

Université d' El Oued
Faculté des Sciences Exactes
Département des Mathématiques

Introduction à la Théorie des Distributions et l'Analyse de Fourier

Réalisé par :

NISSE KHADIDJA

2022/2023

Table des matières

1	Rappels sur l'intégration au sens de Lebesgue et les espaces L^p	4
1.1	Queques résultats sur les fonction intégrables	4
1.2	Les espaces L^p	11
1.3	Les espaces L^p_{loc}	15
2	Espaces de Fonctions et Propriétés	18
2.1	Les espaces $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$	19
2.2	Les espaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$ ($0 \leq k \leq \infty$)	19
2.2.1	La topologie de $\mathcal{C}^k(\Omega)$	20
2.2.2	Les espaces $\mathcal{D}^k(\Omega)$	24
2.3	L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$	25
2.3.1	Notions et exemples	25
2.3.2	Premières propriétés	27
2.3.3	La convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$	30
2.4	Partition de l'unité et densité	32
2.4.1	Produit de convolution	32
2.4.2	Partition de l'unité	34
2.4.3	Théorèmes de densité	37
3	Les Distributions	42
3.1	Définitions et Exemples	42
3.1.1	Exemples	44

3.2	La convergence dans $D'(\Omega)$	48
3.3	Support d'une distribution	51
3.4	Distributions à support compact	54
4	Opérations sur les distributions	60
4.1	Dérivation d'une Distribution	60
4.2	Multiplication par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$	68
4.2.1	Exemples	70
4.3	Restriction d'une distribution	73
4.4	Autres opérations	75
4.4.1	Translation d'une distribution	75
4.4.2	Dilatation d'une distribution	75
4.5	Convolution des distributions	76
5	Transformation de Fourier	83
5.1	Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	83
5.1.1	Exemples	86
5.1.2	Transformation de Fourier et convolution	90
5.1.3	Inversion de la transformation de Fourier	90
5.2	Un aperçu sur la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	92
5.3	Transformation de Fourier des fonctions à plusieurs variables	94
5.4	La transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz	95
5.4.1	L'espace de Schwartz : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	95
5.4.2	Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	102
5.5	Les distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	105
5.6	La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	111
	Bibliographie	114

Introduction

La théorie des distributions généralise les fonctions et fournit de plus, un cadre approprié pour de nombreux concepts, là où la notion de fonctions usuelles échoue, ou est trop restrictive.

La notion de fonction usuelle, rencontre pas mal de limitations, et ne répond pas à plusieurs exigences en pratique. Par exemple la distribution (au sens physique) de charge dans un fil $[0, L]$, peut être modélisée par une fonction $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

La charge totale est alors $\int_0^L f(x)dx$. On suppose que la charge totale est égale à 1 et toute la charge est concentrée en un point $x_0 \in [0, L]$. Or, il n'existe pas de fonction f telle que $\int_0^L f(x)dx = 1$ et $f = 0$ presque partout sur $[0, L]$!

En effet, dans ce cas, la charge est représenté par, comme l'appelle les physiciens, "fonction" de Dirac en x_0 : δ_{x_0} . En fait, c'est une distribution qui n'est même pas une distribution associée à une fonction, mais, comme l'appelle les mathématiciens, une distribution singulière.

C'est la théorie des distributions, qui propose un cadre rigoureux et suffisamment générale, qui permet entre autres, d'inclure à la fois, les fonctions usuelles et ce nouveau objet δ_{x_0} .

L'une des principales motivations dans la théorie des distributions est la généralisation de la notion de dérivée pour les fonctions "non dérivables". Ce qui permet à son tour, d'aborder les problèmes différentielles avec moins de restrictions sur la régularité. Dans ce contexte, on considère l'équation des ondes dans $\mathbb{R}$:

$$(PB) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \end{cases}$$

Si f est régulière ($f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$), alors la solution de (PB) est donnée par :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)]$$

Or, cette formule a un sens, même si $f \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, et il sera mieux, si on peut considérer cette formule comme solution de (PB) dans un sens à préciser. C'est l'une des réalisations les plus importantes de la théorie des distributions. En effet, sachant qu'on peut dériver une distribution autant de fois que l'on veut, en mettant (PB) dans le cadre des distributions (Considérer f et u comme distributions régulières associées aux fonctions f et u respectivement et non pas des fonctions usuelles), on a plus besoin de conditions de régularités sur f . L'idée ici, dû à L. Schwartz, est basée sur le fait, que la dérivation au sens des distributions, est reporter par dualité, sur les fonctions tests, qui sont suffisamment régulières par définition.

Le contenu de ce pycopié de cours porte sur une introduction à la théorie des distributions et l'analyse de Fourier. Il est destiné aux étudiants de la première année master en mathématiques. Il peut servir aussi les enseignants de cette matière ou d'autres matières liées.

Ce document est organisé en cinq chapitres. Étant donné que le matériel scientifique traité dans ce pycopié est profond et nécessite beaucoup de résultats, en particulier dans la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue, nous avons estimé qu'il sera utile de présenter un chapitre à ce propos. Ceci a fait l'objet du premier chapitre intitulé : "Rappels sur l'intégration au sens de Lebesgue et les espaces L^p ".

Dans un deuxième chapitre intitulé "Espaces de fonctions et propriétés", On a abordé les espaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$ et on a présenté leur topologie. On s'est intéressé d'une manière particulière de l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$, où on a précisé le sens de convergence dans cet espace, et ces importantes propriétés. On a introduit aussi le produit de convolution de deux fonctions, la partition de l'unité et les théorèmes de densités.

Le troisième chapitre intitulé : "Introduction à la théorie des Distributions", est consacré à la définition et les premiers exemples sur les distributions. On a ensuite précisé le sens de convergence dans cet espace et sa relation avec d'autres types de convergence pour les distributions régulières. On a introduit aussi l'espace des distributions à support compact et on a donné le résultat de son identification avec le dual topologique de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables.

Le quatrième chapitre intitulé : "Opérations sur les distributions", est consacré à introduire les importantes opérations sur les distributions : dérivation, multiplication par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, convolution et d'autres (moins importantes) tel que la translation et la dilatation.

Le dernier chapitre, intitulé : "Transformation de Fourier : Fonctions et distri-

butions”, comme son nom l’indique, est destiné à l’étude de la transformée de Fourier. On l’a commencer par un exposé détaillé de cette théorie pour les fonctions intégrable sur $\mathbb{R}$. On a donné ensuite un aperçu sur l’extension de cette théorie dans $L^2(\mathbb{R})$. Je tiens à noter ici, que ce choix pour les fonctions à une seule variable, est dû à des raisons à ne pas alourdir les notations. Cependant, on a résumé l’approche de la transformée de Fourier pour les fonctions à plusieurs variables. Avant de définir la transformée de Fourier pour les distributions, on a introduit le plus grand sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^n)$, stable par cette transformée : c’est l’espace de Schwartz. On a ensuite défini un type de distributions, intermédiaire entre les distributions et les distributions à support compact, et qui convient pour définir la transformée de Fourier : ce sont les distributions tempérées. On a enfin introduit la transformée de Fourier pour une distribution tempérée.

Chapitre 1

Rappels sur l'intégration au sens de Lebesgue et les espaces L^p

Dans ce chapitre nous rappelons quelques résultats de la théorie de l'intégrations au sens de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ et les espaces L^p ($1 \leq p \leq \infty$) qui sont indispensables par la suite. Les preuves sont omises dans ce chapitre, le lecteur intéressé peut consulter [3, 2].

1.1 Quelques résultats sur les fonction intégrables

Avant de donner quelques résultats d'intégration, nous commençons par un rappel très bref sur l'intégrale au sens de Lebesgue d'une fonction mesurable. On considère dans toute cette section (E, Σ, μ) un espace mesuré.

Intégrale d'une fonction simple positive

On note par $\mathcal{S}_+$, l'ensemble des fonctions simples de E dans $\mathbb{R}$ ne prenant que des valeurs positives ou nulles :

$$f \in \mathcal{S}_+ \iff f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i} \quad (a_i \geq 0)$$

où : $A_i \in \Sigma$ ($i = 1, \dots, m$) tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, et χ_{A_i} est la fonction caractéristique de A_i .

Notons que toute fonction simple est mesurable.

Définition 1.1.

On définit l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{S}_+$, par :

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) \in [0, +\infty]$$

Si $f = 0$, on pose $\int f d\mu = 0$.

Propriétés 1.2.

Soit $f, g \in \mathcal{S}_+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Alors :

- (i) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}_+$ et $\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$ (Linéarité positive)
- (ii) Si $f \leq g$, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ (Monotonie)
- (iii) Pour tout $f \in \mathcal{S}_+$, on a :

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu, g \in \mathcal{S}_+, g \leq f \right\}$$

Intégrale d'une fonction mesurable positive

On note par $\mathcal{M}_+$, l'ensemble des fonctions mesurables positives.

Pour définir l'intégrale d'une fonction $f : E \rightarrow [0, +\infty] \in \mathcal{M}_+$, on utilise un procédé d'approximation justifié par le lemme suivant.

Lemme 1.3.

Soit $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Alors, il existe une suite de fonctions simples positives croissante $\{f_n\}_{n \geq 1}$ qui converge simplement vers f , ç.à.d.

- (i) $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in E$

Définition 1.4.

Soit $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. On définit l'intégrale de f par :

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

où $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{S}_+$, croissante qui converge simplement vers f .

Si $A \in \Sigma$, alors on définit $\int_A f d\mu$ par

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu$$

Propriétés 1.5.

Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Alors :

(i) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_+$ et $\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$ (Linéarité positive)

(ii) Si $f \leq g$, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ (Monotonie)

(iii) Pour tout $f \in \mathcal{M}_+$, on a :

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu, g \in \mathcal{S}_+, g \leq f \right\}$$

(iv) Si $f = g$ μ - p.p. alors $\int f d\mu = \int g d\mu$, en particulier, si $f = 0$ μ - p.p.

$$\text{alors } \int f d\mu = 0$$

(v) Si $\int f d\mu < \infty$ alors $f < +\infty$ μ - p.p

Théorème 1.6. (Convergence monotone)

Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives et croissante, tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. Alors f est mesurable et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Exemple 1.7.

On considère la suite de fonctions réelles définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$), par : $f_n(x) = \chi_{[0,1]}(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$.

Pour tout $n \geq 1$, f_n est mesurable comme étant produit de deux fonctions mesurables : $\chi_{[0,1]}$ qui est une fonction simple et $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ qui est continue, donc mesurable. Il est clair que $f_n \geq 0$. Montrons maintenant que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ est croissante.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ : \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + n \left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!} \left(\frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} x^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} x^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} x^3 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} x^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

Pour $x \in [0, n] \subset [0, n+1]$, on a :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} e^{-2x} = f_{n+1}(x)$$

Pour $x \in]n, n+1]$, on a :

$$f_n(x) = 0 < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} e^{-2x} = f_{n+1}(x)$$

Pour $x < 0$ ou bien $x \in]n+1, +\infty[$, on a :

$$f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1 : f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \chi_{[0, +\infty[}(x) e^{-x} := f(x)$$

Donc toutes les conditions du Théorème 1.6 sont satisfaites, ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dm = \int f dm \\ &= \int \chi_{[0, +\infty[}(x) e^{-x} dm \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \end{aligned}$$

Remarque 1.8.

- (i) Le Théorème 1.6 ne s'applique pas lorsque $\{f_n\}_{n \geq 1}$ est décroissante (au lieu de croissante). En effet, $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[n, +\infty[}$ est un contre exemple.
- (ii) Le résultat du Théorème 1.6 reste valable quand $\{f_n\}_{n \geq 1}$ est décroissante, si de plus $\int f_1 d\mu < \infty$.

Lemme 1.9. (de Fatou)

Soit $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}_+$.

On pose pour tout $x \in E : f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{p \geq n} f_p(x) \right) \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et de plus :

$$\int f d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{p \geq n} \int f_p d\mu \right)$$

Fonctions intégrables

Nous allons maintenant étendre la notion d'intégrabilité aux fonctions à valeurs réelles de signe quelconque.

Soit f une fonction mesurable à valeurs réelles. On note par f^+ et f^- les fonctions suivantes :

$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = \max(-f, 0)$$

Remarque 1.10.

Notons que f^+ et f^- sont des fonctions mesurables, car f l'est, et à valeurs positives. De plus, on a les relations suivantes :

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Définition 1.11.

Soit f une fonction mesurable. On dit que f est intégrable et on note $f \in \mathcal{L}^1$ si

$$\int |f| d\mu < \infty \tag{1.1}$$

Dans ce cas, on pose :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \tag{1.2}$$

Remarque 1.12.

Notons que (1.1) implique que $\int f^+ d\mu$ et $\int f^- d\mu$ sont finis et par suite la relation (1.2) est bien définie.

Propriétés 1.13.

- (i) $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application $f \mapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.
- (ii) Si $f, g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$
- (iii) Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, on a : $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$
- (iv) L'application $f \mapsto \|f\|_1 := \int |f| d\mu$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1$.
- (v) Soit $f \in \mathcal{L}^1$, alors $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0 \mu - p.p.$
- (vi) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f = g \mu - p.p.$, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$

Théorème 1.14. (Convergence dominée dans $\mathcal{L}^1$)

Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions réelles intégrables définies sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que :

- (i) Il existe une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge presque partout vers f
(ii) Il existe une fonction intégrable $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que
 $\forall n \geq 1 : |f_n| \leq g$ presque partout.

Alors, f est intégrable et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Exemple 1.15.

On considère la suite de fonctions réelles définie sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), m)$ (mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$), par : $f_n(x) = \frac{1 + nx^3}{(1 + x^2)^n}$.

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1$ et $\forall x \in]0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Ainsi : f_n convergence vers zéro presque partout. De plus :

$$\forall x \in [0, 1] : (1 + x^2)^n \geq 1 + nx^3$$

ainsi :

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \geq 1 : |f_n(x)| \leq 1 := g$$

On a

$$\int_{[0,1]} g dm = \int_{[0,1]} 1 dm = m([0, 1]) = 1 < \infty$$

Par suite, $g \in \mathcal{L}^1([0, 1])$. Donc, d'après le Théorème 1.14, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1 + nx^3}{(1 + x^2)^n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n dm = 0$$

Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Théorème 1.16. (Continuité sous $\int$)

Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré et f une fonction définie sur $E \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

$$f(., t) \in \mathcal{L}^1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que :

- (i) L'application $f(x, .)$ définie pour presque tout $x \in E$ par : $t \mapsto f(x, t)$ est continue en t_0 pour presque tout $x \in E$.
(ii) Il existe $\epsilon > 0$ et $g \in \mathcal{L}^1$ tels que $|f(., t)| \leq g$ p.p., pour tout $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$

Alors F définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $F(t) = \int f(., t) d\mu = \int f(x, t) d\mu(x)$, est continue en t_0

Théorème 1.17. (*Dérivabilité sous $\int$*)

Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré et f une fonction définie sur $E \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

$$f(., t) \in \mathcal{L}^1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe $\epsilon > 0$, $A \in \Sigma$ et $g \in \mathcal{L}^1$, tels que $\mu(A) = 0$ et

- (i) L'application $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable pour tout $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ et pour tout $x \in A^C$
- (ii) $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$ pour tout $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ et pour tout $x \in A^C$.

Alors F définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $F(t) = \int f(., t) d\mu = \int f(x, t) d\mu(x)$, est dérivable en t_0 et on a :

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x)$$

Théorèmes de Tonelli et Fubini

Dans les théorèmes suivants, on considère Ω_1 et Ω_2 des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement et $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

Théorème 1.18. (*Théorème de Tonelli*)

On suppose que

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega_1$$

et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty,$$

alors $F \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Théorème 1.19. (*Théorème de Fubini*)

On suppose que $F \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$, on a :

$$F(x, y) \in \mathcal{L}_y^1(\Omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in \mathcal{L}_x^1(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$, on a :

$$F(x, y) \in \mathcal{L}_x^1(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in \mathcal{L}_y^1(\Omega_2)$$

1.2 Les espaces L^p

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx .

Soit $1 \leq p < \infty$. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors $|f|^p$ l'est aussi car $|f|^p = \varphi \circ f$ où φ est la fonction continue, donc mesurable définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^p$. La quantité $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx$ est donc bien définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 1.20.

On note par $\mathcal{L}^p(\Omega)$, l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, et qui vérifie :

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty$$

On note par $\mathbf{L}^p(\Omega)$, l'espace des classes de fonctions dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ qui sont égales presque partout. Plus précisément, on définit la relation d'équivalence $\sim$ dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par :

$$f \sim g \iff f = g \quad m - p.p.$$

et on définit $\mathbf{L}^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) / \sim$. On identifie la classe d'équivalence de $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ qui est un élément de $\mathbf{L}^p(\Omega)$ avec son représentant f .

Pour $f \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, on pose :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.3)$$

Théorème 1.21.

$\mathbf{L}^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) muni de $\|\cdot\|_{L^p}$ définie par (1.3) est un espace de Banach.

Définition 1.22.

$\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions mesurables telles qu'il existe $M > 0$ tel que $|f| \leq M$ p.p.. La borne inférieure de tous les M vérifiant cette propriété est noté par $\|f\|_{L^\infty}$:

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M : |f(x)| \leq M \quad p.p. \text{ sur } \Omega\} \quad (1.4)$$

On définit ensuite

$$\mathbf{L}^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^\infty(\Omega) / \sim$$

en identifiant les fonctions essentiellement bornées qui sont égales presque partout.

Théorème 1.23.

$\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{L^\infty}$ défini par (1.4), est un espace de Banach.

Remarque 1.24.

On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées, et on dit que $\|f\|_{L^\infty}$ est le Sup essentiel de f :

$$\text{Supess}(f) = \|f\|_{L^\infty}$$

Théorème 1.25.

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Théorème 1.26. (Inégalité de Hölder)

Soient $(1 \leq p \leq \infty)$ et q le conjuguée de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|f.g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Remarque 1.27.

Si $p = q = 2$ dans le Théorème 1.26, on obtient l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\int |f(x)g(x)| \leq \left(\int (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Corollaire 1.28. (Généralisation de l'inégalité de Hölder)

Soit $f_1, f_2, \dots, f_k$ des fonctions telles que :

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad (1 \leq i \leq k) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1,$$

alors, $f := f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ et de plus :

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_k\|_{p_k}$$

Théorème 1.29. (Théorème de convergence dominée dans L^p)

Soient $(1 \leq p < \infty)$ et $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite d'éléments dans L^p telle que :

(i) $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge presque partout vers f

(ii) Il existe une fonction $g \in L^p$ tel que

$$\forall n \geq 1 : |f_n| \leq g \text{ presque partout.}$$

Alors, $f \in L^p$ et $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge vers f dans L^p , c'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0$$

Remarque 1.30.

Le Théorème 1.29 ne s'applique pas pour $p = \infty$. En effet :

On considère la suite de fonctions réelles $\{f_n\}_{n \geq 1}$ définie sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), m)$ par : $f_n = \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$. On a pour tout $n \geq 1$:

$$\{M > 0 : |f_n(x)| \leq M \text{ p.p.}\} = [1, +\infty[$$

Ainsi :

$$\|f_n\|_{L^\infty} = \inf\{M > 0 : |f_n(x)| \leq M \text{ p.p.}\} = 1$$

De plus :

$$f_n \leq \chi_{[0,1]} \text{ p.p. } \forall n \geq 1 \text{ et } \chi_{[0,1]} \in L^\infty$$

D'autre part :

$$\forall x \in [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$

Donc toutes les hypothèses du Théorème 1.29 sont vérifiées, mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^\infty} = 1 \neq 0 = \|f\|_{L^\infty}$$

Théorème 1.31. (Réciproque partielle de la convergence dominée)

Soient $(1 \leq p < \infty)$ et $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite d'éléments dans L^p et $f \in L^p$. Si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge vers f dans L^p , alors :

- (i) Il existe $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ une suite extraite de $\{f_n\}_{n \geq 1}$ qui converge presque partout vers f
- (ii) Il existe une fonction $F \in L^p$ tel que $\forall k \geq 1 : |f_{n_k}| \leq F$ presque partout.

Théorème 1.32. (Comparaison entre les espaces L^p)

Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$, tels que $1 \leq p < q \leq \infty$ et E un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, mesurable et de mesure fini. ($m(E) < \infty$, m est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$).

Alors :

$$L^q(E) \subset L^p(E)$$

De plus, cette injection est continue :

$$\exists C_{p,q,m(E)} : \|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^q} \quad \forall f \in L^q(E)$$

Démonstration.

On distingue deux cas :

$$q < +\infty$$

Soit $f \in L^q$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$|f(x)|^p \leq |f(x)|^q \quad \text{si} \quad |f(x)| \geq 1$$

Donc

$$|f(x)|^p \leq |f(x)|^q + 1, \quad \forall x \in E$$

Ainsi :

$$\int |f(x)|^p dx \leq \int |f(x)|^q dx + m(E) \quad (1.5)$$

Le terme de droite dans (1.5) est fini, puisque $f \in L^q$ et $m(E) < +\infty$. Par suite $f \in L^p$, d'où $L^q \subset L^p$.

Montrons maintenant la continuité de l'injection.

(i) Si $\|f\|_{L^q} = 1$, alors d'après (1.5), on a :

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^q} \quad \text{avec} \quad C = (1 + m(E))^{\frac{1}{p}}$$

(ii) Si $\|f\|_{L^q} = 0$, alors $f = 0$ p.p. et par suite $\|f\|_{L^p} = 0$, d'où $\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^q}$

(iii) Si $\|f\|_{L^q} > 0$, on pose $f_1 = \frac{f}{\|f\|_{L^q}}$. Alors $\|f_1\|_{L^q} = 1$ et d'après (i), on a :

$$\|f_1\|_{L^p} \leq C \|f_1\|_{L^q}$$

c'est à dire

$$\frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^q}} \leq C \|f_1\|_{L^q} = C$$

d'où

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^q}$$

$q = +\infty$

Soit $f \in L^\infty$. Donc $|f| \leq \|f\|_{L^\infty}$ p.p., ainsi

$$|f|^p \leq \|f\|_{L^\infty}^p \quad \text{p.p.}$$

Donc

$$\int |f(x)|^p dx \leq \|f\|_{L^\infty}^p m(E) < +\infty$$

d'où $f \in L^p$ et de plus :

$$\|f\|_{L^p} \leq (m(E))^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}$$

□

1.3 Les espaces L_{loc}^p

Définition 1.33. (L'espace $L_{loc}^1(\Omega)$)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction réelle définie sur Ω . f est dite localement intégrable, et on note $f \in L_{loc}^1(\Omega)$, si elle est intégrable sur tout sous-ensemble borné et mesurable de Ω .

$$L_{loc}^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall K \subset \Omega \text{ avec } K \text{ borné et mesurable} : \int_K |f(x)| dx < \infty\}$$

Remarque 1.34.

Si $f \in L_{loc}^1(\Omega)$, alors pour tout compact K dans Ω (K est fermé et borné, donc mesurable et borné) :

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

La proposition suivante est une conséquence immédiate du résultat d'inclusion entre les espaces L^p .

Proposition 1.35.

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a :

$$L^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$$

Théorème 1.36.

Toute fonction continue sur Ω est localement intégrable, c.à.d.

$$\mathcal{C}(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$$

Démonstration.

Soient K un compact de Ω et $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Puisque toute fonction continue sur un compact est bornée, alors :

$$\exists M > 0 : f \chi_K \leq M \chi_K$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_K |f(x)| dx &= \int |f(x)| \chi_K(x) dx \\ &\leq \int M \chi_K(x) dx \\ &= M m(K) < \infty \quad (K \text{ est borné}) \end{aligned}$$

D'où, $f \in L_{loc}^1(\Omega)$.

□

Remarque 1.37.

Notons qu'en générale, une fonction continue sur Ω n'est pas forcément intégrable. Mais, si Ω est borné (de mesure finie), alors on a :

$$\mathcal{C}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$$

De même, on définit les espaces $L_{loc}^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.38. (*L'espace $L_{loc}^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$)*)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction réelle définie sur Ω . On note par $L_{loc}^p(\Omega)$, l'espace suivant :

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall K \subset \Omega \text{ avec } K \text{ borné et mesurable} : \int_K |f(x)|^p dx < \infty\}$$

Remarque 1.39.

$L_{loc}^p(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Soit $\{N_{p,K}\}_{K \in \mathcal{K}}$ la famille de semi-normes définie sur $L_{loc}^p(\Omega)$ par :

$$\forall f \in L_{loc}^p(\Omega) : N_{p,K}(f) = \left(\int_K |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.6)$$

où $\mathcal{K}$ est l'ensemble de tous les compacts de Ω .

$\{N_{p,K}\}_{K \in \mathcal{K}}$ génère une topologie sur $L_{loc}^p(\Omega)$ (localement convexe). Cette topologie, peut être aussi définie par une famille dénombrable de semi-normes définie par (1.6) avec $K \in \{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, où $K_j \subset K_{j+1}^\circ$ et $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$ (voir Lemme 2.7)

Proposition 1.40.

$L^p(\Omega)$ s'injecte continuellement dans $L_{loc}^p(\Omega)$.

Démonstration.

Soit $f \in L^p(\Omega)$. Pour tout compact K de Ω , on a :

$$|f|^p \chi_K \leq |f|^p$$

d'où

$$\int |f(x)|^p \chi_K(x) dx \leq \int |f(x)|^p dx$$

Ainsi :

$$\int_K |f(x)|^p dx \leq \int |f(x)|^p dx$$

Puisque $f \in L^p(\Omega)$, la terme de droite dans l'inégalité précédente est fini, et par suite $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. Donc $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ et de plus :

$$\forall K \text{ compact de } \Omega : N_{p,K}(f) \leq \|f\|_{L^p}$$

d'où, la continuité de l'injection. □

Remarque 1.41.

(i) Puisque tout compact de Ω est borné, donc de mesure fini, alors d'après le Théorème 1.32, on a :

$$\text{Si } p < q \text{ alors } L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$$

En particulier :

$$L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega), \quad \forall p > 1$$

(ii) En tenant compte de (i) et le résultat de la Proposition 1.40, on déduit :

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega), \quad \forall p \geq 1$$

Chapitre 2

Espaces de Fonctions et Propriétés

Notations

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-entier.

On appelle longueur de α et on note par $|\alpha|$, l'entier :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Si α et β sont deux multi-entiers, on dit que $\alpha \leq \beta$ si et seulement si $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

On pose

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!},$$

où la factorielle de α qu'on note par $\alpha!$ est définie par :

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On note $D^\alpha f$ la dérivée d'ordre α de f définie par :

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} f$$

2.1 Les espaces $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$

On note par $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k sur Ω , dont les dérivées d'ordre k sont continues et prolongeables par continuité à $\overline{\Omega}$. ç.à.d :

$$f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha f \text{ se prolonge continument à } \overline{\Omega}.$$

La topologie de $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ est définie par la norme :

$$\|f\|_k = \sup_{x \in \overline{\Omega}, |\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)| \quad (2.1)$$

Théorème 2.1.

$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|\cdot\|_k$ définie par (2.1), est espace de Banach.

2.2 Les espaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$ ($0 \leq k \leq \infty$)

Définition 2.2.

(i) On note par $\mathcal{C}^k(\Omega)$ l'espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k , dont les dérivées d'ordre k sont continues. ç.à.d :

$$f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha f \text{ existe et est continue}$$

(ii) On note par $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment continument dérivables. ç.à.d :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha f \text{ existe et est continue.}$$

Propriétés 2.3.

Soient $f, g \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Alors, $f + g$, fg , λf et $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$) appartiennent à $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Formules de Leibniz et Taylor avec reste intégrale

La formule suivante, dite de Leibniz, se démontre par récurrence, à partir de la formule de la dérivée d'un produit, qui est un cas particulier.

Proposition 2.4. (*Formule de Leibniz*)

Soient $k \geq 1$, $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a

$$D^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} \psi$$

Proposition 2.5. (*Formule de Taylor*)

Soient $k \geq 1$ et $\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega)$.

Pour tous $x, y \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset \Omega$, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \varphi(y) (x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{n}{\alpha!} (x-y)^\alpha \int_0^1 (1-t)^{k-1} D^\alpha \varphi(tx + (1-t)y) dt$$

Remarque 2.6.

(i) Dans le cas de la dimension 1 (c'est à dire pour, $\Omega \subset \mathbb{R}$), on a la formule suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{k!} \varphi^{(j)}(y) (x-y)^j + (x-y)^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k)}(tx + (1-t)y) dt$$

(ii) En dimension $n \geq 1$, et à l'ordre $k = 1$, on a la formule suivante :

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tx + (1-t)y) dt$$

2.2.1 La topologie de $\mathcal{C}^k(\Omega)$

Lemme 2.7.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$K_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq i\} \cap \left\{x \in \Omega : d(x, \Omega^C) \geq \frac{1}{i}\right\} \quad (2.2)$$

où d est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots (x_n - y_n)^2}$$

Alors :

(1) K_i est compact et $K_i \subset K_{i+1}^\circ$

(2) $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty K_i = \bigcup_{i=2}^\infty K_i^\circ$

(3) Pour tout compact K de Ω , il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_{i_0}$

Démonstration.

Il est claire d'après (2.2) que $K_i \subset B_f(0, i)$, donc K_i est borné.

D'autre part, l'application :

$$\begin{aligned} D : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, \Omega^C) \end{aligned}$$

est continue, et puisque :

$$K_i = B_f(0, i) \cap D^{-1} \left(\left[\frac{1}{i}, +\infty \right] \right)$$

donc K_i est fermé comme étant intersection de deux fermés. Par suite K_i est compact (borné et fermé dans $\mathbb{R}^n$).

De plus :

$$K_i \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < i + 1\} \cap \left\{ x \in \Omega : d(x, \Omega^C) > \frac{1}{i + 1} \right\} \subset K_{i+1}^\circ$$

Ce qui prouve (1).

Il est claire d'après (2.2), que $\bigcup_{i=1}^\infty K_i \subset \Omega$.

Soit $x \in \Omega$, il existe $i_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x| \leq i_x$.

D'autre part, $d(x, \Omega^C) > 0$ (car, sinon $d(x, \Omega^C) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{\Omega^C} = \Omega^C$).

Donc, il existe $i'_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x, \Omega^C) \geq \frac{1}{i'_x}$. Alors, $x \in K_{\max(i_x, i'_x)}$, par suite $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^\infty K_i$. D'où l'égalité. Ceci prouve (2).

Notons d'abord que puisque K est borné, on a :

$$\exists i_0 \in \mathbb{N}^* : K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq i_0\}$$

Puisque K est compact alors D est borné sur K et atteint ses bornes :

$$\exists x_0 \in K : \inf_{x \in K} d(x, \Omega^C) = d(x_0, \Omega^C)$$

Puisque $d(x_0, \Omega^C) > 0$, car $x_0 \in \Omega$, alors :

$$\exists i_1 \in \mathbb{N}^* : d(x_0, \Omega^C) \geq \frac{1}{i_1}$$

On a :

$$K \subset \left\{ x \in \Omega : d(x, \Omega^C) \geq \inf_{x \in K} d(x, \Omega^C) = d(x_0, \Omega^C) \geq \frac{1}{i_1} \right\}$$

Ainsi : $K \subset K_{\max(i_0, i_1)}$, ce qui prouve (3). □

Le Lemme 2.7, permet donc de définir la topologie de $\mathcal{C}^k(\Omega)$, de la manière suivante :

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{cases} P_i(f) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_i} |D^\alpha f(x)| & \text{si } f \in \mathcal{C}^k(\Omega), k \in \mathbb{N} \\ P_i(f) = \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in K_i} |D^\alpha f(x)| & \text{si } f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ satisfait les propriétés suivantes

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^k(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{R} : P_i(0) = 0, \quad P_i(\lambda f) = |\lambda| P_i(f) \quad \text{et} \quad P_i(f+g) \leq P_i(f) + P_i(g)$$

Notons que si $P_i(f) = 0$, alors $f = 0$ sur K_i , non pas sur Ω .

Par suite, $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de semi-normes sur $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Soit $\epsilon > 0$, $i \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. On note par $V_{i,\epsilon}(f)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}^k(\Omega)$, définit par

$$V_{i,\epsilon}(f) = \{g \in \mathcal{C}^k(\Omega) : P_i(f - g) < \epsilon\}$$

On dit que V est un voisinage de f et on note par $V(f)$, s'il existe $i \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon > 0$ tels que $V_{i,\epsilon}(f) \subset V(f)$.

On dit que $\Theta \subset \mathcal{C}^k(\Omega)$ est ouvert, si Θ est un voisinage de tous ces points. C'est la topologie de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ engendrée par la famille de semi-normes $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Proposition 2.8.

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (i) La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f pour la topologie engendrée par la famille de semi-normes $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$
- (ii) Pour tout $|\alpha| \leq k$ (tout α si $k = \infty$) et pour tout compact K de Ω , la suite $\{D^\alpha f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformément sur K vers $D^\alpha f$.

Démonstration.

Montrons que (i) implique (ii). On considère le cas le plus générale : $k = \infty$.

Soit $l \in \mathbb{N}$ et K compact de Ω . D'après le Lemme 2.7,

$\exists i_0 \in \mathbb{N}^* : K \subset K_{i_0}$. Posons $i = \max(l, i_0)$

Soit $\epsilon > 0$, on a $V_{i,\epsilon}(f)$ est un voisinage de f .

D'après (i),

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N : f_n \in V_{i,\epsilon}(f)$$

C'est à dire :

$$P_i(f_n - f) = \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in K_i} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f(x)| < \epsilon$$

Puisque $i \geq l$ et $K \subset K_i$, on a :

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f(x)| < \epsilon, \quad \forall n \geq N$$

Donc, $\{D^\alpha f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformément sur K vers $D^\alpha f$.

On suppose maintenant que (ii) est vérifié. D'après ce qui précède :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in K_i} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f(x)| < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$$

Ce qui implique que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in K_i} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f(x)| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} = \epsilon$$

Ainsi :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : D^\alpha f_n \in V_{i,\epsilon}(f)$$

D'où (i) est vérifié. □

Théorème 2.9.

La topologie de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ engendrée par la famille de semi-normes $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est métrisable. Plus précisément, en posant :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^k(\Omega) : d(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i(f - g)}{1 + P_i(f - g)}$$

est une distance sur $\mathcal{C}^k(\Omega)$ qui engendre la même topologie. De plus, $\mathcal{C}^k(\Omega)$ muni de cette distance est complet.

Remarque 2.10.

La topologie de $C^k(\Omega)$ n'est pas normable.

La convergence dans $C^\infty(\Omega)$

Soient $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite de $C^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. On dit que la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers φ dans $C^\infty(\Omega)$, si :

Pour tout compact K dans Ω , et tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi(x)| \right\} = 0$$

2.2.2 Les espaces $\mathcal{D}^k(\Omega)$

Définition 2.11. (*Support d'une fonction*)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur Ω . On appelle support de la fonction f , et on note par $\text{Supp} f$, l'ensemble suivant :

$$\text{Supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Remarque 2.12.

- (i) *$\text{Supp}(f)$ est le plus petit fermé qui contient l'ensemble des éléments où f est non nul.*
- (ii) *$f(x_0) = 0$ n'implique pas que $x_0 \notin \text{Supp}(f)$. Par exemple, pour $f = \chi_{]0,1[}$, on a $\text{Supp}(f) = \overline{]0,1[} = [0,1]$. Ainsi : $0, 1 \in \text{Supp}(f)$, bien que $f(0) = f(1) = 0$.*

Proposition 2.13.

Soit f une fonction définie sur Ω . Alors

- (i) *$x_0 \notin \text{Supp}(f) \iff \exists V_{x_0}$ (voisinage de x_0) tel que $f(x) = 0, \forall x \in V_{x_0}$*
- (ii) *$(\text{Supp}(f))^C$ est le plus grand ouvert où f est nulle.*

Démonstration.

Par définition (en tenant compte de la définition de l'adhérence), on obtient :

$$\begin{aligned} x_0 \in \text{Supp}(f) &\iff \forall V_{x_0} \text{ (voisinage de } x_0) : V_{x_0} \cap \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} \neq \emptyset \\ &\iff \forall V_{x_0} \text{ (voisinage de } x_0), \exists x \in V_{x_0} : f(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Ce qui n'est autre que le contre opposé de (i).

Il est claire que $(\text{Supp}(f))^C$ est ouvert (comme étant compément d'un fermé) qui contient des élément où f est nulle.

Si on suppose qu'il existe un ouvert Θ qui contient des élément où f est nulle tel que :

$$(\text{Supp}(f))^C \subset \Theta$$

Ceci implique que :

$$\Theta^C \subset \text{Supp}(f)$$

Donc Θ^C est un fermé qui contient des élément où f est non nulle et plus petit que $\text{Supp}(f)$. D'où la contradiction (Voir Remarque 2.12). $\square$

Il n'est pas difficile de verifier les propriétés suivantes.

Propriétés 2.14.

Soit f et g deux fonctions définies sur Ω . Alors, on a :

- (i) $\text{Supp}(f) = \emptyset \iff f(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega$
- (ii) $\text{Supp}(fg) \subset \text{Supp}f \cap \text{suppg}$
- (iii) Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ alors pour tout $i = 1, \dots, n : \text{Supp}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subset \text{Supp}(f)$

Définition 2.15.

On note par $\mathcal{D}^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $C^k(\Omega)$ à support compact.

2.3 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$

2.3.1 Notions et exemples

Dans la définition suivante et dans toute la suite, on garde les notations introduite dans la section ci-dessus.

Définition 2.16.

On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ et on l'appelle espace des fonctions test (ou fonctions d'essai), l'espace $\mathcal{D}^\infty(\Omega)$. Autrement dit :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{Supp}(f) \text{ est compact} \}$$

Notations et Conséquence

- (i) Soit K une partie compacte de Ω . On note par $\mathcal{D}_K(\Omega)$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support dans K :

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{Supp}(f) \subset K\}$$

(ii) Par conséquent, on a

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \exists K \text{ Compact}, K \subset \Omega, f \in \mathcal{D}_K(\Omega)\}$$

Exemple 2.17.

(i) Soit φ la fonction définie sur $\Omega = \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^2 + 1$. On a :

$$\text{Supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

Donc $\varphi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$, bien que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) Soit φ la fonction définie sur $\Omega =]-1, 1[$ par $\varphi(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap]-1, 1[}$. On a :

$$\begin{aligned} \text{Supp}(\varphi) &= \overline{\{x \in]-1, 1[: \varphi(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbb{Q} \cap]-1, 1[} \subset \overline{\mathbb{Q} \cap]-1, 1[} \\ &= \mathbb{R} \cap [-1, 1] = [-1, 1] \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Supp}(\varphi)$ est compact, mais il est connu que φ est discontinu. Donc $\varphi \notin \mathcal{D}([-1, 1])$

(iii) Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$, la fonction réelle φ définie sur $\mathbb{R}^n$ par la formule donnée ci-dessous, est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ avec $\text{Supp}(\varphi) = \overline{B(0, 1)}$, et par suite $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

où $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(iv) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et $\epsilon > 0$ tel que $B(x_0, \epsilon) \subset \Omega$. La fonction réelle φ définie sur Ω par la formule donnée ci-dessous, appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ avec $\text{Supp}(\varphi) = \overline{B_f(x_0, \epsilon)}$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\epsilon^2 - |x - x_0|^2}} & \text{si } |x - x_0| < \epsilon \\ 0 & \text{si } |x - x_0| \geq \epsilon \end{cases}$$

Remarque 2.18.

(i) Si $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$, où $]a, b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$, et

$$\forall x \in]a, \alpha[\cup]\beta, b[: \varphi(x) = 0$$

(ii) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors la fonction φ se prolonge par zéro à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, la fonction $\tilde{\varphi}$ définie par :

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Plus généralement, si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Omega \subset \mathcal{U}$, la fonction $\tilde{\varphi}$ définie par :

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{U} - \Omega \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{U})$.

2.3.2 Premières propriétés

L'Exemple 2.17 (iv), permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 2.19.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue sur Ω . On a :

$$\text{Si } \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega) \text{ alors } f = 0 \text{ sur } \Omega$$

Démonstration.

Raisonnant par l'absurde. On suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

Puisque f est continue, il existe alors un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que :

$$\forall x \in V_{x_0} : f(x) \neq 0$$

Ce qui implique, que :

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in B(x_0, \epsilon) : f(x) \neq 0$$

Notons que l'existence d'une telle boule ouverte, où f est de signe constant est garantie par la continuité de f . On suppose donc que $f(x) > 0$ sur $B(x_0, \epsilon)$ (le même raisonnement est valide pour $f(x) < 0$ sur $B(x_0, \epsilon)$).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donnée dans L'Exemple 2.17 (iv), avec $\varphi > 0$ et $\text{Supp}(\varphi) = B_f(x_0, \epsilon)$. Ainsi :

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = \int_{B_f(x_0, \epsilon)} f(x)\varphi(x)dx > 0$$

D'où la contradiction. □

Remarque 2.20.

Une généralisation de la Proposition 2.19 dans le cas où $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, est donnée par le Lemme de Dubois-Reymond.

Proposition 2.21.

(i) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$, et on note par $\varphi(\pm\infty) = 0$

- (ii) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
- (iii) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Démonstration.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $\text{Supp}(\varphi) \subset [-M, M]$, ($M > 0$). Donc :

$$\forall x > M, \quad \varphi(x) = 0$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

De même, on montre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$. Ce qui prouve (i).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On a $\text{Supp}(\varphi) \subset K$, où K est un compact de Ω .

D'abord, $f\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

D'autre part, d'après les Propriétés 2.14 (ii), on a :

$$\text{Supp}(fg) \subset \text{Supp}(f) \cap \text{supp}(g) \subset K$$

D'où fg est à support compact, et (ii) est prouvé.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il est clair que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. De plus les Propriétés 2.14 (iii) montre que $D^\alpha \varphi$ est à support compact. Ce qui prouve (iii). $\square$

Remarque 2.22.

La propriété (i) dans la Proposition 2.21, se généralise pour les fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^n$, comme suit :

$$\forall 1 \leq i \leq n : \quad \lim_{x_i \rightarrow \pm\infty} \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

Proposition 2.23.

- (i) $\exists \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \psi = \theta' \iff \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$
- (ii) $\exists \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \psi = x\theta \iff \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \psi(0) = 0$

Démonstration.

On suppose qu'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi = \theta'$.

Donc $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (puisque $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) et

$$\text{Supp}(\psi) = \text{Supp}(\theta') \subset \text{Supp}(\theta)$$

Par suite ψ est à support compact puisque θ l'est, d'où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^{+M} \theta'(x) dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} [\theta(M) - \theta(-M)] = 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$.

On pose :

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(x) dx$$

Il est clair que $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ puisque ψ l'est.

Montrons maintenant que θ est à support compact. Soit $\text{Supp}(\psi) \subset [-A, A]$. Alors :

Si $x < -A$:

$$\psi(x) = 0 \text{ et par suite } \theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(x) dx = 0$$

Si $x > A$:

$$\text{On a } \psi(x) = 0, \text{ donc : } \int_x^{+\infty} \psi(x) dx = 0$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^x \psi(x) dx + 0 \\ &= \int_{-\infty}^x \psi(x) dx + \int_x^{+\infty} \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Supp}(\theta) \subset [-A, A]$, d'où $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ceci achève donc la preuve de (i).

On suppose qu'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tel que : $\psi(x) = x \theta(x)$

Il est clair que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, comme étant produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De plus, on a :

$$\text{Supp}(\psi) \subset \text{Supp}(x) \cap \text{Supp}(\theta) \subset \text{Supp}(\theta)$$

Donc ψ est à support compact, et par suite $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il est clair que $\psi(0) = 0$.

On suppose maintenant que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 0$.

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 0 (Voir Proposition 2.5), on obtient :

$$\psi(x) = \psi(0) + x \int_0^1 \psi'(tx) dt = x\theta(x)$$

avec :

$$\theta(x) = \int_0^1 \psi'(tx) dt$$

Il est clair que $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, puisque ψ l'est.

D'autre part, on a :

$$\text{Supp}(\psi') \subset \text{Supp}(\psi) \subset [-A, A] \text{ pour un certain } A > 0$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > A$, on a : $\psi'(x) = 0$ et par suite $\theta(x) = 0$.

D'où $\text{Supp}(\theta) \subset [-A, A]$, et ainsi $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ceci, termine donc la preuve de (ii). $\square$

2.3.3 La convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 2.24.

On dit que la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si :

- (i) Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour tout $n \geq 1$: $\text{Supp}(\varphi_n) \subset K$ et $\text{Supp}(\varphi) \subset K$.
- (ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $(D^\alpha \varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers $D^\alpha \varphi$ uniformément sur K .

Autrement dit, $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si :

- (i) Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour tout $n \geq 1$: $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega)$.
- (ii) Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\text{pour tout } m \geq m_0, \text{ on a } \sup_{x \in K, |\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi_m(x) - D^\alpha \varphi(x)| < \epsilon$$

Exemple 2.25.

- (i) Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x)$. $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, comme étant produit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (la fonction constante $\frac{1}{n}$) et une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (la fonction φ). Montrons que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers $f = 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit K un compact tel que : $\text{Supp}(\varphi) \subset K$. On a alors :

$$\text{Supp}(f_n) = \text{Supp}(\varphi) \subset K, \quad \forall n \geq 1$$

et d'après (i) dans Propriétés 2.14, on a :

$$\text{Supp}(f) = \emptyset \subset K$$

D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{1}{n} \varphi \right)^{(k)}(x) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in K} |\varphi^{(k)}(x)| = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(k)})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $0 = f^{(k)}$ sur K . D'où $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers $f = 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(ii) Soient $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $(g_n)_{n \geq 1}$ la suite définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = \frac{1}{n} \psi(nx)$.

Notons que pour $\psi_n(x) := \psi(nx)$, on a $\psi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ comme étant composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De plus, si $\text{Supp}(\psi) \subset [-A, A]$, alors $\text{Supp}(\psi_n) \subset [-\frac{A}{n}, \frac{A}{n}]$, et par suite $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On déduit donc, avec une justification analogue à celle utilisé dans (i), que $g_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \psi(nx) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} C = 0 \end{aligned}$$

Où : $C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|$. C'est à dire que $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers zéro. Donc si la convergence uniforme a lieu, elle doit être encore vers $g = 0$.

D'abord, on a :

$$\text{Supp}(g_n) = \text{Supp}(\psi_n) \subset \left[-\frac{A}{n}, \frac{A}{n} \right] \subset [-A, A] := K, \quad \forall n \geq 1$$

Mais on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |g_n^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{1}{n} \psi(nx) \right)^{(k)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-1} \sup_{x \in K} |\psi^{(k)}(nx)| \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |g_n^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| = +\infty$$

Donc, la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'a pas lieu.

Remarque 2.26.

On déduit de l'Exemple 2.25. (ii) que la convergence simple n'implique pas la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

2.4 Partition de l'unité et densité

2.4.1 Produit de convolution

Définition 2.27.

Soit f et g deux fonctions mesurables et définies presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

Si la fonction $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que f et g sont convolvable et on note leur produit de convolution par $f * g$ qui est défini presque partout sur $\mathbb{R}^n$, par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$$

Propriétés 2.28.

Soit f et g deux fonctions mesurables, définies presque partout sur $\mathbb{R}^n$ et convolvable. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

- (i) $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$ (commutativité de la convolution)
- (ii) $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$, où $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$

Le théorème suivant, donne des conditions suffisantes pour que le produit de convolution soit bien défini.

Théorème 2.29.

Soient $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, Si la fonction $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable. Le produit de convolution $f * g$ est donc défini presque partout. De plus $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^1}$$

Remarque 2.30.

On déduit de (i) dans Propriétés 2.28, que la même conclusion du Théorème 2.29, reste valable, si on remplace $f * g$ par $g * f$, et de plus on a : $f * g = g * f$.

Proposition 2.31.

Soient f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $f * g$ est continue, et de plus, on a :

$$\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$$

Démonstration.

Une application directe du théorème de convergence dominée, donne la continuité de $f * g$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n - (\text{supp}(f) + \text{suppess}(g))$, on a :

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int f(x - y)g(y)dy \\ &= \int_{\text{suppess}(g)} f(x - y)g(y)dy + \int_{\text{suppess}(g)^C} f(x - y)g(y)dy \end{aligned}$$

Puisque $g = 0$ sur $\text{suppess}(g)^C$, alors la deuxième intégrale ci-dessus est nulle.

Pour calculer la première intégrale, on effectue le changement de variable $y' = x - y$ et on obtient :

$$\int_{\text{suppess}(g)} f(x - y)g(y)dy = \int_A f(y')g(x - y')dy'$$

où :

$$A = \{y' : x - y' \in \text{suppess}(g)\}$$

Notant que :

$$y' \in A \text{ implique que } y' \notin \text{Supp}(f) \quad (2.3)$$

En effet, si $y' \in A$, alors $x - y' \in \text{suppess}(g)$. Puisque $x = x - y' + y'$, l'hypothèse $x \notin (\text{supp}(f) + \text{suppess}(g))$, implique donc que $y' \notin \text{Supp}(f)$.

On déduit de (2.3), que la restriction de f à A est nulle. Par suite :

$$\int_{\text{suppess}(g)} f(x - y)g(y)dy = 0$$

Donc : $(f * g)(x) = 0$. Ainsi $f * g$ est nulle sur $(\text{supp}(f) + \text{suppess}(g))^C$. D'où :

$$\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{suppess}(g)}$$

□

Remarque 2.32.

Si $\text{supp}(f)$ ou $\text{suppess}(g)$ est compact, on peut montrer que $\text{supp}(f) + \text{suppess}(g)$ est fermé, et par suite, on a :

$$\overline{\text{supp}(f) + \text{suppess}(g)} = \text{supp}(f) + \text{suppess}(g)$$

Proposition 2.33.

Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^k$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées.

Alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a :

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$

Démonstration.

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$, la fonction $x \mapsto f(x-y)g(y)$ appartient à $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|D_x^\alpha (f(x-y)g(y))| = |(D^\alpha f)(x-y)g(y)| \leq \|f\|_\infty |g(y)|$$

Puisque $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, le résultat découle donc du théorème de dérivation sous le signe intégrale. $\square$

Le Corollaire suivant, résulte immédiatement de la Proposition 2.33.

Corollaire 2.34.

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, et de plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f) * g$$

2.4.2 Partition de l'unité

Nous commençons par un théorème qui donne un résultat très utile concernant la construction de certain type de fonctions test, dite "fonctions plateaux"

Théorème 2.35.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, K un compact de Ω et Θ un ouvert tel que $K \subset \Theta$ et $\overline{\Theta} \subset \Omega$.

Il existe alors une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que :

$$\varphi = 1 \text{ sur } K, \varphi = 0 \text{ sur } \Theta^c \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ sur } \Omega$$

Démonstration.

La preuve se fait en trois étapes.

1^{ère} étape

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\rho_\epsilon \geq 0, \text{ Supp}(\rho_\epsilon) \subset B_f(0, \epsilon) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x) dx = 1$$

En effet, considérons la fonction ρ_0 définie par :

$$\rho_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

(Voir les propriétés de ρ_0 dans l'Exemple 2.17 (iii)).

$$\text{On pose : } \rho(x) = \frac{\rho_0(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x) dx}, \quad \text{puis } \rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

On vérifie facilement que ρ_ϵ satisfait les conditions souhaités.

2^{ème} étape

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On pose :

$$K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq \epsilon\}$$

où d est la distance euclidienne.

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\theta_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\theta_\epsilon = 1 \text{ sur } K, \theta_\epsilon = 0 \text{ sur } K_{2\epsilon}^C \text{ et } 0 \leq \theta_\epsilon \leq 1$$

En effet, on définit θ_ϵ par :

$$\theta_\epsilon(x) = \int \rho_\epsilon(x-y) \chi_{K_\epsilon}(y) dy \quad (2.4)$$

Puisque $\int \rho_\epsilon(x) dx = 1$ et $0 \leq \chi_{K_\epsilon} \leq 1$, on obtient : $0 \leq \theta_\epsilon \leq 1$;
Maintenant, puisque $\rho_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha [\rho_\epsilon(x-y) \chi_{K_\epsilon}(y)]| &= |(D^\alpha \rho_\epsilon)(x-y) \chi_{K_\epsilon}(y)| \\ &\leq C_{\epsilon, \alpha} \chi_{K_\epsilon}(y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

où

$$C_{\epsilon, \alpha} = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |(D^\alpha \rho_\epsilon)(z)|$$

Ainsi, d'après le théorème de dérivation de Lebesgue, on déduit que $\theta_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nous allons utiliser l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |d(x, K) - d(y, K)| \leq d(x, y)$$

Si $x \in K_{2\epsilon}^C$, on a $d(x, K) > 2\epsilon$.

Dans l'intégrale de membre de droite de (2.4), on a :

$$y \in \text{Supp}(\chi_{K_\epsilon}) = K_\epsilon, \quad \text{c'est à dire} \quad d(y, K) \leq \epsilon$$

Donc

$$|x - y| = d(x, y) > \epsilon$$

D'où

$$x - y \notin \text{Supp}(\rho_\epsilon) \text{ et } \theta_\epsilon(x) = 0$$

Maintenant, puisque $\int \rho_\epsilon(x) dx = 1$, on a :

$$\begin{aligned} 1 &= \int \rho_\epsilon(x-y) \chi_{K_\epsilon}(y) dy + \int_{K_\epsilon^C} \rho_\epsilon(x-y) dy \\ &= \theta_\epsilon(x) + \int_{K_\epsilon^C} \rho_\epsilon(x-y) dy \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si $x \in K$ et $y \in K_\epsilon^C$, on a donc $d(x, K) = 0$ et $d(y, K) > \epsilon$, d'où $|x - y| > \epsilon$
Donc $x - y \notin \text{Supp}(\rho_\epsilon)$ et on déduit donc de (2.5) que $\theta_\epsilon(x) = 1$.

3^{ème} étape

Soit maintenant K et Ω comme dans l'énoncé. Nous allons montrer :

$$\exists \epsilon_0 \in]0, 1[\quad \text{tel que :} \quad K \subset K_{2\epsilon} \subset \Theta \quad (2.6)$$

En raisonnant par l'absurde, nous allons supposer que pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, il existe $x_\epsilon \in K_{2\epsilon}$ tel que $x_\epsilon \in \Theta^C$.

Or $K_{2\epsilon} \subset K_2$ qui est compact. Il existe donc une suite (x_{ϵ_j}) qui converge vers $x_0 \in K_2$.

Puisque $d(x_\epsilon, K) \leq 2\epsilon$, on a par continuité $d(x_0, K) = 0$, c'est à dire $x_0 \in K$.

D'autre part $(x_{\epsilon_j}) \subset \Theta^C$ qui est fermé, donc $x_0 \in \Theta^C$.

Ceci contredit le fait que $K \subset \Theta$, et prouve donc que (2.6) a lieu.

Maintenant, avec ϵ_0 qui vérifie (2.6), la fonction $\varphi = \theta_{\epsilon_0}$, où θ_{ϵ_0} est la fonction construite dans la 2^{ème} étape, répond à la question.

□

Lemme 2.36.

Soit K un compact inclu dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un ouvert θ , tel que :

$$K \subset \theta, \quad \bar{\theta} \subset \Omega, \quad \text{avec} \quad \bar{\theta} \quad \text{est compact}$$

Démonstration.

Il suffit de prendre :

$$\theta = \left\{ x \in \Omega : d(x, K) < \frac{\delta}{2} \right\}$$

où : $\delta = \min_{x \in K} d(x, \Omega^C)$

□

Théorème 2.37. (Partition de l'unité)

Soit K un compact inclu dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $K \subset \cup_{j=1}^p \Omega_j$ avec $(\Omega_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une famille finie d'ouverts inclus dans Ω . Alors il existe des fonctions $(\chi_j)_{1 \leq j \leq p}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, telles que :

$$\forall j = 1, \dots, p : 0 \leq \chi_j \leq 1, \quad \text{Supp}(\chi_j) \subset \Omega_j, \quad \text{et} \quad \forall x \in K : \sum_{j=1}^p \chi_j(x) = 1$$

Démonstration.

Soit $K_1 = K \setminus (\Omega_2 \cup \Omega_3 \dots \cup \Omega_p)$. Alors, K_1 est fermé et borné, donc compact. De plus, $K_1 \subset \Omega_1$. Donc, d'après le Lemme 2.36, il existe un ouvert θ_1 d'adhérence compacte, tel que :

$$K_1 \subset \theta_1 \quad \text{et} \quad \bar{\theta}_1 \subset \Omega_1$$

Puisque :

$$K \subset K_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \dots \cup \Omega_p,$$

alors :

$$K \subset \theta_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \dots \cup \Omega_p$$

Maintenant, on pose :

$$K_2 = K \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_3 \dots \cup \Omega_p) \subset \Omega_2$$

De même, en utilisant le Lemme 2.36, on construit un voisinage ouvert θ_2 de K_2 d'adhérence compacte, tel que $\overline{\theta_2} \subset \Omega_2$.

Alors :

$$K \subset \Omega_1 \cup \theta_2 \cup \Omega_3 \dots \cup \Omega_p,$$

d'où :

$$K \subset \theta_1 \cup \theta_2 \cup \Omega_3 \dots \cup \Omega_p$$

On construit donc par récurrence une suite d'ouverts $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$, d'adhérences compactes, tels que pour tout j , on a :

$$K \subset \theta_1 \cup \theta_2 \dots \cup \theta_j \cup \Omega_{j+1} \dots \cup \Omega_p$$

Pour tout $1 \leq j \leq p$, soit $\tilde{\chi}_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\text{Supp}(\tilde{\chi}_j) \subset \Omega_j$, $\tilde{\chi}_j = 1$ sur $\overline{\theta_j}$ et $0 \leq \tilde{\chi}_j \leq 1$

Pour obtenir le résultat cherché, on pose :

$$\chi_1 = \tilde{\chi}_1, \chi_2 = \tilde{\chi}_1(1 - \tilde{\chi}_2), \dots, \chi_j = \tilde{\chi}_1(1 - \tilde{\chi}_2) \dots (1 - \tilde{\chi}_j)$$

Il est claire que $0 \leq \chi_j \leq 1$ et $\text{Supp}(\chi_j) \subset \Omega_j$. De plus, on a :

$$1 - \sum_{j=1}^p \chi_j = \prod_{j=1}^p (1 - \tilde{\chi}_j) = 0 \quad \text{sur } K$$

D'où, le résultat. □

2.4.3 Théorèmes de densité

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $L_c^p(\Omega)$ l'espace suivant :

$$L_c^p(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \exists K \text{ compact de } \Omega : f = 0 \text{ sur } K^C\}$$

Notons que par le Théorème 1.32, $L_c^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, les deux propositions suivantes résultent immédiatement de Proposition 2.31 et Proposition 2.33.

Proposition 2.38.

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^p_c(\mathbb{R}^n)$ où $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $\varphi * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.39.

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$ où $k \in \mathbb{N}$. Alors $\varphi * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et de plus, on a :

$$D^\alpha(\varphi * f) = \varphi * D^\alpha f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq k$$

Définition 2.40. (Suites régularisantes)

On appelle suite régularisante dans $D(\mathbb{R}^n)$, toute suite $(f_j)_{j \geq 1} \subset D(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout $j \geq 1 : f_j \geq 0$.
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx = 1$
- (iii) $\text{Supp}(f_j) \subset B(0, \epsilon_j)$ avec $\lim_{j \rightarrow \infty} \epsilon_j = 0$

Exemple 2.41.

Pour toute fonction $0 \leq \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, on peut associé une suite régularisante $(f_j)_{j \geq 1}$ comme suit :

$$1. \text{ On pose : } f = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx} \varphi.$$

Il est claire que $f \in D(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ et $\text{Supp}(f) \subset B(0, 1)$

$$2. \text{ Soit maintenant } (\epsilon_j)_{j \geq 1} \text{ une suite telle que } \lim_{j \rightarrow \infty} \epsilon_j = 0 \quad \left(\epsilon_j = \frac{1}{1+j} \text{ par exemple } \right)$$

$$3. \text{ On pose : } f_j = \frac{1}{\epsilon_j^n} f\left(\frac{x}{\epsilon_j}\right)$$

Proposition 2.42.

Soient $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ une suite régularisante et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors la suite $(f_j)_{j \geq 1}$ définie par :

$$f_j = (\varphi_j * f) \quad \forall j \geq 1$$

vérifie les assertions suivantes :

- 1. $\forall j \geq 1 : f_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
- 2. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- 3. Si $f \in D(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $D(\mathbb{R}^n)$.
- 4. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

5. S'il existe $a > 0$ tel que $f = 0$ presque partout sur $\left(\overline{B(0, a)}\right)^C$, alors $f_j = 0$ presque partout sur $\left(\overline{B(0, a + \frac{1}{j})}\right)^C$ (Donc f_j est à support compact et par suite $f_j \in D(\mathbb{R}^n)$).

Un résultat très important de la Proposition 2.42 est donné par le lemme suivant.

Lemme 2.43. (Dubois-Reymond)

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si pour tout $\varphi \in D(\Omega) : \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$,

alors $f = 0$ presque partout sur Ω

Démonstration.

Soit $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\text{Supp}(\rho) \subset B(0, 1)$ et $\int_{\Omega} \rho(x)dx = 1$. On pose

$$\rho_{\epsilon}(y) = \epsilon^{-n} \rho(\epsilon^{-1}y)$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors $f\chi \in L^1_c(\Omega)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mapsto \rho_{\epsilon}(x - y)\chi(y)$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$.

Puisque :

$$(\rho_{\epsilon} * \chi f)(x) = \int \rho_{\epsilon}(x - y)\chi(y)f(y)dy,$$

l'hypothèse sur f , conduit donc à $(\rho_{\epsilon} * \chi f)(x) = 0$

D'autre part, d'après la Proposition 2.42, la suite $(\rho_{\epsilon} * \chi f)$ converge vers χf dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

On déduit donc que χf est nulle presque partout sur tout compact de Ω , donc presque partout sur Ω . $\square$

Remarque 2.44.

Le résultat de la Proposition 2.19, est un cas particulier du Lemme 2.43.

En effet, comme $\mathcal{C}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, le Lemme 2.43 implique donc que f est nulle presque partout sur Ω .

Puisque, f est de plus continue sur Ω , alors f est nulle partout sur Ω .

Théorème 2.45.

Pour $n \geq 1$ et $p \in [1, \infty[$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration.

La démonstration utilise une méthode dite de "troncature et régularisation".

Rappelons que :

$$L_c^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n), \exists K \text{ compact de } \Omega : f = 0 \text{ sur } K^C\}$$

Notons que les éléments de $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ sont à support compact.

1^{ère} étape :

Nous allons montrer que $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, en effet :

Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $f_j = f \cdot \chi_{\overline{B(0,j)}}$, on a :

1. $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ presque partout (convergence simple).
2. $|f_j| \leq |f|$ presque partout $\forall j \in \mathbb{N}$

Ainsi, d'après le théorème de la convergence dominée dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, la suite $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Puisque $(f_j)_{j \geq 1} \subset L_c^p(\mathbb{R}^n)$, on a bien montré que $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2^{ème} étape :

Soit maintenant $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il existe une suite $(f_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Or cette suite est donnée par $f_j = (\varphi_j * f)$ où $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ est une suite régularisante.

Le résultat découle immédiatement de la Proposition 2.42 (plus précisément, d'après 1., 4. et 5.). □

Remarque 2.46.

Le résultat du Théorème 2.45, ne s'applique pas pour $p = \infty$. C'est à dire, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet, si c'est le cas, et puisque la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ne contient que des fonctions continues, qui est évidemment faux.

Avec un raisonnement identiquement similaire à celui du Théorème 2.45, et ceci en remplaçant $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ par $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, on obtient un deuxième résultat de densité, donné par le théorème suivant.

Théorème 2.47.

Pour $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.48.

Les résultats du Théorème 2.45 et du Théorème 2.47, restent valables pour un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ au lieu de $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 3

Les Distributions

3.1 Définitions et Exemples

Définition 3.1. (*Dual Topologique*)

Soit E un espace vectoriel topologique. On appelle Dual Topologique de E qu'on note E' , l'espace des formes linéaires continues sur E .

Définition 3.2. (*une distribution*)

On appelle distribution, tout élément de $D'(\Omega)$ "l'espace dual topologique de l'espace des fonctions tests $D(\Omega)$ ".

Autrement dit : une distribution est une application

$$T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$

Linéaire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega) : \langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle$$

Continue :

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ dans $D(\Omega)$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, une forme linéaire T sur $D(\Omega)$ est une distribution, si et seulement si :

Pour toute suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ dans $D(\Omega)$ qui converge vers 0 dans $D(\Omega)$, la suite numérique $(\langle T, \varphi_n \rangle)_{n \geq 1}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.3. (*Caractérisation d'une distribution*)

Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution, si et seulement si :

Pour tout compact K de Ω , il exist $C_K > 0$, et $m_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \quad (3.1)$$

Démonstration.

On suppose que T est une distribution et nous allons montrer que (3.1) est satisfaite. Donc T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Rappelons que la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ et celle induite par la topologie de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, ç.à.d définie par la famille de semi-normes $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$P_i(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in K_i} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et ceci pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, où K_i est le compact définit dans le Lemme ...

Puisque T est continue entant que fonction définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie définie par $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il exist $C_i > 0$ tel que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_i P_i(\varphi) = C_i \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in K_i} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (3.2)$$

Soit maintenant K un compact de Ω . D'après le Lemme 2.7, il exist $i_K \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset K_{i_K}$. An appliquant donc (3.2) pour $i = i_K$ à $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_{i_K} \sum_{|\alpha| \leq i_K} \sup_{x \in K_{i_K}} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

Notons que pour $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, on a $\text{Supp}(\varphi) \subset K$ et $\text{Supp}(D^\alpha \varphi) \subset K$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Ceci implique que

$$\sup_{x \in K_{i_K}} |D^\alpha \varphi(x)| = \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

d'où (3.1) est vérifiée.

On suppose maintenant que T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui satisfait (3.1). Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est métrisable et T est linéaire, il suffit de montrer que :

Si la suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers zéro alors,
la suite numérique $\{\langle T, \varphi_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers zéro

Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Il exist donc un compact K de Ω tel que

$$\text{Supp}(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ceci implique que $\varphi_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc d'après (3.1), on a

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_n(x)| \quad (3.3)$$

Sachant que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $\{D^\alpha \varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur K vers zéro, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_n(x)| = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

Donc en faisant tendre n vers l'infini dans (3.3), on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0$ □

Définition 3.4. (Ordre d'une distribution)

Dans la caractérisation précédente, si l'entier m ne dépend pas du compact K , on dit que T est une distribution d'ordre fini inférieur ou égale à m , et le plus petit entier p vérifiant $p \leq m$ est appelée ordre de T .

Si l'entier m ne peut être indépendant du compact K , on dit que T est d'ordre infini.

3.1.1 Exemples

Distribution définie par une fonction localement intégrable

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. La fonction $T_f : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

est une distribution d'ordre 0. En effet :

Notons que :

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \implies f \chi_K \in L^1(\Omega) \quad \forall K \text{ compact dans } \Omega$$

Ainsi, puisque φ est à support compact, on a :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : f \cdot \varphi \in L^1(\Omega)$$

Par suite T_f est bien défini. De plus, il est clair que T_f est linéaire.

D'autre part ; soient K un compact de Ω et $\varphi \in D_K(\Omega)$, alors

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \cdot \int_K |f(x)| dx$$

Donc la caractérisation (3.1) est satisfaite avec :

$$C_K = \int_K |f(x)| dx \quad \text{et} \quad m = 0.$$

Par suite T_f est une distribution d'ordre inférieure ou égale à zéro, donc d'ordre zéro.

Remarque 3.5.

On note souvent f au lieu de T_f , c'est à dire, on écrit $\langle f, \varphi \rangle$ au lieu de $\langle T_f, \varphi \rangle$

Définition 3.6. *On appelle distribution régulière, toute distribution qui peut être définie par une fonction localement intégrable.*

Toute distribution qui n'est pas régulière est dite singulière.

Remarque 3.7.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'application suivante :

$$i : L_{loc}^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$f \longmapsto T_f,$$

est une injection. En effet, puisqu'elle est clairement linéaire, il suffit de montrer que son noyau est nul.

On suppose que $T_f = 0$, c'est à dire :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

Il s'ensuit donc du Lemme 2.43, que $f = 0$ presque partout sur Ω , et par suite $f = 0$ dans $L_{loc}^1(\Omega)$. D'où le résultat.

Notons que, c'est par cette application que l'espace $L_{loc}^1(\Omega)$ s'injecte dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

La distributions de Dirac

Soit $x_0 \in \Omega$. La forme linéaire $\delta_{x_0} : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

est une distribution d'ordre 0. En effet :

Soient K un compact de Ω et $\varphi \in D_K(\Omega)$, alors

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$$

Donc la caractérisation (3.1) est satisfaite avec :

$$C_K = 1 \quad \text{et} \quad m = 0.$$

Par suite δ_{x_0} est une distribution d'ordre inférieure ou égale à 0, donc d'ordre 0.

Remarque 3.8.

La distribution de Dirac n'est pas régulière.

La distribution valeur principale de $\frac{1}{x} : \left(V_p \left(\frac{1}{x} \right) \right)$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Mais, on peut quand même lui associer une distribution appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$ et qu'on note par $V_p \left(\frac{1}{x} \right)$ définie comme suit :

$$\left\langle V_p \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

$V_p \left(\frac{1}{x} \right)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre 1. En effet :

Montrons d'abord que l'application $V_p \left(\frac{1}{x} \right)$ est bien définie.

Soient $\varphi \in D(\mathbb{R})$ et $M > 0$ tels que $\text{Supp}(\varphi) \subset [-M, M]$. Alors

$$\left\langle V_p \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| \leq M} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégrale on a au voisinage de zéro :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \psi(x) \quad \text{où} \quad \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) dt$$

On a

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sup_{|x| \leq M} |\psi(x)| \leq C \sup_{|x| \leq M} |\varphi'(x)|$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\left\langle V_p \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\varphi(0) \int_{\epsilon < |x| \leq M} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon < |x| \leq M} \psi(x) dx \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [I_1 + I_2]$$

Il est facile de voir que $I_1 = 0$ (l'intégrale d'une fonction impaire dans un domaine symétrique).

D'autre part, on a :

$$\int_{\epsilon < |x| \leq M} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_\epsilon(x) \psi(x) dx := \int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(x) dx$$

avec :

$$\chi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon < |x| \leq M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\phi_\epsilon = \chi_\epsilon \psi$$

On a :

$$|\phi_\epsilon(x)| \leq |\chi_{[-M,M]}(x)\psi(x)| := g(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon = \chi_{[-M,M]} \psi$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| \leq M} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-M,M]}(x)\psi(x) dx = \int_{-M}^M \psi(x) dx$$

Ainsi, $V_p \left(\frac{1}{x} \right)$ est bien définie et de plus, on a :

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \psi(x) dx \right| &\leq 2M \sup_{|x| \leq M} |\psi(x)| \\ &\leq 2M \sup_{|x| \leq M} |\varphi'(x)| \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc, que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle V_p \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle \right| &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| \leq M} \psi(x) dx \right| \\ &\leq 2MC \sup_{|x| \leq M} |\varphi'(x)| \end{aligned}$$

Par conséquent, $V_p \left(\frac{1}{x} \right)$ étant une application linéaire, on déduit que c'est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre au plus 1.

On va montrer qu'elle ne peut être d'ordre 0. En effet, en raisonnant par l'absurde, on suppose que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}) : \left| \left\langle V_p \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle \right| \leq C \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \quad (3.4)$$

Soit (φ_m) la suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \varphi_m \leq 1$ et :

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1 : & x \in [\frac{1}{m}, 1] \\ 0 : & x \leq \frac{1}{2m} \quad \text{ou} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Notons que le Théorème 2.35, avec $K = [\frac{1}{m}, 1]$ et $\Theta = \left] \frac{1}{2m}, 2 \right[$ garanti l'existence de φ_m .

Il est clair que : $\sup_{x \in K} |\varphi_m(x)| = 1$

D'autre part, pour $\epsilon \leq \frac{1}{2m}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi_m(x)}{x} dx &= \int_{\frac{1}{2m}}^2 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx \geq \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{dx}{x} = \ln m \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left\langle V_p \left(\frac{1}{x} \right), \varphi_m \right\rangle \geq \ln m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$$

Donc, (3.4) ne peut être satisfaite, et par suite $V_p \left(\frac{1}{x} \right)$ est d'ordre 1.

3.2 La convergence dans $D'(\Omega)$

Définition 3.9.

Soient $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de distributions sur Ω et $T \in D'(\Omega)$. On dit que $(T_n)_{n \geq 1}$ converge vers T dans $D'(\Omega)$ si et seulement si :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Exemple 3.10.

Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}$ la suite des fonctions réelles définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = n\chi_{]0, \frac{1}{n}[}$$

Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ et par suite la distribution régulière associée à f_n est bien définie.

Nous allons montrer que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge vers δ_0 dans $D'(\mathbb{R})$. En effet :

$$\begin{aligned} |\langle f_n, \varphi \rangle - \langle \delta_0, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \\ &= \left| \int_0^{\frac{1}{n}} n \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \\ &= \left| \int_0^{\frac{1}{n}} n(\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\exists \xi \in]0, 1[: \varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\xi)$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\langle f_n, \varphi \rangle - \langle \delta_0, \varphi \rangle| &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} |x\varphi'(\xi)| dx \\ &\leq n \sup_{x \in \text{Supp}(\varphi)} |\varphi'(x)| \int_0^{\frac{1}{n}} x dx \\ &\leq \frac{C}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

où $C = \sup_{x \in \text{Supp}(\varphi)} |\varphi'(x)|$

Montrons maintenant que $\{f_n^2\}_{n \geq 1}$ ne converge pas dans $D'(\mathbb{R})$. En effet, fixons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(0) < \infty$ et $\varphi(0) \neq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \langle f_n^2, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 \varphi(x) dx \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} n \varphi(x) dx = n \langle f_n, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

avec $\varphi(0) < \infty$ et $\varphi(0) \neq 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n^2, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} n \varphi(0) = +\infty$$

Par suite $\{f_n^2\}_{n \geq 1}$ n'est pas convergente.

Remarque 3.11.

Notons que la suite dans l'Exemple 3.10 converge simplement vers zéro. On déduit donc que la convergence presque partout n'implique pas la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Bien que la convergence presque partout n'implique pas la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, le théorème suivant, fournit un type de convergence qui l'implique.

Théorème 3.12.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $(f_m)_{m \geq 1}$ une suite dans $L_{loc}^p(\Omega)$ et $f \in L_{loc}^p(\Omega)$. On a :

Si $(f_m)_{m \geq 1}$ converge vers f dans $L_{loc}^p(\Omega)$, alors $(f_m)_{m \geq 1}$ converge vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration.

Notons d'abord que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on a $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Ceci explique donc le sens de convergence envisagé dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour la suite $(f_m)_{m \geq 1}$. Plus précisément : la convergence de la suite des distributions régulières associées à $(f_m)_{m \geq 1}$.

On suppose maintenant que $(f_m)_{m \geq 1}$ converge vers f dans $L^p_{loc}(\Omega)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\text{Supp}(\varphi) \subset K$. On a :

$$\langle f_m, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f_m(x) \varphi(x) dx = \int_K f_m(x) \varphi(x) dx$$

De même, on a :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_K f(x) \varphi(x) dx$$

Puisque $\varphi \in L^q_{loc}(\Omega)$ pour $q \geq 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'inégalité de Hölder donne alors :

$$\begin{aligned} |\langle f_m, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| &= |\langle f_m - f, \varphi \rangle| \leq \int_K |f_m(x) - f(x)| |\varphi(x)| \\ &\leq \|f_m - f\|_{L^p(K)} \|\varphi\|_{L^q(K)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

On déduit donc :

$$\langle f_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

D'où le résultat. □

Exemple 3.13.

On considère la suite des fonctions $(f_m)_{m \geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_m(x) = \frac{\ln(x)}{1 + x^2 + \frac{1}{m}}$.

Pour tout $m \geq 1$, f_m est continue sur $\mathbb{R}_+$, d'où $f_m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \frac{\ln(x)}{1 + x^2} := f(x)$$

De plus, on a :

$$\forall m \geq 1 : |f_m| \leq |f| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, il résulte que $(f_m)_{m \geq 1}$ converge vers f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

On déduit donc du Théorème 3.12, que la suite des distributions régulières associées à $(f_m)_{m \geq 1}$ converge vers la distribution régulière associée à f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

3.3 Support d'une distribution

Définition 3.14.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que T est nulle sur un ouvert U de Ω si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_U(\Omega) : \langle T, \varphi \rangle = 0$$

On note $T_U = 0$ et on dit que U est un ouvert d'annulation de T .

Lemme 3.15.

Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts d'annulation de T .

Alors $W = \cup_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert d'annulation de T .

Démonstration.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(W)$. Posons $K = \text{Supp}(\varphi) \subset W$.

Puisque K est compact, la propriété de Borel-Lebesgue implique alors qu'il existe un nombre fini d'indices $J \subset I$ tel que $K \subset \cup_{i \in J} \Omega_i$.

Soit $(\chi_i)_{i \in J}$ la partition de l'unité associée au recouvrement $(\Omega_i)_{i \in J}$:

$$\chi_i \in \mathcal{D}_{\Omega_i}(\Omega), \sum_{i \in J} \chi_i(x) = 1, \forall x \in \cup_{i \in J} \Omega_i$$

Puisque φ est à support compact dans $K \subset \cup_{i \in J} \Omega_i$, on a

$$\varphi(x) = \sum_{i \in J} \chi_i(x) \varphi(x)$$

De plus T est linéaire, donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i \in J} \langle T, \chi_i \varphi \rangle$$

Comme Ω_i est un ouvert d'annulation de T et $\text{Supp}(\chi_i \varphi) \subset \text{Supp}(\chi_i) \subset \Omega_i$, alors $\langle T, \chi_i \varphi \rangle = 0, \forall i \in J$ et par suite $\langle T, \varphi \rangle = 0$. $\square$

Remarque 3.16.

On déduit du lemme précédent, que pour toute distribution, il existe un plus grand ouvert d'annulation : c'est l'union de tout les ouvert d'annulations. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 3.17.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle support de T et on note $\text{Supp}(T)$, le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert d'annulation de T .

Remarque 3.18.

Comme complémentaire d'un ouvert, $\text{Supp}(T)$ est toujours fermé.

La définition du support d'une distribution, peut être traduite par les assertions équivalentes citées dans la proposition suivante.

Proposition 3.19.

Soit $T \in D'(\Omega)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $x_0 \notin \text{Supp}(T) \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$ un voisinage ouvert de x_0 t.q. $\forall \varphi \in D(\Omega), \text{Supp}(\varphi) \subset V_{x_0} : \langle T, \varphi \rangle = 0$
- (ii) $x_0 \in \text{Supp}(T) \Leftrightarrow \forall V_{x_0}, \exists \varphi \in D(\Omega), \text{Supp}(\varphi) \subset V_{x_0}$ et $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$
- (iii) Si F est un fermé de $\Omega : \text{Supp}(T) \subset F \Leftrightarrow T = 0$ dans F^C

Exemple 3.20.

$T = \delta_0$ (Distribution de Dirac en zéro).

Tout ouvert de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est un ouvert d'annulation pour δ_0 . En effet, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \notin U$, alors :

$$\forall \varphi \in D_U(\mathbb{R}^n) : \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$$

D'autre part, il est clair que $0 \in \text{Supp}(\delta_0)$, donc le plus grand ouvert d'annulation pour δ_0 est $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et par suite $\text{Supp}(\delta_0) = (\mathbb{R}^n - \{0\})^C = \{0\}$.

Exemple 3.21.

$T = T_H$ (La distribution régulière associée à la fonction de Heaviside)

$$H(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0, \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

$U =]-\infty, 0[$ est ouvert d'annulation pour T_H . En effet

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) : \langle T_H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$$

Donc, et puisque $\varphi|_{]0, \infty[} = 0$ pour $\varphi \in D_U(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall \varphi \in D_U(\mathbb{R}) : \langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = 0$$

D'autre part, il est clair qu'il existe un $\varphi \in D(]0, \infty[)$ tel que $\langle T_H, \varphi \rangle \neq 0$

Ainsi, $U =]-\infty, 0[$ est le plus grand ouvert d'annulation pour T_H , et par suite

$$\text{Supp}(T_H) = (U)^C = [0, \infty[.$$

Proposition 3.22.

Soit $T \in D'(\Omega)$, alors :

$$\text{Supp}(T) = \emptyset \iff T = 0$$

Démonstration.

Si $T = 0$, alors le plus grand ouvert d'annulation est Ω . Donc : $\text{Supp}(T) = (\Omega)^C = \emptyset$.

Réciproquement, si T est nulle sur $(\emptyset)^C$, donc sur Ω . D'où, $T = 0$. $\square$

Proposition 3.23.

Soit $T \in D'(\Omega)$ et $\varphi \in D(\Omega)$. On a donc :

Si $\varphi = 0$ sur un voisinage de $\text{Supp}(T)$, alors : $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Démonstration.

Soit V un voisinage ouvert de $\text{Supp}(T)$, où $\varphi = 0$ sur V . C'est à dire :

$$V \subset \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\}$$

Cela entraîne que :

$$\overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \subset \overline{V^C}$$

Sachant que V^C est fermé, on déduit donc que :

$$\text{Supp}(\varphi) \subset V^C \tag{3.5}$$

D'autre part, puisque $\text{Supp}(T) \subset V$, on déduit que :

$$V^C \subset (\text{Supp}(T))^C \tag{3.6}$$

Maintenant de (3.5) et (3.6), il résulte :

$$\text{Supp}(\varphi) \subset (\text{Supp}(T))^C := \mathcal{U}$$

où $\mathcal{U}$ est le plus grand ouvert d'annulation de T , autrement dit : $\varphi \in D_{\mathcal{U}}(\Omega)$. Ainsi, le résultat découle immédiatement de la Définition 3.14. $\square$

Remarque 3.24.

On doit noter que $\varphi = 0$ sur $\text{Supp}(T)$ (pas sur un voisinage de $\text{Supp}(T)$), n'implique pas forcément que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

En effet, si on considère la distribution sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Puisque $\text{Supp}(\varphi') \subset \text{Supp}(\varphi)$, on déduit que :

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^*}(\mathbb{R})$$

Donc, $\mathbb{R}^*$ est un ouvert d'annulation de T . De plus, c'est le plus grand ouvert d'annulation, puisqu'il existe une fonction $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_0'(0) \neq 0$. En

effet, soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi = 1$ sur $[-\epsilon, \epsilon]$ (toujours le Théorème 2.35 garantie son existence), puis on pose $\varphi_0 = x\psi$.

Maintenant, puisque $\mathbb{R}^*$ est le plus grand ouvert d'annulation de T , alors, $\text{Supp}(T) = \{0\}$. Pour φ_0 décrit ci-dessus, on a : $\varphi_0(0) = 0$, c'est à dire $\varphi_0 = 0$ sur $\text{Supp}(T)$, mais :

$$\langle T, \varphi_0 \rangle = \varphi_0'(0) = 1 \neq 0$$

Proposition 3.25.

Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω . Alors $\text{Supp}(T_f) = \text{Supp}(f)$.

Démonstration.

Soit $x_0 \notin \text{Supp}(T_f)$.

Il résulte donc de la Proposition 3.19 (i) :

$$\exists V_{x_0} \text{ un voisinage ouvert de } x_0 : \int_{V_{x_0}} f(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$$

Or, d'après la Proposition 2.19, on a : $f = 0$ sur V_{x_0} .

Ce qui entraîne que $x_0 \notin \text{Supp}(f)$.

On suppose maintenant que $x_0 \notin \text{Supp}(f)$.

Il existe alors un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 , tel que :

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in V_{x_0}$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{V_{x_0}}(\Omega)$, on a :

$$f(x)\varphi(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Par suite

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{V_{x_0}}(\Omega) : \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

Ce qui implique que $x_0 \notin \text{Supp}(T_f)$, et achève la preuve. □

3.4 Distributions à support compact

Une distribution à support compact, comme son nom l'indique, est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ dont le support est compact. Avec cette caractérisation,

l'effet des fonctions tests en dehors du support de la distribution, peut être ignoré. Ceci permet donc, d'étendre la dualité à toutes les fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tout en réservant la continuité.

On va en fait montrer dans cette partie, que l'espace des distributions à support compact s'identifie (par une bijection linéaire) au dual topologique de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Définition 3.26. (*Distribution à support compact*)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\text{Supp}(T)$ est compact, on dit que T est à support compact.

On note par $\mathcal{E}'(\Omega)$, l'espace des distributions à support compact.

Exemple 3.27.

- (i) On a déjà montré que $\text{Supp}(\delta_0) = \{0\}$. Donc δ_0 est à support compact : $\delta_0 \in \mathcal{E}'(\Omega)$
- (ii) On a aussi montré que $\text{Supp}(T_H) = [0, +\infty[$ qui n'est pas compact. Donc $T_H \notin \mathcal{E}'(\Omega)$

Proposition 3.28.

Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $K_0 = \text{Supp}(T)$. Il existe alors, une unique forme linéaire $\tilde{T}$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a : $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$
- (ii) Si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ avec $\text{Supp}(\varphi) \cap K_0 = \emptyset$, alors : $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = 0$
- (iii) Il existe $k \in \mathbb{N}$, un compact $K \subset \Omega$, voisinage de K_0 et $C > 0$ tels que :

$$\left| \langle \tilde{T}, \varphi \rangle \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \quad (3.7)$$

Démonstration.

Commençons par montrer l'existence de $\tilde{T}$. On pose :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \chi \varphi \rangle$$

où $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\chi = 1$ sur un voisinage de K_0 .

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\text{Supp}((1 - \chi)\varphi) \cap \text{Supp}(T) = \text{Supp}((1 - \chi)\varphi) \cap K_0 = \emptyset$$

Ainsi, $(1 - \chi)\varphi$ est nul sur un voisinage de K_0 .

Donc, d'après la Proposition 3.23, on a :

$$\langle T, (1 - \chi)\varphi \rangle = 0$$

Par suite :

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle + \langle T, (1 - \chi)\varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

D'où (i) est vérifié.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ avec $\text{Supp}(\varphi) \cap K_0 = \emptyset$.

Donc : $K_0 \subset (\text{Supp}(\varphi))^C$.

Il existe alors un ouvert Θ tel que $\bar{\Theta}$ est compact, $K_0 \subset \Theta$ et $\bar{\Theta} \subset (\text{Supp}(\varphi))^C$.

Soit $\chi_1 \in \mathcal{D}\left((\text{Supp}(\varphi))^C\right)$ et $\chi_1 = 1$ sur $\bar{\Theta}$.

Puisque $\text{Supp}(\chi_1) \subset (\text{Supp}(\varphi))^C$, alors $\chi_1\varphi = 0$.

D'où

$$\langle T, \chi_1\varphi \rangle = 0 \tag{3.8}$$

D'autre part, on a : $\text{Supp}(\chi - \chi_1) \cap K_0 = \emptyset$.

Il résulte donc de la Proposition 3.23, que :

$$\langle T, (\chi - \chi_1)\varphi \rangle = 0 \tag{3.9}$$

En combinant entre (3.8) et (3.9), on trouve :

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle = \langle T, \chi_1\varphi \rangle + \langle T, (\chi - \chi_1)\varphi \rangle = 0$$

Ce qui prouve (ii).

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Puisque $\chi\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que :

$$\left| \langle \tilde{T}, \varphi \rangle \right| = |\langle T, \chi\varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq K} \sup_{x \in K} |D^\alpha(\chi\varphi)(x)|$$

En employant la formule de Leibnitz, on aboutit à :

$$\left| \langle \tilde{T}, \varphi \rangle \right| \leq C_\chi \sum_{|\alpha| \leq K} \sup_{x \in K} |D^\alpha\varphi(x)|$$

D'où (iii) est vérifié.

Montrons maintenant l'unicité de $\tilde{T}$. Soit $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ deux formes linéaires sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, vérifiant (i) – (iii).

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tel que $\chi = 1$ sur un voisinage de K_0 .

Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $i = 1, 2$, on a :

$$\langle \tilde{T}_i, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}_i, \chi\varphi \rangle + \langle \tilde{T}_i, (1 - \chi)\varphi \rangle \quad (3.10)$$

Puisque

$$\text{Supp}((1 - \chi)\varphi) \cap K_0 = \emptyset,$$

il s'ensuit de (ii) que :

$$\langle \tilde{T}_i, (1 - \chi)\varphi \rangle = 0 \quad (3.11)$$

De plus, puisque $\chi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il résulte alors de (i) que :

$$\langle \tilde{T}_i, \chi\varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle \quad (3.12)$$

En employant donc (3.11) et (3.12) dans (3.10), on obtient :

$$\langle \tilde{T}_1, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}_2, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$$

D'où l'unicité de $\tilde{T}$. □

Corollaire 3.29.

Toute distribution à support compact est d'ordre fini.

Démonstration.

Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, il résulte alors de (iii) dans la Proposition 3.28, que (3.7) est vrai avec le même entier k , pour tout les compacts. Par suite T est d'ordre fini égale à k . □

Remarque 3.30.

(i) La propriété (iii) dans la Proposition 3.28, signifie que la forme linéaire $\tilde{T}$ est continue sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Autrement dit : $\tilde{T}$ est un élément du dual topologique de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: $\tilde{T} \in (\mathcal{C}^\infty(\Omega))'$.

(ii) L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{E}'(\Omega) &\longrightarrow (\mathcal{C}^\infty(\Omega))' \\ T &\longmapsto \tilde{T} \end{aligned} \quad (3.13)$$

est injective. En effet, si $\tilde{T} = 0$, il résulte du point (i) dans la Proposition 3.28 que $T = 0$. Par suite, $\text{Ker}(T) = \{0\}$. D'où l'injectivité de $\mathcal{I}$ puisqu'il est clairement linéaire.

Proposition 3.31.

Soit $\tilde{T} \in (\mathcal{C}^\infty(\Omega))'$. La restriction de $\tilde{T}$ à $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution à support compact. De plus, l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : (\mathcal{C}^\infty(\Omega))' &\longrightarrow \mathcal{E}'(\Omega) \\ \tilde{T} &\mapsto \tilde{T}|_{\mathcal{D}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

vérifie :

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{R})(\tilde{T}) = \tilde{T}, \quad \forall \tilde{T} \in (\mathcal{C}^\infty(\Omega))' \tag{3.15}$$

où, $\mathcal{I}$ est l'application donnée par (3.13).

Démonstration.

Puisque $\tilde{T}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, il existe alors $k \in \mathbb{N}$, un compact $K \subset \Omega$ et $C > 0$ tels que :

$$\left| \langle \tilde{T}, \varphi \rangle \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

Sachant que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, cette propriété de continuité reste vrai pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et par suite $T|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

D'autre part, si $\text{Supp}(\varphi) \cap K = \emptyset$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $x \in K$, on a $D^\alpha \varphi(x) = 0$. Par suite $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = 0$, et prouve donc que :

$$\text{Supp}(T|_{\mathcal{D}(\Omega)}) \subset K$$

D'où $T|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Nous allons montrer maintenant (3.15). Soit $\tilde{T} \in (\mathcal{C}^\infty(\Omega))'$.

Il résulte de (3.7), l'existence d'un compact K de Ω tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ avec $\text{Supp}(\varphi) \cap K = \emptyset$, on a $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = 0$. Ceci est donc vrai pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on déduit que :

$$\text{Supp}(\mathcal{R}(\tilde{T})) = K_0 \subset K$$

Soit maintenant $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\chi = 1$ sur un voisinage de K .

D'après la définition de $\mathcal{I}$ décrite dans la Proposition 3.28, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$:

$$\langle (\mathcal{I} \circ \mathcal{R})(\tilde{T}), \varphi \rangle = \langle \mathcal{R}(\tilde{T}), \chi \varphi \rangle = \langle \tilde{T}, \chi \varphi \rangle$$

Notons que la deuxième égalité ci-dessus résulte du fait que $\chi \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

D'autre part, puisque $\text{Supp}((1 - \chi)\varphi) \cap K_0 = \emptyset$, on a :

$$\langle \tilde{T}, (1 - \chi)\varphi \rangle = 0$$

On déduit alors que :

$$\langle (\mathcal{I} \circ \mathcal{R})(\tilde{T}), \varphi \rangle = \langle \tilde{T}, \chi\varphi \rangle + \langle \tilde{T}, (1 - \chi)\varphi \rangle = \langle \tilde{T}, \varphi \rangle$$

D'où le résultat. □

On arrive maintenant au résultat important suivant.

Théorème 3.32.

L'espace des distributions à support compact $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à $(\mathcal{C}^\infty(\Omega))'$.

Démonstration.

Il résulte de la Proposition et la Remarque 3.30, que l'application :

$$\mathcal{I} : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow (\mathcal{C}^\infty(\Omega))'$$

$$T \longmapsto \tilde{T}$$

est une application linéaire et injective.

De plus, l'expression (3.15) dans la Proposition 3.31, exprime que l'application $\mathcal{R}$ définie par (3.14) est un inverse à droite de $\mathcal{I}$. Par suite $\mathcal{I}$ est une bijection. □

Chapitre 4

Opérations sur les distributions

On introduit dans ce chapitre les importantes opérations sur les distributions : la dérivation, la multiplication par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le produit de convolution. D'autres opérations telles que la translation et la dilatation sont aussi introduites.

4.1 Dérivation d'une Distribution

L'une des principales motivations dans la théorie des distributions est la généralisation de la notion de dérivée pour les fonctions "non dérivables". L'idée est de reporter la dérivation sur les fonctions tests (qui sont suffisamment régulières) via la distribution régulière associée à cette fonction.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc localement intégrable, on a ainsi, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx \quad (4.1)$$

Maintenant, pour une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (qui n'est pas forcément dérivable), le membre de gauche dans (4.1), n'a pas un sens, contrairement au membre de droite. Si le membre de droite dans (4.1) est une distribution régulière, c'est à dire, qu'il existe $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx,$$

alors, on dit que g est une dérivée au sens des distribution de f , ou une dérivation au sens faible.

Or, (4.1) s'aperçoit dans le cadre des distributions, comme suit :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_{f'}, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi' \rangle$$

Ceci en faite, qui a motivé la définition d'une distribution par la formule donnée dans la Définition 4.1 ci-dessous.

Définition 4.1. (*Dérivée partielle d'une distribution*)

Soient $T \in D'(\Omega)$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$. Pour $1 \leq i \leq n$, on appelle *dérivée partielle*, au sens des distributions, de T par rapport à x_i , et on note $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i} : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

Remarque 4.2.

1. La fonction $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, définie ci-dessus est une distribution. En effet : la linéarité est claire. Soit maintenant K un compact dans Ω , notons que si $\varphi \in D_K(\Omega)$ alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in D_K(\Omega)$.

Alors, en se servant de la caractérisation de la distribution T , on déduit l'existence de $C_K > 0$ et $m_K \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in D_K(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right| &= \left| - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \right| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_{x \in K} \left| D^\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) (x) \right| \\ &\leq C_K \sum_{|\beta| \leq m_K + 1} \sup_{x \in K} |D^\beta \varphi(x)| \end{aligned}$$

Donc, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est une distribution.

2. On déduit de ce qui précède, que si T est une distribution d'ordre m , alors $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est une distribution d'ordre au plus $m + 1$.
3. En itérant (4.2), on voit qu'une distribution admet des dérivées de tous ordres. Si $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, alors $D^\alpha T$ est la distribution définie par

$$\begin{aligned} D^\alpha T : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha T, \varphi \rangle &= \left\langle \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \varphi \right\rangle = (-1)^{\alpha_1} \left\langle \frac{\partial^{|\alpha| - \alpha_1} T}{\partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \partial_{x_1}^{\alpha_1} \varphi \right\rangle \\ &= (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2} \left\langle \frac{\partial^{|\alpha| - \alpha_1 - \alpha_2} T}{\partial_{x_3}^{\alpha_3} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \varphi \right\rangle = \dots \\ &= (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \langle T, \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \end{aligned}$$

Exemple 4.3.

(i) On considère la fonction de Heaviside définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle T'_H, \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

D'où, $T'_H = \delta_0$.

(ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \delta'_0, \varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = \varphi'(0)$$

(iii) On considère la fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln(|x|)$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \ln(|x|) \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(|x|) \varphi'(x) dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \ln(|x|) \varphi'(x) dx \right] := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{\epsilon} \end{aligned}$$

Une intégration par parties pour chacun des deux termes dans I_{ϵ} , donne :

$$\begin{aligned} I_{\epsilon} &= -\ln(\epsilon) \varphi(-\epsilon) + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \ln(\epsilon) \varphi(\epsilon) + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= (\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon)) \ln(\epsilon) + \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \end{aligned}$$

Puisque :

$$\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon) = \epsilon (\psi(\epsilon) + \psi(-\epsilon))$$

où $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

On obtient alors :

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left\langle V_p \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle$$

Ainsi : $T'_f = V_p \left(\frac{1}{x} \right)$

Remarque 4.4.

On doit noter que l'ouvert sur lequel la distribution est définie, peut faire la différence, au propos de la dérivée. En effet, si on considère sur $\mathbb{R}^*$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f est dérivable au sens usuel et $f' = 0$. Par contre, si on considère f définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (avec une valeur queconque en zéro), on trouve $f' = \delta_0$ (Voir Exemple 4.3 (i) et noter que f et H appartiennent à la même classe dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$).

Théorème 4.5.

Soit $(T_m)_{m \geq 1}$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, telles que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D^\alpha T_m = D^\alpha T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Démonstration.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle D^\alpha T_m, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle T_m, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \\ &= (-1)^{2|\alpha|} \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = \langle D^\alpha T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque 4.6.

Le résultat du Théorème 4.5, indique la continuité de l'opérateur de dérivation de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition 4.7.

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une distribution régulière donné par une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est une distribution régulière donné par $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

Démonstration.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} I_i dx' := -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx_i \right) dx'$$

où $x' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Puisque $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on peut effectuer une intégration par parties dans l'intégrale I_i :

$$I_i = f(x)\varphi(x)|_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx_i$$

Sachant que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on déduit que

$$I_i = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx_i$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(- \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx_i \right) dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx = \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.8.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$. On suppose que f admet au plus une discontinuité de première espèce en x_0 , c.a.d : $f(x_0^+), f(x_0^-)$ existent et sont finis.

Alors, la dérivée au sens des distributions de f est donnée par

$$f' = (\tilde{f})' + \sigma_{x_0}\delta_{x_0} \tag{4.3}$$

où :

$$\sigma_{x_0} = f(x_0^+) - f(x_0^-) \quad (\text{le saut de } f \text{ en } x_0) \text{ et } \tilde{f} = f|_{\mathbb{R} \setminus \{x_0\}}$$

Démonstration.

Notons d'abord que les conditions imposées sur f impliquent que f et f' appartiennent à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et par suite les distributions régulières T_f et $T_{f'}$ ont bien un sens.

Maintenant, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= - \int_{-\infty}^{x_0^-} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_0^+}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \end{aligned}$$

Puisque la fonction f appartient à $C^1(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$ et se prolonge par continuité à $]-\infty, x_0]$ et $[x_0, \infty[$, une intégration par parties dans les deux intégrales ci-dessus, donne

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{x_0^-} + \int_{-\infty}^{x_0^-} f'(x)\varphi(x)dx \\ &\quad -[f(x)\varphi(x)]_{x_0^+}^{\infty} + \int_{x_0^+}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $\varphi \in D(\mathbb{R})$, plus précisément : $\varphi(\infty) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= -f(x_0^-)\varphi(x_0) + f(x_0^+)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \sigma_{x_0}\varphi(x_0) + \langle T_{(\tilde{f})'}, \varphi \rangle \\ &= \sigma_{x_0}\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \langle T_{(\tilde{f})'}, \varphi \rangle = \langle \sigma_{x_0}\delta_{x_0} + T_{(\tilde{f})'}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

□

Remarque 4.9.

Notons que le résultat de la Proposition 4.8 englobe le cas $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dans ce cas, $\sigma_{x_0} = f(x_0^+) - f(x_0^-) = 0$ et $f = \tilde{f}$, et par suite on retrouve avec la formule (4.3), le résultat de la Proposition 4.7 pour $n = 1$.

Le théorème suivant est une généralisation de la Proposition 4.8, connu sous le nom "formule des sauts".

Théorème 4.10.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 par morceaux. x_j ($1 \leq j \leq m$) des points éventuels de discontinuité de f .

Alors :

$$(T_f)' = T_{(\tilde{f})'} + \sum_{j=1}^m \sigma_{x_j} \delta_{x_j}$$

où :

$$\sigma_{x_j} = f(x_j^+) - f(x_j^-) \quad (1 \leq j \leq m)$$

et

$$\tilde{f} = f|_{\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}}$$

Remarque 4.11.

1. La Proposition 4.8 et le Théorème 4.10 (formule des sauts), restent valables pour une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}$ tout entier.

2. La formule des sauts s'étend aux dérivées successives. Par exemple, pour la dérivée seconde, on a :
 Si $f \in C^2(\mathbb{R} - \cup_{j=1}^m \{x_j\})$, f et f' admettent des discontinuités de premières espèces en x_j ($1 \leq j \leq m$). Alors :

$$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{j=1}^m \sigma_{x_j} \delta'_{x_j} + \sum_{j=1}^m \tilde{\sigma}_{x_j} \delta_{x_j}$$

$$\text{où : } \tilde{\sigma}_{x_j} = f'(x_j^+) - f'(x_j^-) \quad (1 \leq j \leq m).$$

Théorème 4.12.

Soit $T \in D'(\mathbb{R})$, alors $T' = 0$ si et seulement si T est constante, c.à.d : $T = T_f$ où f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On suppose que $T = T_f$ avec f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. D'après la Proposition 4.7, on a $(T_f)' = T_{f'} = T_0 = 0$.

On suppose maintenant que $T' = 0$. Alors :

$$\forall \theta \in D(\mathbb{R}) : \langle T', \theta \rangle = -\langle T, \theta' \rangle = 0$$

Donc T s'annule sur toute les fonctions $\psi \in D(\mathbb{R})$ de la forme $\psi = \theta'$ où $\theta \in D(\mathbb{R})$.

Rappelons qu'on a la caractérisation suivante :

$$\exists \theta \in D(\mathbb{R}) : \psi = \theta' \iff \psi \in D(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$$

Fixons $\chi \in D(\mathbb{R})$ avec $\int_{\mathbb{R}} \chi(x) dx = 1$.

Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$, posons :

$$\psi(x) = \varphi(x) - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right) \chi(x)$$

Alors : $\psi \in D(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$

Ainsi, d'après la caractérisation précédente, il existe $\theta \in D(\mathbb{R})$ tel que $\psi = \theta'$.

Donc :

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, \theta' \rangle = -\langle T', \theta \rangle = 0$$

Puisque

$$\varphi(x) = \psi(x) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right) \chi(x)$$

on a :

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle T, \psi \rangle + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right) \langle T, \chi \rangle \\ &= 0 + C \langle 1, \varphi \rangle = \langle C, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

où

$$C = \langle T, \psi \rangle$$

d'où le résultat. □

Théorème 4.13.

Pour tout $T \in D'(\mathbb{R})$, il existe $S \in D'(\mathbb{R})$ tel que $S' = T$.

Démonstration.

On définit $S \in D'(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) : \langle S, \varphi \rangle = -\langle T, \theta_{\varphi} \rangle$$

où θ_{φ} est l'unique fonction dans $D(\mathbb{R})$ définie par (voir la preuve du théorème précédent)

$$\theta'_{\varphi} = \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right) \chi \tag{4.4}$$

Notons que pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\theta'_{\varphi_1 + \varphi_2} = \theta'_{\varphi_1} + \theta'_{\varphi_2} \quad \text{et} \quad \theta'_{\alpha \varphi_1} = \alpha \theta'_{\varphi_1} \tag{4.5}$$

Donc (4.5) et la linéarité de T impliquent la linéarité de S .

D'autre part, de (4.4), on déduit que :

$$\theta_{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right) \int_{-\infty}^x \chi(t) dt$$

on montre que S est une distribution (linéaire et continue). De plus, on vérifie (grâce à l'unicité de θ) que $\varphi = \theta$. Par suite

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

D'où le résultat. □

4.2 Multiplication par une fonction de classe C^∞

Définition 4.14.

Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$. La forme linéaire fT définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad : \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle \quad (4.6)$$

est une distribution appelée produit de f par T .

Remarque 4.15.

i) Puisque $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et par suite le membre de droite dans (4.6) est bien définie.

Il est facile de vérifier que l'application définie dans (4.6) est linéaire. De plus, d'après la Proposition..., on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$

$$|\langle fT, \varphi \rangle| = |\langle T, f\varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_{x \in K} |D^\alpha(f\varphi)(x)|$$

En employant la formule de Leibniz, on trouve :

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha(f\varphi)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \sup_{x \in K} \left| D^{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) f(x) \right| \sup_{x \in K} |D^\beta \varphi(x)|$$

Ainsi

$$|\langle fT, \varphi \rangle| \leq C_{K,f,m} \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|$$

où

$$C_{K,f,m} = C_K \sum_{\beta \leq \alpha} \sup_{x \in K} \left| D^{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) f(x) \right|$$

ii) Si T est une distribution d'ordre m , alors fT est d'ordre inférieur ou égale à m . Il peut être strictement inférieur à m , par exemple quand $f = 0$.

Propriétés 4.16.

Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f, g \in C^\infty(\Omega)$ et $h \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors

(i) $(f + g)T = fT + gT$

(ii) $(f.g)T = f(gT)$

(iii) $f(T + S) = fT + fS$

- (iv) $Supp(fT) \subset Supp(f) \cap Supp(T)$
- (v) $fT_h = T_{fh}$

Démonstration.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, en appliquant la Définition 4.6 puis la définition des opérations dans l'espace des fonctions, on trouve :

$$\langle (f + g)T, \varphi \rangle = \langle T, (f + g)\varphi \rangle = \langle T, f\varphi + g\varphi \rangle$$

En employant la linéarité de T puis la Définition 4.6 encore une fois et enfin la définition des opérations dans l'espace des distributions, on obtient

$$\begin{aligned} \langle T, f\varphi + g\varphi \rangle &= \langle T, f\varphi \rangle + \langle T, g\varphi \rangle \\ &= \langle fT, \varphi \rangle + \langle gT, \varphi \rangle \\ &= \langle fT + gT, \varphi \rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve (i). Les propriétés (ii) et (iii) se démontre de la meme manière.

Pour montrer (iv), il suffit de montrer que

$$(Supp(f))^C \cup (Supp(T))^C \subset (Supp(fT))^C \quad (4.7)$$

Soit $x_0 \in (Supp(f))^C$, d'après (i) dans Proposition..,

il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que pour tout $x \in V_{x_0}$: $f(x) = 0$

Donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{V_{x_0}}(\Omega), f\varphi = 0$$

Par suite

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{V_{x_0}}(\Omega)$$

Ainsi, d'après (i) dans Proposition.., on est arrivé à $x_0 \in (Supp(fT))^C$

Donc on a montrer

$$x_0 \in (Supp(f))^C \implies x_0 \in (Supp(fT))^C \quad (4.8)$$

De même, on démontre

$$x_0 \in (Supp(T))^C \implies x_0 \in (Supp(fT))^C \quad (4.9)$$

Enfin (4.8) et (4.9) impliquent (4.7).

Montrons maintenant (v) :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad : \langle fT_h, \varphi \rangle &= \langle T_h, f\varphi \rangle = \int_{\Omega} h(x) [f(x)\varphi(x)] dx \\ &= \int_{\Omega} (hf)(x)\varphi(x) dx = \langle T_{fh}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

4.2.1 Exemples

Exemple 4.17.

Soit $f \in C^\infty(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$. Montrons que $f\delta_{x_0} = f(x_0)\delta_{x_0}$.

En effet, pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle f\delta_{x_0}, \varphi \rangle &= \langle \delta_{x_0}, f\varphi \rangle = (f\varphi)(x_0) = f(x_0)\varphi(x_0) \\ &= f(x_0)\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle f(x_0)\delta_{x_0}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

d'où $f\delta_{x_0} = f(x_0)\delta_{x_0}$

En particulier, pour $f(x) = x \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $x_0 = 0$, on a

$$x\delta_0 = 0 \tag{4.10}$$

Exemple 4.18.

$$xV_p\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

En effet, Rappelons d'abord que

$$\left\langle V_p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle xV_p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle V_p\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle\end{aligned}$$

D'où

$$xV_p\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Théorème 4.19.

Soit $T \in D'(\mathbb{R})$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $T = C\delta_0$ où $C \in \mathbb{R}$
- (ii) $xT = 0$

Démonstration.

On suppose que $T = C\delta_0$. On a donc pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$:

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle xC\delta_0, \varphi \rangle = C\langle x\delta_0, \varphi \rangle$$

En tenant compte de (4.10), on obtient donc : $xT = 0$.

Ceci prouve que (i) implique (ii).

On suppose maintenant que $xT = 0$. Alors :

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (4.11)$$

Rappelons la caractérisation suivante

$$\exists \theta \in D(\mathbb{R}) : \psi = x\theta \iff \psi \in D(\mathbb{R}) \text{ et } \psi(0) = 0 \quad (4.12)$$

En combinant (5.9) et (4.12), on déduit que

$$\forall \psi \in D(\mathbb{R}), \text{ tel que } \psi(0) = 0 \text{ alors } \langle T, \psi \rangle = 0 \quad (4.13)$$

Fixon $\chi \in D(\mathbb{R})$ tel que $\chi(x) = 1, \forall x \in [-1, 1]$. Notons que l'existence de χ est justifié par le Théorème 2.35.

Soit maintenant φ un élément quelconque de $D(\mathbb{R})$.

On pose

$$\psi = \varphi - \varphi(0)\chi$$

Il est claire que $\psi \in D(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 0$.

Donc, d'après (4.13), on a $\langle T, \psi \rangle = 0$. Par suite :

$$\begin{aligned} 0 = \langle T, \psi \rangle &= \langle T, \varphi - \varphi(0)\chi \rangle \\ &= \langle T, \varphi \rangle - \varphi(0)\langle T, \chi \rangle \\ &= \langle T, \varphi \rangle - \langle C\delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Ainsi

$$T = C\delta_0$$

où

$$C = \langle T, \chi \rangle$$

□

Corollaire 4.20.

Soit $T \in D'(\mathbb{R})$. Si $xT = 1$, alors

$$T = V_p\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta_0 \quad (C \in \mathbb{R})$$

Démonstration.

Dans un exemple précédent on a montré que $xV_p\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Donc si $xT = 1$, on a alors

$$xT - xV_p\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ainsi, d'après la Propriétés 4.16 (iii), on a

$$x\left(T - V_p\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

Il s'ensuit donc du Théorème 4.19 que

$$T - V_p\left(\frac{1}{x}\right) = C\delta_0$$

d'où

$$T = V_p\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta_0$$

□

Théorème 4.21.

Soit $S \in D'(\mathbb{R})$. Alors l'équation $xT = S$ admet une solution $T \in D'(\mathbb{R})$.

Démonstration.

On fixe $\chi \in D(\mathbb{R})$ tel que $\chi(x) = 1, \forall x \in [-1, 1]$.

Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on définit la fonction $L\varphi$ par :

$$L\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi(x)}{x}, & x \neq 0 \\ \varphi'(0), & x = 0 \end{cases}$$

En peut vérifier sans peine que pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a :

$L\varphi \in D(\mathbb{R})$ et $L(x\varphi) = \varphi$

On définit donc la distribution T sur $D(\mathbb{R})$ par

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, L\varphi \rangle \quad (\text{on vérifie que c'est une distribution})$$

On a donc

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = \langle S, L(x\varphi) \rangle = \langle S, \varphi \rangle$$

d'où $xT = S$.

□

Remarque 4.22.

- (i) Notons qu'un produit commutative des distributions n'existe pas. En effet, si un tel produit existait, on aurait par exemple

$$V_p \left(\frac{1}{x} \right) \delta_0 = \delta_0 V_p \left(\frac{1}{x} \right)$$

d'où

$$x V_p \left(\frac{1}{x} \right) \delta_0 = x \delta_0 V_p \left(\frac{1}{x} \right)$$

Mais, d'une part, d'après l'Exemple 4.18, on a :

$$x V_p \left(\frac{1}{x} \right) \delta_0 = \left(x V_p \left(\frac{1}{x} \right) \right) \delta_0 = 1. \delta_0 = \delta_0$$

et d'autre part, d'après l'Exemple 4.17, on a :

$$x \delta_0 V_p \left(\frac{1}{x} \right) = (x \delta_0) V_p \left(\frac{1}{x} \right) = 0. V_p \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Ce qui est absurde.

- (ii) On ne peut pas définir un produit de distributions qui prolonge le produit des fonctions en réservant la continuité, c'est à dire pour deux suites de distributions $(T_m)_{m \geq 1}$ et $(S_m)_{m \geq 1}$:

Si $T_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} T$ et $S_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S$, alors $T_m S_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} TS$

En effet, par exemple si on considère les deux suite des distributions $(T_m)_{m \geq 1}$ et $(S_m)_{m \geq 1}$ où $T_n = S_n = f_n = n \chi_{]0, \frac{1}{n}[}$.

D'après l'Exemple..., on a $(T_n)_{n \geq 1} (= (S_n)_{n \geq 1})$ converge vers δ_0 mais $(T_n S_n)_{n \geq 1} = (T_n^2)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers δ_0^2

4.3 Restriction d'une distribution

Rappelons que si $\mathcal{U}$ et Ω sont deux ouverts, tels que $\mathcal{U} \subset \Omega$ et si $\varphi \in D(\mathcal{U})$, alors le prolongement de φ par zéro sur Ω appartient à $D(\Omega)$:

$$\varphi \in D(\mathcal{U}) \implies \tilde{\varphi} \in D(\Omega) \quad \text{où} \quad \forall x \in \Omega : \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } x \in \Omega - \mathcal{U} \end{cases}$$

Définition 4.23.

Soient $\mathcal{U}$ et Ω deux ouverts, tels que $\mathcal{U} \subset \Omega$ et $T \in D'(\Omega)$.

On appelle restriction de T sur $\mathcal{U}$ et on note par $T|_{\mathcal{U}}$, la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in D(\mathcal{U}) : \langle T|_{\mathcal{U}}, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$$

Exemple 4.24.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, on a :

$$\langle \delta_0, \tilde{\varphi} \rangle = \tilde{\varphi}(0) = 0 \quad (\tilde{\varphi} \text{ est le prolongement de } \varphi \text{ par zéro})$$

Donc,

$$\delta_0|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = 0$$

.

Plus généralement, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\delta_0|_{\Omega} = 0 \text{ si } 0 \notin \Omega \quad \text{et} \quad \delta_0|_{\Omega} = \delta_0 \text{ si } 0 \in \Omega$$

Comme application de l'Exemple 4.24, on va montrer le caractère singulier de la distribution de Dirac.

Proposition 4.25.

La distribution de Dirac δ_0 sur $\mathbb{R}^n$ est une distribution singulière.

Démonstration.

On va utiliser un raisonnement par l'absurde. On suppose qu'il existe une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, telle que :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \langle \delta_0, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)dx \quad (4.14)$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. En utilisant le résultat de l'Exemple 4.24 et la définition de la restriction d'une distribution, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = \langle \delta_0|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}, \varphi \rangle &= \langle \delta_0, \tilde{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\tilde{\varphi}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc du Lemme... que $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et par suite $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, d'après (4.14), on a :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \langle \delta_0, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)dx = 0$$

D'où la contradiction, puisqu'il existe $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\psi_0(0) \neq 0$. □

Remarque 4.26.

La preuve de la Proposition 4.25, peut être adaptée sans peine pour montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la distribution de Dirac en x_0 : δ_{x_0} est singulière.

4.4 Autres opérations

4.4.1 Translation d'une distribution

Définition 4.27.

Soient $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On appelle *translatée* $\tau_a T$ de T , la distribution définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$$

où

$$\tau_a \varphi(x) = \varphi(x - a) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Remarque 4.28.

La définition précédente est une extension de ce que nous obtenons dans le cas où $T = f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

En effet, en utilisant la définition puis le changement de variable $y = x - a$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \langle \tau_a f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - a) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(y + a) dy = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle \end{aligned}$$

4.4.2 Dilatation d'une distribution

Définition 4.29.

Soient $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \neq 0$. On appelle la *dilatée* de T de rapport λ , qu'on note T_λ , la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \langle T_\lambda, \varphi \rangle = |\lambda|^n \langle T, \varphi_{\frac{1}{\lambda}} \rangle$$

où

$$\varphi_{\frac{1}{\lambda}}(x) = \varphi(\lambda x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Remarque 4.30.

La définition précédente est une extension de ce que nous obtenons dans le cas où $T = f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (à vérifier !)

Cas particuliers

Pour $\lambda = -1$, on note $\check{\varphi}$ au lieu de φ_{-1} , s.à.d :

$$\check{\varphi}(x) = \varphi_{-1}(x) = \varphi(-x)$$

Définition 4.31. (*Parité d'une distribution*)

Soit $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, posons $\check{T} = T_{-1}$

1. On dit que T est une distribution paire si $\check{T} = T$.
2. On dit que T est une distribution impaire si $\check{T} = -T$.
3. On dit que T est homogène d'ordre m si $\forall \lambda > 0 : T_\lambda = \lambda^{-m} T$.

Exemple

la distribution de Dirac δ_0 sur $\mathbb{R}^n$ est une distribution homogène d'ordre $(-n)$.

En effet, on a pour tout $\lambda > 0$ et tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle (\delta_0)_\lambda, \varphi \rangle = \lambda^n \langle \delta_0, \varphi_{\frac{1}{\lambda}} \rangle = \lambda^n \varphi_{\frac{1}{\lambda}}(0) = \lambda^n \varphi(0) = \lambda^n \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

4.5 Convolution des distributions

Soit Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$ respectivement. Pour $u_j \in \mathcal{C}(\Omega_j), j = 1, 2$, on définit la fonction $u_1 \otimes u_2$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ par :

$$(u_1 \otimes u_2)(x_1, x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \quad (4.15)$$

La fonction $u_1 \otimes u_2$ définie par (4.15), appartient à $\mathcal{C}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. De plus, d'après le théorème de Fubini, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$:

$$\begin{aligned} \langle u_1 \otimes u_2, \varphi \rangle &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} u_1(x_1)u_2(x_2)\varphi(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\ &= \int_{\Omega_1} u_1(x_1) \left(\int_{\Omega_2} u_2(x_2)\varphi(x_1, x_2)dx_2 \right) dx_1 \\ &= \langle u_1, \langle u_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle \rangle \end{aligned}$$

En particulier, si $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$, où $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j), j = 1, 2$, on obtient :

$$\langle u_1 \otimes u_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle u_1, \varphi_1 \rangle \langle u_2, \varphi_2 \rangle$$

L'objet de la partie suivante est de généraliser cette opération aux distributions. On va commencer par énoncer deux résultats importants.

Lemme 4.32. [6, Lemme 6.1, Chapitre 2]

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On considère pour tout $\lambda \in I$, une fonction $x \mapsto \varphi(x, \lambda)$ appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que :

- (i) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall l = 0, \dots, k$, la fonction $(x, \lambda \mapsto D_x^\alpha D_\lambda^l \varphi(x, \lambda))$ existe et est continue sur $\Omega \times I$.
- (ii) $\forall \lambda_0 \in I, \exists \delta > 0, \exists K \subset \Omega$ compact, tels que $\text{Supp}_x(D_\lambda^l \varphi) \subset K$, pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ et tout $l = 0, \dots, k$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On pose $G(\lambda) = \langle T, D_\lambda^l \varphi(., \lambda) \rangle$. Alors, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^k(I)$ et $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l G(\lambda) = \langle T, D_\lambda^l D_\lambda^l \varphi(., \lambda) \rangle, \forall l = 0, \dots, k, \lambda \in I$.

Lemme 4.33. [6, Corollaire 6.4, Chapitre 2]

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f un élément de $\mathcal{D}(\Theta \times \Omega)$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Theta \times \Omega)$. Alors :

$$\left\langle T, \int f(t, .) dt \right\rangle = \int \langle T, f(t, .) \rangle dt$$

Théorème 4.34.

Soit $T_j \in \mathcal{D}'(\Omega_j), j = 1, 2$. Il existe alors une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que pour tout $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j), j = 1, 2$, on a :

$$\langle T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle T_1, \varphi_1 \rangle \langle T_2, \varphi_2 \rangle \quad (4.16)$$

De plus, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on a :

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, .) \rangle \rangle \quad (4.17)$$

et

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_2, \langle T_1, \varphi(., x_2) \rangle \rangle \quad (4.18)$$

Démonstration.

Soit K_j des compacts de Ω_j . Il existe alors, $k_j \in \mathbb{N}$ et $C_j > 0$ tels que :

$$|\langle T_j, \varphi_j \rangle| \leq C_j \sum_{|\alpha| \leq k_j} \sup_{x \in K_j} |D^\alpha \varphi_j(x)|, \quad \forall \varphi_j \in \mathcal{D}_{K_j}(\Omega_j) \quad (4.19)$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}_{K_1 \times K_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. La fonction $x_1 \mapsto \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle$ est à support compact, inclu dans K_1 , puisque $\varphi(x_1, \cdot) = 0$ si $x_1 \notin K_1$.

Cette fonction est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$. Ceci découle d'un résultat analogue au théorème de dérivation sous le signe intégrale, dans le cadre des distributions. De plus

$$D_{x_1}^\alpha \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle = \langle T_2, D_{x_1}^\alpha \varphi(x_1, \cdot) \rangle$$

(Pour plus de détails, consulter [6, Théorème 1.1, Chapitre 5]).

Donc, d'après (4.19), on a :

$$\sup_{K_1} |D_{x_1}^\alpha \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle| \leq C_2 \sum_{|\alpha_2| \leq k_2} \sup_{K_1 \times K_2} |D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \varphi|$$

Il s'ensuit donc que $\langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle \rangle$ est bien définie, et d'après (4.19), on a :

$$\begin{aligned} |\langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle \rangle| &\leq C_1 \sum_{|\alpha_1| \leq k_1} \sup_{K_1} |D_{x_1}^\alpha \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle| \\ &\leq C_1 C_2 \sum_{\substack{|\alpha_1| \leq k_1 \\ |\alpha_2| \leq k_2}} \sup_{K_1 \times K_2} |D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \varphi| \end{aligned}$$

Si on pose $\langle T, \varphi \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle \rangle$, alors $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et vérifie (4.16) et (4.17).

L'unicité de T découle du fait que l'espace $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ est dense dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2) = \Big\{ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) : \varphi(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^k u_i(x_1) v_i(x_2), \\ u_i \in \mathcal{D}(\Omega_1), v_i \in \mathcal{D}(\Omega_2) \Big\} \end{aligned}$$

(Voir [6, Proposition 3.7, Chapitre 1]).

Enfin, la distribution $\tilde{T}$ définie par : $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T_2, \langle T_1, \varphi(\cdot, x_2) \rangle \rangle$, vérifie aussi (4.16). L'unicité implique donc que $T = \tilde{T}$, d'où (4.18). $\square$

Définition 4.35. (Produit tensoriel)

La distribution T définie dans le Théorème 4.34, s'appelle le produit tensoriel des distributions T_1 et T_2 , qu'on note par $T_1 \otimes T_2$.

Remarque 4.36.

- (i) Il découle immédiatement du Théorème 4.34, que $T_1 \otimes T_2 = T_2 \otimes T_1$.
- (ii) Les résultats du Théorème 4.34 restent valables, si $T_j \in \mathcal{E}'(\Omega_j)$, $j = 1, 2$.

Exemple 4.37.

- (i) Soit $a_j \in \Omega_j$, $j = 1, 2$ et $T_j = \delta_{a_j}$, alors : $T_1 \otimes T_2 = \delta_a$, où $a = (a_1, a_2)$.
- (ii) Si $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_y)$, alors $\frac{\partial}{\partial x_j}(T_1 \otimes T_2) = \frac{\partial T_1}{\partial x_j} \otimes T_2$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(T_1 \otimes T_2), \varphi \right\rangle &= -\left\langle T_1 \otimes T_2, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle T_2, \left\langle T_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\cdot, y) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle T_2, \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x_j}, \varphi(\cdot, y) \right\rangle \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x_j} \otimes T_2, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

- (iii) Soit $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ et $T_2 \in \mathcal{E}'(\Omega_y)$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_y)$ avec $\chi = 1$ dans un voisinage du support de T_2 . On a alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$:

$$\langle T_1 \otimes T_2, \varphi \rangle = \langle T_1 \otimes T_2, \chi \varphi \rangle \quad (4.20)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \langle T_1 \otimes T_2, \varphi \rangle &= \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x, \cdot) \rangle \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \chi(\cdot) \varphi(x, \cdot) \rangle \rangle \\ &= \langle T_1 \otimes T_2, \chi \varphi \rangle \end{aligned}$$

Ce qui montre que $T_1 \otimes T_2$ peut être prolonger aux fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$ telles que $\chi \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$.

Théorème 4.38.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. La forme linéaire, notée par $T * S$ et définie sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_y \otimes S_z, \varphi(y + z) \rangle \quad (4.21)$$

est une distribution.

Démonstration.

Commençons d'abord de montrer que le membre de droite dans (4.21) est bien défini.

Si $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\chi = 1$ dans un voisinage du support de S , la fonction $(y, z) \mapsto \chi(y) \varphi(y + z)$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. On pose (voir Exemple 4.37, (iii)) :

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_y, \langle S_z, \varphi(y + z) \rangle \rangle$$

Montrons maintenant que $T * S$ est continue, (il est clair qu'elle est linéaire).

Puisque $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, il existe alors $C_0 > 0, l \in \mathbb{N}$ et K compact de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|\langle S, \psi(y + \cdot) \rangle| \leq C_0 \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{z \in K} |D^\alpha \psi(y + z)| \quad (4.22)$$

D'autre part, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et la fonction $y \mapsto \langle S, \varphi(y + \cdot) \rangle$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si φ l'est. Il existe donc, $C_1 > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{aligned} | \langle T * S, \varphi \rangle | &\leq C_1 \sum_{|\beta| \leq k} \sup_y |D_y^\beta \langle S, \varphi(y + \cdot) \rangle| \\ &\leq C_1 \sum_{|\beta| \leq k} \sup_y | \langle S, (D^\beta \varphi)(y + \cdot) \rangle | \end{aligned} \quad (4.23)$$

Maintenant, en utilisant (4.22) pour $\psi = D^\beta \varphi$, puis (4.23), on obtient :

$$\begin{aligned} | \langle T * S, \varphi \rangle | &\leq C_0 C_1 \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq k}} \sup_{\substack{z \in K \\ y \in \mathbb{R}^n}} |D^{\alpha+\beta} \varphi(y + z)| \\ &\leq C_0 C_1 \sum_{|\gamma| \leq l+k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\gamma \varphi(x)| \end{aligned}$$

Ce qui montre que $T * S$ est une distribution. □

Remarque 4.39.

- (i) La distribution $T * S$ définie par (4.21), s'appelle convolution des distributions T et S .
- (ii) On retrouve le même résultat du Théorème 4.38, si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.40.

Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on a :

- (i) $T * S = S * T$
- (ii) $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$
- (iii) $D^\alpha(T * S) = (D^\alpha T) * S = T * (D^\alpha S), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

Démonstration.

(i) résulte de la définition du produit de convolution et la Remarque 4.36.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle T * \delta_0, \varphi \rangle = \langle T_y, \langle \delta_z, \varphi(y + z) \rangle \rangle = \langle T_y, \varphi(y) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

D'où $T * \delta_0 = T$. De même, on montre que $\delta_0 * T = T$, et achève donc la preuve de (ii).

En appliquant la définition de la dérivée puis la définition de la convolution, on obtient pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle D^\alpha(T * S), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T * S, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_y, \langle S_z, (D^\alpha \varphi)(y + z) \rangle \rangle$$

or

$$(D^\alpha \varphi)(y + z) = D_z^\alpha [\varphi(y + z)]$$

et

$$\langle S_z, D_z^\alpha [\varphi(y + z)] \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha S, \varphi(y + \cdot) \rangle$$

Ainsi

$$\langle D^\alpha(T * S), \varphi \rangle = \langle T_y, \langle (D^\alpha S)_z, \varphi(y + z) \rangle \rangle = \langle T * (D^\alpha S), \varphi \rangle$$

D'où : $D^\alpha(T * S) = T * (D^\alpha S)$. L'autre égalité dans (iii), découle de (i). $\square$

Théorème 4.41.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors, on a :

- (i) $T * \varphi$ est donnée par la fonction $\mathcal{C}^\infty$, $x \mapsto \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$.
- (ii) $\text{Supp}(T * \varphi) \subset \text{Supp}(T) + \text{Supp}(\varphi)$.
- (iii) Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors : $(T * S) * \varphi = T * (S * \varphi)$

Démonstration.

Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T_y, \langle \varphi_z, \psi(y + z) \rangle \rangle$$

Donc :

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \left\langle T_y, \int \varphi(z) \psi(y + z) dz \right\rangle = \left\langle T_y, \int \varphi(x - y) \psi(x) dx \right\rangle$$

Puisque la fonction $(x, y \mapsto \varphi(x - y) \psi(x))$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, on peut donc appliquer le Lemme 4.33 et on déduit :

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \int \langle T, \varphi(x - y) \rangle \psi(x) dx = \langle \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle, \psi \rangle$$

Ainsi, $T * \varphi$ est donnée par la fonction $x \mapsto \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après le Lemme 4.32.

Puisque $\text{Supp}(\varphi)$ est compact, alors $\text{Supp}(T) + \text{Supp}(\varphi)$ est fermé.

Soit maintenant $x_0 \in (\text{Supp}(T) + \text{Supp}(\varphi))^C$ qui est ouvert (comme complémentaire d'un fermé). Il existe alors $V_{x_0} \subset (\text{Supp}(T) + \text{Supp}(\varphi))^C$. Il suffit donc de montrer que : $x_0 \notin \text{Supp}(T * \varphi)$.

Soit $x \in V_{x_0}$. Si on suppose qu'il existe $y \in \text{Supp}(T) \cap \text{Supp}_y \varphi(x - y)$, alors :

$$y \in \text{Supp}(T) \text{ et } x - y \in \text{Supp}(\varphi)$$

Ainsi :

$$x = x - y + y \in \text{Supp}(\varphi) + \text{Suup}(T)$$

Ce qui contredit le fait que $x \in V_{x_0} \subset (\text{Supp}(T) + \text{Supp}(\varphi))^C$.

D'où $\text{Suup}(T) \cap \text{Supp}_y \varphi(x - y) = \emptyset$, et par suite :

$$\langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle = 0$$

Ceci montre que $x_0 \notin \text{Supp}(T * \varphi)$ et achève la preuve de (ii).

Notons d'abord que $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, donc le membre de gauche dans (iii) est bien défini. D'autre part, d'après (i), $\text{Supp}(S * \varphi)$ est compact, et par suite $S * \varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, d'où le membre de droite dans (iii) est aussi bien défini. De plus, d'après (i), on a :

$$\begin{aligned} [(T * S) * \varphi](x) &= \langle T * S, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T_y, \langle S_z, \varphi(x - (y + z)) \rangle \rangle \\ &= \langle T_y, (S * \varphi)(x - y) \rangle = [T * (S * \varphi)](x) \end{aligned}$$

Ce qui prouve (iii) . □

Chapitre 5

Transformation de Fourier

5.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 5.1.

La transformation de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ et qu'on note par $\mathcal{F}f$ ou bien $\widehat{f}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{F}f(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega t} f(t) dt, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Remarque 5.2.

(i) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ et tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\omega)$ est bien défini. En effet :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i \omega t} f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

L'intégrale de droite ci-dessus est fini, puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(ii) On peut rencontrer dans la littérature mathématique de cette théorie, les définitions suivantes :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \text{ou} \quad \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

(iii) Si f est une fonction paire, alors les fonctions : $t \mapsto f(t) \cos(2\pi\omega t)$ et $t \mapsto f(t) \sin(2\pi\omega t)$ sont respectivement paire et impaire. Donc

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(2\pi\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(2\pi\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(2\pi\omega t) dt$$

Ainsi $\widehat{f}$ est à valeurs réelles et de plus :

$$\widehat{f}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(2\pi\omega t) dt$$

De meme, on montre que si f est impaire, alors :

$$\widehat{f}(\omega) = -2i \int_0^\infty f(t) \sin(2\pi\omega t) dt$$

Exemple 5.3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 - |t| \chi_{[-1,1]}(t)$. On a :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt &= \int_{-1}^0 (1+t) e^{-2\pi i \omega t} dt + \int_0^1 (1-t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &:= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Une intégration par partie, donne :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i}{2\pi\omega} + \frac{1}{4\pi^2\omega^2} - \frac{e^{2\pi i \omega t}}{4\pi^2\omega^2} \\ I_2 &= \frac{-i}{2\pi\omega} + \frac{1}{4\pi^2\omega^2} - \frac{e^{-2\pi i \omega t}}{4\pi^2\omega^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) = I_1 + I_2 &= \frac{1}{2\pi^2\omega^2} - \frac{e^{2\pi i \omega t} + e^{-2\pi i \omega t}}{4\pi^2\omega^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2\omega^2} - \frac{\cos(2\pi\omega)}{2\pi^2\omega^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2\omega^2} - \frac{(1 - 2\sin^2(\pi\omega))}{2\pi^2\omega^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\sin^2(\pi\omega)}{\pi^2\omega^2}$$

Notation

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continue t.q. } \lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0\}$$

On muni $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}_0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$$

Théorème 5.4.

1. La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ envoie $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et c'est une contraction :

$$\|\widehat{f}\|_{\mathcal{C}_0} \leq \|f\|_{L^1}$$

Autrement dit, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

- (i) $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) $\widehat{f}(\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow \pm\infty]{} 0$ (Lemme de Riemann-Lebesgue)

(iii) $|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

2. La transformation de Fourier est une application linéaire continue de $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$ dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_0})$.

Autrement dit, pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$$

Démonstration.

Pour tout $\omega, h \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(\omega + h) - \widehat{f}(\omega) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2\pi i(\omega+h)t} - e^{-2\pi i\omega t}) f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2\pi i h t} - 1) e^{-2\pi i \omega t} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i h t} - 1| |f(t)| dt \end{aligned}$$

On a

$$|e^{-2\pi i h t} - 1| |f(t)| \leq 2 |f(t)| \quad p.p \text{ sur } \mathbb{R}$$

De plus, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} |e^{-2\pi i h t} - 1| |f(t)| = 0$$

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\left| \widehat{f}(\omega + h) - \widehat{f}(\omega) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i h t} - 1| |f(t)| dt \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow \infty$$

Donc $\widehat{f}$ est continue en tout $\omega \in \mathbb{R}$, ce qui prouve (i).

Montrons maintenant que $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \widehat{f}(\omega) = 0$. Ceci repose sur le fait que l'espace des fonctions en escalier à support borné est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer le résultat pour une fonction en escalier à support borné. Soit φ une telle fonction :

$$\varphi = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{[i-1, i[}$$

On peut donc calculer sa transformée de Fourier par linéarité :

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m c_i \chi_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]}(t) \right) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{ic_i}{2\pi\omega} (e^{-2\pi i \omega \alpha_i} - e^{-2\pi i \omega \alpha_{i-1}})\end{aligned}$$

Par suite :

$$|\widehat{\varphi}(\omega)| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m c_i \frac{1}{|\omega|}$$

Ce qui permet de déduire que $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}(\omega) = 0$

On a

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i \omega t} f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1}$$

Ceci prouve (iii). □

Remarque 5.5.

- (i) $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est strictement inclus dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Autrement dit : $\mathcal{F}$ n'est pas surjective.
- (ii) $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
- (iii) On montre (voir Exercice ...) que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\widehat{f} = \widehat{g}$, alors, $f = g$ pour presque tout point de $\mathbb{R}$. En particulier, si f et g sont continues, et si $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont égales, alors f et g le sont également.

5.1.1 Exemples

Soient $a > 0$ fixé, c et d deux réels tels que $c < d$. Par un calcul direct, en appliquant la Définition 5.1, on trouve dans les exemples ci-dessous les transformations de Fourier pour quelques fonctions.

Exemple 5.6.

$$\mathcal{F}(\chi_{[c, d]})(\omega) = \begin{cases} d - c & \text{si } \omega = 0 \\ \frac{\sin \pi(d - c)\omega}{\pi\omega} e^{-i\pi(c+d)\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \end{cases}$$

Exemple 5.7.

Un cas particulier de l'Exemple 5.6 est le suivant :

$$\mathcal{F}\left(\chi_{\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]}\right)(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } \omega = 0 \\ \frac{\sin \pi a \omega}{\pi \omega} & \text{si } \omega \neq 0 \end{cases}$$

Exemple 5.8.

$$\mathcal{F}\left(e^{ax}\chi_{]-\infty, 0[}\right)(\omega) = \frac{1}{a - 2\pi i \omega}$$

Exemple 5.9.

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax}\chi_{]0, +\infty[}\right)(\omega) = \frac{1}{a + 2\pi i \omega}$$

Exemple 5.10.

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\omega) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \omega^2}$$

Exemple 5.11.

$$\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\omega) = e^{-\pi \omega^2}$$

Exemple 5.12.

$$\mathcal{F}\left(\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right)(\omega) = \begin{cases} 1 - |\omega| & \text{si } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\omega| > 1 \end{cases}$$

Propriétés 5.13.

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\tau, \lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

- (i) Si $g(t) = f(t - \tau)$, alors $\widehat{g}(\omega) = e^{-2\pi i \omega \tau} \widehat{f}(\omega)$
- (ii) Si $g(t) = e^{2\pi i \tau t} f(t)$, alors $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega - \tau)$
- (iii) Si $g(t) = f(\lambda t)$, alors $\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{|\lambda|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$), en particulier,
si $g(t) = f(-t)$, alors : $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$

Démonstration.

En effectuant le changement de variable : $u = t - \tau$, on trouve :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-2\pi i \omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i \omega (u + \tau)} du \\ &= e^{-2\pi i \omega \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i \omega u} du = e^{-2\pi i \omega \tau} \widehat{f}(\omega) \end{aligned}$$

Ce qui prouve (i).

On a :

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \tau t} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega (\omega - \tau) t} dt = \widehat{f}(\omega - \tau)$$

D'où (ii) est satisfaite. En effectuant le changement de variable : $u = \lambda t$, on trouve :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda t) e^{-2\pi i \omega t} dt = \frac{1}{|\lambda|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\frac{2\pi i \omega u}{\lambda}} du \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\lambda = -1$ pour obtenir le résultat du cas particulier énoncé dans (iii). $\square$

Proposition 5.14.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est dérivable et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\widehat{f}'(\omega) = 2\pi i \omega \widehat{f}(\omega)$$

Démonstration.

notons d'abord, que la condition imposée sur f (dérivable et sa dérivée est intégrable), garantit l'existence de la transformée de Fourier de la dérivée. On a donc :

$$\widehat{f}'(\omega) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f'(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

Une intégration par partie donne alors :

$$\widehat{f}'(\omega) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[f(t) e^{-2\pi i \omega t} \Big|_{-R}^{+R} + \int_{-R}^{+R} f(t) (2\pi i \omega t) e^{-2\pi i \omega t} dt \right] \quad (5.1)$$

Notons que si $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$. En effet, puisque :

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(s) ds \quad (t_0 \text{ fixé}),$$

et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, en déduit donc que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$ existe. Si on suppose que cette limite est non nulle, on aboutit par un critère de comparaison des intégrales, que f n'est pas intégrable.

Revenons maintenant à (5.1), qui donne alors :

$$\widehat{f}'(\omega) = 0 + \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[(2\pi i \omega t) \int_{-R}^{+R} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \right]$$

D'où : $\widehat{f}'(\omega) = 2\pi i \omega \widehat{f}(\omega)$. $\square$

Proposition 5.15.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $t \mapsto tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est dérivable et, on a :

$$\widehat{f}'(\omega) = \mathcal{F}(-2\pi it f(t))$$

Démonstration.

On a :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt := \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, t) dt$$

Puisque : $\omega \mapsto F(\omega, t)$ est dérivable pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, et :

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \omega}(\omega, t) \right| = |(-2\pi i\omega t)f(t)e^{-2\pi i\omega t}| = 2\pi |t f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$$

Alors, d'après le théorème de la dérivée sous le signe intégrale (Théorème ...), $\widehat{f}$ est dérivable pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, et de plus :

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial \omega}(\omega, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi it)f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt \\ &= \mathcal{F}(-2\pi it f(t)) \end{aligned}$$

□

Remarque 5.16.

On déduit de Proposition 5.14 et Proposition 5.15, que la transformée de Fourier échange entredérivation et multiplication par $(2\pi i\omega)$ ou $(-2\pi it)$.

Le théorème suivant, résulte immédiatement de Proposition 5.14 et Proposition 5.15.

Théorème 5.17.

(i) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ avec $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$, et $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $k = 1, \dots, m$.

Alors

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (2\pi i\omega)^k \widehat{f}(\omega), \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (5.2)$$

(ii) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ avec $t \mapsto t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $k = 1, \dots, m$. Alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$, et de plus :

$$\widehat{f}^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}((-2\pi it)^k f(t)), \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (5.3)$$

Remarque 5.18.

Les formules (5.2) et (5.3) dans le Théorème 5.17, s'interprètent de la manière suivante :

- (i) Plus f est régulière, $\widehat{f}$ décroît plus vite vers zéro. En effet, (5.2), combiné avec Théorème ..., conduit à :

$$\left| (2\pi i \omega)^k \widehat{f}(\omega) \right| \leq c \iff \left| \widehat{f}(\omega) \right| \leq \frac{C}{|\omega|^k}$$

- (ii) Plus f est à décroissance rapide, plus $\widehat{f}$ est régulière.
 (iii) Si dans (5.2), k n'est pas un entier positif (par exemple $\frac{1}{2}$), ceci ouvre la possibilité d'introduire un sens aux dérivées fractionnaires. Par exemple, s'il existe une fonction g dont sa transformée de Fourier est égale à $(2\pi i \omega)^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\omega)$, on dit que g est la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ de f .

5.1.2 Transformation de Fourier et convolution

Commençons par quelques rappels sur le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Définition 5.19.

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ où $p \in [1, +\infty]$.

On définit le produit de convolution de f et g et qu'on note $(f * g)$, par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)ds$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale converge absolument, ç.à.d :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t-s)g(s)|ds < \infty$$

Théorème 5.20.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p = 1, 2$, ou ∞ , alors $(f * g)$ est défini presque partout sur $\mathbb{R}$, $(f * g) \in L^p(\mathbb{R})$, de plus, on a :

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$$

Si $p = \infty$, alors $(f * g)$ est uniformément continue et bornée.

Théorème 5.21.

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$$

5.1.3 Inversion de la transformation de Fourier

Dans la théorème suivant, on donne la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver f à partir de $\widehat{f}$, lorsque cette dernière est intégrable.

Théorème 5.22.

Si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors la formule d'inversion

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t} \widehat{f}(t) dt$$

est vraie pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.23.

- (i) En redéfinissant f sur un ensemble de mesure nulle, on peut rendre la formule d'inversion donnée par le théorème précédent, vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) Il est important de noter que la partie droite de la formule d'inversion est une fonction continue, ce qui n'est pas le cas de toutes les fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$.

Le corollaire suivant, présente une interprétation très utile en pratique, de la formule d'inversion.

Corollaire 5.24.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = f(-t) \quad \text{presque partout sur } \mathbb{R}$$

Exemple 5.25.

Soit par définition $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 - |\omega| & \text{si } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\omega| > 1 \end{cases}$.

En utilisant la formule d'inversion, on va déduire l'expression de f . En effet, on a

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t} \widehat{f}(t) dt = \int_{-1}^0 (1 + \omega) e^{2\pi i \omega t} dt + \int_0^1 (1 - \omega) e^{2\pi i \omega t} dt$$

En utilisant le changement de variable $u = -\omega$ pour effectuer le premier intégrale dans l'expression précédente, on obtient

$$f(\omega) = \int_0^1 (1 - \omega) [e^{2\pi i \omega t} + e^{-2\pi i \omega t}] dt = \int_0^1 (1 - \omega) 2\cos(2\pi \omega t) dt$$

Une intégration par parties, donne alors

$$f(\omega) = \left(\frac{\sin(\pi \omega)}{\pi \omega} \right)^2$$

Théorème 5.26. (*Plancherel-Parseval*)

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$

Remarque 5.27.

(i) En terme de produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$, la formule de Plancherel-Parseval s'écrit comme suit :

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) \overline{\widehat{g}(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$$

(ii) La formule de Plancherel-Parseval, n'affirme pas que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Autrement dit, si $f \notin L^2(\mathbb{R})$, on a nécessairement $\widehat{f} \notin L^2(\mathbb{R})$ ($\|\widehat{f}\|_{L^2} = +\infty$).

5.2 Un aperçu sur la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Sachant que $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ (par exemple $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^1(\mathbb{R})$), on ne peut pas définir la transformée de Fourier pour une fonction dans $L^2(\mathbb{R})$ directement à partir de la formule donnée dans $L^1(\mathbb{R})$.

Or, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, ceci nous permet donc de commencer par définir la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ensuite par densité, nous prolongeons cette définition à $L^2(\mathbb{R})$. Un outil principal dans cette approche est le Théorème 5.26 (Plancherel-Parseval).

Théorème 5.28.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration.

On pose :

$$f_n = f \chi_{]-n, n[}, \quad \forall n \geq 1$$

On a : $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. En effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|^2 dx = \int_{-n}^n |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2}^2$$

Puisque $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\|f\|_{L^2}^2 < \infty$. Par suite $f_n \in L^2(\mathbb{R})$.

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)| \, dx &= \int_{-n}^n |f(x)| \, dx = \int_{-n}^n 1 |f(x)| \, dx \\
 &\leq \left(\int_{-n}^n 1^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-n}^n |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sqrt{2n} \|f\|_{L^2} < \infty
 \end{aligned}$$

Ainsi, $f_n \in L^1(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 \|f_n - f\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{-n} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx + \\
 &\quad + \int_n^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \\
 &= \int_{-\infty}^{-n} |f(x)|^2 \, dx + \int_n^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,
 \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Corollaire 5.29.

Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$, alors la suite $(\widehat{f_n})_{n \geq 1}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une fonction $\tilde{f}$ indépendante de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$.

Démonstration.

Puisque, pour tout $n \geq 1$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, d'après le Théorème 5.26, on a : $\|\widehat{f_n}\|_{L^2} = \|f_n\|_{L^2}$, et de plus :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{f_{n+p}}\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_{n+p}\|_{L^2} = 0$$

Ce qui implique que $(\widehat{f_n})_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$, donc convergente vers un certain $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Supposons maintenant que $(g_n)_{n \geq 1}$ est une autre suite dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc, $(f_n - g_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\|_{L^2} = 0$$

Par suite :

$$\|\tilde{f} - \tilde{g}\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - \hat{g}_n\|_{L^2} = 0$$

Ce qui implique que $\tilde{f} = \tilde{g}$. □

Définition 5.30.

La limite $\tilde{f}$ définie dans le Corollaire 5.29, est appelée la transformée de Fourier de la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 5.31.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} = \tilde{f}$.

5.3 Transformation de Fourier des fonctions à plusieurs variables

On peut généraliser la théorie de la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ au cas des fonctions à plusieurs variables, ç.à.d dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Notons par $\cdot$ le produit scalaire (euclidien) de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \quad x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Définition 5.32.

La transformation de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et qu'on note par $\mathcal{F}f$ ou bien $\hat{f}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \omega} f(x) dx, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n$$

La plus part des propriétés restent valables dans le cas de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Par exemple, on a le théorème suivant.

Théorème 5.33.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

- (i) Si la fonction $x \mapsto x^\alpha f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $D^\alpha \hat{f}$ est une fonction continue, uniformément bornée et on a :

$$D^\alpha \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f(x))$$

- (ii) Si $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$, avec $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, alors

$$\mathcal{F}(D^\alpha f(\omega)) = (2\pi i \omega)^\alpha \mathcal{F}(f(\omega))$$

5.4 La transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz

La théorie de la transformation de Fourier dans L^1 a nécessité la restriction de l'espace L^1 afin d'utiliser les formules de dérivation et donner un sens à la définition de la transformée inverse. Dans ce qui suit, on va introduire un sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^n)$ bien adapté à la transformation de Fourier : c'est l'espace de Schwartz noté par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

5.4.1 L'espace de Schwartz : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 5.34. (*Fonctions à décroissance rapide*)

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite à décroissance rapide (à l'infini) si,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha f(x)| \leq C_\alpha$$

Exemple 5.35.

Pour tout $a > 0$, la fonction $f(x) = e^{-a|x|}$ est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.36. (*L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*)

On appelle espace de Schwartz et on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

- (i) φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
- (ii) φ est à décroissance rapide, ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \exists C_{\alpha, \beta} > 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leq C_{\alpha, \beta} \quad (5.4)$$

Remarque 5.37.

- (i) Toutes les dérivées d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tendent vers zéro à l'infini "plus vite" que tout polynôme.
- (ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- (iii) On ne peut pas parler d'une fonction à décroissance rapide, et par suite, une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si cette fonction est définie sur un borné.

Exemple 5.38.

- (i) Toute fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En effet, soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, $D^\beta f$ est continue et à support compact sur $\mathbb{R}^n$ et par suite $x^\alpha D^\beta f$ l'est pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. D'où :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| = \sup_{x \in K} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty,$$

où $\text{Supp}(f) \subset K$.

(ii) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$. Il est clair que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a :

$$f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

où, P_k est un polynôme de degré k . Donc :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^l f^{(k)}(x) = 0$$

Ceci, implique que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Voir Proposition ...). Notons que $f \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$

(iii) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
En effet :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 f(x) = +\infty$$

(iv) C'est pas toute fonction qui vérifie $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k |f(x)| = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), est
forcemment dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, car elle est discontinue en 1.

Proposition 5.39.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |D^\beta \varphi(x)| < \infty \quad (5.5)$$

Démonstration.

Notons d'abord, que :

$$|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}| = |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \dots |x_n|^{\alpha_n} \quad \text{et} \quad |x_i| \leq |x|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

On a donc :

$$|x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \dots |x_n|^{\alpha_n} \leq |x|^{|\alpha|} \leq (1 + |x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} \leq (1 + |x|^2)^m, \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq m$$

Ainsi, si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, vérifie (5.5), φ vérifie (5.4) également, et par suite $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Supposons maintenant que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Notons que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists l \in \mathbb{N} : (1 + |x^2|)^m \leq (1 + |x^2|)^{\frac{l}{2}}$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|x|^{2k} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (x_1^2)^{\alpha_1} \dots (x_n^2)^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |x^\alpha|^2$$

Alors, pour $l \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^l &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} |x|^{2k} = \sum_{k=0}^l \sum_{|\alpha|=k} \binom{l}{k} \frac{k!}{\alpha!} |x^\alpha|^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^l \sum_{|\alpha|=k} \left[\binom{l}{k} \frac{k!}{\alpha!} \right]^{\frac{1}{2}} |x^\alpha| \right)^2 \end{aligned}$$

Par suite :

$$(1 + |x|^2)^m \leq (1 + |x|^2)^{\frac{l}{2}} \leq \sum_{k=0}^l \sum_{|\alpha|=k} \left[\binom{l}{k} \frac{k!}{\alpha!} \right]^{\frac{1}{2}} |x^\alpha|$$

Ce qui conduit clairement au fait que (5.4) implique (5.5). $\square$

Propriétés 5.40.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors, les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$
- (ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation).
- (iii) Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par multiplication).
- (iv) Pour tout polynôme P , $P\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par multiplication par polynôme).
- (v) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout $1 \leq p \leq +\infty$

Démonstration.

D'après la Proposition 5.39, pour $|\beta| = 0$, on a :

$$\exists C > 0, (1 + |x|^2)^m |\varphi(x)| \leq C \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

Ainsi :

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|^2)^m} \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$$

D'où, (i) est vérifié.

(ii) résulte directement de la définition de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. D'après la formule de Leibnitz, on déduit que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$, tel que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (f(x)\varphi(x))| \leq C \sum_{\nu \leq \beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\nu f(x)| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^{\beta-\nu} \varphi(x)| < \infty$$

Par suite $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et (iii) est prouvé.

Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel, donc pour montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par multiplication par polynome, il suffit de montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $x^\gamma \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Il est claire que $x^\gamma \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, si :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

alors, pour une certaine constante $C_0 > 0$, la formule de Leibnitz, permet d'écrire :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (x^\gamma \varphi(x))| \leq C_0 \sum_{\beta - \gamma \leq \nu \leq \beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha + \gamma + \nu - \beta} D^\nu \varphi(x)| < \infty,$$

Donc $x^\gamma \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m \frac{|\varphi(x)|^p}{(1 + |x|^2)^m} dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\varphi(x)| \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \right)^{p-1} \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^m} \end{aligned}$$

où $m \geq \frac{n+1}{2}$, ce qui fait que $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx < \infty$, et par suite $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Pour $p = \infty$, si on prend dans (5.4) : $|\alpha| = |\beta| = 0$, on obtient :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| < \infty$$

D'où, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et la preuve de (v) est complète. □

On muni $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de la famille $\{N_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de semi-normes, définie par :

$$\mathcal{N}_m(\varphi) = \max_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \quad (5.6)$$

La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par la famille $\{\mathcal{N}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Définition 5.41. (La convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

Soit $(\varphi_m)_{m \geq 1}$ une suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On dit que $(\varphi_m)_{m \geq 1}$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(\varphi_m - \varphi) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Remarque 5.42.

La famille $\{\mathcal{N}_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n}$ définie par :

$$\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|,$$

engendre la même topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, que celle engendrée par la famille définie dans (5.6).

Théorème 5.43.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et s'injecte continument dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On considère la suite des fonctions $(f_m)_{m \geq 1}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f_m(x) = \chi_m(x)f(x)$$

où $\chi_m(x) = \chi\left(\frac{x}{m}\right)$ avec

$$\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), 0 \leq \chi \leq 1, \chi = 1 \text{ sur } B_f(0, 1) \text{ et } \text{Supp}(\chi) \subset B(0, 2)$$

Notons que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : 1 - \chi(y) \leq |y|^2 \tag{5.7}$$

En effet :

$$\text{Pour } |y|^2 \leq 1 : \quad 1 - \chi(y) = 1 - 1 = 0 \leq |y|^2$$

$$\text{Pour } |y|^2 > 1 : \quad 1 - \chi(y) \leq 1 < |y|^2$$

Il est claire que $f_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ comme étant produit d'une fonction test et une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

De plus, $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, en utilisant la formule de Leibniz, on trouve :

$$\begin{aligned} D^\beta (f - f_m)(x) &= D^\beta (f(1 - \chi_m))(x) \\ &= (1 - \chi_m)(x) D^\beta f(x) - \sum_{\nu < \beta} \binom{\beta}{\nu} D^\nu \chi_m(x) D^{\beta-\nu} f(x) \\ &= (1 - \chi_m)(x) D^\beta f(x) - \sum_{\nu < \beta} \binom{\beta}{\nu} \frac{1}{m^{|\nu|}} D^\nu \chi\left(\frac{x}{m}\right) D^{\beta-\nu} f(x) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Maintenant, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, en tenant compte de (5.7) et (5.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
|x^\alpha D^\beta (f - f_m)(x)| &\leq |x^\alpha (1 - \chi(\frac{x}{m})) D^\beta f(x)| \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{\nu < \beta} \binom{\beta}{\nu} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |D^\nu \chi(y)| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^{\beta-\nu} f(x)| \\
&\leq \frac{1}{m^2} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha |x|^2 D^\beta f(x)| + \frac{C}{m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^{\beta-\nu} f(x)| \\
&\leq \frac{1}{m^2} \mathcal{N}_{p+2}(f) + \frac{C}{m} \mathcal{N}_p(f)
\end{aligned}$$

où $|\alpha|, |\beta| \leq p$. Ainsi :

$$\forall p \in \mathbb{N} : \mathcal{N}_p(f - f_m) \leq \frac{1}{m^2} \mathcal{N}_{p+2}(f) + \frac{C}{m} \mathcal{N}_p(f) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Donc, $(f_m)_m$ est une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et par suite $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pour montrer la continuité de l'inclusion de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $(\varphi_m)_m$ est une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, donc :

$$\exists K \text{ compact, tel que : } \text{Supp}(\varphi) \subset K \text{ et } \text{Supp}(\varphi_m) \subset K, \forall m \geq m_0$$

et, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in K} |D^\beta (\varphi_m - \varphi)(x)| \right) = 0$$

Ceci implique que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{|\beta| \leq k} \left(\sup_{x \in K} |D^\beta (\varphi_m - \varphi)(x)| \right) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.9)$$

Puisque K est compact, il existe alors $R > 0$ tel que : $K \subset B_f(0, R)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha|, |\beta| \leq k$ et $x \in \mathbb{R}^n$

Si $x \in \mathbb{R}^n - K$, alors :

$$|x^\alpha D^\beta (\varphi_m - \varphi)(x)| = 0$$

Si $x \in K$, alors :

$$\begin{aligned} |x^\alpha D^\beta(\varphi_m - \varphi)(x)| &\leq R^k |D^\beta(\varphi_m - \varphi)(x)| \\ &\leq R^k \max_{|\beta| \leq k} \left(\sup_{x \in K} |D^\beta(\varphi_m - \varphi)(x)| \right) \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (5.9), on a :

$$\max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(\varphi_m - \varphi)(x)| \right) = \mathcal{N}_k(\varphi_m - \varphi) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

d'où, la convergence de $(\varphi_m)_m$ vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Corollaire 5.44.

Pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, avec injection continue.

Démonstration.

D'après le Théorème 2.45, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, et puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, alors, vue le Théorème ..., $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Montrons maintenant la continuité de l'injection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Soit $(\varphi_m)_m$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et montrons qu'elle converge vers zéro dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

On a :

$$\begin{aligned} \|\varphi_m\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_m(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^l \frac{|\varphi_m(x)|^p}{(1 + |x|^2)^l} dx \\ &\leq C \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi_m(x)| \right)^{p-1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| (1 + |x|^2)^l \varphi_m(x) \right| \\ &\leq C \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi_m(x)| \right)^{p-1} \mathcal{N}_{2l}(\varphi_m) \end{aligned}$$

$$\text{où } C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^l} \text{ et } l \geq \frac{n+1}{2}.$$

Puisque $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{N}_{2l}(\varphi_m) = 0$, car $(\varphi_m)_m$ converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_m\|_p = 0$. D'où la convergence de $(\varphi_m)_m$ vers zéro dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Définition 5.45. (Fonction à croissance lente)

L'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivable à croissance lente, qu'on note par $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$, est l'espace des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, telles que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C > 0, \exists m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^n : |D^\alpha f(x)| \leq C (1 + |x|^2)^m$$

Remarque 5.46.

- (i) Vue, la Définition 5.36, il est claire que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Si $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En effet, il est claire que $f\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, en utilisant la formule de Leibnitz, puis ..., on obtient pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (f(x)\varphi(x))| &\leq C \sum_{\nu \leq \beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\nu \varphi(x)| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^{\beta-\nu} f(x)| \\ &\leq C_0 \sum_{\nu \leq \beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{m_\nu} |x^\alpha D^\nu \varphi(x)| \\ &\leq C_1 \sum_{\nu \leq \beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{m_\nu + \frac{|\alpha|}{2}} |D^\nu \varphi(x)| \end{aligned}$$

On déduit donc de la Proposition 5.39, que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (f(x)\varphi(x))| < \infty,$$

d'où, $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

- (iii) $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ s'appelle l'espace des multiplicateurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- (iv) Pour tout $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur de multiplication $\varphi \mapsto f\varphi$ est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5.4.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, ceci permet donc de définir la transformée de Fourier pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par : (Voir Définition 5.32)

$$\mathcal{F}\varphi(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \omega} \varphi(x) dx, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n$$

On commence par quelques propriétés concernant la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 5.47.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors

- (i) $\widehat{\widehat{f}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, et on a :

$$D^\alpha \widehat{\varphi}(\omega) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha \varphi(x)), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

$$(ii) \mathcal{F}(D^\alpha \varphi(\omega)) = (2\pi i \omega)^\alpha \mathcal{F}(\varphi(\omega)), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

Démonstration.

Puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x \mapsto x\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ (voir Propriétés 5.40), alors, d'après le Théorème 5.33 (i), on a $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, et de plus on a :

$$D^\alpha \widehat{\varphi}(\omega) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha \varphi(x)), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

C'est à dire (i) est vérifié.

Puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ (voir Propriétés 5.40), alors, (ii) découle immédiatement du Théorème 5.33 (ii). $\square$

Le résultat suivant est une caractérisation très importante de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 5.48.

$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une bijection continue.

Démonstration.

Montrons d'abord que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors d'après Proposition 5.47, $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et de plus, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$\begin{aligned} w^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(w) &= w^\alpha (-2\pi i)^{|\beta|} \widehat{t^\beta \varphi}(w) \\ &= \frac{(-2\pi i)^{|\beta|}}{(2\pi i)^{|\alpha|}} \widehat{D^\alpha(t^\beta \varphi)}(w) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Puisque la transformée de Fourier envoie $L^1(\mathbb{R}^n)$ à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ alors, d'après (5.10) on a :

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^n} |w^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(w)| \leq C \sup_{w \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{F} D^\alpha(t^\beta \varphi)(w)| \leq C'$$

Donc $\widehat{\varphi}$ est à décroissance rapide, et par suite $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Puisque, $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, on peut donc appliquer le théorème d'inversion de Fourier :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(w) e^{2\pi i w \cdot t} dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(-w) e^{-2\pi i w \cdot t} dw \\ &= \mathcal{F}(g)(t) \end{aligned}$$

où, $g(x) = \varphi(-x)$. Par suite $\mathcal{F}$ est surjective.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est injective. Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tels que $\widehat{\varphi_1} = \widehat{\varphi_2}$.

Posons : $h = \varphi_1 - \varphi_2$. Puisque $\mathcal{F}$ est linéaire, on a :

$$\widehat{h} = \widehat{\varphi_1} - \widehat{\varphi_2} = 0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

Donc la formule d'inversion de Fourier s'applique à h et donne :

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(h)(w) e^{2\pi i w \cdot t} dw = 0 \quad p.p$$

En faite, l'égalité précédente est vérifiée en tout point t où h est continue. Comme $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, alors l'égalité précédente est vérifiée en tout point $t \in \mathbb{R}^n$. Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

Par suite $\mathcal{F}$ est injective.

Montrons maintenant la continuité de $\mathcal{F}$.

D'après (5.10), on a :

$$\begin{aligned} |w^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(w)| &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha (t^\beta \varphi(t))| dt \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|t|)^{n+1}} (1+|t|)^{n+1} |D^\alpha (t^\beta \varphi(t))| dt \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1+|t|)^{n+1} D^\alpha (t^\beta \varphi(t))| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dt}{(1+|t|)^{n+1}} \\ &\leq C' \mathcal{N}_{p+n+1}(\varphi) \end{aligned}$$

où $|\alpha|, |\beta| \leq p$

Ainsi :

$$\mathcal{N}_p(\widehat{\varphi}) \leq C' \mathcal{N}_{p+n+1}(\varphi)$$

Donc, $\mathcal{F}$ est continue. □

Remarque 5.49.

On déduit de la preuve du Théorème 5.48, les deux faits suivants :

(i) L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par la transformée de Fourier.

(ii) L'inverse de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'application : $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, définie par :

$$\overline{\mathcal{F}}\varphi(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \omega} \varphi(t) dt$$

De plus, $\overline{\mathcal{F}}$ est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5.5 Les distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Comme on a vu pour les opérations qu'on a déjà définies sur les distributions telles que la dérivation et la multiplication par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, en général une opération sur $D'(\Omega)$ se définit par dualité, ç.à.d par l'action sur l'espace des fonctions tests. Donc il est naturel de penser à définir la transformation de Fourier pour $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle,$$

mais $D(\mathbb{R}^n)$ n'est pas stable par transformation de Fourier ($\mathcal{F}\varphi$ n'est à support compact que si φ est nulle!). Il a fallu donc choisir un autre espace de fonctions tests, plus adapté pour cette raison et encore d'autres raisons. C'est l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 5.50.

Une application $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite une distribution tempérée et on note $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si et seulement si :

(i) F est linéaire.

(ii) F est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ç.à.d :

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F, \varphi_n \rangle := F(\varphi_n) = \langle F, \varphi \rangle := F(\varphi) \text{ dans } \mathbb{R}$$

Autrement dit, l'ensemble de toutes les distributions tempérées est égale au dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 5.51. (Caractérisation d'une distribution tempérée)

Une forme linéaire F sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une distribution tempérée, si et seulement si :

$$\begin{aligned} \exists p \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : |\langle F, \varphi \rangle| &\leq C \max_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \\ &:= C \mathcal{N}_p(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Exemple 5.52.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$|\langle \delta_0, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \max_{|\alpha|, |\beta|=0} = \mathcal{N}_0(\varphi)$$

Donc, δ_0 (la distribution de Dirac) est une distribution tempérée.

Proposition 5.53.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par l'application :

$$\begin{aligned} i : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ T &\longmapsto T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Démonstration.

Montrons d'abord, que si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| &\leq \sup_{x \in K} |x^\alpha| \sup_{x \in K} |D^\beta \varphi(x)| \\ &\leq C_{K, \alpha} \sup_{x \in K} |D^\beta \varphi(x)| \end{aligned}$$

Notons que $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors, d'après la Proposition 5.51, on a pour $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &\leq C_0 \max_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \\ &\leq C_0 \left(\max_{|\alpha| \leq p} C_{K, \alpha} \right) \max_{|\beta| \leq p} \sup_{x \in K} |D^\beta \varphi(x)| \\ &\leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |D^\beta \varphi(x)| \end{aligned}$$

Donc, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et par suite l'application i donnée par (5.11) est bien définie.

Montrons maintenant que l'application i est injective.

En effet, soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Sachant que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a donc :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \exists (\varphi_m)_m \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Ainsi, puisque T est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \exists (\varphi_m)_m \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_m \rangle$$

Du fait que $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = 0$, on déduit que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle T, \varphi \rangle = 0$$

d'où :

$$\text{Ker}(i) = \{0\} \iff i \text{ est injective (puisque } i \text{ est linéaire)}$$

□

Remarque 5.54.

D'après la Proposition 5.53, on a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Mais, il faut noter que cette inclusion est stricte. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$, qui est clairement dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ puisqu'elle est continue, n'appartient pas à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

En effet, soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\text{Supp}(\psi) \subset [0, 2]$ et $\psi = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

On considère pour $j \geq 1$, $\varphi_j(x) = e^{-x} \psi\left(\frac{x}{j}\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |x^\alpha D^\beta \varphi_j(x)| &= \left| \sum_{\nu=0}^{\beta} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu x^\alpha e^{-x} \frac{1}{j^{\beta-\nu}} D^{\beta-\nu} \psi\left(\frac{x}{j}\right) \right| \\ &\leq C_{\alpha,\beta} \sup_{x \geq 0} |x^\alpha e^{-x}| \sum_{\nu=0}^{\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}} |D^{\beta-\nu} \psi(x)| := M_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

Mais :

$$\langle f, \varphi_j \rangle = \int_0^{2j} e^{x^2} e^{-x} \psi\left(\frac{x}{j}\right) dx \geq \int_{\frac{j}{2}}^j e^{x^2} e^{-x} dx \geq \frac{j}{2} e^{\frac{j^2}{4}-j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} +\infty$$

Donc, f n'est pas tempérée.

La théorie des distributions tempérées généralise celle des fonctions classiques, typiquement les fonctions intégrables et les fonctions à croissance au plus polynomiale. La proposition suivante montre comment ces types de fonctions s'injecte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 5.55.

- (i) $\forall p (1 \leq p \leq +\infty) : L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Si f est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$, telle que : $|f(x)| \leq |P(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, où P est un polynôme, alors $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En particulier, $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration.

Toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ définit une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$$

Montrons qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) \varphi(x)| dx \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Donc :

Si $q = \infty$:

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq C \mathcal{N}_0(\varphi)$$

avec $C = \|f\|_p$. D'où $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Si $q < \infty$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m \frac{|\varphi(x)|^q}{(1 + |x|^2)^m} dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\varphi(x)|^q \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^m} \\ &\leq C \left[\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{m}{q}} |\varphi(x)| \right]^q \end{aligned}$$

où

$$m \geq \frac{n+1}{2}$$

et

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^m}$$

Donc

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_p C^{\frac{1}{q}} \mathcal{N}_{[\frac{2m}{q}]+1}(\varphi)$$

Par suite, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et la preuve de (i) est achevée.

Soit maintenant f est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$, telle que : $|f(x)| \leq |P(x)|$.
En procédant comme ci-dessus, on trouve :

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)| dx \leq C_0 \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\varphi(x)| \\ &\leq C_1 \mathcal{N}_{[2m]+1}(\varphi) \end{aligned}$$

où $m \geq \frac{n + \deg(P) + 1}{2}$. Donc $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Il suffit de prendre $P(x) = C(1 + x^2)^m$, où C et m sont donnés par la Définition 5.45, pour conclure que $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Remarque 5.56.

Bien que, d'après la Proposition 5.55 (ii), toute fonction à croissance lente est une distribution tempérée, on doit noter qu'il n'est pas nécessaire d'être majoré par un polynôme pour appartenir à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En effet, soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x e^{ie^x}$. On a $|f(x)| = e^x$ et $f(x) = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} e^{ie^x}$.

Une intégration par partie donne alors :

$$\int f(x)\varphi(x) dx = \int \frac{1}{i} \frac{d}{dx} (e^{ie^x}) \varphi(x) dx = - \int e^{ie^x} \varphi'(x) dx$$

On déduit donc :

$$\left| \int f(x)\varphi(x) dx \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)|$$

Ceci montre que la distribution régulière $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se prolonge à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ en une distribution tempérée.

Proposition 5.57.

Toute distribution à support compact, se prolonge à une distribution tempérée.

Démonstration.

Soit T une distribution à support compact sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

On prolonge T à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, en posant :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi \varphi \rangle$$

où, $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\chi = 1$ sur un voisinage de $\text{Supp}(T)$ (Voir ...).

En utilisant la caractérisation d'une distribution donnée par (3.1), puis en appliquant la formule de Leibnitz, on obtient :

$$\begin{aligned}
 |\langle T, \varphi \rangle| &= |\langle T, \chi \varphi \rangle| \leq C_0 \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha (\chi(x) \varphi(x))| \\
 &\leq C_{0,\chi} \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi(x)| \leq C_{1,\chi} \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi(x)| \\
 &\leq C_{1,\chi} \mathcal{N}_m(\varphi)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

□

Remarque 5.58.

D'après la Proposition 5.53 et la Proposition 5.57, les distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est un espace intermédiaire entre $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, c'est à dire : $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 5.59. (convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)

Soient $(T_j)_{j \geq 1}$ une suite de distributions tempérées et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que $(T_j)_{j \geq 1}$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Définition 5.60.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on définit $\partial_{x_i} T$ par :

$$\langle \partial_{x_i} T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_{x_i} \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit la distribution tempérée $D^\alpha T$ par :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (5.12)$$

Remarque 5.61.

Notons que, puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation, le membre de droite dans (5.12) est bien défini. De plus, la continuité de $D^\alpha T$, découle immédiatement de la continuité de T et l'opérateur D^α dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 5.62.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$. On définit fT par :

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (5.13)$$

5.6 La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 5.63.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier de T , qu'on note par $\mathcal{F}T$ ou $\widehat{T}$ est la distribution tempérée définie par :

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (5.14)$$

Remarque 5.64.

Puisque, d'après la Remarque 5.49, l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par la transformée de Fourier, alors le membre de droite dans (5.14) est bien défini. La linéarité de $\widehat{T}$ découle de la linéarité de T et de la linéarité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus, en tenant compte de la continuité de T et la continuité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on obtient pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\left| \langle \widehat{T}, \varphi \rangle \right| = |\langle T, \widehat{\varphi} \rangle| \leq C_0 \mathcal{N}_p(\widehat{\varphi}) \leq C_1 \mathcal{N}_k(\varphi)$$

La proposition suivante montre que la Définition 5.14 est une extension de la Définition 5.32. Autrement dit, la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si $T \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 5.65.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}T_f$ est la distribution tempérée associée à $\widehat{f}$, autrement dit : $\mathcal{F}T_f = T_{\widehat{f}}$

Démonstration.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \omega} \varphi(\omega) d\omega \right) dx$$

Puisque la fonction $(x, \omega) \mapsto f(x)\varphi(\omega)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il s'ensuit donc du théorème de Fubini que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \omega} \varphi(\omega) d\omega \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \omega} f(x) dx \right) d\omega$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \omega} f(x) dx \right) d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\omega) \widehat{f}(\omega) d\omega = \langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle.$$

D'où le résultat. □

Puisque l'action de la transformée de Fourier sur une distribution tempérée se produit par son action sur l'espace des fonctions tests $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors toutes les propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se transposent d'une manière naturelle au cadre des distributions tempérées.

Le théorème suivant résulte immédiatement du Théorème 5.48 et de la Remarque 5.49.

Théorème 5.66.

La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est une application linéaire, bijective et bicontinue.

Démonstration.

Pour toute $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi \rangle$$

Donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T$. De même, on obtient : $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T = T$, d'où $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$

La continuité de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est justifiée dans la Remarque 5.64, et de même on obtient la continuité de $\overline{\mathcal{F}}$. $\square$

Un raisonnement par dualité qui utilise les propriétés de la transformée de Fourier données par la Proposition 5.47, conduit au théorème suivant.

Théorème 5.67.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $j = 1, 2, \dots, n$, alors, on a :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \mathcal{F}(\partial_{t_j} T) = 2\pi i \omega_j \mathcal{F}T \\ (ii) \quad & \partial_{\omega_j} \mathcal{F}T = -2\pi i \mathcal{F}(t_j T) \end{aligned}$$

Démonstration.

En utilisant (ii) dans la Proposition 5.47, on obtient pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\partial_{t_j} T), \varphi \rangle &= \langle \partial_{t_j} T, \widehat{\varphi} \rangle = -\langle T, \partial_{t_j} \widehat{\varphi} \rangle = -\langle T, (-2\pi i) \mathcal{F}(\omega_j \varphi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}T, 2\pi i (\omega_j \varphi) \rangle = \langle 2\pi i \omega_j \mathcal{F}T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Ce qui prouve (i).

De même, en utilisant (i) dans la Proposition 5.47, on obtient pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle \partial_{\omega_j} \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= -\langle \mathcal{F}T, \partial_{\omega_j} \varphi \rangle = -\langle T, \mathcal{F}(\partial_{\omega_j} \varphi) \rangle = -\langle T, (2\pi i) t_j \widehat{\varphi} \rangle \\ &= -2\pi i \langle t_j T, \widehat{\varphi} \rangle = -2\pi i \langle \mathcal{F}(t_j T), \varphi \rangle \end{aligned}$$

Ce qui prouve (ii). $\square$

Remarque 5.68.

Par itération, on déduit du Théorème 5.67, les formules suivantes :

- (i) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \mathcal{F}(D^\alpha T) = (2\pi i \omega)^\alpha \mathcal{F}T$
- (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha \mathcal{F}T = \mathcal{F}((-2\pi i t)^\alpha T)$

Exemple 5.69.

- (i) $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle \mathcal{F}\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

- (ii) $\mathcal{F}1 = \delta_0$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) dx$$

D'autre part, puisque $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, la formule d'inversion de Fourier, permet d'écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot 0} \widehat{\varphi}(x) dx = \varphi(0)$$

Donc :

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

- (iii) On déduit de (i) et du Théorème 5.67, la formule suivante :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \mathcal{F}D^\alpha \delta_0(\omega) = (2\pi i \omega)^\alpha$$

Bibliographie

- [1] Bony, J.M., *Cours d'analyse, distributions et analyse de Fourier*, Edition de l'Ecole polytechnique, Paris (2001).
- [2] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris (1987).
- [3] Gallouet, T., Herbin, R., *Mesure, Intégration, Probabilités*, Ellipses (2013).
- [4] Golse, F., *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*, Cours enseigné à l'Ecole polytechnique (2012).
- [5] Lesfari, A., *Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace. Cours et Exercices*, Ellipses (2012).
- [6] Zuily, C., *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod (2002).