



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Estimations de certains fonctions sur
des nombres premiers sans l'hypothèse
de Riemann.**

Présenté par: Sadoun.Otaiba et Mokhtari. Manal

Sous la supervision de: Chaia Ahmed

Soutenue devant le jury:

M: YOUNBAI . Ahmed el amine	MAA	Université d'El-Oued	Président
M: CHAIA.Ahmed	.MC(B)	Université d'El-Oued	Rapporteur
M: LETOUFA.Yassine	MAA.	Université d'El-Oued	Examineur

Année universitaire 2023 – 2024

Remerciement



Nous tenons tout d'abord à remercier **Allah** le tout puissant et miséricordieux de nous la avoir la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

nous voudrions dans un premier temps remercier, notre directeur de mémoire Mr .CHAIA Ahmed , maître assistant d'Algèbre à l'université Hamma Lakhdar d'Eloued , pour sa patience, sa disponibilité et surtout nous le remercions de nous avoir encadré, orienté, aidé et conseillé durant notre préparation de ce mémoire Nos remerciements s'adresse également aux membres de jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et leurs critiques.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de ce travail qui nous ont aidées lors de la rédaction de ce mémoire.

Nous désirons aussi remercier toute l'équipe pédagogique de l'université d'Eloued , qui nous ont fournis les outils nécessaires à la réussite de nos études universitaires, à tous ceux qui nous ont appris une leçon tout au long de notre parcours académique.

À tous les étudiants et les amateurs de mathématiques.

Otaiba & Manal



Dédicace



Je dédie ce modeste travail de fin d'étude en vue d'obtention du diplôme de Master :

A ma famille , aux personnes les plus chers à mon coeur :

ma mère et mon père ,a mes soeurs et mes frères .

A tous ceux qui m 'ont aidé de présou de loins pour réaliserce travail .

Je consacre ce modeste travail mémoire à tous les étudiants de la faculté de sciences exactes, département de mathématiques qui aiment ce domaine fascinant .

Otaiba



Dédicace



D'abord, louange à Allah pour sa grâce et sa générosité.

Je dédie cet humble ouvrage à l'âme de ma chère mère pourtant elle nous quittés , ses encouragements à continuer mes études et de faire résonnent encore à mes oreilles.

Ma mère, qui m'aconseillé depuis que j'ai obtenu mon baccalauréat, de ne pas arrêter la recherche scientifique.

Que Allah la reçoive dans son vaste paradis .

À moncher père, qui a tantdonné à notre éducation. Que Allah lui accorde la santé et une longue vie. Au lien fort d'espérancedans la vie, mes frères : Yassin, Abdul Rahman, Buthaina, Abdul Rahim.

Au jeune nouveau venu, Amora. Je dédiecet humble travail à voustous.

Manal



Résumé

Certains calculs effectués sur l'hypothèse de Riemann et en particulier, la vérification que les zéros appartiennent à la ligne critique et l'extension de la région sans zéro sont utiles pour obtenir de meilleures estimations efficaces des fonctions classiques de la théorie des nombres qui sont étroitement liées aux zéros comme $\psi(x)$, $\vartheta(x)$, $\pi(x)$ ou le k – ième nombre premier p_k .

Abstract

Some computations made about the Riemann Hypothesis and in particular, the verification that zeroes belong on the critical line and the extension of zero-free region are useful to get better effective estimates of number theory classical functions which are closely linked to zeroes like $\psi(x)$, $\vartheta(x)$, $\pi(x)$ or the k^{th} prime number p_k .

Table des matières

Notations	ii
Introduction	iv
1 <i>Rappels de quelques définitions et résultats .</i>	7
1.1 Fonction arithmétiques	8
1.2 Formules de sommation d'Abel et d'Euler	8
1.3 Les fonctions $\vartheta(x)$ et $\pi(x)$	9
1.4 Le théorème des nombres premiers.	9
1.5 La fonction zêta de Riemann	10
1.6 L'hypothèse de Riemann	10
2 <i>Estimation des fonctions $\psi(x)$, $\vartheta(x)$ et p_k</i>	11
2.1 Introduction	12
2.2 Sur la différence $\psi(x) - \vartheta(x)$	13
2.2.1 Des bornes inférieures.	13
2.2.2 Des bornes supérieures.	14
2.3 Limites utiles	15
2.4 Sur la différence $\vartheta(x) - x$	15
2.5 Quelques applications sur de théorie des nombres.	16
2.5.1 Estimations de $\vartheta(p_k)$	16
2.5.2 Le plus petit intervalle contenant des nombres premiers.	22
3 <i>Estimation de $\pi(x)$</i>	23
3.1 Introduction	24
3.2 Comportement asymptotique de $\pi(x)$	25
3.3 Estimation de $\pi(x)$	29
Annexe	31
Conclusion	39
Bibliographie	40

Notations

Dans ce mémoire nous utiliserons les notations suivantes :

- k un entier positif,
- p_k le k -ième nombre premier tel que $p_1 = 2$, $p_2 = 3$
- P l'ensemble des nombres premiers
- $\ln$ désigne le logarithme Népérien.
- $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x .
- $\vartheta(x)$ désigne la fonction de Tchebychef on a : $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p)$ pour $x > 0$
- $\psi(x)$ désigne la fonction de Tchebychef on a : $\psi(x) = \sum_{p^\alpha \leq x} \ln(p)$ pour $x > 0$
- $\pi(x)$ désigne la fonction qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x , on a

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \text{ pour } x > 0$$

- $s = \sigma + it$ désigne un nombre complexe
- $\Re(s)$: désigne la partie réelle de s tel que : $\Re(s) = \sigma$.
- $\Im(s)$ désigne la partie imaginaire de s tel que $\Im(s) = t$.
- $\zeta(s)$ désigne la fonction zêta de Riemann on a :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ pour } \Re(s) > 1 \text{ Pour deux fonctions réelles } f \text{ et } g,$$

- $f \sim g$ signifie que f est asymptotiquement équivalente à g , autrement dit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- $f(x) = o(g(x))$ si et seulement si, pour tout nombre réel strictement positif ϵ , il existe un nombre réel x_0 , tel que l'on ait,

$$\forall x \geq x_0, \quad |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|.$$

- $f(x) = O(g(x))$ Si et seulement si il existe deux constantes x_0 et $C > 0$, tel que on ait

$$\forall x \geq x_0, \quad |f(x)| \leq C |g(x)|$$

- $f(x) \asymp g(x)$ si il existe $x_0 > 0$, et $a > 0$ et $b > 0$ tel que :

$$\forall x \geq x_0, af(x) \leq g(x) \leq bf(x).$$

- Li désigne le logarithme intégral, on a :

$$Li(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + Li(2) \text{ où } Li(2) = 1.045\dots,$$

Introduction

La théorie des nombres est une branche des mathématiques pures qui traite des propriétés des nombres en général et des entiers en particulier, et a également une histoire très longue et variée dans laquelle certains des plus grands mathématiciens de tous les temps, tels qu'Euclide, Euler et Gauss, ont apporté des contributions significatives à cette discipline.

La théorie moderne des nombres est divisée en sous-sujets tels que la théorie des nombres premiers, la théorie algébrique des nombres, la théorie analytique des nombres, la théorie géométrique des nombres, la théorie probabiliste des nombres, et de nos jours la théorie des nombres est considérée pour ses applications en cryptographie et en échange sécurisé d'informations.

Un changement significatif dans ses applications s'est produit au milieu des années 1970, et avec des progrès technologiques importants, l'avènement des ordinateurs numériques et des communications numériques a révélé que la théorie des nombres pouvait apporter des réponses inattendues aux problèmes du monde réel, en même temps que les améliorations de la technologie informatique permettaient de faire des progrès significatifs dans l'analyse de grands nombres, la détermination des nombres premiers, le test des conjectures, la résolution de problèmes numériques considérés comme insolubles, et ce que nous avons mentionné plus tôt est ce qui nous a incités à présenter une étude sur certaines fonctions importantes de la théorie des nombres, telles que les fonctions de Tchebychef $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$ et la fonction qui compte les nombres premiers $\pi(x)$ et p_k . Qui détermine le nombre initial de rang k , ce qui rend ces fonctions importantes, c'est qu'elles étudient les propriétés des nombres premiers.

Soit $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$ des fonctions de Tchebychef définie pour $x > 0$; par $\psi(x) =$

$$\sum_{\substack{p, \alpha \\ p^\alpha \leq x}} \ln x$$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p, \text{ et } \pi(x) \text{ la fonction qui compte le nombre de nombres premiers}$$

inférieurs ou égaux à x , on désigne par p_k le k - ième nombre premier.

Dans ce travail; nous étudions des minoration et des majorations plus précises pour les fonctions de Tchebychef $\psi(x)$, $\vartheta(x)$.

Il est utile d'avoir des encadrements explicites dans le théorème des nombres premiers. Rosser

(cf [18, 19]) a développé une méthode analytique qui combine une vérification

numérique de l'hypothèse de Riemann avec une région sans zéro et des estimations explicites de certaines fonctions théoriques des nombres.

Le théorème des nombres premiers donne les estimations :

$$\psi(x) = x + O(x) \quad x \mapsto +\infty$$

Cette formule équivaut à :

pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x_0 = x_0(\epsilon)$ tel que

$$|\psi(x) - x| < \epsilon x \quad \text{pour} \quad x \geq x_0$$

ou

$$|\vartheta(x) - x| < \epsilon x \quad \text{pour} \quad x \geq x_0.$$

Sous l'hypothèse de Riemann (RH), Schoenfeld (cf [23]) donne des résultats intéressants et les résultats ne sont pas aussi précise et dépendent de la connaissance de la fonction Zêta Riemann .

Ce mémoire est basé sur certains résultats connus et les travaux les plus importants sur les résultats efficaces ont été montrés par Rosser et Schoenfeld (cf [20, 21, 23]), Robin (cf [16]) & Massias (cf [12]) et Costa Pereira (cf [13]). Les preuves des estimations de $\psi(x)$ dans (cf [21]) sont basées sur la vérification de l'hypothèse de Riemann à une hauteur donnée et une région explicite sans zéro pour $\zeta(s)$ dont la forme est essentiellement que le classique de De La Vallée Poussin, Rosser & Schoenfeld ont montré que les 3 502 500 premiers zéros de $\zeta(s)$ sont sur la bande critique. Van De Lune et al [cf(11)] ont montré que les premiers 1 500 000 000 zéros sont sur la bande critique Récemment, Wedeniwski(cf [24]) puis Gourdon(cf [19]) parviennent à calculer les zéros de manière parallèle et prouvent que l'hypothèse de Riemann est vraie au moins pour les 10^{13} premiers zéros non triviaux,

Dans le premier chapitre de ce mémoire , nous avons rappelé quelques notions de la théorie des nombres premiers : les définitions des fonctions $\pi(x)$, $\vartheta(x)$, la définition de la fonction Zêta ζ de Riemann ainsi que les formules de sommations d'Abel et d'Euler .

Nous avons fait dans le deuxième chapitre sur l'explication de la preuve de certaines théories de fonctions de Tchebychef qui prouvées par Pierre Dusart parmi eux :

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - x &< \frac{1}{36260}x \quad \text{pour} \quad x > 0, \\ |\vartheta(x) - x| &\leq 0.2 \frac{x}{\ln^2 x} \quad \text{pour} \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Nous appliquons ces résultats sur le k – ième nombre premier p_k , et $\vartheta(p_k)$.

Dans le troisième chapitre, nous sommes consacré sur la comportement asymptotique de $\pi(x)$ sous divers hypothèses sur le p_k et $\vartheta(x)$. et nous présentons et détaillons les démonstrations des résultats aux encadrements de $\pi(x)$ dû a P.Dusart

$$\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \leq_{x \geq 599} \pi(x) \leq_{x > 1} \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1.2762}{\ln x}\right).$$

Avec quelques précisions sur ces résultats .

Enfin nous terminons cette étude par conclusion et un annexe représenté par des tableaux que nous avons utilisées pour prouver les théories présentées par les calculs numériques .



le premier Chapitre

❧ *Rappels de quelques définitions et résultats* . ❧



1.1 Fonction arithmétiques

Définitions 1.1.1 : Une fonction arithmétique est une application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définitions 1.1.2 On dit qu'une fonction arithmétique f est multiplicative, si pour tous m et n entiers positifs premiers entre eux on a,

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n) \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

On dit qu'elle est complètement multiplicative si pour tous m et n entiers positifs on a,

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n) \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

1.2 Formules de sommation d'Abel et d'Euler

La formule de sommation d'Abel est le procédé consistant à transformer une somme finie de produits de deux termes en faisant apparaître les sommes partielles de l'un des deux facteurs de ce produit.

Théorème 1.2.1 (Identité d'Abel)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < y < x$, soit $\alpha(n)$ une fonction arithmétique et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ on pose,

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n \leq t} \alpha(n), t \geq 0. (\mathcal{A}(t) = 0, \text{ pour } t < 1)$$

alors ,

$$\sum_{y \leq n \leq x} \alpha(n) f(n) = \mathcal{A}(x) f(x) - \mathcal{A}(y) f(y) - \int_y^x \mathcal{A}(t) f'(t) dt$$

Démonstration (cf [31])

Corollaire 1.2.1 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $0 < y < x$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y, x]$ alors,

$$\sum_{y \leq n \leq x} f(n) = [x] f(x) - [y] f(y) - \int_y^x [t] f'(t) dt \quad (1.1)$$

Démonstration

En prenant $\alpha(n) = 1$ dans le théorème 1.2.1 on obtien

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n \leq t} 1 = \sum_{n \leq [t]} 1 = [t]$$

l'identité d'Abel implique alors la formule (1.1).

Théorème 1.2.2 (Formule de sommation d'Euler) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $0 < y < x$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y, x]$ alors,

$$\sum_{y \leq n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x (t - [t]) f'(t) dt + ([y] - y) f(y) - ([x] - x) f(x)$$

preuve : (cf [25])

1.3 Les fonctions $\vartheta(x)$ et $\pi(x)$

Soit x un nombre réel strictement positif et p un nombre premier

Définition 1.3.1 La fonction de Tchebyche $\vartheta(x)$ est définie pour $x > 0$, par :

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$$

Définition 1.3.2 La fonction $\pi(x)$ compte le nombre de nombres premiers plus petits que x , autrement dit on a :

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

1.4 Le théorème des nombres premiers.

En 1896, Hadamard et de la Vallée Poussin, ont démontré pour la première fois indépendamment l'un de l'autre le théorème :

Théorème 1.4.1 Lorsque x tend vers l'infini on a :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Preuve. (cf. [26] et [27])

Théorème 1.4.2 Les assertions suivantes sont équivalentes,

- (i) $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$
- (ii) $\vartheta(x) \sim x$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$
- (iii) $p_k \sim k \ln k$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$

Ce théorème est une conséquence du théorème suivant :

Théorème 1.4.3 pour $x \geq 2$ on a,

$$(i) \quad \vartheta(x) = \pi(x) \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \quad (1.2)$$

$$(ii) \quad \pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt \quad (1.3)$$

Démonstration. (cf. [28])

Théorème 1.4.4

- (i) $\vartheta(p_k) \geq k \ln k$ pour tout $k \geq 13$, (cf. [20])
- (ii) $\vartheta(p_k) \geq k(\ln k + \ln_2 k - 1)$ pour tout $k \geq 5106$, (cf. [12])
- (iii) $\vartheta(p_k) \geq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - c}{\ln k})$, $c = 2.145$ pour tout $k \geq 3$, (cf. [12])
- (v) $\vartheta(p_k) \leq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k})$ pour tout $k \geq 198$, (cf. [20])
- (iv) $\vartheta(p_k) \leq k(\ln k + \ln_2 k)$ pour tout $k \geq 3$. (cf. [12])

1.5 La fonction zêta de Riemann

Soit $s = \sigma + it$ une variable complexe telle que $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1$, alors la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},$$

est absolument convergente. En effet, la valeur absolue de son terme général est égal à,

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \left| \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}} \right| = \left| \frac{1}{n^\sigma} \right|$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente pour $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$

Définition 1.5.1 On appelle fonction zêta de Riemann et on note $\zeta(s)$ la somme de la série convergente,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1$$

1.6 L'hypothèse de Riemann

L'hypothèse de Riemann est une conjecture formulée en 1859, par le Mathématicien Bernhard Riemann. Il a conjecturé que les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

Cette conjecture possède des conséquences importantes en théorie analytique des nombres. Plusieurs résultats dû à Schoenfeld (*cf*[23]) sont démontrés sous cette hypothèse parmi ces résultats nous citons le :

Théorème 1.6.1 . Sous l'hypothèse de Riemann on a,

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \ln x, \quad \text{pour } x \geq 2657$$

Théorème 1.6.2 . Sous l'hypothèse de Riemann on a,

$$|\vartheta(x) - x| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} (\ln x - 2) \ln x \quad \text{pour } x \geq 23.10^8$$

$$|\vartheta(x) - x| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \ln^2 x \quad \text{pour } x \geq 599$$

Plusieurs autres résultats ont été démontrés sous l'hypothèse de Riemann.

Théorème 1.6.3 .

pour $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$



le deuxième Chapitre

∞ *Estimation des fonctions $\psi(x)$, $\vartheta(x)$ et p_k* ∞



2.1 Introduction

Soient k un entier positif, x un nombre réel positif et p_k le k — ième nombre premier. Soient $\vartheta(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions de Tchebychef, $\pi(x)$ la fonction qui compte le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x .

Dans le chapitre 2, nous avons étudié la différence $\psi(x) - \vartheta(x)$ pour obtenir l'estimation de la différence $\vartheta(x) - x$ en utilisant la définition de $\psi(x)$ et quelques des inégalité classique sur $\pi(x)$ ont été démontré par J . B . Rosser et L . Schoenfeld dans [9] . Dans ce qui suit nous intéressons aux encadrements explicites de $\vartheta(p_k)$ lorsque p_k est la suite des nombres premiers grâce aux travaux des G . Robin (cf [4]) et P. Dusart (cf [1]) . Nous reprenons ces résultats et nous détaillons leurs démonstrations. Dans (cf [1]) P. Dusart ont prouvé que.

2.2 Sur la différence $\psi(x) - \vartheta(x)$

Comme la sommation $\vartheta(2^-) = 0$, (2.1) se termine par

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \rfloor} \vartheta(x^{\frac{1}{k}}) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \rfloor} \vartheta(x^{\frac{1}{k}})$$

2.2.1 Des bornes inférieures.

Théorème 2.1.1. nous avons ,

$$\begin{aligned} x^{1/2} &< \psi(x) - \vartheta(x) \quad \text{pour} \quad 121 \leq x \leq 10^{16} \\ \psi(x) - \vartheta(x) &< x^{1/2} + 3x^{1/3} \quad \text{pour} \quad 0 < x \leq 10^{16} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1. Pour $x \geq 121$, nous avons

$$0,9999\sqrt{x} < \psi(x) - \vartheta(x) \quad (2.1)$$

Preuve. Par le théorème 2.1.1 , (2.1) est vérifié pour $121 \leq x \leq 10^{16}$, où

$$0,9999\sqrt{x} < \sqrt{x} \leq \psi(x) - \vartheta(x) \quad \text{pour} \quad 121 \leq x \leq 10^{16}$$

Maintenant de l'identité bien connue

$$\psi(x) = \sum_{k \geq 1} \vartheta(x^{\frac{1}{k}}) \quad (2.2)$$

nous en déduisons

$$\psi(x^{\frac{1}{2}}) = \sum_{k \geq 1} \vartheta(x^{\frac{1}{2k}}) \quad (2.3)$$

ce qu'implique (2.3) avec (2.2) on à ,

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \psi(x^{\frac{1}{2}}) + \sum_{k \geq 1} \vartheta(x^{\frac{1}{2k+1}})$$

alors ,

$$\psi(x) - \vartheta(x) = \psi(x^{\frac{1}{2}}) + \sum_{k \geq 1} \vartheta(x^{\frac{1}{2k+1}})$$

donc ,

$$\psi(x) - \vartheta(x) \geq \psi(\sqrt{x}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) \quad (2.4)$$

et nous avons ,

$$\vartheta(x) > x - 2x^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad 1423 \leq x \leq 10^8$$

donc nous trouvons ,

$$\vartheta(x^{\frac{1}{3}}) > \sqrt[3]{x} - 2x^{\frac{1}{6}} \quad \text{pour} \quad (1423)^3 \leq x \leq (10^8)^3 \quad (2.5)$$

et on a pour $x \geq e^{2b}$,

$$\psi(\sqrt{x}) > \sqrt{x} - \epsilon_b \sqrt{x} = (0,9999 + 0,0001)\sqrt{x} - \epsilon_b \sqrt{x} \quad (2.6)$$

$$= 0,9999\sqrt{x} + (0,0001 - \epsilon_b)\sqrt{x} \quad (2.7)$$

de (2.5), (2.6) nous obtenons

$$\psi(\sqrt{x}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) \geq 0,9999\sqrt{x} + (0,0001 - \epsilon_b)\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2x^{\frac{1}{6}}$$

où ϵ_b peut être trouvé dans le tableau 4.3 (ou le tableau p.358 de [cf(23)]). On vérifie

$$(0,0001 - \epsilon_b)\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2x^{\frac{1}{6}} \geq 0$$

pour $10^{16} \leq x \leq e^{50}$ par intervalles (on utilise $b = 18, 42, 20, 22$). Pour $y \leq e^{25}$, le tableau (4.3) donne ,

$$|\psi(y) - y| < 0,00007789y \quad (2.8)$$

et nous avons

$$\psi(x) - \vartheta(x) < 1.42620x^{1/2} \quad \text{pour } x > 0 \quad (2.9)$$

par utiliser (2.8) et (2.9) trouvons

$$|\vartheta(y) - y| \leq |\psi(y) - y| + |\psi(y) - \vartheta(y)| < 0,00007789y + 1.43\sqrt{y} < 0.00009y$$

donc

$$y - 0.00009y < \vartheta(y) < y + 0.00009y$$

$$0.9999y < \vartheta(y) < 1.00009y$$

Pour $x > e^{50}$, on applique le résultat précédent avec $y = \sqrt{x}$ pour obtenir

$$|\psi(x) - \vartheta(x)| > \vartheta(\sqrt{x}) \geq 0.9999x$$

2.2.2 Des bornes supérieures.

Lemme 2.2.1. Pour $x > 0$, nous avons

$$\psi(x) - \vartheta(x) - \vartheta(\sqrt{x}) < 1.777745x^{\frac{1}{3}} \quad (2.10)$$

Preuve. Pour $x > 0$, nous avons $\vartheta(x) < 1,000081x$ d'après (cf[23]) p .366. On a ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor} \vartheta(x^{\frac{1}{k}}) &< 1.000081 \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor} x^{\frac{1}{k}} \\ &< 1.000081(x^{\frac{1}{3}} + (\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor - 4)x^{\frac{1}{4}}) \\ &< 1.2x^{\frac{1}{3}} \quad \text{pour } x > (10^{11})^3 \end{aligned}$$

Pour les petites valeurs, nous avons (2.12) par calcul direct (la valeur maximale atteint pour $x = 2401$).

Proposition 2.2.2. Pour $x > 0$,

$$\psi(x) - \vartheta(x) < 1.00007\sqrt{x} + 1.78\sqrt[3]{x}$$

Preuve. par utilise (2.12) et Proposition 5.1 on trouve ,

$$\begin{aligned} \psi(x) - \vartheta(x) - \vartheta(\sqrt{x}) &< 1.77745x^{\frac{1}{3}} \\ \psi(x) - \vartheta(x) &< \vartheta(\sqrt{x}) + 1.78x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &< 1.000027578x \\ \vartheta(\sqrt{x}) &< 1.00003\sqrt{x} \end{aligned}$$

alors ,

$$\psi(x) - \vartheta(x) < 1.00007\sqrt{x} + 1.78\sqrt[3]{x}$$

2.3 Limites utiles .

Corollaire 2.3.1. Nous avons :

$$x/\ln x < \pi(x) \quad \text{pour} \quad x \geq 17, \quad (2.11)$$

$$\pi(x) < 1.25506x/\ln x \quad \text{pour} \quad x > 1, \quad (2.12)$$

proposition 2.3.1

$$p_k \leq k \ln p_k \quad \text{pour} \quad k \geq 4, \quad (2.13)$$

$$\ln p_k \leq \ln k + \ln_2 k + 1 \quad \text{pour} \quad k \geq 2. \quad (2.14)$$

Preuve. en remplaçant x par p_k dans la corollaire 2.3.1 on (2.13)

$$\begin{aligned} x/\ln x &< \pi(x) \quad \text{pour} \quad x \geq 17, \\ p_k/\ln p_k &< \pi(p_k) \quad \text{pour} \quad k \geq 4 \\ p_k &< k \ln p_k \quad \text{pour} \quad k \geq 4 \end{aligned}$$

D'après le théorème 3 de [cf(20)], nous avons $p_k < k(\ln k + \ln_2 k + 1 - 1/2)$ donc $p_k < ek \ln k$ pour $k \geq 2$.

2.4 Sur la différence $\vartheta(x) - x$

Proposition 2.4.1. $\vartheta(x) - x < \frac{1}{36260}x$ pour $x > 0$.

Preuve. D'après le tableau (4.4), nous avons $\vartheta(x) < x$ pour $8 \cdot 10^{11}$. Avec (2.1) et pour $8 \cdot 10^{11} \leq x \leq e^{28}$ on a ,

$$\vartheta(x) < \psi(x) - 0,9999\sqrt{x}(1,00002841 - 0,9999/\sqrt{e^{28}})x < 1,00002758x.$$

en prenant ϵ_{28} tel que $\epsilon_{28} \leq 0,00002224$.

Théorème 2.4.1 . Nous avons

$$|\vartheta(x) - x| < \eta_k \frac{x}{\ln^k x} \quad \text{pour} \quad x \geq x_k \quad (2.15)$$

avec

k	0	1	1	2	2	2	2
η_k	1	1.2323	0.001	3.965	0.2	0.05	0.01
x_k	1	2	908994923	2	3594641	122568683	7713133853

et

k	3	3	3	3	4
η_k	20.83	10	1	0.78	1300
x_k	2	32321	89967803	158822621	2

Preuve. Nous utilisons les estimations de $|\psi(x) - x|$ avec Proposition (2.2.2). En particulier, on peut choisir $\eta_2 = 0,05$ car

$$0.00006788 + 1.00007/\sqrt{10^{11}} + 1.78/(10^{11})^{2/3} * 26^2 < 0.04809$$

On obtient les Tableaux 4.4 et 4.5 pas à pas jusqu'à $b = 5000$. Pour chaque ligne, la valeur est valable entre b_i et b_{i+1} . Il faut donc choisir par exemple, $\eta_2 = 4.42E - 3$ devrait être choisi pour $x \geq e^{32}$.

En utilisant Théorème 1.1 sur (cf[7]), nous avons $\eta_k \geq \sqrt{8/\pi}(\sqrt{\ln(x_0)}/R)^{1/2} \cdot e^{-\sqrt{\ln(x_0)}/R}$. $\ln^k(x_0)$ on obtenir pour $x \geq x_0 = \exp(5000)$,

$$\eta_0 = 1.1967494479413249688148958471E - 12,$$

$$\eta_1 = 0.000000005983747239706624940744792353,$$

$$\eta_2 = 0.0000299187361985331240372396176,$$

$$\eta_3 = 0.14959368099626656235186198088,$$

$$\eta_4 = 747.9684049633281175930990441.$$

Constantes spéciales :

$$\text{pour } x \geq 1, \eta_0 < (1 - \vartheta(1^-))/1 = (1 - \vartheta(2^-))/2 = 1.$$

$$\text{pour } x \geq 2, \eta_1 < (11 - \vartheta(11^-))/11 \cdot \ln(11) \approx 1.23227674$$

$$\text{pour } x \geq 2, \eta_2 < (59 - \vartheta(59^-))/59 \cdot \ln^2(59) \approx 3.964809$$

$$\text{pour } x \geq 2, \eta_3 < (1423 - \vartheta(1423^-))/1423 \cdot \ln^3(1423) \approx 20.8281933$$

2.5 Quelques applications sur de théorie des nombres.

2.5.1 Estimations de $\vartheta(p_k)$.

Proposition 2.5.1. On a un développement asymptotique de $\vartheta(p_k)$:

$$\vartheta(p_k) = Li^{-1}(k) + O(k^{1/2} \ln^{3/2} k)$$

dont les derniers termes (cf[3]) sont

$$\vartheta(p_k) = k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} - \frac{\ln_2^2 k - 6\ln_2 k + 11}{2 \ln^2 k}) + O(\frac{\ln_2^3 k}{\ln^3 k})$$

Remarque . On a ,

$$\vartheta(p_k) \leq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k}) \quad \text{pour } k \geq 198$$

par Théorème 1.4.4 .

Proposition 2.5.2.

$$\vartheta(p_k) \geq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2.050735}{\ln k}) \quad \text{pour } p_k \geq 10^{11}$$

$$\vartheta(p_k) \geq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2.04}{\ln k}) \quad \text{pour } p_k \geq 10^{15}$$

Preuve. soit f_β défini par

$$n \mapsto n \left(\ln n + \ln_2 n - 1 + \frac{\ln_2 n - \beta}{\ln n} \right)$$

Nous voulons prouver que $\vartheta(p_k) \geq f_\beta(n)$. On définit h_α par $h_\alpha(n) := n(\ln n + \ln_2 n - \alpha)$. Supposons qu'il existe α tel que $p_k \geq h_\alpha(k)$ pour k_0 . D'où ,

$$\vartheta(p_k) - \vartheta(p_{k_0}) = \sum_{n=k_0+1}^k \ln p_n \geq \sum_{n=k_0+1}^k \ln h_\alpha(n).$$

On a $f'_\beta \leq \ln h_\alpha$, où

$$\begin{aligned} f'_\beta &= \left(n \left(\ln n + \ln_2 n - 1 + \frac{\ln_2 n - \beta}{\ln n} \right) \right)' \\ &= \ln n + \ln_2 n + \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln^2 n} + \frac{\ln_2 n - \beta}{\ln n} - \frac{\ln_2 n - \beta}{\ln^2 n} + 1 - 1 \end{aligned}$$

alors ,

$$f'_\beta = \ln n + \ln_2 n + \frac{\ln_2 n - \beta + 1}{\ln n} - \frac{\ln_2 n - \beta - 1}{\ln^2 n}$$

ainsi ,

$$f'_\beta \leq \ln h_\alpha$$

donc,

$$\ln n + \ln_2 n + \frac{\ln_2 n - \beta + 1}{\ln n} - \frac{\ln_2 n - \beta - 1}{\ln^2 n} \leq \ln(n(\ln n + \ln_2 n - \alpha))$$

alors,

$$\begin{aligned} \frac{\ln_2 n - \beta + 1}{\ln n} - \frac{\ln_2 n - \beta - 1}{\ln^2 n} &\leq \ln n + \ln(\ln n + \ln_2 n - \alpha) - \ln n - \ln_2 n \\ \frac{\ln_2 n - \beta + 1}{\ln n} - \frac{\ln_2 n - \beta - 1}{\ln^2 n} &\leq \ln(\ln n(1 + \frac{\ln_2 n - \alpha}{\ln n})) - \ln_2 n \\ \frac{\ln_2 n - \beta + 1}{\ln n} - \frac{\ln_2 n - \beta - 1}{\ln^2 n} &\leq \ln(1 + \frac{\ln_2 n - \alpha}{\ln n}) + \ln_2 n - \ln_2 n \\ \frac{\ln_2 n - \beta + 1}{\ln n} - \frac{\ln_2 n - \beta - 1}{\ln^2 n} &\leq \ln(1 + \frac{\ln_2 n - \alpha}{\ln n}) \end{aligned} \tag{2.16}$$

de (2.16) on a ,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\ln n} - \frac{\beta}{\ln^2 n} &\geq +\frac{1}{\ln n} + \frac{\ln_2 n}{\ln n} - \frac{\ln_2 n}{\ln^2 n} - \frac{1}{\ln^2 n} - \ln(1 + \frac{\ln_2 n - \alpha}{\ln n}) \\ \frac{\beta}{\ln n}(1 - \frac{1}{\ln k}) &\geq \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln_2 n}{\ln n} - \frac{\ln_2 n}{\ln^2 n} - \frac{1}{\ln^2 n} - \ln(1 + \frac{\ln_2 n - \alpha}{\ln n}) \\ \beta(1 - \frac{1}{\ln k}) &\geq 1 + \ln_2 n - \frac{\ln_2 n - 1}{\ln n} - \ln(1 + \frac{\ln_2 n - \alpha}{\ln n}) \ln n \end{aligned}$$

en plaçant n par k

$$\beta(1 - 1/\ln k) \geq 1 + \ln_2 k - (1 + \frac{\ln_2 k - \alpha}{\ln k}) \ln k - \frac{\ln_2 k - 1}{\ln k}. \tag{2.17}$$

Pour $\alpha \in [0.95, 1]$ et $t \geq 22$, la fonction

$$t \mapsto (\ln t - t \ln(1 + \frac{\ln t - \alpha}{t}) - \frac{\ln t - 1}{t}) / (1 - 1/t)$$

est décroissant .

Par [6], on peut choisir $\alpha = \alpha_0 = 1$. pour $k \geq e^{100}$, la valeur $\beta = 2,048$ vérifie (2.18).

Pour $\pi(10^{11}) \leq k \leq e^{100}$, la valeur $\beta_0 = 2,094$ vérifie (2.18) . D'où la minoration

$$\vartheta(p_k) \geq k \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \beta_0}{\ln k} \right).$$

Puis ,

$$p_k \geq \vartheta(p_k) - \eta_2 \frac{k}{\ln k}$$

par (2.17) et (2.15) , donc , $p_k \geq h_{\alpha_1}(k)$ avec ,

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\ln_2 k - (\beta_0 + \eta_2)}{\ln k}$$

En divisant l'intervalle de k , on utilise différentes valeurs de α avec des valeurs adaptées de η_2 . En itérant le processus, on obtient $\beta = 2,050735$ pour $k \geq k_o = \pi(10^{11})$. Cette valeur de β vérifie $\vartheta(p_{k_0}) \geq f_\beta(k_0)$.

De la même manière, on obtient $\beta = 2.038$ pour $k \geq 10^{15}$.

Proposition 2.5.3. pour $k \geq 781$,

$$\vartheta(p_k) \leq k \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} - \frac{0.782}{\ln^2 k} \right)$$

Preuve. On utilise le lemme 2.5.2 et le Lemme 2.5.1., où

$$\vartheta(p_k) \leq \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} - \frac{\gamma}{\ln^2 k} \right) \quad \forall k \geq k_0 \quad \text{et} \quad \gamma = 0.78217325...$$

Lemme 2.5.1. Soit deux entiers k_0, k et $\gamma > 0$ réels. Supposons que cela soit pour $k_0 \leq n \leq k$,

$$p_k \leq n \left(\ln n + \ln_2 n - 1 + \frac{\ln_2 n - 1.95}{\ln n} \right). \quad (2.18)$$

Soit ,

$$s(k) = k \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} - \frac{\gamma}{\ln^2 k} \right)$$

et

$$f(k) = s(k) - (\ln k + \ln_2 k + 1)$$

si ,

$$\vartheta(p_{k_0-1}) \leq f(k_0)$$

alors ,

$$\vartheta(p_k) \leq s(k) \quad \text{pour} \quad \text{tous} \quad k \geq k_0.$$

Preuve. Soit $S_\alpha(n)$ une borne supérieure pour p_n tel que $k_\alpha \leq n \leq k$ où

$$S_\alpha(n) = n \left(\ln n + \ln_2 n - 1 + \frac{\ln_2 k - \alpha}{\ln n} \right)$$

Maintenant, pour $2 \leq k_0 \leq k$, on écrit

$$\vartheta(p_k) - \vartheta(p_{k_0-1}) = \sum_{n=k_0}^{k-1} \ln p_n \leq \sum_{n=k_0}^{k-1} \ln S_\alpha(n) \leq \int_{k_0}^k \ln S_\alpha(n) dn$$

Il faut prouver que $\ln S(n) \leq f'(n)$.
nous avons :

$$\ln S_\alpha(n) = \ln n + \ln_2 n + \ln(1 + u(n))$$

avec ,

$$u(n) = \frac{\ln_2 n - 1}{\ln n} + \frac{\ln_2 n - \alpha}{\ln^2 n}$$

et

$$f'(n) = \ln n + \ln_2 n + \frac{\ln_2 n - 1}{\ln n} - \frac{\ln_2 n + \gamma - 3}{\ln^2 n} + \frac{2\gamma}{\ln^3 n} - \frac{1}{n} (1 + 1/\ln n).$$

Soit $\beta < 1/2$ tel que,

$$\ln(1 + u(n)) \leq u(n) - \beta u^2(n)$$

pour $n \geq k_0$ Alors $\ln S_\alpha(n) \leq f'(n)$ si ,

$$\beta \left(\frac{\ln_2 n - 1}{\ln n} + \frac{\ln_2 n - \alpha}{\ln^2 n} \right)^2 - \frac{2 \ln_2 n + \gamma - 3 - \alpha}{\ln^2 n} + 2\gamma/\ln^3 n - 1/n - 1/(n \ln n) \geq 0$$

que l'on peut simplifier en ,

$$\frac{A}{\ln^2 n} + 2 \frac{B}{\ln^3 n} + \beta \frac{\ln_2^2 n - 2\alpha \ln_2 n + \alpha^2}{\ln^4 n} - 1/n - 1/(n \ln n) \geq 0$$

où ,

$$A = \beta \ln_2^2 n - 2(\beta + 1) \ln_2 n + 3 + \alpha + \beta - \gamma$$

$$B = \beta \ln_2^2 n - \beta(\alpha + 1) \ln_2 n + \alpha\beta + \gamma$$

nous avons ,

$$1/n + 1/(n \ln n) \leq 0.02/\ln^3 n$$

pour $n \geq 10^5$.

Nous étudions chaque étape, désignant $\ln_2 n$ par X :

$$\beta X - 2(\beta + 1)X + 3 + \alpha + \beta - \gamma \geq 0 \quad \text{pour chaque } X \quad \text{si} \quad \gamma - \alpha - 1 + 1/\beta \leq 0,$$

$$X^2 - (\alpha + 1)X + (\alpha + \gamma/\beta + 0.02) \geq 0 \quad \text{pour chaque } X \quad \text{si} \quad \alpha^2 - 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4(\gamma/\beta + 0.02) \leq 0$$

$$X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 = (X - \alpha)^2 \geq 0$$

Nous choisissons γ tel que

$$\gamma - \alpha - 1 + 1/\beta = 0$$

et

$$\beta = \frac{u(k_0) - \ln(1 + u(k_0))}{u^2(k_0)}$$

avec ,

$$\alpha = 1.95 \quad \text{et} \quad k_0 = 178974, \quad \text{nous avons} \quad \beta = 0.461291475... \quad \text{et} \quad \gamma = 0.78217325...$$

alors ,

$$v(p_{k-1}) - f(k) \leq v(p_{k_0} - 1) - f(k_0).$$

Comme ,

$$v(p_{k_0} - 1) \leq f(k_0),$$

nous avons ,

$$v(p_{k_0} - 1) - f(k) \leq 0.$$

On obtient la borne supérieure

$$v(p_k) = v(p_{k-1}) + \ln p_k \leq f(k) + \ln p_k < S(k)$$

par (2.16).

Lemma 2.5.2. (Estimations de p_k) .pour $k > 178974$,

$$p_k \leq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 1.95}{\ln k}).$$

Preuve. on remplace x par p_k dans

$$|\vartheta(x) - x| \leq \eta_2 \frac{x}{\ln^2 x}$$

on obtient ,

$$p_k - \vartheta(p_k) \leq \eta_2 \frac{p_k}{\ln^2 p_k}$$

par (2.15) nous avons ,

$$\frac{p_k}{\ln^2 p_k} \leq \frac{k}{\ln k}$$

et

$$|p_k - \vartheta(p_k)| \leq \eta_2 \frac{k}{\ln k} \tag{2.19}$$

On utilise la limite supérieure pour $\vartheta(p_k)$ et (2.19) nous avons ,

$$\begin{aligned} p_k &\leq \vartheta(p_k) + \eta_2 \frac{k}{\ln k} \\ \vartheta(p_k) &\leq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln_2 k}) \quad \forall k \geq 198. \end{aligned}$$

donc ,

$$p_k \leq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2 + \eta_2}{\ln k})$$

Nous utilisons $\eta_2 = 0.05$ pour $x \geq 10^{11}$

Proposition 2.5.6. pour $k > 688383$,

$$p_k \leq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k})$$

Preuve. On Utilise la proposition 2.5.3 avec $\eta_3 = 0.78$ du théorème 2.4.1 pour $\ln p_k > 27$. Et pour les petites valeurs on utilise la vérification informatique conclut la preuve.

Proposition 2.5.7. pour $k \geq 3$,

$$p_k \geq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2.1}{\ln k})$$

Preuve. En utilisant (2.17) , nous avons

$$p_k \geq v(p_k) - \eta_2 \frac{k}{\ln k}$$

Par la proposition 2.5.2 et $\eta_2 = 0.04913$, nous concluons la preuve.

2.5.2 Le plus petit intervalle contenant des nombres premiers.

Nous connaissons déjà le résultat de Schoenfeld (*cf*[23]) montrant que, pour $x > 2010759.9$, l'intervalle $]x, x + x/16597[$ contient au moins un nombre premier.

Nous améliorons ce résultat avec la proposition suivante.

Proposition 2.5.8. Pour tous $x > 396738$, il existe un nombre prime p tel que

$$x < p \leq x(1 + \frac{1}{25 \ln^2 x})$$

Ce résultat est meilleur que Rosser & Celui de Schoenfeld pour $x \geq e^{25.77}$. La méthode utilisée dans (*cf*[14]) donne de meilleurs résultats (si on compare avec le même ordre de k , i.e. $k = 0$).

Preuve. Soit $0 < f(x) < 1$ pour $x > x_0$.

$$\begin{aligned} \vartheta\left(\frac{1}{1-f(x)}x\right) - \vartheta(x) &\geq \frac{1}{1-f(x)}x - \eta_k \frac{\frac{x}{1-f(x)}}{\ln^k\left(\frac{x}{1-f(x)}\right)} - \left(x + \eta_k \frac{x}{\ln^k x}\right) \\ &> \left(\frac{1}{1-f(x)} - 1\right)x - 2\eta_k \left(\frac{1}{1-f(x)}\right) \frac{x}{\ln^k x} \end{aligned}$$

On choisie,

$$f(x) = \frac{2\eta_k}{\ln^k x}$$

ainsi ,

$$\vartheta\left(\frac{1}{1 - \frac{2\eta_k}{\ln^k x}}x\right) - \vartheta(x) > 0$$

pour $k = 2$, nous avons $\eta_2 = 0.0195$ et

$$\frac{1}{1 - 2 \cdot 0.0195 / \ln^2 x} \leq 1 + 1/(25 \ln^2 x)$$

pour $\ln x \geq 28$ Selon (*cf*[23]) p. 355,

$$p_{n+1} - p_n \leq 652 \quad \text{pour} \quad p_n \leq 2.686 \cdot 10^{12},$$

donc le résultat est également valable à partir de $x \geq 3.8 \cdot 10^6$.



Le troisième Chapitre

∞ **Estimation de $\pi(x)$** ∞



3.1 Introduction

Soient k un entier positif, x un nombre réel positif et p_k le k — ième nombre premier. Soient $\vartheta(x)$ la fonction de Tchebychef, $\pi(x)$ la fonction qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x .

Dans ce chapitre, nous démontrons que lorsque k tend vers l'infini on a, le comportement asymptotique de la fonction de Tchebychef $\vartheta(x)$ et la fonction $\pi(x)$ sur le k — ième nombre premier p_k dans le théorème 3.2.2 et nous démontrons les encadrements du théorème 3.3.1 en utilisant essentiellement la formule de sommation d'Abel et le théorème des nombres premiers.

3.2 Comportement asymptotique de $\pi(x)$

Le théorème 3.2.1 .(Le théorème de Tcgebchef (cf.[30]))

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\ln x}, \quad \text{lorsque } x \mapsto +\infty$$

Preuve (cf.[30])

Le théorème qui suit donne l'estimation de $\vartheta(p_k)$ lorsque k tend vers l'infini on a ,

Le théorème 3.2.2 . Soit x un nomâre veel strictement positif et k un entier naturel.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes,

$$\begin{aligned} (i) \quad \pi(x) &\asymp \frac{x}{\ln x} && \text{lorsque } x \mapsto +\infty \\ (ii) \quad \vartheta(x) &\asymp x && \text{lorsque } x \mapsto +\infty \\ (iii) \quad p_k &\asymp k \ln k && \text{lorsque } k \mapsto +\infty \\ (iv) \quad \vartheta(p_k) &= k(\ln k + \ln_2 k + O(1)) && \text{lorsque } k \mapsto +\infty \end{aligned}$$

Preuve .

Démonstration de (ii) implique (i) :

Soit $k \geq 2$ et $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$, la suite des nombres premiers tel que $p_1 < p_2 < \dots < p_k$
On suppose (ii), c'est à dire qu'il existe $a > 0, b > 0$ et $x_o > 0$ tels que l'on ait,

$$ax \leq x \leq bx \quad \text{pour } x \geq x_o$$

ce qui implique pour $x \geq x_o \geq 2$,

$$ax + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \leq \vartheta(x) + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \leq bx + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt,$$

en utilisant la formule (1.2) on obtient,

$$ax + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \leq \pi(x) \ln x \leq bx + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt, \quad (3.1)$$

comme on a,

$$0 \leq \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \leq bx + \int_2^x dt = x - 2 \quad (\text{car } \pi(t) < \frac{1}{2}t - 1 < t, \text{ cf}[11])$$

alors (3.1) a'écrit,

$$ax \leq \pi(x) \leq (b+1)x \quad \text{pour } x \geq x_o \geq 2 \quad (3.2)$$

ce qui est équivalent à,

$$a \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq (b+1) \frac{x}{\ln x} \quad \text{pour } x \geq x_o \geq 2$$

d'où l'assertion (i).

Démonstration de (i) implique (iii) :

On suppose (i), c'est-à-dire qu'il existe $a > 0, b > 0$ et $x_o > 0$ tels que,

$$a \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq b \frac{x}{\ln x} \quad \text{pour } x \geq x_o,$$

alors ceci équivale à ,

$$ax \leq \pi(x) \ln x \leq bx \quad \text{pour } x \geq x_0, \quad (3.3)$$

en prenant le logarithme népérien dans (3.2) on obtient,

$$\ln a + \ln x \leq \ln \pi(x) + \ln_2 x \leq \ln b + \ln x, \quad (3.4)$$

et en divisant (3.3) par $\ln x$ il vient,

$$\frac{\ln a}{\ln x} + 1 \leq \frac{\ln \pi(x)}{\ln x} + \frac{\ln_2 x}{\ln x} \leq \frac{\ln b}{\ln x} + 1,$$

par passage à la limite lorsque $x \mapsto +\infty$ on obtient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \pi(x)} = 1, \quad \text{puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln_2 x}{\ln x} = 0$$

ceci implique,

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \geq A : \left| \frac{\ln x}{\ln \pi(x)} - 1 \right| \leq \epsilon$$

en posant $\epsilon = \epsilon_0 < 1$, on obtient,

$$(1 - \epsilon_0) \ln \pi(x) \leq \ln x \leq (1 + \epsilon_0) \ln \pi(x) \quad \text{pour } x \geq A,$$

en prenant $x = p_k$, nous obtenons,

$$(1 - \epsilon_0) \ln k \leq \ln p_k \leq (1 + \epsilon_0) \ln k \quad \text{pour } p_k \geq A, \quad (3.5)$$

et l'encadrement (3.2) s'écrit alors,

$$ap_k \leq k \ln p_k \leq bp_k \quad \text{pour } p_k \geq x_0,$$

ce qui est équivalent a,

$$\frac{1}{b} k \ln p_k \leq p_k \leq \frac{1}{a} k \ln p_k \quad \text{pour } p_k \geq x_0, \quad (3.6)$$

les inégalités (3.5) et (3.6) impliquent alors,

$$\frac{(1 - \epsilon_0)}{b} k \ln p_k \leq p_k \leq \frac{(1 + \epsilon_0)}{a} k \ln p_k \quad \text{pour } k \geq k_0 \quad \text{tel que } p_{k_0} \geq \max x_0, A$$

d'où la relation (iii).

Montrons l'équivalence de (iii) et (iv) :

Supposons (iii) vérifiée alors,

$$ak \ln k \leq p_k \leq bk \ln k \quad \text{pour } k \geq k_0 \quad \text{tel que } a > 0, b > 0 \quad \text{et } k_0 \geq 1,$$

comme la fonction $x \mapsto \ln x$ est croissante sur $]0, +\infty[$, alors,

$$\ln a + \ln k + \ln_2 k \leq \ln p_k \leq \ln b + \ln k + \ln_2 k$$

ce qui est équivalent à,

$$\ln a \leq \ln p_k - \ln k - \ln_2 k \leq \ln b,$$

en posant, $C = \max\{|\ln a|, |\ln b|\}$ on obtient,

$$-C \leq \ln p_k - \ln k - \ln_2 k \leq +C,$$

autrement dit on a .

$$|\ln p_k - \ln k - \ln_2 k| \leq C,$$

donc,

$$\ln p_k - \ln k - \ln_2 k = O(1),$$

d'où

$$\ln p_k = \ln k + \ln_2 k = O(1),$$

par suite,

$$\vartheta(p_k) = \sum_{p \leq p_k} \ln p = \sum_{i=1}^k \ln p_i = \ln p_1 = \sum_{i=2}^k \ln p_i = \ln 2 + \sum_{i=2}^k (\ln i + \ln_2 i) + \sum_{i=2}^k O(1) \quad (3.7)$$

$$= \sum_{i=2}^k (\ln i + \ln_2 i) + (k-1)O(1) \quad (3.8)$$

posons, $f(t) = \ln t + \ln_2 t$, on a $f \in C^1[2, k]$.

en utilisant la formule de sommation (1. 1) pour $x = k$ et $y = 2$ il vient,

$$\sum_{i=2}^k f(i) - k(\ln k + \ln_2 k) = O(k)$$

c'est -à - dire ,

$$\sum_{i=2}^k (\ln i + \ln_2 i) = k(\ln k + \ln_2 k + O(1)), \quad (3.9)$$

En utilisant (3.8) et (3.9) on obtient ,

$$\vartheta(p_k) = k(\ln k + \ln_2 k + O(k)), \quad (3.10)$$

d'où l'on déduit l'estimation ,

$$\vartheta(p_k) = k(\ln k + \ln_2 k + O(1)), \quad (3.11)$$

Montrons que (iv) implique (iii) :

L'inégalité,

$$\vartheta(p_k) = \sum_{i=1}^k \ln p_i \leq k \ln p_k$$

et l'hypothèse (iv) impliquent,

$$\ln k + \ln_2 k + O(1) \leq \ln p_k \quad (3.12)$$

ceci d'une part,

D'autre part on a,

$$\begin{aligned} \vartheta(p_{2k}) - \vartheta(p_k) &= 2k(\ln 2k + \ln_2 2k + O(1)) - k(\ln k + \ln_2 k + O(1)) \\ &= 2k(\ln 2 + \ln k + \ln(\ln 2 + \ln k) + O(1)) - k(\ln k + \ln_2 k + O(1)) \\ &= k(\ln k + \ln_2 k) + (2\ln 2 + 2\ln(1 + \frac{\ln 2}{\ln k}) + O(1))k \end{aligned}$$

c'est-à-dire ,

$$\vartheta(p_{2k}) - \vartheta(p_k) - k(\ln k + \ln_2 k + 2 \ln 2 + 2 \ln(1 + \frac{\ln 2}{\ln k})) = O(k)$$

il existe donc deux constantes $C > 0$ et $k_0 \geq 2$ tels que l'on ait,

$$|\vartheta(p_{2k}) - \vartheta(p_k) - k(\ln k + \ln_2 k) - [2 \ln 2 + 2 \ln(1 + \frac{\ln 2}{\ln k})]k| \leq Ck \quad \text{pour} \quad k \geq k_0 \geq 2 \quad (3.13)$$

d'ou l'on déduit que,

$$\begin{aligned} |\vartheta(p_{2k}) - \vartheta(p_k) - k(\ln k + \ln_2 k)| &\leq [2 \ln 2 + 2 \ln(1 + \frac{\ln 2}{\ln k})]k + Ck \\ &\leq (4 \ln 2 + C)k \end{aligned}$$

donc,

$$\vartheta(p_{2k}) - \vartheta(p_k) = k(\ln k + \ln_2 k + O(1)),$$

Comme on a :

$$\vartheta(p_{2k}) - \vartheta(p_k) = \sum_{i=k+1}^{2k} \ln p_i \geq k \ln p_k,$$

alors ,

$$\ln k + \ln_2 k + O(1) \geq \ln p_k, \quad (3.14)$$

de (3.12) et (3.14) on déduit que :

$$\ln \frac{p_k}{k \ln k} = O(1)$$

il existe donc $C > 0$ et $k_0 \geq 2$ tels que l'on ait,

$$-C \leq \ln \frac{p_k}{k \ln k} \leq +C \quad \text{pour} \quad k \geq k_0$$

d'ou,

$$e^{-C} k \ln k \leq p_k \leq e^C k \ln k$$

ce qui prouve (iii) .

Démonstration de (iv) implique (ii) :

L'hypothèse (iv) implique,

$$\ln k + \ln_2 k - C \leq \frac{\vartheta(p_k)}{k} \leq \ln k + \ln_2 k + C \quad \text{pour} \quad k \geq k_0 \geq 2 \quad (3.15)$$

comme,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln_2 k = +\infty$$

alors pour tout $A > 0$, il existe $k_A \geq 2$ tel que

$$\ln_2 k > A \quad \text{pour tout} \quad k \geq k_A$$

pour $A = C$ on a :

$$\ln_2 k > C \text{ pour tout } k \geq K_C$$

l'encadrement (3.15) implique alors pour $k \geq \max k_0, K_C$,

$$\ln k < \frac{\vartheta(p_k)}{k} \leq \ln k + \ln_2 k + \ln_2 k,$$

d'où l'on déduit l'inégalité,

$$k \ln k < \vartheta(p_k) \leq 3k \ln k \quad \text{pour } k \geq k_1 = \max k_0, K_C \quad (3.16)$$

comme (iv) implique (iii), alors il existe $a > 0, b > 0$ et $k_2 \geq 2$

$$ak \ln k \leq p_k \leq bk \ln k \quad \text{pour } k \geq k_2 \quad (3.17)$$

l'inégalité (3.16) et (3.17) impliquent alors :

$$\frac{1}{b} p_k \leq \vartheta(p_k) \leq \frac{3}{a} p_k \quad \text{pour } k \geq \max\{p_{k_1}, p_{k_2}\} \quad (3.18)$$

Soit $x > 0$ tel que,

$$p_k \leq x < p_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{p_k} p_k, \quad (3.19)$$

alors,

$$\vartheta(p_k) = \sum_{i=1}^k \ln p_i = \sum_{p \leq p_k \leq x} \ln p = \vartheta(x) \quad (3.20)$$

Les inégalités (3.17) et (3.19) impliquent,

$$p_k \leq x < 4 \frac{b}{a} p_k \quad (3.21)$$

grâce à (3.18) . (3.20) et à (3.21) on obtient,

$$\frac{a}{4b^2 x} \leq \vartheta(x) \leq \frac{3}{a} x \quad \text{pour } x \geq \max\{p_{k_2}, p_{k_1}\}$$

d'où l'assertion (ii).

3.3 Estimation de $\pi(x)$

Asyptotiquement nous avons

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x} + O\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right)\right) \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty$$

Theorem 3.3.1.

$$\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \leq_{x \geq 599} \pi(x) \leq_{x > 1} \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1.2762}{\ln x}\right) \quad (3.22)$$

$$\frac{x}{\ln x - 1} \leq_{x \geq 5393} \pi(x) \leq_{x \geq 60184} \frac{x}{\ln x - 1.1} \quad (3.23)$$

$$\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x}\right) \leq_{x \geq 88783} \pi(x) \leq_{x \geq 2953652287} \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2.334}{\ln^2 x}\right) \quad (3.24)$$

Preuve. Nous considérons la dernière inégalité.

soit ,

$$x_0 = 10^{11}, k = \pi(x_0) - \frac{\vartheta(x_0)}{\ln x_0}.$$

posons,

$$J(x, \eta_k) = k + \frac{x}{\ln x} + \eta_k \frac{x}{\ln^{k+1} x} + \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{\ln^2 y} + \frac{\eta_k}{\ln^{k+2} y} \right) dy$$

D'après l'égalité ii de théorème 1.4.3 on a ,

$$\pi(x) = \pi(x_0 - \frac{\vartheta(x_0)}{\ln x_0} + \frac{\vartheta(x)}{\ln(x)} + \int_{x_0}^x \frac{\vartheta(y)dy}{y \ln^2 y})$$

et on sois que ,

$$|\vartheta(x) - x| \leq \eta_k \frac{x}{\ln^k x}$$

pour $x \geq x_0$ nous avons, pour $x \geq x_0$,

$$J(x; -\eta_k) \leq \pi(x) \leq J(x; \eta_k).$$

on écrie

$$M(x; c) = \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{c}{\ln^2 x}\right)$$

pour encadrer de $\pi(x)$ écrivons les dérivées de $J(x; a)$ et de $M(x; c)$ par rapport à x :

$$J'(x; a) = \frac{1}{\ln x} + \frac{\eta_k}{\ln^{k+1} x} - k \frac{\eta_k}{\ln^{k+2} x},$$

et ,

$$M'(x; c) = \frac{1}{\ln x} + \frac{c-2}{\ln^3 x} - \frac{3c}{\ln^4 x}.$$

pour $k = 2$ nous devons choisir ,

$$c \geq (2 + \eta_2 - 2\eta_2/\ln x_0)/(1 - 3/\ln x_0)$$

on trouve $J' < M'$ pour $x \geq x_0$. avec $\eta_2 = 0.05$, on choisit $c = 2.321$ Nous vérifions par ordinateur que $J(10^{11}; 0.05) < M(10^{11}; 2.321)$.

Par calcul direct pour les petites valeurs de x pour obtenir :

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2.334}{\ln^2 x}\right) \quad \text{pour } x \geq 2953652287.$$

maintenant on pose ,

$$m(x; d) = \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{d}{\ln^2 x}\right).$$

On étudie les dérivées : on choisit $k = 3, d = 2$ et $\eta_3(1 - 3/\ln x) < 6$ pour avoir $J' > m'$
Comme $m(x_0; 2) < J(x_0; -6)$ et par calcul direct pour les petites valeurs, on obtenir

$$\pi(x) > \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x}\right) \quad \text{pour } x \geq 88783.$$

Les autres inégalités sont les suivantes : (3.14) $\Rightarrow$ (3.13) $\Rightarrow$ (3.12) pour x grand.

Annexe

TABLE 4.1. valeurs de $\vartheta(x)$ pour $10^6 \leq x \leq 10^{10}$

x	$\vartheta(x)$	$\Psi(x) - \vartheta(x)$
$1E + 06$	998484.175026	1102.422470
$2E + 06$	1998587.722137	1527.324070
$3E + 06$	2998107.530452	1892.449541
$4E + 06$	3997323.492084	2167.364713
$5E + 06$	4998571.086801	2400.053428
$6E + 06$	5996983.791998	2665.785692
$7E + 06$	6997751.998535	2823.187880
$8E + 06$	7997057.246292	3064.486910
$9E + 06$	8997625.570065	3224.678815
$1E + 07$	9995179.317856	3360.085490
$2E + 07$	19995840.882153	4759.143006
$3E + 07$	29994907.240152	5797.041942
$4E + 07$	39994781.014188	6699.200805
$5E + 07$	49993717.861720	7489.482783
$6E + 07$	59991136.134174	8172.843038
$7E + 07$	69991996.348980	8786.853393
$8E + 07$	79988578.197461	9388.261229
$9E + 07$	89985867.940581	9992.336337
$1E + 08$	99987730.018022	10512.778605
$2E + 08$	199982302.435783	14725.068769
$3E + 08$	299981378.219200	18000.443659
$4E + 08$	39999993533724.316829	6359550.652121
$5E + 08$	49999992543194.263655	7109130.001413
$6E + 08$	599976282.577668	25426.013243
$7E + 08$	699976911.639135	27402.910397
$8E + 08$	799969331.209833	29215.380561
$9E + 08$	899953849.181850	30963.754721
$1E + 09$	999968978.577566	32617.412861
$2E + 09$	1999941083.684486	46075.813369
$3E + 09$	2999937036.966284	56255.144708
$4E + 09$	3999946136.165586	64858.831531
$5E + 09$	4999906575.362844	72411.275590
$6E + 09$	5999930311.133705	79301.775139
$7E + 09$	6999917442.519773	85715.065356
$8E + 09$	7999890792.693956	91420.172461
$9E + 09$	8999894889.4975-41	97066.566501
$1E + 10$	9999939830.657757	102289,175716

TABLE 4.2. valeurs de $\vartheta(x)$ pour $10^{10} \leq x \leq 10^{15}$

x	$\vartheta(x)$	$\Psi(x) - \vartheta(x)$
$1E + 10$	9999939830.657757	102289.175716
$2E + 10$	19999821762.768212	144339.622582
$3E + 10$	29999772119.815419	176300.955450
$4E + 10$	39999808348.775748	203538.541084
$5E + 10$	49999728380.731899	227474.729168
$6E + 10$	59999772577.550769	249003.320704
$7E + 10$	69999769944.203933	268660.720820
$8E + 10$	79999718357.195652	287365.266115
$9E + 10$	89999644656.090911	304250.688854
$1E + 11$	99999737653.107445	320803.322857
$2E + 11$	199999695484.246439	453289.609568
$3E + 11$	299999423179.995211	554528.646163
$4E + 11$	399999101196.308601	640000.361434
$5E + 11$	499999105742.583455	715211.001138
$6E + 11$	599999250571.436655	783167.715577
$7E + 11$	699998999499.845475	845911.916175
$8E + 11$	799999133776.084743	904203.190001
$9E + 11$	899998818628.952024	958602.924046
$1E + 12$	999999030333.096225	1009803.669232
$2E + 12$	1999998755521.470649	1427105.865316
$3E + 12$	2999997819758.987859	1746299.820070
$4E + 12$	3999993533724.316829	6359550.652121
$5E + 12$	4999998073643.711478	2253672.042145
$6E + 12$	5999997276726.877147	2467566.593710
$7E + 12$	6999996936360.165729	2665065.541181
$8E + 12$	7999997864671.383505	2848858.049155
$9E + 12$	8999996425300.244577	3021079.319393
$1E + 13$	9999996988293.034200	3183704.089025
$2E + 13$	19999995126082.228688	1499685.436490
$3E + 13$	29999995531389.845427	5509328.368277
$4E + 13$	39999993533724.316829	6359550.652121
$5E + 13$	49999992543194.263655	7109130.001413
$6E + 13$	59999990297033.626198	7785491.725387
$7E + 13$	69999994316409.871731	8407960.376833
$8E + 13$	79999990160858.304239	8988688.375101
$9E + 13$	89999989501395.073897	9531798.550749
$1E + 14$	99999990573246.978538	10045400.569463
$2E + 14$	199999983475767.543204	14201359.711421
$3E + 14$	299999956702246.281944	17388356.540338
$4E + 14$	399999982290901.055038	20074942.600622
$5E + 14$	499999974019856.236519	22439658.012185
$6E + 14$	599999983610646.997632	24580138.242324
$7E + 14$	699999971887332.157455	26545816.027402
$8E + 14$	799999964680836.091645	28378339.693784
$9E + 14$	899999961386694.231242	30098146.961102
$1E + 15$	999999965752660.919540	31724269.567843

TABLE4.3. valeurs de $\epsilon(x)$ pour ψ et ϑ

b	ϵ_ψ	ϵ_ϑ	b	ϵ_ψ	ϵ_ϑ
20	$6.123E-4$	$6.606E-4$	100	$2.903E-11$	$2.903E-11$
21	$4.072E-4$	$43636-4$	200	$2.838E-11$	$2.838E-11$
22	$2.706E-4$	$2.881E-4$	300	$2.7728E-11$	$2.772E-11$
23	$1.792E-4$	$1897E-4$	400	$2 * 7n * 6k - 11$	$2.706E-11$
24	$1.183E-4$	$1247E-4$	500	$2.641E-11$	$2.641E-11$
25	$7.789E-5$	$8.172E-5$	600	$2.575E-11$	$2.5758E-11$
$\ln(10^{11})$	$6.788E-5$	$7.112E-5$	1000	$2.3158E-11$	$2.315E-11$
26	$5.121E-5$	$5.352E-5$	1250	$2.153E-11$	$2.153E-11$
27	$3.368E-5$	$3.507E-5$	1500	$1.991E-11$	$1.991E-11$
28	$2.224E-5$	$2.308E-5$	2000	$1.671E-11$	$1.671E-11$
29	$1.451E-5$	$1.502E-5$	2200	$1.5448E-11$	$1.544E-11$
30	$9.414E-6$	$9.724E-6$	2500	$1355E-11$	$1.355E-11$
31	$6.099E-6$	$6.287E-6$	2800	$1.169E-11$	$1.169E-11$
32	$3.944E-6$	$4.057E-6$	3000	$1047E-11$	$1047E-11$
33	$2.545E-6$	$2.614E-6$	3200	$9.267E-12$	$9.267E-12$
34	$1.640E-6$	$1.682E-6$	3300	$8.658E-12$	$8.658E-12$
$\ln(10^{15})$	$1.293E-6$	$1325E-6$	3400	$8.083E-12$	$8.083E-12$
35	$1.055E-6$	$1.080E-6$	3455	$7.750E-12$	$7.750E-12$
36	$6.7756E-7$	$6.928E-7$	3500	$7.488E-12$	$7.488E-12$
37	$4.348E-7$	$4.441E-7$	3600	$6.930E-12$	$6.930E-12$
38	$2.7938E-7$	$2.849E-7$	3700	$6.351E-12$	$6.351E-12$
39	$1.805E-7$	$1.839E-7$	3750	$6.080E-12$	$6.080E-12$
40	$1.163E-7$	$1.184E-7$	3800	$5.821E-12$	$5.821E-12$
41	$7.414E-8$	$7.539E-8$	3850	$5.533E-12$	$5.533E-12$
42	$4.723E-8$	$4.799E-8$	3900	$5.259E-12$	$5.2598E-12$
43	$3.011E-8$	$3.057E-8$	3950	$4.999E-12$	$4.999E-12$
44	$1.932E-8$	$1.960E-8$	4000	$4.751E-12$	$4.751E-12$
45	$1.234E-8$	$1.251E-8$	4050	$4.496E-12$	$4.496E-12$
46	$7.839E-9$	$7.941E-9$	4100	$4231E-12$	$4.231E-12$
47	$5.026E-9$	$5.088E-9$	4150	$3.981E-12$	$3.981E-12$
48	$3.19E-9$	$3.228E-9$	4200	$3.746E-12$	$3.746E-12$
49	$2.038E-9$	$2.0618E-9$	4300	$3.305E-12$	$3.308E-12$
50	$1.301E-9$	$1.35E-9$	4400	$2.8448E-12$	$2.844E-12$
55	$1.481E-10$	$1.492E-10$	4500	$2.445E-12$	$2.445E-12$
60	$3.917E-11$	$3.926E-11$	4700	$1.774E-12$	$1.774E-12$
70	$2.929E-11$	$2.929E-11$	5000	$9.562E-13$	$9.562E-13$
75	$2.92E-11$	$2.92E-11$	10000	$6.341E-18$	$6.341E-18$

TABLE4.4. valeurs de $\eta(k)$ valable pour $\exp(b_i) \leq x \leq \exp(b_{i+1})$

b_i	η_1	η_2	η_3	η_4
20	$1.388E-2$	$2.914E-1$	$6.118E+0$	$1.285E+2$
21	$9.597E-3$	$2.112E-1$	$4.645E+0$	$1.022E+2$
22	$6.625E-3$	$1.524E-1$	$3.505E+0$	$8.061E+1$
23	$4.553E-3$	$1.093E-1$	$2.623E+0$	$6.294E+1$
24	$3.116E-3$	$7.790E-2$	$1.948E+0$	$4.869E+1$
25	$2.070E-3$	$5.243E-2$	$1.328E+0$	$3.364E+1$
$\ln(10^{11})$	$1.849E-3$	$4.808E-2$	$1.250E+0$	$3.250E+1$
26	$1.445E-3$	$3.902E-2$	$1.054E+0$	$2.845E+1$
27	$9.820E-4$	$2.750E-2$	$7.699E-1$	$2.156E+1$
28	$6.693E-4$	$1.941E-2$	$5.629E-1$	$1.633E+1$
29	$4.504E-4$	$1.352E-2$	$4.054E-1$	$1.216E+1$
30	$3.015E-4$	$9.344E-3$	$2.897E-1$	$8.980E+0$
31	$2.012E-4$	$6.437E-3$	$2.060E-1$	$6.592E+0$
32	$1.339E-4$	$4.418E-3$	$1.458E-1$	$4.811E+0$
33	$8.887E-5$	$3.022E-3$	$1.028E-1$	$3.493E+0$
34	$5.807E-5$	$2.006E-3$	$6.928E-2$	$2.393E+0$
$\ln(10^{15})$	$4.637E-5$	$1.623E-3$	$5.680E-2$	$1.988E+0$
35	$3.888E-5$	$1.400E-3$	$5.039E-2$	$1.814E+0$
36	$2.564E-5$	$9.484E-4$	$3.509E-2$	$1.299E+0$
37	$1.688E-5$	$6.412E-4$	$2.437E-2$	$9.259E-1$
38	$1.112E-5$	$4.333E-4$	$1.690E-2$	$6.591E-1$
39	$7.354E-6$	$2.942E-4$	$1.177E-2$	$4.707E-1$
40	$4.853E-6$	$1.990E-4$	$8.157E-3$	$3.345E-1$
41	$3.167E-6$	$1.330E-4$	$5.586E-3$	$2.346E-1$
42	$2.064E-6$	$8.872E-5$	$3.815E-3$	$1.641E-1$
43	$1.345E-6$	$5.918E-5$	$2.604E-3$	$1.146E-1$
44	$8.818E-7$	$3.968E-5$	$1.786E-3$	$8.036E-2$
45	$5.752E-7$	$2.646E-5$	$1.218E-3$	$5.599E-2$
46	$3.733E-7$	$1.755E-5$	$8.245E-4$	$3.875E-2$
47	$2.442E-7$	$1.173E-5$	$5.627E-4$	$2.701E-2$
48	$1.582E-7$	$7.749E-6$	$3.797E-4$	$1.861E-2$
49	$1.031E-7$	$5.151E-6$	$2.576E-4$	$1.288E-2$
50	$7.229E-8$	$3.976E-6$	$2.187E-4$	$1.203E-2$
55	$8.952E-9$	$5.371E-7$	$3.223E-5$	$1.934E-3$
60	$2.748E-9$	$1.924E-7$	$1.347E-5$	$9.425E-4$
70	$2.197E-9$	$1.648E-7$	$1.236E-5$	$9.268E-4$
75	$2.920E-9$	$2.920E-7$	$2.920E-5$	$2.920E-3$

TABLE4.5. valeurs de η_k (continued)

b_1	η_1	η_2	η_3	η_4
100	$5.805E-9$	$1.161E-6$	$2.322E-4$	$4.644E-2$
200	$8.512E-9$	$2.554E-6$	$7.661E-4$	$2.299E-1$
300	$1.109E-8$	$4.434E-6$	$1.774E-3$	$7.094E-1$
400	$1.353E-8$	$6.765E-6$	$3.383E-3$	$1.692E+0$
500	$1.585E-8$	$9.505E-6$	$5.703E-3$	$3.422E+0$
600	$2.575E-8$	$2.575E-5$	$2.575E-2$	$2.575E+1$
1000	$2.893E-8$	$3.616E-5$	$4.520E-2$	$5.650E+1$
1250	$3.229E-8$	$4.843E-5$	$7.265E-2$	$1.090E+2$
1500	$3.982E-8$	$7.963E-5$	$1.593E-1$	$3.185E+2$
2000	$3.675E-8$	$8.084E-5$	$1.779E-1$	$3.913E+2$
2200	$3.859E-8$	$9.646E-5$	$2.412E-1$	$6.029E+2$
2500	$3.794E-8$	$1.063E-4$	$2.975E-1$	$8.328E+2$
2800	$3.507E-8$	$1.053E-4$	$3.157E-1$	$9.469E+2$
3000	$3.351E-8$	$1.073E-4$	$3.431E-1$	$1.098E+3$
3200	$3.058E-8$	$1.010E-4$	$3.331E-1$	$1.099E+3$
3300	$2.944E-8$	$1.001E-4$	$3.403E-1$	$1.157E+3$
3400	$2.793E-8$	$9.648E-5$	$3.334E-1$	$1.152E+3$
3455	$2.713E-8$	$9.494E-5$	$3.323E-1$	$1.163E+3$
3500	$2.696E-8$	$9.704E-5$	$3.494E-1$	$1.258E+3$
3600	$2.565E-8$	$9.488E-5$	$3.511E-1$	$1.299E+3$
3700	$2.382E-8$	$8.931E-5$	$3.350E-1$	$1.256E+3$
3750	$2.311E-8$	$8.780E-5$	$3.337E-1$	$1.268E+3$
3800	$2.241E-8$	$8.628E-5$	$3.322E-1$	$1.279E+3$
3850	$2.158E-8$	$8.416E-5$	$3.282E-1$	$1.280E+3$
3900	$2.078E-8$	$8.205E-5$	$3.241E-1$	$1.281E+3$
3950	$2.000E-8$	$7.997E-5$	$3.199E-1$	$1.280E+3$
4000	$1.924E-8$	$7.793E-5$	$3.156E-1$	$1.279E+3$
4050	$1.844E-8$	$7.557E-5$	$3.099E-1$	$1.271E+3$
4100	$1.756E-8$	$7.286E-5$	$3.024E-1$	$1.255E+3$
4150	$1.672E-8$	$7.022E-5$	$2.950E-1$	$1.239E+3$
4200	$1.611E-8$	$6.927E-5$	$2.979E-1$	$1.281E+3$
4300	$1.456E-8$	$6.404E-5$	$2.818E-1$	$1.240E+3$
4400	$1.280E-8$	$5.759E-5$	$2.592E-1$	$1.167E+3$
4500	$1.150E-8$	$5.401E-5$	$2.539E-1$	$1.194E+3$
4700	$8.868E-9$	$4.434E-5$	$2.217E-1$	$1.109E+3$

TABLE4.6. valeurs de $\vartheta(x)$

	a_0	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2
$1E+08$	0.99985	0.99998	0.00275	-0.00044	0.05062	-0.00851
$2E+08$	0.99989	0.99997	0.00201	-0.00065	0.03847	-0.01275
$3E+08$	0.99991	0.99998	0.00165	-0.00057	0.03256	-0.01131
$4E+08$	0.99993	0.99998	0.00124	-0.00049	0.02447	-0.00988
$5E+08$	0.99992	0.99998	0.00152	-0.00052	0.03039	-0.01061
$6E+08$	0.99994	0.99999	0.00103	-0.00038	0.02095	-0.00785
$7E+08$	0.99993	0.99998	0.00126	-0.00051	0.02577	-0.01054
$8E+08$	0.99994	0.99998	0.00110	-0.00044	0.02268	-0.00916
$9E+08$	0.99994	0.99998	0.00117	-0.00050	0.02398	-0.01050
$1E+09$	0.99995	0.99999	0.00096	-0.00021	0.02009	-0.00455
$2E+09$	0.99996	1.00000	0.00067	-0.00018	0.01427	-0.00401
$3E+09$	0.99997	1.00000	0.00062	-0.00015	0.01340	-0.00333
$4E+09$	0.99997	1.00000	0.00050	-0.00017	0.01087	-0.00390
$5E+09$	0.99997	1.00000	0.00046	-0.00018	0.01026	-0.00410
$6E+09$	0.99998	1.00000	0.00040	-0.00013	0.00900	-0.00313
$7E+09$	0.99998	1.00000	0.00045	-0.00018	0.01011	-0.00415
$8E+09$	0.99998	1.00000	0.00034	-0.00016	0.00774	-0.00367
$9E+09$	0.99998	1.00000	0.00037	-0.00010	0.00840	-0.00249
$1E+10$	0.99998	1.00000	0.00038	-0.00008	0.00876	-0.00203
$2E+10$	0.99998	1.00000	0.00025	-0.00006	0.00584	-0.00152
$3E+10$	0.99999	1.00000	0.00020	-0.00005	0.00473	-0.00122
$4E+10$	0.99999	1.00000	0.00018	-0.00007	0.00431	-0.00183
$5E+10$	0.99999	1.00000	0.00019	-0.00004	0.00458	-0.00119
$6E+10$	0.99999	1.00000	0.00015	-0.00006	0.00356	-0.00167
$7E+10$	0.99999	1.00000	0.00014	-0.00004	0.00338	-0.00117
$8E+10$	0.99999	1.00000	0.00011	-0.00006	0.00276	-0.00164
$9E+10$	0.99999	1.00000	0.00011	-0.00004	0.00262	-0.00114
$1E+11$	0.99999	1.00000	0.00014	-0.00002	0.00341	-0.00058
$2E+11$	0.99999	1.00000	0.00008	-0.00002	0.00206	-0.00057
$3E+11$	0.99999	1.00000	0.00007	-0.00001	0.00170	-0.00031
$4E+11$	0.99999	1.00000	0.00008	-0.00002	0.00188	-0.00061
$5E+11$	0.99999	1.00000	0.00006	-0.00001	0.00138	-0.00038
$6E+11$	0.99999	1.00000	0.00005	-0.00002	0.00131	-0.00070
$7E+11$	0.99999	1.00000	0.00006	-0.00001	0.00144	-0.00039

où les constantes satisfont pour $n \cdot 10^k \leq x \leq (n+1) \cdot 10^k$

$$\begin{aligned} \alpha_0 x &\leq \vartheta(x) \leq b_0 x \\ x - \alpha_1 \frac{x}{\ln x} &\leq \vartheta(x) \leq x + b_1 \frac{x}{\ln x} \\ x - \alpha_2 \frac{x}{\ln x} &\leq \vartheta(x) \leq x + b_2 \frac{x}{\ln x} \end{aligned}$$

jusqu'à $8 \cdot 10^{11}$.

TABLE 4.7. valeurs de p_k et $\vartheta(p_k)$.

	a_8	b_8	a_3	b_3	a_4	b_4
$1E+08$	2.07947	2.07516	0.95665	0.95433	2.07207	2.03783
$2E+08$	2.07517	2.07280	0.95517	0.95405	2.06330	2.04341
$3E+08$	2.07281	2.07122	0.95493	0.95379	2.06236	2.04535
$4E+08$	2.07123	2.07005	0.95459	0.95403	2.06210	2.05123
$5E+08$	2.07006	2.06909	0.95448	0.95357	2.06053	2.04534
$6E+08$	2.06910	2.06833	0.95448	0.95374	2.06271	2.05150
$7E+08$	2.06834	2.06767	0.95421	0.95342	2.05976	2.04701
$8E+08$	2.06768	2.06710	0.95411	0.95342	2.05999	2.04871
$9E+08$	2.06711	2.06660	0.95395	0.95336	2.05808	2.04762
$1E+09$	2.06661	2.06350	0.95409	0.95319	2.06243	2.04925
$2E+09$	2.06351	2.06183	0.95355	0.95311	2.05913	2.05126
$3E+09$	2.06184	2.06070	0.95336	0.95297	2.05821	2.05036
$4E+09$	2.06071	2.05985	0.95322	0.95295	2.05684	2.05159
$5E+09$	2.05986	2.05917	0.95314	0.95288	2.05600	2.05103
$6E+09$	2.05918	2.05862	0.95313	0.95287	2.05643	2.05149
$7E+09$	2.05863	2.05815	0.95305	0.95276	2.05517	2.04994
$8E+09$	2.05816	2.05774	0.95300	0.95283	2.05489	2.05168
$9E+09$	2.05775	2.05739	0.95300	0.95277	2.05540	2.05073
$1E+10$	2.05740	2.05515	0.95301	0.95264	2.05571	2.04968
$2E+10$	2.05516	2.05395	0.95283	0.95263	2.05364	2.04983
$3E+10$	2.05396	2.05313	0.95275	0.95262	2.05225	2.04964
$4E+10$	2.05314	2.05252	0.95272	0.95260	2.05143	2.04899
$5E+10$	2.05253	2.05203	0.95272	0.95258	2.05127	2.04869
$6E+10$	2.05204	2.05163	0.95269	0.95260	2.05060	2.04875
$7E+10$	2.05164	2.05129	0.95270	0.95260	2.05060	2.04865
$8E+10$	2.05130	2.05099	0.95267	0.95262	2.04978	2.04877
$9E+10$	2.05100	2.05073	0.95269	0.95262	2.04982	2.04879
$1E+11$	2.05074	2.04910	0.95271	0.95259	2.05014	2.04734
$2E+11$	2.04911	2.04821	0.95273	0.95266	2.04851	2.04668
$3E+11$	2.04822	2.04761	0.95276	0.95270	2.04775	2.04621
$4E+11$	2.04762	2.04716	0.95278	0.95271	2.04692	2.04601
$5E+11$	2.04717	2.04680	0.95282	0.95276	2.04670	2.04579
$6E+11$	2.04681	2.04651	0.95283	0.95279	2.04617	2.04543
$7E+11$	2.04652	2.04625	0.95286	0.95280	2.04597	2.04524

où les constantes satisfont pour $n \cdot 10^m \leq x \leq (n+1) \cdot 10^m$

$$\begin{aligned}
k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \alpha_8}{\ln k}) &\leq \vartheta(p_k) \leq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - b_8}{\ln k}) \\
k(\ln k + \ln_2 k - \alpha_8) &\leq p_k \leq k(\ln k + \ln_2 k - b_3) \\
k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \alpha_4}{\ln k}) &\leq p_k \leq k(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - b_4}{\ln k})
\end{aligned}$$

jusqu'à $8 \cdot 10^{11}$.

TABLE 4.8. valeurs de p_k et $\vartheta(p_k)$.

	a_5	b_5	a_6	b_6	a_7	b_7
$1E+08$	1.12379	1.13015	2.36474	2.40986	1.06139	1.06514
$2E+08$	1.12113	1.12429	2.35944	2.38213	1.06022	1.06184
$3E+08$	1.11922	1.12158	2.35351	2.37715	1.05917	1.06074
$4E+08$	1.11802	1.11954	2.35815	2.36977	1.05878	1.05964
$5E+08$	1.11642	1.11818	2.34796	2.36727	1.05793	1.05906
$6E+08$	1.11556	1.11706	2.35087	2.36678	1.05756	1.05858
$7E+08$	1.11455	1.11587	2.34345	2.36058	1.05696	1.05793
$8E+08$	1.11363	1.11492	2.34295	2.35791	1.05656	1.05745
$9E+08$	1.11327	1.11405	2.34153	2.35399	1.05647	1.05700
$1E+09$	1.10903	1.11346	2.33374	2.35650	1.05441	1.05673
$2E+09$	1.10679	1.10928	2.33043	2.34118	1.05336	1.05467
$3E+09$	1.10527	1.10683	2.32501	2.33314	1.05265	1.05342
$4E+09$	1.10395	1.10535	2.32169	2.32929	1.05195	1.05272
$5E+09$	1.10306	1.10408	2.31900	2.32487	1.05152	1.05208
$6E+09$	1.10226	1.10314	2.31746	2.32381	1.05114	1.05162
$7E+09$	1.10150	1.10234	2.31325	2.32076	1.05074	1.05124
$8E+09$	1.10096	1.10161	2.31378	2.31816	1.05049	1.05084
$9E+09$	1.10054	1.10103	2.31191	2.31673	1.05034	1.05057
$1E+10$	1.09706	1.10062	2.30164	2.31683	1.04856	1.05041
$2E+10$	1.09520	1.09708	2.29665	2.30469	1.04764	1.04858
$3E+10$	1.09396	1.09524	2.29308	2.29816	1.04703	1.04767
$4E+10$	1.09295	1.09398	2.28955	2.29441	1.04651	1.04706
$5E+10$	1.09220	1.09298	2.28817	2.29108	1.04616	1.04655
$6E+10$	1.09157	1.09223	2.28576	2.28917	1.04585	1.04619
$7E+10$	1.09100	1.09158	2.28458	2.28741	1.04556	1.04587
$8E+10$	1.09050	1.09102	2.28282	2.28500	1.04531	1.04558
$9E+10$	1.09010	1.09052	2.28203	2.28347	1.04511	1.04532
$1E+11$	1.08738	1.09012	2.27312	2.28311	1.04375	1.04514
$2E+11$	1.08583	1.08739	2.26810	2.27413	1.04297	1.04377
$3E+11$	1.08477	1.08585	2.26471	2.26852	1.04244	1.04299
$4E+11$	1.08398	1.08478	2.26238	2.26507	1.04205	1.04245
$5E+11$	1.08335	1.08399	2.26052	2.26261	1.04174	1.04206
$6E+11$	1.08281	1.08337	2.25875	2.26085	1.04147	1.04175
$7E+11$	1.08236	1.08282	2.25747	2.25901	1.04124	1.04148

où les constantes satisfont pour $n \cdot 10^k \leq x \leq (n+1) \cdot 10^k$

$$\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{\alpha_5}{\ln x}\right) < \pi(x) \leq \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{b_5}{\ln x}\right)$$

$$\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{\alpha_6}{\ln^2 x}\right) \leq \pi(x) \leq \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{b_6}{\ln^2 x}\right)$$

$$\frac{x}{\ln x - \alpha_7} \leq \pi(x) \leq \frac{x}{\ln x - b_7}$$

jusqu'à $8 \cdot 10^{11}$.

Conclusion

L'étude de l'estimation des fonctions de Tchebychef $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$ sur le k – ième nombre premier qu'équivalent à hyporthèses sur $\pi(x)$ a fait l'objet de plusieurs articles .

Nous citerons ceux de J.B Rosser et L.Schoenfeld , G.Roben ,P.Dusart , a dans l'article de base amélioré sensiblement les résultats de ces auteurs , en donnant des encadrements explicites de p_k et de $\vartheta(p_k)$.

Nous avons repris les résultats de celui-ci et détaillé les démonstrations .Nous sommes inspirés des méthodes et des idées développées par les auteurs cités précédemment pour prouver certains de ces résultats d'une autre façons ,cependant , les résultats que nous avons obtenus n'ont pas apporté d'améliorations pour le moment . notre ambition dans la suite de notre travail de recherche dans le cadre du doctorat est de préciser et d'améliorer quelques-uns des résultats dûs à P.Dusart.

Bibliographie

- [1] P. DUSART, " Estimates of some functions over primes without .RH." arxiv .
- [2] B. P. Haert, "Irregularities in the Distribution of Primes and Twin Primes", Math. Of Computation, Vol. 29, Number 129 (January 1975) pp. 43-36.
- [3] E. CESARO, Sur unse formule empirique de M. Pervoachine", Comptes rendus hebdo, des séances de l'académie des sciences, Vol. CXIX, (1895) pp. 848-849
- [4] M. DRLÉGLISE & J. RIVAT " Computing $\pi(x)$: The Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko method " Math. Of Computation, Vol. 65, Number 213 (January 1996), pp. 235-245.
- [5] M. DELÉGLISE & J. RIVAT" Computing $\psi(x)$ ", Math. Of Computation, Vol. 67. Number 224(October 1998), pp. 1691-1696,
- [6] P. Desart. The prime is greater than $k(k + \ln k - 1)$ for $k \geq 2^n$, Math. Of Computation, Vol. 68, Number 225 (January 1999), pp. 411-415.
- [7] P. Desart, "Estimates of $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$, for large values of x without R.H.", submitted.
- [8] W. J. ELLISON, "Les nombres premiers", Publications de l'institut de Mathématique de l'université de Nancago, IX, Hermann (1975).
- [9] X. Gourden, "The 10^{13} first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height, 2001, [http ://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazerosie13-1024.pdf](http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazerosie13-1024.pdf)
- [10] H. KADRI, "Une région explicite sans zéro pour la fonction Zeta de Riemann", (2004), [http ://arxiv.org/abs/math.NT/0401238](http://arxiv.org/abs/math.NT/0401238)
- [11] J. VAN DE LUNE, H. J. J. TE RIELE & D.T. WINTER, "On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip IV", Math. Of Computation, Vol. 46, Number 174 (April 1986) pp. 667-681.
- [12] JEAN-PIERRE MASSIAS & GUY Robin, "Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombees premiers", Journal Th. Nombres de Bordeaux, Vol. 8 (1996) pp. 213-238.
- [13] N. COSTA PEREIRA, "Estimates for the Chebyshev Function $\psi(x) - \vartheta(x)$ ", Math. Of Computation, Vol. 44, Number 160 (January 1965) pp. 211-221.
- [14] O. RAMARE & Y. SAOUTER, "Short effective intervals containing primes", Journal of Number Theory, vul. 98 (2003) pp. 10-33. for Factorization", Birkhäuser (1985)
- [15] HANS RIESEL, "Prime Numbers and Computer Methods [16] Guy Rosis, "Estimation de la fonction de Tchebycheff ϑ sur le me nombre prensier et grandes valeurs de la fonctions $\omega(n)$, nombre de diviseurs premiers de n ", Acta Arithmetion, vol. 42, numéro 4 (1983) pp. 367-389.

- [17] Guy Robin, "Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques", Publications de l'institut mathématique, tome 43 (57), (1988) pp. 17-25.
- [18] BARKLEY Rossam, "The n -th prime is greater than $n \log n$ ", PLMS 45 (1939) pp. 21-44.
- [19] BARKLEY Rossen, "Explicit bounds for some functions of prime numbers", Amer. J. Math. 63 (1941) pp. 211-232.
- [20] J. BARKLEY ROSSER & L. SCHOENVELD, "Approximates Formulas for Some Functions of Prime Numbers", Illinois Journal Math. 6 (1962) pp. 64-94.
- [21] J. BARKLEY ROSSER & L. SCHOENFELD, "A Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\psi(x)$ and $\vartheta(x)$ ", Math. Of Computation, Vol. 29, Number 129 (January 1975) pp. 243-260.
- [22] BRUNO SALINY, "Fast computation of some asymptotic functional inverses", Preliminary Version, (July 1992).
- [23] LOWELL SCHOENFELD, "Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\psi(x)$ and $\vartheta(x)$.II", Math. Of Computation, Vol. 30, Number 134 (April 1976) pp. 337-360,
- [24] WEDESOWSK, <http://www.zetagrid.net/zeta/th.html>
- [25] T. M. APOSTOL. Introduction to analytic Number theory. Undergradurt teztz in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [26] D. HADAMARD, J. Sur la distribution des zéros de la fotation $\zeta(s)$ séquences arithmétiques. Bull. Soc Math. France, 24 : (1896), pp. (199-223)
- [27] LA VALLÉE POUSSIN. - Ch de la (1896) Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 202 : 183-256, 281-297.
- [28] A. E. Ingham The Distribution of Prime Numbes Cambridge Tract No. 36, 1932 London.
- [29] M. CIPOLLA, "La determinazione assintotica dell $n^{imo}numeroprime$ ", *MatematicheNapoli*, Vol.3, (1902)pp.132 – 106.
- [30] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT. An introduction to the theory of numbres, Oxford 1960.
- [31] T. m. APOSTOL Intrduction to analytic Number theory .Undergradurt texts in Mathematics .Springer - verlag , New York 1976.