une solution d'équation (2.24), pour  $t \in J$ , on a

$$\begin{aligned} |u(t)| &= |\mu Bu(t)| \leq \mu \int_0^T |K(t, s)g(s, u(s))| ds + \mu \sum_{j=1}^p |K(t, t_j) I_j(u(t_j))| \\ &\leq \mu \int_0^T \sup_{t \in J} |K(t, s)| |g(s, u(s))| ds + \mu \sum_{j=1}^p \sup_{t \in J} |K(t, t_j)| |I_j(u(t_j))| \\ &\leq \mu \int_0^T \sup_{t \in J} |K(t, s)| \beta \|u\|_{PC} ds + \mu \sum_{j=1}^p \sup_{t \in J} |K(t, t_j)| \alpha_j \\ &\leq \frac{\mu \beta \|u\|_{PC}}{|\lambda|} + \frac{\mu e^{|\lambda|T} \sum_{j=1}^p \alpha_j}{|1 - e^{-\lambda T}|} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|u\|_{PC} &\leq \frac{\mu \beta \|u\|_{PC}}{|\lambda|} + \frac{\mu e^{|\lambda|T} \sum_{j=1}^p \alpha_j}{|1 - e^{-\lambda T}|} \\ &\leq \frac{\beta \|u\|_{PC}}{|\lambda|} + \frac{e^{|\lambda|T} \sum_{j=1}^p \alpha_j}{|1 - e^{-\lambda T}|} \end{aligned}$$

on a  $\frac{\beta}{|\lambda|} < 1$  implique que

$$\|u\|_{PC} \leq \frac{e^{|\lambda|T} \sum_{j=1}^p \alpha_j}{\left(1 - \frac{\beta}{|\lambda|}\right) |1 - e^{-\lambda T}|}$$

Ainsi, les solutions de (2.24) sont bornés indépendamment de  $\mu$ , puisque de plus  $B$  est compact d'après Lemme 2.5, le théorème de Schaefer garantie alors l'existence, au moins d'un point fixe de l'opérateur  $B$ , Alors le problème  $(\mathcal{PSL})$  admet au moins une solution.  $\square$

**Théorème 2.3.** *Supposons qu'il existe des constantes positives  $N, l_j$  telles que*

$$|g(t, u) - g(t, v)| \leq N|u - v|, \quad t \in J', u, v \in \mathbb{R}.$$

$$|I_j(u) - I_j(v)| \leq l_j|u - v|, \quad , u, v \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, p.$$

et

$$\frac{N}{|\lambda|} + \frac{\sum_{j=1}^p l_j}{|1 - e^{-\lambda T}|} < 1 \quad (2.25)$$

alors le problème  $(\mathcal{PSL})$  admet une solution unique.

**Preuve.** Pour  $u, v \in PC(J, \mathbb{R})$  et  $t \in J$ , on a

$$\begin{aligned} |[Bu](t) - [Bv](t)| &= \left| \int_0^T K(t, s)g(s, u(s))ds + \sum_{j=1}^P K(t, t_j)I_j(u(t_j)) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T K(t, s)g(s, v(s))ds - \sum_{j=1}^P K(t, t_j)I_j(v(t_j)) \right| \\ &\leq \int_0^T |K(t, s)| |g(s, u(s)) - g(s, v(s))| ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^P |K(t, t_j)| |I_j(u(t_j)) - I_j(v(t_j))| \\ &\leq \frac{N}{|\lambda|} \|u - v\|_{PC} + \sum_{j=1}^p \frac{l_j}{|1 - e^{-\lambda T}|} \|u - v\|_{PC} \end{aligned}$$

donc  $B$  est une contraction.

Par conséquent  $B$  admet un point fixe unique, alors le problème  $(\mathcal{PSL})$  admet une solution unique □

# Chapitre 3

## Système de deux equations différentielles impulsives à valeurs aux limites non-périodiques et application

Le travail [8] présente plusieurs résultats d'existence pour une classe d'équation différentielle impulsives du premier ordre avec conditions aux limites non périodiques. Différemment de [10, 9] les auteurs dans [8] ont considéré le cas vectoriel mais avec une seule impulsion.

En se basant sur ce travail, nous allons présenter dans ce chapitre, deux résultats d'existence, mais sous une forme différente et avec une légère généralisation. Ceci est en explicitant le Théorème 4.1 et Théorème 4.2 dans [8], après les avoir adaptés à un système de deux equations différentielles impulsives du premier ordre dans le cas de plusieurs impulsions. Cette adaptation va nous permettre ensuite, de tirer des résultats d'existence pour une classe d'équations différentielles impulsives du deuxième ordre à valeurs aux limites anti-périodiques.

### 3.1 Position du problème et hypothèses considérés

Soient  $J = [0, T]$ ,  $T > 0$  et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du système de deux équations différentielles impulsives suivant :

$$(S.I) \left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)), & t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)), & t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p \\ \Delta x(t_k) \doteq x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)), & k = 1, \dots, p \\ \Delta y(t_k) \doteq y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)), & k = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

Où pour  $i = 1, 2$ ,  $k = 1, \dots, p$ ,  $I_{i,k} \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $f_i(\cdot, x, y) \in PC(J, \mathbb{R})$  pour chaque  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soumis à la condition aux limites non-périodique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 x(0) + b_1 x(T) = \alpha_1 \\ a_2 y(0) + b_2 y(T) = \alpha_2 \end{array} \right. \quad a_i + b_i \neq 0 \quad , (i = 1, 2)$$

où  $a_i, b_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$

On considère l'espace de Banach  $PC(J, \mathbb{R}) \times PC(J, \mathbb{R})$  muni de la norme

$$\|(x, y)\|_{PC \times PC} \doteq \|x\|_{PC} + \|y\|_{PC}$$

Où

$$\|x\|_{PC} = \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|, \quad \|y\|_{PC} = \sup_{t \in [0, T]} |y(t)|$$

Nous présentons ici, les hypothèses sous lesquelles ces résultats d'existence du système (S.I) seront obtenues

#### • Hypothèses

(H<sub>1</sub>) Il existe des constantes positives  $l_i, \tilde{l}_i, \mu_i$  telles que :

Pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2, t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p$ ,  $i = 1, 2$ , on a

$$|f_i(t, u, v)| \leq l_i |u| + \tilde{l}_i |v| + \mu_i$$

(H<sub>2</sub>) Il existe des constantes positives  $r_{i,k}, \tilde{r}_{i,k}, \nu_{i,k}$  telles que :

Pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2, k = 1, \dots, p$ ,  $i = 1, 2$ , on a

$$|I_{i,k}(u, v)| \leq r_{i,k} |u| + \tilde{r}_{i,k} |v| + \nu_{i,k}$$

(H<sub>3</sub>) Il existe des constantes positives  $\omega_i, \tilde{\omega}_i$ , telles que :

Pour tout  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^2, t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p, i = 1, 2$ , on a

$$|f_i(t, u, v) - f_i(t, \tilde{u}, \tilde{v})| \leq \omega_i |u - \tilde{u}| + \tilde{\omega}_i |v - \tilde{v}|$$

(H<sub>4</sub>) Il existe des constantes positives  $\eta_{i,k}, \tilde{\eta}_{i,k}$ , telles que :

Pour tout  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^2, k = 1, \dots, p, i = 1, 2$ , on a

$$|I_{i,k}(u, v) - I_{i,k}(\tilde{u}, \tilde{v})| \leq \eta_{i,k} |u - \tilde{u}| + \tilde{\eta}_{i,k} |v - \tilde{v}|$$

## 3.2 Système d'équations intégrales équivalent et forme opérationnel

**Lemme 3.1.**  $(x, y) \in PC^1(J, \mathbb{R}) \times PC^1(J, \mathbb{R})$  est une solution de (S.I) si et seulement si  $(x, y) \in PC(J, \mathbb{R}) \times PC(J, \mathbb{R})$  est solution de

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{a_1 + b_1} & \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right] \\ & + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Et

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{a_2 + b_2} & \left[ \alpha_2 - b_2 \left( \int_0^T f_2(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right] \\ & + \int_0^t f_2(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Preuve.** Soit  $(x, y) \in PC^1(J, \mathbb{R}) \times PC^1(J, \mathbb{R})$  une solution du problème (S.I)

Alors  $x \in PC^1(J, \mathbb{R})$  est une solution du problème suivant :

$$x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)), \quad t \in J, t \neq t_k \quad (3.3)$$

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)), \quad k = 1, \dots, p \quad (3.4)$$

$$a_1 x(0) + b_1 x(T) = \alpha_1 \quad (3.5)$$

On a, si  $t \in ]0, t_{k+1}[$ ,  $k = 1, \dots, p$  l'intégration de l'équation (3.3) entre 0 et  $t$ , donne

$$\int_0^t x'(s) ds = \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds$$

D'autre part

$$\int_0^t x'(s) ds = \int_0^{t_1} x'(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} x'(s) ds + \dots + \int_{t_k}^t x'(s) ds$$

$$= [x(t_1^-) - x(0)] + [x(t_2^-) - x(t_1^+)] + \cdots + [x(t) - x(t_k^+)]$$

Alors

$$[x(t_1^-) - x(0)] + [x(t_2^-) - x(t_1^+)] + \cdots + [x(t) - x(t_k^+)] = \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds$$

Donc

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds + [x(t_1^+) - x(t_1^-)] + [x(t_2^+) - x(t_2^-)] + \cdots + [x(t_k^+) - x(t_k^-)]$$

Ainsi

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \quad (3.6)$$

Ainsi cette formule pour  $t = T$  avec (3.5), donne

$$x(T) = x(0) + \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))$$

Donc

$$b_1 x(T) = b_1 x(0) + b_1 \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + b_1 \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) = \alpha_1 - a_1 x(0)$$

Par suite

$$x(0) = \frac{1}{a_1 + b_1} \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right]$$

En substituant cette valeur dans (3.6), nous obtenons pour chaque  $t \in J$

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{a_1 + b_1} \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right] \\ & + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Réciproquement, si  $x \in PC(J, \mathbb{R})$  satisfait (3.7), on a

$$\begin{aligned} x'(t) = & \frac{1}{a_1 + b_1} \frac{d}{dt} \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right] \\ & + \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds + \frac{d}{dt} \sum_{t_k < t} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \\ = & \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds \\ = & f_1(t, x(t), y(t)) \end{aligned}$$

Ainsi (3.3) est vérifiée de plus, on a

$$x(0) = \frac{1}{a_1 + b_1} \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right]$$

Et

$$\begin{aligned} x(T) &= \frac{1}{a_1 + b_1} \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right] \\ &\quad + \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \\ &= \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_1}{a_1 + b_1} \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \frac{a_1}{a_1 + b_1} \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \end{aligned}$$

Et par suite

$$a_1 x(0) + b_1 x(T) = \alpha_1$$

C'est à dire (3.5) est vérifié

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} x(t_k^+) &= \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t) = \frac{1}{a_1 + b_1} \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{j=1}^P I_{1,j}(x(t_j), y(t_j)) \right) \right] \\ &\quad + \int_0^{t_k^+} f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_j < t_k^+} I_{1,j}(x(t_j), y(t_j)) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} x(t_k^-) &= \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t) = \frac{1}{a_1 + b_1} \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{j=1}^P I_{1,j}(x(t_j), y(t_j)) \right) \right] \\ &\quad + \int_0^{t_k^-} f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_j < t_k^-} I_{1,j}(x(t_j), y(t_j)) \end{aligned}$$

Alors

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = \sum_{j=1}^k I_{1,j}(x(t_j), y(t_j)) - \sum_{j=1}^{k-1} I_{1,j}(x(t_j), y(t_j)) = I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))$$

De même méthode, on montre que

$y \in PC^1(J, \mathbb{R})$  est solution du problème :

$$y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)), \quad t \in [0, T], t \neq t_k$$

$$y(t_k^+) = y(t_k^-) + I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)), \quad k = 1, \dots, p$$

$$a_2 y(0) + b_2 y(T) = \alpha_2$$

Si et seulement si,  $y \in PC(J, \mathbb{R})$  est solution de

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{a_2 + b_2} \left[ \alpha_2 - b_2 \left( \int_0^T f_2(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right] \\ &\quad + \int_0^t f_2(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)) \end{aligned}$$

□

Compte tenu du Lemme 3.1, la question d'existence des solutions du problème (S.I), se transforme à un problème du point fixe formulé par le lemme suivant .

**Lemme 3.2.** *Les solutions du problème (S.I) sont les points fixes de l'opérateur*

$$A : PC(J, \mathbb{R}) \times PC(J, \mathbb{R}) \longrightarrow PC(J, \mathbb{R}) \times PC(J, \mathbb{R})$$

défini par

$$A(x, y) = (A_1(x, y), A_2(x, y))$$

Où

$$A_1(x, y)(t) = \frac{1}{a_1 + b_1} \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right] \\ + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \quad (3.8)$$

Et

$$A_2(x, y)(t) = \frac{1}{a_2 + b_2} \left[ \alpha_2 - b_2 \left( \int_0^T f_2(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right] \\ + \int_0^t f_2(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)) \quad (3.9)$$

### 3.3 Quelques résultats d'existence

Cette section présente les résultats d'existence et d'unicité pour le solution du problème (S.I).

**Proposition 3.1.** *On suppose que  $f_i, I_{i,k}$  ( $i = 1, 2, k = 1, \dots, p$ ) sont des fonctions continues, sous les hypothèses  $(H_1), (H_2)$ , l'opérateur  $A$  définit dans le Lemme 3.2 est continue et compacte.*

**Preuve.** •  $A$  est continue

Soit  $(x_n, y_n)$  une suite qui converge vers  $(x, y)$  dans  $PC(J, \mathbb{R}) \times PC(J, \mathbb{R})$

Puisque

$$\begin{aligned} \|A(x_n, y_n) - A(x, y)\|_{PC \times PC} &= \|(A_1(x_n, y_n), A_2(x_n, y_n)) - (A_1(x, y), A_2(x, y))\|_{PC \times PC} \\ &= \|(A_1(x_n, y_n) - A_1(x, y), A_2(x_n, y_n) - A_2(x, y))\|_{PC \times PC} \\ &= \|A_1(x_n, y_n) - A_1(x, y)\|_{PC} + \|A_2(x_n, y_n) - A_2(x, y)\|_{PC} \end{aligned}$$

il suffit donc de montrer que

$$\|A_i(x_n, y_n) - A_i(x, y)\|_{PC} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty, \text{ pour } i = 1, 2$$

Pour fixer les idées, on considéré  $i = 1$  . On a :

$$\begin{aligned}
 |A_1(x_n, y_n)(t) - A_1(x, y)(t)| &= \left| -\frac{b_1}{a_1 + b_1} \int_0^T f_1(s, x_n(s), y_n(s)) ds - \frac{b_1}{a_1 + b_1} \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) \right. \\
 &\quad + \int_0^t f_1(s, x_n(s), y_n(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) \\
 &\quad + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \\
 &\quad \left. - \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds - \sum_{t_k < t} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right| \\
 &= \left| -\frac{b_1}{a_1 + b_1} \int_0^T [f_1(s, x_n(s), y_n(s)) - f_1(s, x(s), y(s))] ds \right. \\
 &\quad - \frac{b_1}{a_1 + b_1} \sum_{k=1}^P [I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) - I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))] \\
 &\quad + \int_0^t [f_1(s, x_n(s), y_n(s)) - f_1(s, x(s), y(s))] ds \\
 &\quad \left. + \sum_{t_k < t} [I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) - I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))] \right|
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 |A_1(x_n, y_n)(t) - A_1(x, y)(t)| &\leq \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \int_0^T |f_1(s, x_n(s), y_n(s)) - f_1(s, x(s), y(s))| ds \\
 &\quad + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) - I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\
 &\quad + \int_0^T |f_1(s, x_n(s), y_n(s)) - f_1(s, x(s), y(s))| ds \\
 &\quad + \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) - I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\
 &= \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \int_0^T |f_1(s, x_n(s), y_n(s)) - f_1(s, x(s), y(s))| ds \\
 &\quad + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) - I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\
 &= \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \left[ \int_0^T |f_1(s, x_n(s), y_n(s)) - f_1(s, x(s), y(s))| ds \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) - I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \right]
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|A_1(x_n, y_n) - A_1(x, y)\|_{PC} &\leq \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \left[ \int_0^T |f_1(s, x_n(s), y_n(s)) - f_1(s, x(s), y(s))| ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) - I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \right] \end{aligned}$$

Puisque  $f_1, I_{1,k}$ , ( $k = 1, \dots, p$ ) sont continus, alors

$$|f_1(s, x_n(s), y_n(s)) - f_1(s, x(s), y(s))| \longrightarrow 0 \quad , \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

$$|I_{1,k}(x_n(t_k), y_n(t_k)) - I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \longrightarrow 0 \quad , \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

et par suite

$$\|A_1(x_n, y_n) - A_1(x, y)\|_{PC} \longrightarrow 0 \quad , \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

De même, on montre que

$$\|A_2(x_n, y_n) - A_2(x, y)\|_{PC} \longrightarrow 0 \quad , \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

- $A$  est un opérateur compact

Soit  $D$  un ensemble bornée dans  $PC(J, \mathbb{R}) \times PC(J, \mathbb{R})$ , alors il existe  $M > 0$  tel que

$$\|x\|_{PC} \leq M \quad \text{et} \quad \|y\|_{PC} \leq M$$

Notons que

$$|x(t)| \leq \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| = \|x\|_{PC} \leq M \quad \text{et} \quad |y(t)| \leq \sup_{t \in [0, T]} |y(t)| = \|y\|_{PC} \leq M$$

Par suite, et d'après les hypothèses  $(\mathbf{H}_1)$  et  $(\mathbf{H}_2)$ , on a

pour tout  $(x, y) \in D$ ,  $i = 1, 2$

$$|f_i(t, x(t), y(t))| \leq (l_i + \tilde{l}_i) M + \mu_i \doteq M_i \quad \forall t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p$$

$$|I_{i,k}(x(t_k), y(t_k))| \leq (r_{i,k} + \tilde{r}_{i,k}) M + \nu_{i,k} \doteq C_{i,k} \quad k = 1, \dots, p$$

(i).  $A(D)$  est uniformément bornée, en effet, on a  $\forall (x, y) \in D$

$$\begin{aligned} \|A(x, y)\|_{PC \times PC} &= \|(A_1(x, y), A_2(x, y))\|_{PC \times PC} \\ &= \|A_1(x, y)\|_{PC} + \|A_2(x, y)\|_{PC} = \sup_{t \in [0, T]} |A_1(x, y)(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |A_2(x, y)(t)| \end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
 |A_1(x, y)(t)| &= \left| \frac{1}{a_1 + b_1} \left[ \alpha_1 - b_1 \left( \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right| \\
 &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \int_0^T |f_1(s, x(s), y(s))| ds + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\
 &\quad + \int_0^t |f_1(s, x(s), y(s))| ds + \sum_{t_k < t} |I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\
 &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \int_0^T |f_1(s, x(s), y(s))| ds + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\
 &\quad + \int_0^T |f_1(s, x(s), y(s))| ds + \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\
 &= \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \int_0^T |f_1(s, x(s), y(s))| ds \\
 &\quad + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\
 &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \int_0^T M_1 ds + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \sum_{k=1}^P C_{1,k} \\
 &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \left( TM_1 + \sum_{k=1}^P C_{1,k} \right)
 \end{aligned}$$

Alors

$$\|A_1(x, y)\|_{PC} = \sup_{t \in [0, T]} |A_1(x, y)(t)| \leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \left( TM_1 + \sum_{k=1}^P C_{1,k} \right) \quad (3.10)$$

De la même méthode, on a

$$\|A_2(x, y)\|_{PC} = \sup_{t \in [0, T]} |A_2(x, y)(t)| \leq \left| \frac{\alpha_2}{a_2 + b_2} \right| + \left( \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| + 1 \right) \left( TM_2 + \sum_{k=1}^P C_{2,k} \right) \quad (3.11)$$

Donc,  $\forall (x, y) \in D$

$$\begin{aligned}
 \|A(x, y)\|_{PC \times PC} &= \|A_1(x, y)\|_{PC} + \|A_2(x, y)\|_{PC} \\
 &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left| \frac{\alpha_2}{a_2 + b_2} \right| + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \left( TM_1 + \sum_{k=1}^P C_{1,k} \right) \\
 &\quad + \left( \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| + 1 \right) \left( TM_2 + \sum_{k=1}^P C_{2,k} \right)
 \end{aligned}$$

(ii).  $A(D)$  est quasi-équicontinue dans  $J$ , en effet, on a

$\forall \tau_1, \tau_2 \in ]t_{k-1}, t_k] , (x, y) \in D$ , on suppose que  $\tau_2 < \tau_1$

$$\begin{aligned} \|A(x, y)(\tau_1) - A(x, y)(\tau_2)\|_{\mathbb{R}^2} &= \|(A_1(x, y)(\tau_1), A_2(x, y)(\tau_1)) - (A_1(x, y)(\tau_2), A_2(x, y)(\tau_2))\|_{\mathbb{R}^2} \\ &= \|(A_1(x, y)(\tau_1) - A_1(x, y)(\tau_2), A_2(x, y)(\tau_1) - A_2(x, y)(\tau_2))\|_{\mathbb{R}^2} \\ &= |A_1(x, y)(\tau_1) - A_1(x, y)(\tau_2)| + |A_2(x, y)(\tau_1) - A_2(x, y)(\tau_2)| \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |A_1(x, y)(\tau_1) - A_1(x, y)(\tau_2)| &= \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} - \frac{b_1}{a_1 + b_1} \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds \right. \\ &\quad - \frac{b_1}{a_1 + b_1} \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) + \int_0^{\tau_1} f_1(s, x(s), y(s)) ds \\ &\quad + \sum_{t_k < \tau_1} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) - \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \\ &\quad + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \\ &\quad \left. - \int_0^{\tau_2} f_1(s, x(s), y(s)) ds - \sum_{t_k < \tau_2} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right| \\ &= \left| \int_0^{\tau_1} f_1(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^{\tau_2} f_1(s, x(s), y(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_0^{\tau_1} f_1(s, x(s), y(s)) ds + \int_{\tau_2}^0 f_1(s, x(s), y(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{\tau_2}^{\tau_1} f_1(s, x(s), y(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{\tau_2}^{\tau_1} f_1(s, x(s), y(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{\tau_2}^{\tau_1} M_1 ds \right| \\ &= M_1 |\tau_1 - \tau_2| \end{aligned}$$

Donc

$$|A_1(x, y)(\tau_1) - A_1(x, y)(\tau_2)| \leq M_1 |\tau_1 - \tau_2|$$

De même, on montre que

$$|A_2(x, y)(\tau_1) - A_2(x, y)(\tau_2)| \leq M_2 |\tau_1 - \tau_2|$$

Ainsi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 = \frac{\epsilon}{M_1} \text{ tel que, si } |\tau_1 - \tau_2| < \delta_1 \text{ alors } |A_1(x, y)(\tau_1) - A_1(x, y)(\tau_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

De même

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 = \frac{\epsilon}{M_2} \text{ tel que, si } |\tau_1 - \tau_2| < \delta_2 \text{ alors } |A_2(x, y)(\tau_1) - A_2(x, y)(\tau_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \min \left\{ \frac{\epsilon}{M_1}, \frac{\epsilon}{M_2} \right\} \text{ tel que, si } |\tau_1 - \tau_2| < \delta \text{ alors } \|A(x, y)(\tau_1) - A(x, y)(\tau_2)\|_{\mathbb{R}^2} < \epsilon$$

□

**Remarque 3.1.** Notons que la compacité de l'opérateur dans la Proposition 3.1, peut être établit sous les hypothèses plus faibles suivante :

(H\*<sub>1</sub>) Il existe des constantes positives  $l_i, \tilde{l}_i$ , telles que :

Pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2, t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p, i = 1, 2$ , on a

$$|f_i(t, u, v)| \leq l_i |u| + \tilde{l}_i |v|$$

(H\*<sub>2</sub>) Il existe des constantes positives  $r_{i,k}, \tilde{r}_{i,k}$ , telles que :

Pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2, k = 1, \dots, p, i = 1, 2$ , on a

$$|I_{i,k}(u, v)| \leq r_{i,k} |u| + \tilde{r}_{i,k} |v|$$

### 3.3.1 Premier résultat : Existence

**Théorème 3.1.** On suppose que  $f_i : J \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , et  $I_{i,k} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

( $i = 1, 2, k = 1, \dots, p$ ) sont des fonctions continus, sous les hypothèses (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>), le problème (S.I) admet au moins une solution, pourvu que

$$\left(1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( Tl + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,k} \right) + \left(1 + \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| \right) \left( T\tilde{l} + \sum_{k=1}^p \sigma_{2,k} \right) < 1 \quad (3.12)$$

Où

$$l = \max \{l_1, \tilde{l}_1\}, \quad \tilde{l} = \max \{l_2, \tilde{l}_2\}, \quad \sigma_{1,k} = \max \{r_{1,k}, \tilde{r}_{1,k}\}, \quad \sigma_{2,k} = \max \{r_{2,k}, \tilde{r}_{2,k}\}$$

**Preuve.** Rappelons d'abord que d'après le Lemme 3.2, les solutions de (S.I) sont les points fixes de l'opérateur  $A$  défini par  $A(x, y) = (A_1(x, y), A_2(x, y))$  et  $A_1, A_2$  défini par les deux équations (3.8)-(3.9)

La preuve du résultat d'existence formulé dans le Théorème 3.1 est basé sur le théorème Schaefer

Soit

$$(x, y) = \lambda A(x, y) \quad \lambda \in [0, 1] \quad (3.13)$$

On a, pour chaque  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |\lambda A_1(x, y)(t)| &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \int_0^T |\lambda f_1(s, x(s), y(s))| ds + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \sum_{k=1}^p |\lambda I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\ &\quad + \int_0^t |\lambda f_1(s, x(s), y(s))| ds + \sum_{t_k < t} |\lambda I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\ &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \int_0^T |\lambda f_1(s, x(s), y(s))| ds + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \sum_{k=1}^p |\lambda I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\ &\quad + \int_0^T |\lambda f_1(s, x(s), y(s))| ds + \sum_{k=1}^p |\lambda I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \\ &= \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \int_0^T |\lambda f_1(s, x(s), y(s))| ds \\ &\quad + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \sum_{k=1}^p |\lambda I_{1,k}(x(t_k), y(t_k))| \end{aligned}$$

D'après  $(\mathbf{H}_1)$ ,  $(\mathbf{H}_2)$ , on a

$$\begin{aligned} |\lambda A_1(x, y)(t)| &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \int_0^T [l_1 |x(s)| + \tilde{l}_1 |y(s)| + \mu_1] ds \\ &\quad + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \sum_{k=1}^p [r_{1,k} |x(t_k)| + \tilde{r}_{1,k} |y(t_k)| + \nu_{1,k}] \end{aligned}$$

Notons que

$$|x(t)| + |y(t)| \leq \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |y(t)| = \|x\|_{PC} + \|y\|_{PC} = \|(x, y)\|_{PC \times PC}$$

Rappelons que

$$l = \max \{l_1, \tilde{l}_1\}, \quad \tilde{l} = \max \{l_2, \tilde{l}_2\}, \quad \sigma_{1,k} = \max \{r_{1,k}, \tilde{r}_{1,k}\}, \quad \sigma_{2,k} = \max \{r_{2,k}, \tilde{r}_{2,k}\}$$

Alors

$$\begin{aligned} |\lambda A_1(x, y)(t)| &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) T [l \|(x, y)\|_{PC \times PC} + \mu_1] \\ &\quad + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \sum_{k=1}^p [\sigma_{1,k} \|(x, y)\|_{PC \times PC} + \nu_{1,k}] \\ &= \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \|(x, y)\|_{PC \times PC} \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( Tl + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,k} \right) \\ &\quad + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( T\mu_1 + \sum_{k=1}^p \nu_{1,k} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\lambda A_1(x, y)\|_{PC} &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \|(x, y)\|_{PC \times PC} \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( Tl + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,k} \right) \\ &\quad + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( T\mu_1 + \sum_{k=1}^p \nu_{1,k} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

De la même méthode, on montre que

$$\begin{aligned} \|\lambda A_2(x, y)\|_{PC} &\leq \left| \frac{\alpha_2}{a_2 + b_2} \right| + \|(x, y)\|_{PC \times PC} \left( 1 + \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| \right) \left( T\tilde{l} + \sum_{k=1}^p \sigma_{2,k} \right) \\ &\quad + \left( 1 + \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| \right) \left( T\mu_2 + \sum_{k=1}^p \nu_{2,k} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

En conséquence

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_{PC \times PC} &= \|\lambda A(x, y)\|_{PC \times PC} \\ &= \|\lambda A_1(x, y)\|_{PC} + \|\lambda A_2(x, y)\|_{PC} \\ &\leq \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \|(x, y)\|_{PC \times PC} \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( Tl + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,k} \right) \\ &\quad + \left| \frac{\alpha_2}{a_2 + b_2} \right| + \|(x, y)\|_{PC \times PC} \left( 1 + \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| \right) \left( T\tilde{l} + \sum_{k=1}^p \sigma_{2,k} \right) \\ &\quad + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( T\mu_1 + \sum_{k=1}^p \nu_{1,k} \right) + \left( 1 + \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| \right) \left( T\mu_2 + \sum_{k=1}^p \nu_{2,k} \right) \\ &= \|(x, y)\|_{PC \times PC} \left[ \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( Tl + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,k} \right) + \left( 1 + \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| \right) \left( T\tilde{l} + \sum_{k=1}^p \sigma_{2,k} \right) \right] \\ &\quad + \left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left| \frac{\alpha_2}{a_2 + b_2} \right| + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( T\mu_1 + \sum_{k=1}^p \nu_{1,k} \right) + \left( 1 + \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| \right) \left( T\mu_2 + \sum_{k=1}^p \nu_{2,k} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, le réarrangeant des termes dans la formule précédente, donne

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_{PC \times PC} &\leq \\ &\frac{\left| \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1} \right| + \left| \frac{\alpha_2}{a_2 + b_2} \right| + \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( T\mu_1 + \sum_{k=1}^p \nu_{1,k} \right) + \left( 1 + \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| \right) \left( T\mu_2 + \sum_{k=1}^p \nu_{2,k} \right)}{1 - \left( 1 + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \right) \left( Tl + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,k} \right) - \left( 1 + \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| \right) \left( T\tilde{l} + \sum_{k=1}^p \sigma_{2,k} \right)} \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (3.13) sont bornés indépendamment de  $\lambda$ , puisque de plus  $A$  est compact d'après Proposition 3.1, le théorème de Schaefer garantie alors l'existence, au moins d'un point fixe de l'opérateur  $A$ .

□

### 3.3.2 Deuxième résultat : Existence et unicité

**Théorème 3.2.** On suppose que  $f_i : J \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , et  $I_{i,k} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

( $i = 1, 2$ ,  $k = 1, \dots, p$ ) sont des fonctions continues, sous les hypothèses  $(\mathbf{H}_3)$ ,  $(\mathbf{H}_4)$ , le problème (S.I), admet une seul solution pourvu que

$$\left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \left( TN_1 + \sum_{k=1}^P M_{1,k} \right) + \left( \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| + 1 \right) \left( TN_2 + \sum_{k=1}^P M_{2,k} \right) < 1 \quad (3.16)$$

Où

$$N_i = \max \{ \omega_i, \tilde{\omega}_i \} \quad M_{i,k} = \max \{ \eta_{i,k}, \tilde{\eta}_{i,k} \} \quad , \text{ pour } i = 1, 2$$

**Preuve.** Les hypothèses  $(\mathbf{H}_3)$ ,  $(\mathbf{H}_4)$  impliquent que

Pour tout  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2, t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p$ ,  $i = 1, 2$ , on a

$$|f_i(t, x(t), y(t)) - f_i(t, 0, 0)| \leq \omega_i |x(t) - 0| + \tilde{\omega}_i |y(t) - 0| = \omega_i |x(t)| + \tilde{\omega}_i |y(t)|$$

Et pour tout  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2, k = 1, \dots, p$ ,  $i = 1, 2$ , on a

$$|I_{i,k}(x(t_k), y(t_k)) - I_{i,k}(0, 0)| \leq \eta_{i,k} |x(t_k) - 0| + \tilde{\eta}_{i,k} |y(t_k) - 0| = \eta_{i,k} |x(t_k)| + \tilde{\eta}_{i,k} |y(t_k)|$$

Un réarrangement des deux inégalités ci-dessus conduit à  $(\mathbf{H}_1)$  et  $(\mathbf{H}_2)$  avec

$$\mu_i = \sup_{t \in [0, T]} |f_i(t, 0, 0)|, \nu_{i,k} = |I_{i,k}(0, 0)|, l_i = \omega_i, \tilde{l}_i = \tilde{\omega}_i, r_{i,k} = \eta_{i,k}, \tilde{r}_{i,k} = \tilde{\eta}_{i,k}, i = 1, 2$$

Ainsi, puisque (3.12) est valable, toutes les conditions du Théorème 3.1 sont satisfaites.

Donc, le problème (S.I) admet au moins une solution.

Soit maintenant  $(x, y)$  et  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  deux solutions de (S.I). On a pour chaque  $t \in J$

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\|_{PC \times PC} &= \|A(x, y) - A(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{PC \times PC} \\ &= \|(A_1(x, y), A_2(x, y)) - (A_1(\tilde{x}, \tilde{y}), A_2(\tilde{x}, \tilde{y}))\|_{PC \times PC} \\ &= \|(A_1(x, y) - A_1(\tilde{x}, \tilde{y}), A_2(x, y) - A_2(\tilde{x}, \tilde{y}))\|_{PC \times PC} \\ &= \|A_1(x, y) - A_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{PC} + \|A_2(x, y) - A_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{PC} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |A_1(x, y)(t) - A_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)| &= \left| -\frac{b_1}{a_1 + b_1} \int_0^T f_1(s, x(s), y(s)) ds - \frac{b_1}{a_1 + b_1} \sum_{k=1}^P I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s)) ds + \sum_{t_k < t} I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \int_0^T f_1(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) ds + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \sum_{k=1}^P I_{1,k}(\tilde{x}(t_k), \tilde{y}(t_k)) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| - \int_0^t f_1(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) ds - \sum_{t_k < t} I_{1,k}(\tilde{x}(t_k), \tilde{y}(t_k)) \right| \\
 &= \left| - \frac{b_1}{a_1 + b_1} \int_0^T [f_1(s, x(s), y(s)) - f_1(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))] ds \right. \\
 & \quad - \frac{b_1}{a_1 + b_1} \sum_{k=1}^P [I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) - I_{1,k}(\tilde{x}(t_k), \tilde{y}(t_k))] \\
 & \quad + \int_0^t [f_1(s, x(s), y(s)) - f_1(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))] ds \\
 & \quad \left. + \sum_{t_k < t} [I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) - I_{1,k}(\tilde{x}(t_k), \tilde{y}(t_k))] \right|
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 |A_1(x, y)(t) - A_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)| &\leq \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \int_0^T |f_1(s, x(s), y(s)) - f_1(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds \\
 & \quad + \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) - I_{1,k}(\tilde{x}(t_k), \tilde{y}(t_k))| \\
 & \quad + \int_0^T |f_1(s, x(s), y(s)) - f_1(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds \\
 & \quad + \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) - I_{1,k}(\tilde{x}(t_k), \tilde{y}(t_k))| \\
 &= \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \int_0^T |f_1(s, x(s), y(s)) - f_1(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds \\
 & \quad + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \sum_{k=1}^P |I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) - I_{1,k}(\tilde{x}(t_k), \tilde{y}(t_k))|
 \end{aligned}$$

D'après  $(\mathbf{H}_3)$  et  $(\mathbf{H}_4)$ , on a

$$\begin{aligned}
 |A_1(x, y)(t) - A_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)| &\leq \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \int_0^T (\omega_1 |x(s) - \tilde{x}(s)| + \tilde{\omega}_1 |y(s) - \tilde{y}(s)|) ds \\
 & \quad + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \sum_{k=1}^P (\eta_{1,k} |x(t_k) - \tilde{x}(t_k)| + \tilde{\eta}_{1,k} |y(t_k) - \tilde{y}(t_k)|)
 \end{aligned}$$

Notons que  $\forall t \in J$ , on a

$$\begin{aligned}
 |x(t) - \tilde{x}(t)| + |y(t) - \tilde{y}(t)| &\leq \sup_{t \in [0, T]} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |y(t) - \tilde{y}(t)| = \|x - \tilde{x}\|_{PC} + \|y - \tilde{y}\|_{PC} \\
 &= \|(x - \tilde{x}, y - \tilde{y})\|_{PC \times PC} \\
 &= \|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\|_{PC \times PC}
 \end{aligned}$$

Rappelons que

$$N_i = \max \{ \omega_i, \tilde{\omega}_i \} \quad M_{i,k} = \max \{ \eta_{i,k}, \tilde{\eta}_{i,k} \} \quad , \text{ pour } i = 1, 2$$

Donc

$$\begin{aligned} |A_1(x, y)(t) - A_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)| &\leq \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) TN_1 \| (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \|_{PC \times PC} \\ &\quad + \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \sum_{k=1}^P M_{1,k} \| (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \|_{PC \times PC} \\ &= \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \| (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \|_{PC \times PC} \left( TN_1 + \sum_{k=1}^P M_{1,k} \right) \end{aligned}$$

En conséquence

$$\|A_1(x, y) - A_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{PC} \leq \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \| (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \|_{PC \times PC} \left( TN_1 + \sum_{k=1}^P M_{1,k} \right) \quad (3.17)$$

De la même manière, on a

$$\|A_2(x, y) - A_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{PC} \leq \left( \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| + 1 \right) \| (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \|_{PC \times PC} \left( TN_2 + \sum_{k=1}^P M_{2,k} \right) \quad (3.18)$$

Alors

$$\begin{aligned} &\| (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \|_{PC \times PC} \\ &\leq \left[ \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \left( TN_1 + \sum_{k=1}^P M_{1,k} \right) + \left( \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| + 1 \right) \left( TN_2 + \sum_{k=1}^P M_{2,k} \right) \right] \| (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \|_{PC \times PC} \end{aligned}$$

Ainsi, le réarrangeant des termes dans la formule précédente, donne

$$\begin{aligned} &\left[ 1 - \left( \left| \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right| + 1 \right) \left( TN_1 + \sum_{k=1}^P M_{1,k} \right) - \left( \left| \frac{b_2}{a_2 + b_2} \right| + 1 \right) \left( TN_2 + \sum_{k=1}^P M_{2,k} \right) \right] \| (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \|_{PC \times PC} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la condition (3.16) assure que  $\| (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \|_{PC \times PC} = 0$ , ce qui implique  $(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ . Alors le problème (S.I) admet une seule solution .

□

### 3.4 Application à une classe d'équations différentielles impulsives du deuxième ordre

A titre d'application, nous allons dans cette section, employer l'étude précédente pour tirer des résultats d'existence pour une classe d'équations différentielles impulsives d'ordre 2 avec condition aux limites anti-périodique.

On considère l'équation différentielle impulsive du deuxième ordre suivante

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0 & t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p \\ \Delta u(t_k) \doteq u(t_k^+) - u(t_k^-) = I_k(u(t_k)), & k = 1, \dots, p \\ \Delta u'(t_k) \doteq u'(t_k^+) - u'(t_k^-) = J_k(u(t_k)), & k = 1, \dots, p \\ u(0) + u(T) = 0 \\ u'(0) + u'(T) = 0 \end{cases}$$

Dans l'étude du problème  $(\mathcal{P})$ , nous aurons besoin de supposer quelques hypothèses utiles pour obtenir les résultats visés.

- **Hypothèses**

(H<sub>5</sub>) Il existe des constantes positives  $L, R$ , telles que :

Pour tout  $v \in \mathbb{R}, t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p$ , on a

$$|f(t, v)| \leq L|v| + R$$

(H<sub>6</sub>) Il existe des constantes positives  $\beta_{1,k}, \beta_{2,k}, \gamma_{1,k}, \gamma_{2,k}$ , telles que :

Pour tout  $v \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, p$ , on a

$$|I_k(v)| \leq \beta_{1,k}|v| + \gamma_{1,k}$$

$$|J_k(v)| \leq \beta_{2,k}|v| + \gamma_{2,k}$$

(H<sub>7</sub>) Il existe constante positive  $m$ , telle que :

Pour tout  $u, v \in \mathbb{R}, t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p$ , on a

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq m|u - v|$$

(H<sub>8</sub>) Il existe des constantes positives  $\rho_{1,k}, \rho_{2,k}$ , telles que :

Pour tout  $u, v \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, p$ , on a

$$|I_k(u) - I_k(v)| \leq \rho_{1,k}|u - v|$$

$$|J_k(u) - J_k(v)| \leq \rho_{2,k}|u - v|$$

Nous commençons par réduire le problème  $(\mathcal{P})$  à un système de deux équations différentielles impulsives d'ordre 1

Pour cela, posons :

$$\begin{cases} u = x \\ u' + u = y \end{cases}$$

Ainsi,  $(\mathcal{P})$  est équivalent à

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \begin{aligned} x'(t) &= y(t) - x(t) & , t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p \\ y'(t) &= y(t) - F(t, x(t)) & , t \in J, t \neq t_k, k = 1, \dots, p \end{aligned} \\ \begin{aligned} \Delta x(t_k) &\doteq x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k)) & , k = 1, \dots, p \\ \Delta y(t_k) &\doteq y(t_k^+) - y(t_k^-) = H_k(x(t_k)) & , k = 1, \dots, p \end{aligned} \\ \begin{aligned} x(0) + x(T) &= 0 \\ y(0) + y(T) &= 0 \end{aligned} \end{cases}$$

avec  $F(t, x(t)) = f(t, x(t)) + x(t)$  et  $H_k(x(t_k)) \doteq J_k(x(t_k)) + I_k(x(t_k))$ ,  $k = 1, \dots, p$

Le premier résultat d'existence, est formulé dans le théorème suivant.

**Théorème 3.3.** *On suppose que  $f, I_k, J_k$ ,  $(k = 1, \dots, p)$  sont des fonctions continues, sous les hypothèses  $(\mathbf{H}_5)$ ,  $(\mathbf{H}_6)$ , le problème  $(\mathcal{P})$  admet au moins une solution, pourvu que*

$$3 \left( T + \sum_{k=1}^p \beta_{1,k} \right) + \frac{3}{2} \left( TL + \sum_{k=1}^p \beta_{2,k} \right) < 1 \quad (3.19)$$

**Preuve.** La preuve de ce théorème est basé sur le Théorème 3.1

En effet, avec

$$f_1(t, x(t), y(t)) = y(t) - x(t)$$

$$f_2(t, x(t), y(t)) = y(t) - F(t, x(t))$$

et

$$I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) = I_k(x(t_k))$$

$$I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)) = H_k(x(t_k))$$

Puisque  $f, I_k, J_k$ , sont continues, il est clair que  $f_i, I_{i,k}, i = 1, 2, k = 1, \dots, p$ , sont continues

De plus, on vérifie sans peine que les hypothèses  $(\mathbf{H}_5)$ - $(\mathbf{H}_6)$  impliquent  $(\mathbf{H}_1)$ - $(\mathbf{H}_2)$  avec

$l_1 = \tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$  et  $\tilde{r}_{1,k} = \tilde{r}_{2,k} = \mu_1 = 0$ ,  $l_2 = L + 1$ ,  $\mu_2 = R$ ,  $r_{1,k} = \beta_{1,k}$ ,  $\nu_{1,k} = \gamma_{1,k}$ ,  $r_{2,k} = \beta_{1,k} + \beta_{2,k}$ ,  $\nu_{2,k} = \gamma_{1,k} + \gamma_{2,k}$ . De plus, la condition (3.19), conduit à (3.12).

En conclusion, toutes les conditions du Théorème 3.1 sont remplit. Par suite  $(\mathcal{S})$  admet au moins une solution, qui n'est autre qu'une solution de  $(\mathcal{P})$

□

Le théorème suivant fournit un résultat d'existence et d'unicité du problème  $(\mathcal{P})$ .

**Théorème 3.4.** *On suppose que  $f, I_k, J_k$ ,  $(k = 1, \dots, p)$  sont des fonctions continues, sous les hypothèses  $(\mathbf{H}_7)$ ,  $(\mathbf{H}_8)$ , le problème  $(\mathcal{P})$  admet une seule solution, pourvu que*

$$3 \left( T + \sum_{k=1}^p \rho_{1,k} \right) + \frac{3}{2} \left( Tm + \sum_{k=1}^p \rho_{2,k} \right) < 1 \quad (3.20)$$

**Preuve.** La preuve de ce théorème est basé sur le Théorème 3.2

En effet, avec

$$f_1(t, x(t), y(t)) = y(t) - x(t)$$

$$f_2(t, x(t), y(t)) = y(t) - F(t, x(t))$$

et

$$I_{1,k}(x(t_k), y(t_k)) = I_k(x(t_k))$$

$$I_{2,k}(x(t_k), y(t_k)) = H_k(x(t_k))$$

Puisque  $f, I_k, J_k$ , sont continues, il est clair que  $f_i, I_{i,k}, i = 1, 2, k = 1, \dots, p$ , sont continues

De plus, on vérifie sans peine que les hypothèses  $(\mathbf{H}_7)$ - $(\mathbf{H}_8)$  impliquent  $(\mathbf{H}_3)$ - $(\mathbf{H}_4)$  avec  $w_1 = \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 1$ ,  $\tilde{\eta}_{1,k} = \tilde{\eta}_{2,k} = 0$ ,  $w_2 = m + 1$ ,  $\eta_{1,k} = \rho_{1,k}$ ,  $\eta_{2,k} = \rho_{1,k} + \rho_{2,k}$ . De plus, la condition (3.20), conduit à (3.16).

En conclusion, toutes les conditions du Théorème 3.2 sont remplit. Par suite  $(\mathcal{S})$  admet une seule solution, qui n'est autre qu'une solution de  $(\mathcal{P})$

□

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous abordons la question d'existence des solutions pour les équations différentielles impulsives, soumise à différent types de conditions aux limites. L'approche employé dans ce travail est basé sur la théorie du point fixe.

Quelques résultats d'existence pour les équations différentielles impulsives du premier ordre avec conditions aux limites périodiques, et qui sont connus dans la littérature, sont exposés avec plus de détail dans la première partie de ce travail.

Dans une deuxième partie, nous explicitons d'autres résultats qui existent aussi dans le cas vectoriel, après les avoir adapter à un système de deux équations différentielles impulsives avec conditions aux limites non-périodiques. A titre d'application, nous tirons des résultats d'existence pour une classe d'équations différentielles impulsives du deuxième ordre à valeurs aux limites anti-périodiques.

# Références

- [1] A.V.Roup, D.S.Bernstein, S.G.Nersesov, W.M.Haddad and V.Chellaboina (2003) Limit cycle analysis of the verge and foliot clock escapement using impulsive differential equations and Poincaré maps , International Journal of Control, 76 :17, 1685-1698, DOI
- [2] A.M.Samoilenko, N.A.Perestyuk, Impulsive differential equations, Series A Vol.14, (Translated from the Russian by Yury Chapovsky ), 1995 by World Scientific Publishing Co. Pte. Lid, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
- [3] D.O'Regan, Y.Je Cho, Yu-Qing Chen, Series in Mathematical Analysis and Applications, Volume 10 : Topological Degree Theory and Applications, 2006 by Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York.
- [4] D.D.bainov, V.C.covachev, Impulsive differential equations with A small Parameter, Series on Advances in Mathematical for Applied Sciences - Vol.24, World scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1994).
- [5] D.Bainov, P.Simeonov, Impulsive differential equations periodic solutions and applications, New york 1993 .
- [6] D. R. Smart, Fixed point theorems, Cambridge University Press, 1974.
- [7] H. Brezis, Analyse fonctionnelle Théorie et applications, Masson, Paris 1983.
- [8] J.J.Nieto, C.C.Tisdell, Existence and uniqueness of solutions to first-order systems of nonlinear impulsive boundary-value problems with sub-, super-linear or linear growth, Elec.J.Di.Equ, Vol.2007, No.105, pp.1-14.
- [9] J.Li, J.J.Nieto, J.Shen, Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations , J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) 226 – 236
- [10] J.J.Nieto, Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order , journal of mathematical analysis and applications 205, 423 – 433(1997)
- [11] J.Dieudonné, Foundations of modern analysis. Number 10-I in Pure and Applied Mathematics. New York : Academic Press. Volume 1 of Treatise on Analysis (1969).

- [12] L. Schwartz, Analyse ,Topologie générale et analyse fonctionnelle ,Editions Hermann 1970(Nouveau tirage, corrigé,1993)
- [13] N.El Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés, Dunod, 2011.
- [14] P.J.Collins, Differential and Integral Equations, Published in the United States by Oxford University Press Inc, New York , First published (2006).
- [15] T.Bühler, D.A.Salamon, Functional analysis, publication year 2018, Printed in the United States of America.
- [16] V.Lakshmikantham, D.D.Bainov, P.S.Simeonov, Theory of impulsive differential equations, Series in Modern Applied Mathematics Vol.6, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong 1989 .

## Résumé

Dans ce mémoire, nous traitons la question d'existence des solutions pour les équations différentielles impulsives : (EDI), soumise à différents types de conditions aux limites. L'approche employée dans ce travail est basée sur la théorie du point fixe.

La première partie de ce travail est une lecture détaillée de quelques résultats d'existence, connus dans la littérature mathématiques, consacrés aux (EDI) du premier ordre à valeurs aux limites périodiques. Dans une deuxième partie, nous présentons d'autres résultats d'existence, aussi existant, mais sous une forme différente et avec une légère généralisation. Ceci est en explicitant des résultats obtenus pour des (EDI) à valeurs aux limites non-périodiques et avec une seule impulsion dans le cas vectoriel, après les avoir adaptés à un système de deux (EDI) avec plusieurs impulsions. Cette adaptation, et à titre d'application, nous a permis de tirer des résultats d'existence pour une classe d'(EDI) du deuxième ordre à valeurs aux limites anti-périodiques.

**Mots clés :** Équations différentielles impulsives, conditions aux limites, existence de solution, point fixe.

## Abstract

In this memory, we deal with the question of existence of solutions for impulsive differential equations : (IDE), subject to different types of boundary conditions. The approach used in this work is based on fixed point theory.

The first part of this work is a detailed reading of some results of existence, known in the mathematical literature, devoted to the (IDE) of the first order with periodic boundary conditions. In a second part, we present other results of existence, also existing, but in a different form and with a slight generalization. This, is by explaining results obtained for (IDE) with a single impulse and non-periodic boundary conditions in the vector case, after having adapted them to a system of two (IDE) with several impulses. This adaptation, and as an application, allowed us to derive existence results for a class of second-order (IDE) with anti-periodic boundary conditions.

**Keywords :** Impulsive differential equations, boundary conditions, existence of solution, fixed point.

## ملخص

في هذه الأطروحة ، نتعامل مع مسألة وجود حلول للمعادلات التفاضلية الاندفاعية: (م.ت.إ.)، الخاضعة لأنواع مختلفة من الشروط الحدية. تعتمد الطريقة المستخدمة في هذا العمل على نظرية النقطة الثابتة.

الجزء الأول من هذا العمل هو قراءة مفصلة لبعض نتائج الوجود ، والمعروفة في الأدب الرياضي ، والمكرسة ل (م.ت.إ.) من الدرجة الأولى مع قيم حدية دورية . في الجزء الثاني ، نقدم نتائج أخرى للوجود، موجودة أيضاً، ولكن في شكل مختلف ومع تعميم طفيف. وذلك عن طريق شرح بعض النتائج التي تم الحصول عليها ل (م.ت.إ.) بنبض واحد مع قيم حدية غير دورية في حالة المتجه ، وذلك بعد تكييفها مع جملة معادلتين (م.ت.إ.) بعدة نبضات. هذا التكييف وكتطبيق، مكنا من استنباط نتائج وجود لفئة من (م.ت.إ.) من الدرجة الثانية مع قيم حدية ضد دورية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الاندفاعية ، شروط حدية ، وجود الحل ، النقطة الثابتة.