

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
ELOUED

FACULTÉ DESSCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: :Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

**Analyse mathématique d'un problème
aux limites en piézoélectricité**

Présenté par: - CHERAIT Salima

- NAKES Mouna

Sous la supervision de:
Mr. MESSAI AOUN Mohammed Salah

Année universitaire: 2014 – 2015

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

*Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "**MESAI AOUN Mohammed Salah**", à l'université d' **Hamma Lakdar El – oued**. a qui nous voudrions exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.*

*ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'**Hamma Lakdar El – oued**.*

Nous remercions vivement nos familles surtout mes parent pour l'aide et le soutien moral.

*Nous tenons a remercier tous les étudiants de La promotion 2014/2015 de Math de l'université d'**Hamma Lakdar El – oued**..*

Notations générales

Si Ω est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), on note par

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω supposée souvent régulière.
Γ_i ($i = \overline{1, 3}, a, b$)	une partie de la frontière Γ .
mes Γ_1	la mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_1
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\bar{\Omega}$
$C^1(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω
$H = L^2(\Omega)^d$	
$H = L^2(\Omega)_S^{d \times d}$	
$H_1 = H^1(\Omega)^d$	
$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div} \in H.\}$	
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
$H_\Gamma = -H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles:

Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}$, on utilise les notations suivantes

$$H^d = x \{ = (x_i) \mid x_i \in H, i = \overline{1, d} \}$$

$(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de H .

$|\cdot|_H$ la norme de H .

2^H l'ensemble de toutes les parties de H .

H' l'espace dual de H .

$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$ le produit de dualité entre H' et H .

$x_n \rightarrow x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .

$x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .

$\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires et continues de H dans H .

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; H)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H .

$|\cdot|_{0, H}$ la norme de $C(0, T; H)$

$C^1(0, T; H)$ l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H .

$|\cdot|_{1, H}$ la norme de $C^1(0, T; H)$

$L^P(0, T; H)$ l'espace des fonctions u mesurables de $(0, T)$ dans H

telles que $\int_0^T |u(t)|_H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.

$|\cdot|_{0, p, H}$ la norme de $L^P(0, T; H)$

$|\cdot|_{K, p, H}$ la norme de $W^{k, p}(0, T; H)$

Pour une fonction u , on note par

$\text{dom } u$ le domaine de u .

\dot{u}, \ddot{u} les dérivées première et seconde de u par rapport au temps.

$\partial_i u$ la dérivée partielle de u par rapport à la i ème composante x_i .

∇u le gradient de u .

$\varepsilon(u)$ la partie symétrique du gradient de $u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$.

$\text{Div } u$ la divergence de u .

Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$ l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2 .

$|\cdot|_{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$ la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$

Autres notations

\liminf	la limite inférieure.
S^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_S^{d \times d}$
I_d	le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d
0_d	le zéro de \mathbb{R}^d et celui de S^d .
c	une constante générique strictement positive.
p.p.	presque partout.

Table des matières

Notations générales	ii
Introduction générale	1
1 Formulation mathématique du problème de contact	3
1.1 Cadre physique	3
1.2 Lois de comportement	5
1.3 Conditions aux limites	7
1.4 Formulation mathématique du problèmes de contact	9
2 Rappels d’analyse	10
2.1 Cadre fonctionnel vectoriel	10
2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	12
2.3 Eléments d’analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	14
2.4 Lemme de Gronwall	16
3 Problème de contact avec adhésion en électro-élasticité	17
3.1 Formulation mécanique du problème	17
3.2 Formulation variationnelle	22
3.3 Existence et unicité de la solution	26
Conclusion Générale	34
Bibliographie	35

Introduction générale

Les problèmes de contact avec ou sans frottement impliquant des corps déformables ou non interviennent de multiples façons aussi bien dans le domaine industriel que dans la vie de tous les jours.

Outre les problèmes cités ci-dessus, il y un autre phénomène sera considéré dans ce mémoire, ce phénomène a reçu récemment une très grande attention dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact avec adhésion peut être trouvée dans [1, 2, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 21]. La nouveauté dans tous ces articles est l'introduction d'une variable interne de surface, le champ d'adhésion noté par α décrivant l'intensité d'adhésion sur la surface de contact. Suivant [10,11] le champ d'adhésion satisfait la restriction $0 \leq \alpha \leq 1$, quand $\alpha = 1$ au point de la surface de contact, l'adhésion est complète, quand $\alpha = 0$ il n'y pas d'adhésion. Quand $0 < \alpha < 1$ l'adhésion est partielle. On renvoie le lecteur à une bibliographie abondante sur le sujet dans [16, 17, 20].

Les matériaux piézoélectriques ont été découverts au début du siècle par les époux Curie. Ce sont des diélectriques particuliers qui permettent de transformer l'énergie de déformation élastique en énergie électrique, et inversement. Plus précisément, la piézoélectricité est la capacité de certains matériaux à se polariser lorsqu'ils sont contraints mécaniquement, la charge apparaissant à leur surface étant proportionnelle à la déformation engendrée. L'effet piézoélectrique inverse est l'obtention d'une déformation par application d'un champ électrique.

Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT (plomb, zirconate, titanate) qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs (capteur de pression etc.) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nanomanipulateur).

L'utilisation de la piézoélectricité a explosé ces dernières années et est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et

vice versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustique, l'échographie médicale, et pour la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de "récupération d'énergie", en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indisponibles.

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique du problème à étudier.

Dans le second chapitre, nous présentons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement pour des matériaux électro-élastiques dans un processus quasistatique. Le contact avec une base déformable est modélisé par une compliance normale avec adhésion. Le problème se formule comme un système formé par une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une équation variationnelle par rapport au champ électrique et une équation différentielle du premier ordre par rapport au champ d'adhésion. On établit un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur la théorie des équations variationnelles et des arguments de point fixe.

Chapitre 1

Formulation mathématique du problème de contact

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement de différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique du problème à étudier.

1.1 Cadre physique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et le modèle mathématique du problème utilisé dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons la formulation mathématique pour le problème de contact entre un corps piézoélectrique et une fondation.

Nous considérons un corps matériel déformable qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2; 3$) avec une frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a et Γ_b , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, $\text{mes } \Gamma_a > 0$ et $\Gamma_3 \subseteq \Gamma_b$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques de densité volumiques q_o (voir 1.1.1). On suppose que f_2 et f_o varient très lentement par rapport au temps. Le corps est soumis à l'action de potentiel nul sur la

partie Γ_a de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2 , agissent sur la partie Γ_b . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec une fondation sur la partie Γ_3

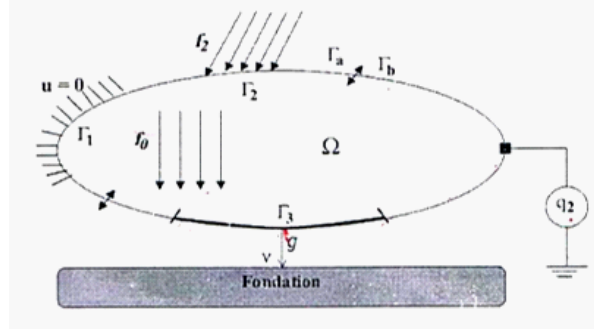


Figure 1.1.1 : corps piézoélectrique en contact avec une fondation.

Nous désignons par S^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$);
 ”.” et $|\cdot|$ représentent H

respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et S^d . Ainsi,

$$(u, \nu) = u_i \nu_i, \quad |\nu| = (\nu \cdot \nu)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, \nu \in \mathbb{R}^d,$$

$$(\sigma, \tau) = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\tau| = (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in S^d,$$

avec la convention de l'indice muet.

On note par $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ des déplacements, $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$ le champ des contraintes, $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ le champ potentiel électrique, $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ des déplacements électriques, $\alpha : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ le champ d'adhésion, $\varepsilon(u)$ et $E(\varphi)$ le champ des déformation linéarisées et le champ électrique.

Pour un vecteur u , nous désignons par u_ν et u_τ la composante normale et tangentielle

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu. \quad (1.1.1)$$

Pour le champ des contraintes σ , nous notons par σ_ν et σ_τ la composante normale et tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma \nu$

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu)_\nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma \nu)_\tau,$$

donc

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu, \quad (1.1.2)$$

En utilisant (1.1.1) et (1.1.2), on a la relation

$$(\sigma\nu) \cdot u = \sigma_\nu u_\nu + \sigma_\tau u_\tau. \quad (1.1.3)$$

qui va intervenir pour établir la formulation variationnelle du problème mécanique.

En outre, \dot{u} désigne le champ des vitesses et \ddot{u} désigne le champ des accélérations. Nous rappelons que les opérateurs de déformation et de divergence sont donnés par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ijj}) \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.1.4)$$

Dans ce mémoire, le champ électrique est donné par

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi,$$

soit encore

$$E(\varphi) = (E_i(\varphi)), \quad E_i(\varphi) = -\varphi_i; \quad 1 \leq i \leq d.$$

1.2 Lois de comportement

Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le cadre physique de la FIG 1.1.1 . La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système quelconque conduit à l'équation de mouvement de Cauchy

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.2.1)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse. Les processus d'évolution définis par(1.2.1) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un processus statique. Dans le cas où le champ des vitesses varie lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho\ddot{u}$, peut être négligé, on est en présence d'un processus quasistatique. Dans ces deux cas l'équation(1.2.1) devient

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.2.2)$$

Dans le cas d'un matériau piézoélectrique, la loi de comportement contient une nouvelle inconnue, le champ électrique E , d'où la nécessité d'introduire une autre équation d'équilibre pour la gérer. C'est l'équation de Maxwell-Gauss où équation de conservation de la charge

$$\operatorname{Div} \sigma = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.2.3)$$

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même; c'est l'objet des lois de comportement.

Loi de comportement des matériaux électro-élastiques. Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur σ des contraintes et le vecteur des déplacements électriques D sont reliés par la loi de comportement

$$\begin{cases} \sigma = A\varepsilon(u) - \varepsilon^* E(\varphi), \\ D = \varepsilon\varepsilon(u) - BE(\varphi), \end{cases} \quad (1.2.4)$$

où $A : \Omega \times S^d \rightarrow S^d$ est l'opérateur d'élasticité non linéaire, $E(\varphi) = -\nabla_\varphi$ est le champ électrique, $\varepsilon = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $B = (B_{ij})$ est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $\varepsilon^* = (e_{ijk})$ où $e_{ijk}^* = e_{kij}$, ou dénote le transpose du tenseur ε tel que

$$\varepsilon\sigma \cdot \nu = \sigma \cdot \varepsilon^* \nu, \quad \forall \sigma \in S^d, \nu \in \mathbb{R}^d. \quad (1.2.5)$$

En électro-élasticité linéaire, on suppose que le tenseur des contraintes σ est une fonction linéaire du tenseur des petites déformations ε et du gradient du potentiel électrique ou le champ électrique E , c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) + e_{ijk}^* \varphi_{,k}, \quad (1.2.6)$$

où $A = (a_{ijkh})$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes a_{ijkh} s'appellent coefficients d'élasticité et elles sont indépendantes du tenseur des déformations en élasticité pure et $\varepsilon = (e_{ijk})$ est le tenseur des constantes piézoélectriques. Dans le cas non-homogène a_{ijkh} et e_{ijk} dépendent du point $x \in \Omega$ et dans le cas homogène a_{ijkh} et e_{ijk} sont des constantes.

1.3 Conditions aux limites

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la (FIG ??). On définit maintenant les conditions aux limites mécaniques et électriques sur chaque partie de Γ .

La condition aux limites de déplacement. Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_1 , le champ des déplacements y est par conséquent nul

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.3.1)$$

La condition aux limites de traction. Une traction surfacique de densité f_2 agit sur Γ_2 et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy σ_ν satisfait

$$\sigma_\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.3.2)$$

Les conditions aux limites électriques. Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T), \quad (1.3.3)$$

$$D.\nu = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T), \quad (1.3.4)$$

Les conditions de contact avec complaisance normale et adhésion. On va décrire les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, on introduit une variable interne d'état a définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$ qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq a \leq 1$. Quand $a = 1$ adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $a = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion; quand $0 < a < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle. Pour plus détails sur ce paragraphe, on renvoie par exemple [10] et [11].

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion.

$$-\sigma_\nu = \rho_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.3.5)$$

où γ_ν est un coefficient positif, $\rho_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de compliance normale et $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donne par

$$R_\nu(s) \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < s. \end{cases} \quad (1.3.6)$$

ici $L > 0$ est la longueur caractéristique des lien.

Quand le champ d'adhésion a est nul, (1.3.5) devient

$$-\sigma_\nu = \rho_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.7)$$

qui représente la condition de compliance normale.

On suppose que la contrainte tangentielle satisfait la condition suivante

$$-\sigma_\tau = \rho_\tau(\alpha) R_\tau(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.8)$$

où $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de contact tangentiel et $R_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donne par

$$R_\nu(s) \begin{cases} \nu & \text{si } |\nu| \leq L, \\ L \frac{\nu}{|\nu|} & \text{si } |\nu| > L. \end{cases} \quad (1.3.9)$$

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion a la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\alpha} = -(\alpha [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau (R_\tau(u_\tau))^2] - \varepsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.10)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.3.11)$$

où γ_ν, γ_τ et ε_a sont les coefficients d'adhésion positifs et α_0 l'adhésion initiale tel que

$$0 \leq \alpha_0 \leq 1, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (1.3.12)$$

Remarque 1.3.1 Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \alpha \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\alpha} \leq 0$ donc $\alpha \leq \alpha_0 \leq 1$. En outre, si $\alpha = 0$ quand $t = t_o$ donc $\dot{\alpha} = 0$ pour tout $t \leq t_o$, et d'où $\alpha = 0$ pour tout $t \leq t_o$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \alpha \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$

1.4 Formulation mathématique du problèmes de contact

On considère ici le problème mécanique qu'on va étudier dans le chapitre 3.

Problème 1.4.1 (1) (*Problème de contact avec adhésion en électro-élasticité*). *Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$, le champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ d'adhésion $\alpha : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que*

$$\begin{aligned}
 \sigma &= A\varepsilon(u) + \varepsilon^* \nabla \varphi && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 D &= \varepsilon \varepsilon(u) - B \nabla \varphi && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 \text{Div } \sigma + f_0 &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 \text{div } D &= q_0 && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\
 \sigma_\nu &= f_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\
 -\sigma_\nu &= \rho_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 -\sigma_\tau &= \rho_\tau(\alpha) R_\tau(u_\nu) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \dot{\alpha} &= -(\alpha [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau (R_\tau(u_\tau))^2] - \varepsilon_a)_+ && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \alpha(0) &= \alpha_0 && \text{sur } \Gamma_3, \\
 \varphi &= 0 && \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \\
 D \cdot \nu &= q_2 && \text{sur } \Gamma_b \times (0, T).
 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Rappels d'analyse

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

2.1 Cadre fonctionnel vectoriel

La modélisation de problèmes de mécanique nécessite la plupart du temps l'introduction d'espaces de fonctions spécifiques. Nous donnons dans cette section les espaces ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

On introduit les espaces suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 = \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in H \mid \sigma_{ij,j} \in H(\Omega)\}. \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\sigma, \tau)_H = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_H = (u, v)_H + (\varepsilon(u) + \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (u, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma + \text{Div } \tau)_H, \end{array} \right. \quad (2.1.2)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont notées par $|\cdot|_H, |\cdot|_{\mathcal{H}}, |\cdot|_H$ et $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation ν pour désigner la trace γ_v de v sur Γ .

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$.

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (2.1.3)$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V ; il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq c|\nu|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (2.1.4)$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [15].

sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u) \oplus \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V, \quad (2.1.5)$$

et soit $|\cdot|_V$ la norme associée; c'est-à-dire

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V, \quad (2.1.6)$$

Par l'inégalité de Korn et (2.1.2), il vient que $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ est un espace de Hilbert.

En outre, d'après (2.1.4); (2.1.6) et le théorème de trace de Sobolev, trouvons qu'il existe

une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c|v|_V \quad \forall v \in V. \quad (2.1.7)$$

On introduit également les espaces suivants:

$$W = \{ \phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \},$$

$$\mathcal{W} = \{ D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} D \in L^2(\Omega) \},$$

où $\operatorname{div} D = (D_{i,i})$. Ces espaces W et \mathcal{W} sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi, \phi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \phi)_H, \quad (D, E)_\mathcal{W} = (D, E)_\mathcal{H} + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.1.8)$$

soient $|\cdot|_W$ et $|\cdot|_\mathcal{W}$ les normes associées; c'est-à-dire

$$|\phi|_W = |\nabla \phi|_H, \quad |D|_\mathcal{W}^2 = |D|_H^2 + |\operatorname{div} D|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.1.9)$$

Puisque $\operatorname{mes} \Gamma_a > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Γ_a telle que

$$|\nabla \phi|_H \geq c |\phi|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in W. \quad (2.1.10)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée dans [14].

Pour des détails sur les résultats de cette section nous renvoyons par exemple aux références [18, 19]

2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Cette section est destinée à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un interval de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

Soit $0 < T < +\infty$ et soit $(X, |\cdot|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment dérivables sur $[0, T]$ avec valeur dans X respectivement, avec les normes

$$|u|_{0,X} = \max_{t \in [0,T]} |u(t)|_X,$$

$$|\nabla \phi|_H = \max_{t \in [0,T]} |u(t)|_X + \max_{t \in [0,T]} |\dot{u}(t)|_X.$$

Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X :

Définition 2.2.1 Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $|u_n(t) - u(t)|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

Définition 2.2.2 Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable dans $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de u dans t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} (u(t_0 + h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right|_X = 0.$$

Définition 2.2.3 Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T |u_n(t) - u(t)|_X dt = 0.$$

Théorème 2.2.1 Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurable et intégrable si et seulement si $t \rightarrow |u(t)|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left| \int_0^T u(t) dt \right|_X \leq \int_0^T |u(t)|_X dt.$$

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \rightarrow |u(t)|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$|u(t)|_{0,p,X} = \begin{cases} \left(\int_0^T |u(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \inf \{c > 0 \mid |u(t)|_X < c \text{ p.p. } t \in (0, T)\} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Proposition 2.2.1 (1) $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p < +\infty$) est un espace de Banach.

(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$; alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u; v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Définition 2.2.4 Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$|u|_{1,p,X} = |u|_{0,p,X} + |\dot{u}|_{0,p,X}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0, T; X)$ est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

Définition 2.2.5 Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_i, b_i) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ on a $\sum_i |u(b_i) - u(a_i)|_X \leq \varepsilon$.

Théorème 2.2.2 Soit $1 \leq p \leq +\infty$, X un espace de Banach rétrocompact et soit $u \in L^p(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $u \in W^{1,p}(0, T; X)$
2. u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; X)$:
3. Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T; X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$|u|_{k,p,X} = |u|_{0,p,X} + \sum_{\alpha=1}^K |u^{(\alpha)}|_{0,p,X}.$$

2.3 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans cette section, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert.

Opérateurs fortement monotones

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $|\cdot|_X$. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire.

Définition 2.3.1 L'opérateur A est dit:

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m |u - v|_X^2 \quad \forall u, v \in X;$$

3. de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$|Au - Av|_X \leq M |u - v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Théorème 2.3.1 (Théorème du point fixe) Soit X un espace de Banach, $A : X \rightarrow X$ un opérateur satisfait (2.1.9) avec $0 < M < 1$. L'opérateur A admet un point fixe unique $x \in X$, c'est-à-dire $Ax = x$ et nous appelons A un opérateur contractant.

Proposition 2.3.1 Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder (voir par exemple [6] p.88).

Définition 2.3.2 Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur défini sur X . L'opérateur A est dit monotone si

$$(Au - Av, u - v)_{X \times X} \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

Définition 2.3.3 Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $m > 0$ tel que

$$|a(u; v)| \leq M |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.3.4 Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(u; u) \geq m |u|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

Théorème 2.3.2 (Théorème de Lax-Milgram). Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait

$$a(u; v) = l(v) \quad \forall v \in X.$$

Théorème 2.3.3 (Cauchy-Lipschitz) Soit $(X, |\cdot|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ |F(t; x_1) - F(t; x_2)|_X \leq L_F |x_1 - x_2|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \end{array} \right.$$

il existe $1 \leq p \leq +\infty$ tel que $F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X.$

Alors pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\dot{x}(t) = F(t; x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T)$$

$$x(0) = x_0$$

2.4 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 2.4.1 Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Chapitre 3

Problème de contact avec adhésion en électro-élasticité

Nous considérons ici un problème de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion entre un corps électro-élastique et une fondation dans un processus quasistatique.

Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion. Le problème est formulé par un système d'équations aux dérivées partielles contenant l'équation d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre comporte trois sections. Dans la première section, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. En suite, dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème.

Enfin, dans la troisième section, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relative au problème. Les techniques employées sont basées sur la théorie des équations variationnelles, des opérateurs monotones et des arguments du point fixe.

3.1 Formulation mécanique du problème

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la FIG 1.1.1 On considère que le corps est électro-élastique, plus exactement on utilise une loi de comportement de la forme (1.2.4).

En ce qui concerne le contact, on modélise par une compliance normale avec adhésion. Sous ces considérations, le problème électro-mécanique qu'on étudie est le problème 1 du chapitre 1.

Problème 3.1.1 (P) *Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$, le champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ d'adhésion $\alpha : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \varepsilon^* \nabla \varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.1)$$

$$D = \varepsilon \varepsilon(u) - B \nabla \varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.2)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.3)$$

$$\text{div } D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.1.5)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.1.6)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.7)$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\alpha) R_\tau(u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.8)$$

$$\dot{\alpha} = - \left(\alpha \left[\gamma_\nu^2 R_\nu(u_\nu) + \gamma_\tau^2 |R_\tau(u_\tau)|^2 \right] - \varepsilon_a \right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.9)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.1.10)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.1.11)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.1.12)$$

Rappelons que les équations (3.1.1) et (3.1.2) représentent la loi de comportement électroélastique, les équations (3.1.3) et (3.1.4) représentent les équations d'équilibre, tandis que les conditions (3.1.5) et (3.1.6) sont respectivement les conditions de déplacement-traction. Les conditions (3.1.7); (3.1.8) et (3.1.9) représentent les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière de et (3.1.10) est la condition initiale d'adhésion. Pour finir, (3.1.11) et (3.1.12) représentent les conditions aux limites électriques.

Pour l'étude du problème mécanique (3.1.1) – (3.1.12), on introduit les espaces de Hilbert réels H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 donnés par (2.1.1) et munis des produits scalaires donnés par (2.1.2) et on considère les hypothèses suivantes: .

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S^d \rightarrow S^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telles que} \\ |\mathcal{A}(x; \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x; \varepsilon_2)| \leq M_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ (\mathcal{A}(x; \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x; \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (c) \mathcal{A}(\cdot, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \text{sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in S^d. \\ (d) \mathcal{A}(\cdot, \varepsilon) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.13)$$

Le tenseur diélectrique $B = (B_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) B(x, E) = (B_{ij}(x) E_j) \\ \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) B_{ij} = B_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d. \\ (c) \text{ Il existe } M_B > 0 \text{ telle que} \\ BE \cdot E \geq M_B |E|^2 \\ \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1.14)$$

Le tenseur piézoélectrique $\varepsilon = (e_{ijk}) : \Omega \times S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \varepsilon(x, \tau) = (e_{ijk}(x) \tau_{jk}) \\ \forall \tau = (\tau_{jk}) \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \\ (c) \varepsilon(x) \sigma, \tau = \sigma \cdot \varepsilon^*(x) \tau \\ \forall \sigma \in S^d, \forall \tau \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1.15)$$

La fonction de complianc normal $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_\nu > 0 \text{ telle que} \\ |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq M_\nu |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)) (r_1 - r_2) \geq 0 \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) p_\nu(\cdot, r) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \text{sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ (d) p_\nu(x, r) = 0 \\ \forall r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.1.16)$$

La fonction de contact tangential $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_\tau > 0 \text{ telle que} \\ |(p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2))| \leq M_\tau |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ Il existe } m_\tau > 0 \text{ telle que} \\ |p_\tau(x, r)| \leq m_\tau \\ \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) p_\tau(\cdot, r) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \text{sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ (d) p_\tau(\cdot, 0) \in L^2(\Gamma_3) \end{array} \right. \quad (3.1.17)$$

On suppose que les forces volumiques f_0 et les tractions surfaciques f_2 ont la régularité

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0, T; H), \quad f_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (3.1.18)$$

de même, la densité de charge volumique q_0 et surfacique q_2 satisfont

$$q_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)); q_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (3.1.19)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ε_a a satisfont ;

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau, \varepsilon_a \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \varepsilon_a \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.1.20)$$

Le champ d'adhésion initial satisfait

$$\alpha_0 \in L^\infty(\Gamma_3), 0 \leq \alpha_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.1.21)$$

Nous travaillons dans toute la suite de ce chapitre avec l'espace des déplacements admissibles V défini comme étant un sous-espace fermé de H_1

$$V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \quad (3.1.22)$$

muni du produit scalaire donné par (2.1.5) et de la norme associée donnée par (2.1.6).

Puisque $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn (2.1.4) est vérifiée donc $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V alors $(V; |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert, d'après (2.1.4), (2.1.6) et l'inégalité de trace de Sobolev, trouvons que l'inégalité (2.1.7) est vérifiée.

On introduit également les espaces suivants

$$W = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \quad (3.1.23)$$

$$W = \{D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega); \text{div } D \in L^2(\Omega)\},$$

où $\text{div } D = (D_{i,i})$. Ces espaces sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires (2.1.8) et des normes associées (2.1.9). Puisque $\text{mes } \Gamma_a > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (2.1.10) est vérifiée.

Nous définissons maintenant les fonctions $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T], \quad (3.1.24)$$

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \cdot \phi da \quad \forall \phi \in W, \quad t \in [0, T], \quad (3.1.25)$$

les conditions (3.1.18) et (3.1.19) impliquent

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; V), \quad q \in W^{1,\infty}(0, T; W). \quad (3.1.26)$$

Soient $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow R$ la fonctionnelle d'adhésion

$$j_{ad}(\alpha, u, v) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) + p_\tau(\alpha) R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau) da, \quad (3.1.27)$$

et $j_{nc} : V \times V \rightarrow R$ la fonctionnelle de compliance normale

$$j_{nc}(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu)v_\nu da. \quad (3.1.28)$$

Les conditions (3.1.16) et (3.1.17) entraînent que les intégrales (3.1.25) et (3.1.26) sont bien définies.

3.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème P . En utilisant la formule de Green

$$(\sigma, \varepsilon(v))_H + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1,$$

on trouve

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div } \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V,$$

et en utilisant la définition de l'espace V avec (3.1.3) et (3.1.6), on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V,$$

Puisque

$$\begin{aligned} \sigma \nu \cdot v &= \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau v_\tau \\ &= -p_\nu(u_\nu)v_\nu + \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu)v_\nu - p_\tau(\alpha)R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau, \end{aligned}$$

il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx &= \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da - \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu)v_\nu + p_\tau(\alpha)R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau) da \\ &- \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu)v_\nu da \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

d'après (3.1.22) et (3.1.25) – (3.1.26), nous obtenons

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_H + j_{ad}(\alpha(t), u(t), v) + j_{nc}(u(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T),$$

et de (3.1.1), on obtient

$$(\mathcal{A}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\varepsilon^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v))_H + j_{ad}(\alpha(t), u(t), v) \quad (3.2.1)$$

$$+ j_{nc}(u(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T),$$

En outre, par utilisation de la formule de Green

$$(D, \nabla \phi)_H + (\operatorname{div} D, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma_D} D \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

on a

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \phi dx = \int_{\Gamma_a} D \cdot \nu \phi da + \int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in W,$$

et en utilisant la définition de l'espace W avec (3.1.4) et (3.1.12), on obtient

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Gamma_b} q_2 \phi da - \int_{\Omega} q_0 \phi dx \quad \forall \phi \in W.$$

D'après (3.1.2) et (3.1.23), on trouve

$$(\varepsilon \varepsilon(u(t)), \nabla \phi)_H - (B \nabla \varphi(t), \nabla \phi)_H = -(q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

d'où

$$(B \nabla \varphi(t), \nabla \phi)_H - (\varepsilon \varepsilon(u(t)), \nabla \phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.2.2)$$

De (3.1.9)–(3.1.10) et (3.2.1)–(3.2.2), on obtient la formulation variationnelle du problème P.

Problème 3.2.1 (PV) *Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, le champ potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ et le champ d'adhésion $\alpha : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tels que*

$$(A\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_H + (\varepsilon^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v))_H + j_{ad}(\alpha(t), u(t), v) \quad (3.2.3)$$

$$+ j_{nc}(u(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T),$$

$$(B \nabla \varphi(t), \nabla \phi)_H - (\varepsilon \varepsilon(u(t)), \nabla \phi)_H = (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T), \quad (3.2.4)$$

$$\dot{\alpha}(t) = - (\alpha(t) [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu(t)))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_\tau(t))|^2] - \varepsilon_a)_+ \quad p.p. \quad t \in (0, T), \quad (3.2.5)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad (3.2.6)$$

Le triplet $(u; \varphi, \alpha)$ qui satisfait (3.2.3) – (3.2.6) s'appelle solution faible du problème P.

Dans le reste de cette section, nous décrivons quelques propriétés des fonctionnelles j_{ad} et j_{nc} qui seront employées dans la section suivante. Nous supposons dans la suite de ce chapitre que (3.1.13) – (3.1.21) sont vérifiées avec α , α_1 et α_2 dénote des éléments de $L^\infty(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 ; u_1, u_2, v_1, v_2, u et v représentent des éléments de V , c est une constante positive générique qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \gamma_\nu, \gamma_\tau, p_\nu, p_\tau$ et L , dont la valeur change d'un endroit à un autre.

D'abord, nous remarquons que j_{ad} et j_{nc} sont linéaires par rapport au dernier argument, donc

$$j_{ad}(\alpha, u, -v) = -j_{ad}(\alpha, u, v) \quad (3.2.7)$$

$$j_{nc}(u, -v) = -j_{nc}(u, v) \quad (3.2.8)$$

En utilisant (3.1.17), (3.1.25) avec les inégalités $|R_\nu(u_\nu)| \leq L$, $|R_\tau(u_\tau)| \leq L$, $|\alpha_1| \leq 1$ et $|\alpha_2| \leq 1$, nous déduisons que

$$j_{ad}(\alpha_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\alpha_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\alpha_1 - \alpha_2| |u_1 - u_2| da, \quad (3.2.9)$$

en combinant cette inégalité avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.1.7), on obtient

$$j_{ad}(\alpha_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\alpha_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c |\alpha_1 - \alpha_2|_{L^2(\Gamma_3)} |u_1 - u_2|_V, \quad (3.2.10)$$

Puis, nous choisissons $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ dans (3.2.10) pour trouver

$$j_{ad}(\alpha, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\alpha, u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \quad (3.2.11)$$

Par des manipulations semblables basées sur les propriétés des opérateurs R_ν, R_τ et p_τ , on montre que

$$j_{ad}(\alpha, u_1, v) - j_{ad}(\alpha, u_2, v) \leq c |u_1 - u_2|_V |v|_V. \quad (3.2.12)$$

En prenant $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (3.2.11) et nous employons les égalités $R_\nu(0) = 0$ et $R_\tau(0) = 0$ pour obtenir

$$j_{ad}(\alpha, v, v) \geq 0. \quad (3.2.13)$$

En outre, nous utilisons (3.1.26), on obtient

$$|j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v)| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})| |v_\nu| da, \quad (3.2.14)$$

et d'après (3.1.16), (2.1.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v)| \leq c |u_1 - u_2|_V |v|_V. \quad (3.2.15)$$

En utilisant (3.1.26), on obtient

$$j_{nc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \leq \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})) (u_{2\nu} - u_{1\nu}) da, \quad (3.2.16)$$

et d'après (3.1.16), on a

$$j_{nc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \quad (3.2.17)$$

Finalement, en choisissant $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (3.2.17) et en utilisant (3.2.16), nous obtenons

$$j_{nc}(v, v) \geq 0. \quad (3.2.18)$$

3.3 Existence et unicité de la solution

L'intérêt principal dans cette section est le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses (3.1.13) – (3.1.21), le problème PV admet une solution unique (u, φ, α) ayant la régularité suivante*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V), \quad (3.3.1)$$

$$\varphi \in W^{1,\infty}(0, T; W), \quad (3.3.2)$$

$$\alpha \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)). \quad (3.3.3)$$

Les fonctions u, σ, φ, D et α qui satisfont (3.1.1) – (3.1.2) et (3.2.3) – (3.2.6) s'appellent une solution faible du problème P.

Nous concluons que sous les hypothèses (3.1.13) – (3.1.21), le problème mécanique (3.1.1) – (3.1.12) admet une solution faible unique satisfaisant (3.3.1) – (3.3.3). La régularité de la solution faible est donnée par (3.3.1) – (3.3.3) et en termes de contraintes par

$$\sigma \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}_1) \quad (3.3.4)$$

$$D \in W^{1,\infty}(0, T; W) \quad (3.3.5)$$

En effet, de (3.2.3) – (3.2.4), il vient que: $\text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = 0$, $\text{div } D = q_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. La régularité (3.3.1) et (3.3.2) de u et φ combinée avec (3.1.1) – (3.1.2) et (3.1.13) – (3.1.19) donne (3.3.4) et (3.3.5).

La démonstration du théorème 3.3.1 sera faite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations dépendant du temps, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe.

Pour le champ d'adhésion, nous considérons l'ensemble Z et le sous-espace fermé \mathcal{Z}

$$Z = \{\theta \in L^\infty(\Gamma_3) \mid 0 \leq \theta \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3\},$$

$$\mathcal{Z} = \{\theta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3)) \mid \theta(t) \in Z \quad \forall t \in [0, T], \theta(0) = \alpha_0\}.$$

Soit $\alpha \in \mathcal{Z}$. Dans la première étape, on considère le problème variationnel suivant.

Problème 3.3.1 (PV $_\alpha$) *Trouver le champ des déplacements $u_\alpha : [0, T] \rightarrow V$ et le champ potentiel électrique $\varphi_\alpha : [0, T] \rightarrow W$ tels que*

$$(\mathcal{A}\varepsilon(u_\alpha(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\varepsilon^* \nabla \varphi_\alpha(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\alpha(t), u_\alpha(t), v) \quad (3.3.6)$$

$$+ j_{nc}(u_\alpha(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T),$$

$$(B\nabla \varphi_\alpha(t), \nabla \phi)_H - (\varepsilon \varepsilon(u_\alpha(t)), \nabla \phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \quad (3.3.7)$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.3.1 *Le problème PV $_\alpha$ admet une solution unique $(u_\alpha, \varphi_\alpha)$ satisfaisant*

$$u_\alpha \in C(0, T; V), \quad \varphi_\alpha \in C(0, T; W).$$

Preuve. Soit $t \in [0, T]$. On considère l'espace de Hilbert $X = V \times W$ muni du produit scalaire donné par

$$(x; y)_X = (u, v)_V + (\varphi, \phi)_W \quad \forall x = (u, \varphi), y = (v, \phi) \in X, \quad (3.3.8)$$

et soit $|\cdot|_X$ la norme associée. Nous considérons l'opérateur $A_t : X \rightarrow X$ défini par

$$(A_t x, y)_X = (A\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (B\nabla \varphi, \nabla \phi)_H + (\varepsilon^* \nabla \varphi, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad (3.3.9)$$

$$- (\varepsilon \varepsilon(u), \nabla \phi)_H + j_{ad}(\alpha, u, v)$$

$$+ j_{nc}(u, v) \quad \forall x = (u, \varphi), y = (v, \phi) \in X.$$

Considérons l'élément $F \in X$ donné par

$$F = (f, q) \in X. \quad (3.3.10)$$

Nous commençons par le resultat d'équivalence suivant: le couple $x_\alpha = (u_\alpha, \varphi_\alpha)$ est une solution du problème PV_α si et seulement si

$$(A_t x_\alpha, y)_X = (F(t), y)_X \quad \forall y \in X, t \in [0, T]. \quad (3.3.11)$$

En effet, soit $x_\alpha(t) = (u_\alpha(t), \varphi_\alpha(t)) \in X$ une solution du problème PV_α , pour tout $y = (v, \phi) \in X$, en additionnant l'équation (3.3.6) avec (3.3.7) et en utilisant (3.3.8) – (3.3.10), nous obtenons (3.3.11). Réciproquement, supposons que $x_\alpha = (u_\alpha, \varphi_\alpha) \in X$ est une solution de (3.3.11). En prenant $y = (v, 0) \in X$ dans (3.3.11) où est un élément arbitraire de V , on obtient (3.3.6). En autre part, nous prenons $y = (0, \phi) \in X$ dans (3.3.11) où ϕ est un élément arbitraire de W , on obtient (3.3.7).

L'opérateur A_t est fortement monotone et de Lipschitz sur X . En effet, en utilisant (3.3.8) – (3.3.9), (3.1.13) – (3.1.15), (3.2.11) – (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17), (2.1.6), (2.1.9) – (2.1.10) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, soient $x_1 = (u_1, \varphi_1), x_2 = (u_2, \varphi_2) \in X$, pour tout $y = (v, \phi)$, on a

$$\begin{aligned} |(A_t x_1 - A_t x_2, y)_X| &= |(A\varepsilon(u_1) - A\varepsilon(u_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (B\nabla\varphi_1 - B\nabla\varphi_2, \nabla\phi)_H \\ &\quad + (\varepsilon^*\nabla\varphi_1 - \varepsilon^*\nabla\varphi_2, \varepsilon(v))_H - (\varepsilon\varepsilon(u_1) - \varepsilon\varepsilon(u_2), \nabla\phi)_H \\ &\quad + |j_{ad}(\alpha, u_1, v) - j_{ad}(\alpha, u_2, v) + j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v)| \\ &\leq c(|u_1 - u_2|_V |v|_V + |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\phi|_W + |\varphi_1 - \varphi_2|_W |v|_V \\ &\quad + |u_1 - u_2|_V |\phi|_W) \\ &\leq c|x_1 - x_2|_X |y|_X, \end{aligned}$$

et en prenant $y = A_t x_1 - A_t x_2$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$|A_t x_1 - A_t x_2|_X \leq c|x_1 - x_2|_X$$

qui prouve que A_t est Lipschitz. En outre, pour tout $x_1 = (u_1, \varphi_1), x_2 = (u_2, \varphi_2) \in X$, nous avons

$$\begin{aligned}
(A_t x_1 - A_t x_2, x_1 - x_2)_X &= (A\varepsilon(u_1) - A\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_{\mathcal{H}} \\
&\quad + (B\nabla(\varphi_1 - \varphi_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H \\
&\quad + (\varepsilon^* \nabla \varphi_1 - \varepsilon^* \nabla \varphi_2, \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_{\mathcal{H}} \\
&\quad - (\varepsilon \varepsilon(u_1) - \varepsilon \varepsilon(u_2), \nabla \varphi_1 - \varphi_2)_H \\
&\quad + j_{ad}(\alpha, u_1, u_1 - u_2) - j_{ad}(\alpha, u_2, u_1 - u_2) \\
&\quad + j_{nc}(u_1, u_1 - u_2) - j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \\
&\geq c (|\varepsilon(u_1 - u_2)|_{\mathcal{H}}^2 + |\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)|_H^2) \\
&\geq c (|(u_1 - u_2)|_V^2 + |\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)|_W^2) \\
&\geq c |x_1 - x_2|_X^2
\end{aligned}$$

donc, A_t est fortement monotone. Par conséquent en utilisant un résultat standard sur les équations variationnelles dépendant du temps voir (proposition 2.3.1), il existe un élément unique $x_\alpha(t) = (u_\alpha(t), \varphi_\alpha(t)) \in X$ qui satisfait (3.3.6) et (3.3.7) : Maintenant, nous montrons que

$$(u_\alpha, \varphi_\alpha) \in C(0, T; V) \times C(0, T; W).$$

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et on considère les notations $u_\alpha(t_i) = u_i, \varphi_\alpha(t_i) = \varphi_i, \alpha(t_i) = \alpha_i, q(t_i) = q_i, f(t_i) = f_i$ et $x_\alpha(t_i) = (u_\alpha(t_i), \varphi_\alpha(t_i)) = x_i$ pour $i = 1, 2$.

De (3.3.6) – (3.3.7), on a

$$\begin{aligned}
(A\varepsilon(u_1) - A\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_{\mathcal{H}} &= (\varepsilon^* \nabla(\varphi_1 - \varphi_2), \varepsilon(u_1 - u_2))_{\mathcal{H}} \\
&\quad + (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V \\
&\quad + j_{ad}(\alpha_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\alpha, u_2, u_1 - u_2) \\
&\quad + j_{nc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \\
(B\nabla(\varphi_1 - \varphi_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H &- (\varepsilon \varepsilon(u_1 - u_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H = (q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.2.10), (3.2.17), (3.3.13)–(3.3.15), (2.1.6), (2.1.9) et l'inégalité de Friedrichs-Poincaré, on a

$$|u_1 - u_2|_V \leq c \left(|f_1 - f_2|_V + |q_1 - q_2|_W + |\alpha_1 - \alpha_2|_{L^2(\Gamma_3)} \right). \quad (3.3.12)$$

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c (|u_1 - u_2|_V + |q_1 - q_2|_W). \quad (3.3.13)$$

Finalement, d'après (3.3.12) – (3.3.13) et la régularité de (f, q, α, u_α) , on obtient

$$u_\alpha \in C(0, T; V), \quad \varphi_\alpha \in C(0, T; W). \quad (3.3.14)$$

Ce qui termine la preuve du lemme 3.3.1. ■

Pour $\alpha \in \mathcal{Z}$, nous notons dans la suite par u_α le champ des déplacements obtenu dans le lemme 3.3.1. Dans la prochaine étape, on considère le champ des déplacements u_α obtenu dans le lemme précédent et on résoud le problème suivant.

Problème 3.3.2 (PV $_\theta$) *Trouver le champ d'adhésion $\theta_\alpha : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que*

$$\dot{\theta}_\alpha(t) = -\theta_\alpha(t) \left[\gamma_\nu (R_\nu(u_{\alpha\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_{\alpha\tau}(t))|^2 - \varepsilon_a \right]_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \quad (3.3.15)$$

$$\theta_\alpha(0) = \alpha_0. \quad (3.3.16)$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.3.2 *Le problème PV $_\theta$ possède une solution unique θ_α qui satisfait*

$$\theta_\alpha \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)), \quad \theta_\alpha(t) \in Z \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Preuve. On considère l'application $F_\alpha : [0, T]L^\infty(\Gamma_3) \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ définie par

$$F_\alpha(t; \theta) = - \left(\theta \left[\gamma_\nu (R_\nu u_{\alpha\nu}(t))^2 + \gamma_\tau |R_\tau u_{\alpha\tau}(t)|^2 - \varepsilon_a \right]_+ \right) \quad \forall t \in [0, T] \quad \theta \in L^\infty(\Gamma_3).$$

On a d'après les propriétés de R , F_α est de Lipschitz par rapport à θ , uniformément dans le temps. Cependant, pour tout $\theta \in L^\infty(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow F_\alpha(t, \theta)$ appartient à

$L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$. Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 2.3.3), il existe $\theta_\alpha \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ solution unique du problème PV_θ . En utilisant des arguments similaires à la remarque 1.3.1 et (3.1.21), il vient que $0 \leq \theta_\alpha(t) \leq 1 \forall t \in [0, T]$ p.p. sur Γ_3 et donc $\theta_\alpha(t) \in \mathcal{Z}$. Ce qui conclut la preuve du lemme 3.3.2. ■

Pour $\alpha \in \mathcal{Z}$, on définit l'opérateur $\Lambda : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ par

$$\Lambda\alpha = \theta_\alpha \quad (3.3.17)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.3 *Il existe un élément unique $\alpha^* \in \mathcal{Z}$ tel que $\Lambda\alpha^* = \alpha^*$*

Preuve. Soient α_1 et $\alpha_2 \in \mathcal{Z}$. Nous utilisons les notations $u_{\alpha i} = u_i, \varphi_{\alpha i} = \varphi_i$ et $\theta_{\alpha i} = \theta_i$ pour $i = 1, 2$, les solutions des problèmes PV_α et PV_θ respectivement. Soit $t \in [0, T]$, en utilisant (3.3.6), on obtient

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq c |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}. \quad (3.3.18)$$

■

Par intégration de (3.3.15) avec l'état initial (3.3.16), on obtient

$$\theta_i(t) = \alpha_0 - \int_0^t (\theta_i(s) [\gamma_\nu (R_\nu(u_{i\nu}(s)))^2 + \gamma_\tau |R_\tau u_{i\tau}(s)|^2] - \varepsilon_a)_+ ds \quad i = 1, 2.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c & \left(\int_0^t |\theta_1(s)(R_\nu u_{1\nu}(s))^2 - \theta_2(s)(R_\nu u_{2\nu}(s))^2|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right. \\ & \left. + \int_0^t |\theta_1(s)(R_\tau u_{1\tau}(s))^2 - \theta_2(s)(R_\tau u_{2\tau}(s))^2|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de R_ν et R_τ et en écrivant que $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$ et après quelques opérations élémentaires, on trouve

$$\begin{aligned} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c & \left(\int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right. \\ & \left. + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

En combinant (3.3.19) avec le lemme de Gronwall 2.4.1, on trouve

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds. \quad (3.3.20)$$

De l'estimation (3.3.20), la relation (3.3.17) et l'inégalité de trace de Sobolev (2.1.7), on obtient

$$|\Lambda\alpha_1(t) - \Lambda\alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V ds. \quad (3.3.21)$$

De (3.3.18) et (3.3.21), on a

$$|\Lambda\alpha_1(t) - \Lambda\alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.22)$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, on obtient

$$|\Lambda^m \alpha_1 - \Lambda^m \alpha_2|_{C(0, T; L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\alpha_1 - \alpha_2|_{C(0, T; L^2(\Gamma_3))}$$

Pour m suffisamment grand, Λ^m est une contraction sur le sous-espace fermé \mathcal{Z} de l'espace de Banach $C(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Donc, d'après le théorème du point fixe de Banach 2.1.10, Λ^m admet un point fixe unique et par conséquent Λ admet un point fixe unique $\alpha^* \in \mathcal{Z}$.

Maintenant, on peut établir la démonstration du théorème 3.3

Démonstration du théorème. ■

Existence Soit $\alpha^* \in \mathcal{Z}$ le point fixe de Λ et soit (u^*, φ^*) la solution du problème PV_α pour $\alpha = \alpha^*$, c'est-à-dire $u^* = u_{\alpha^*}$, $\varphi^* = \varphi_{\alpha^*}$. En utilisant les estimations (3.3.12) et (3.3.13), on déduit que

$$\begin{aligned} |u^*(t_1) - u^*(t_2)|_V &\leq c(|f(t_1) - f(t_2)|_V + |q(t_1) - q(t_2)|_W \\ &\quad + |\alpha^*(t_1) - \alpha^*(t_2)|_{L^2(\Gamma_3)}) \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

$$|\varphi^*(t_1) - \varphi^*(t_2)|_W \leq c(|u^*(t_1) - u^*(t_2)|_V + |q(t_1) - q(t_2)|_W), \quad (3.3.24)$$

pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$. Et puisque $\alpha^* = \theta_{\alpha^*}$ et d'après le lemme 3.3.2, nous déduisons que $\alpha^* \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$. De la régularité de (f, q) donnée par (3.1.24) et l'estimation (3.3.23), nous obtenons $u^* \in W^{1,\infty}(0, T; V)$. D'après l'estimation (3.3.24) et la régularité de (u^*, q) , on obtient $\varphi^* \in W^{1,\infty}(0, T; W)$. Nous concluons de (3.3.6) , (3.3.7) , (3.3.15) et (3.3.16) que $(u^*, \varphi^*, \alpha^*)$ est une solution du problème PV et satisfait (3.3.1) –(3.3.3).

Unicité L'unicité est une conséquence de l'unicité des problèmes PV_α et PV_θ . Soit $\{u, \varphi, \alpha\}$ est une solution du problème PV (3.2.3) – (3.2.6) ayant la régularité (3.3.1) – (3.3.3).

En utilisant les arguments à la remarque 1.3.1, on obtient $\alpha \in \mathcal{Z}$, d'après (3.2.3) et (3.2.4), nous trouvons que (u, φ) est une solution du problème PV_α , et du lemme ??, nous avons $(u_\alpha, \varphi_\alpha)$ est une solution unique du problème PV_α . Donc

$$u = u_\alpha \text{ et } \varphi = \varphi_\alpha. \quad (3.3.25)$$

Nous remplaçons u par u_α dans (3.2.5), on trouve que α est une solution du problème PV_θ et d'après le lemme 3.3.2, le problème PV_θ admet une unique solution notée par θ_α , d'où

$$\alpha = \theta_\alpha. \quad (3.3.26)$$

Nous utilisons maintenant (3.3.26) et la définition de Λ , on obtient $\Lambda\alpha = \alpha$; c'est-à-dire α est un point fixe de Λ et comme α^* est l'unique point fixe de Λ , on conclut

$$\alpha = \alpha^* \quad (3.3.27)$$

Unicité L'unicité du théorème 3.3.1 est maintenant une conséquence des égalités (3.3.25) et (3.3.27) :

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites de contact en piézoélectricité, entre un corps électro-élastique et une base.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière de corps et les données de problème ont des bonnes régularités, donc la solution du problème mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution du problème précédent par l'utilisation des arguments suivants: équation variationnelle dépendent du temps, équation différentielle et point fixe.

Bibliographie

- [1] K.T. Andrews, L. Chapman, J.R. Fisackerly, M. Shillor, L. Vanerian and T. Van Houten, A Membrane in Adhesive Contact, *SIAM J. Appl. Math.* 64 (2003), 152-169.
- [2] K.T. Andrews and M. Shillor, Dynamic Adhesive Contact of a Membrane, *Adv. Math.Sci. Appl.* 13 (2003), 343-356
- [3] R.C. Batra and J.S. Yang, Saint venant's principle in linear piezoelectricity, *J. of Elasticity*, 38 (1995), 209-218.
- [4] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson (1987).
- [5] G. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion, *J. of comput. and Appl. Math*, 159 (2003), 431-465.
- [6] J.G. Chau, Shillor and M. Sofonea, Dynamic frictionless contact with adhesion, *J. of Appl Math. and Phys (Zamp)*, 55 (2004), 32-47.
- [7] M. Cocu and R. Rocca, Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion, *Math. Model. Num. Anal.* 34 (2000), 981-1001.
- [8] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [9] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis and Numerical Simulations of A Dynamic Contact Problem with Adhesion, *Math. Comput. Modelling* 37 (2003), 1317-1333.

-
- [10] M. Fremond, Equilibre des structures qui adhèrent à leur support, C.R. Acad. Sci.Paris, 295, Série (1982), 913-916.
- [11] M. Fremond, Adhérence des solides, J. Mécanique et application, 6(3) (1987), 323-335.
- [12] W. Han, K.L. Kuttler, M. Shillor and M.Sofonea, Elasti Beam in Adhesive Contact, Int. J. Solides Structures 39 (2002), 1145-1164.
- [13] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, A Viscoelastic Bilateral Frictionless Contact Problem with Adhesion, Applic. Anal. 80 (2001), 233-255.
- [14] J. Nečas, Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques, Masson, Paris (1967).
- [15] J. Nečas and I. Hlaváček, Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies:An Introduction, Elsevier, Amesterdam, (1981).
- [16] M. Raous, L. Cangemi and M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact, comput. Math Appl. Mech. Ingng, 177 (1999), 383-399.
- [17] J. Rojek, J.J. Telega, Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I: General developements, J. Theoretical and Applied Mechanics, 39 (2001).
- [18] M. Selmani, A dynamic problem with adhesion and damage, electro-viscoelasticity with long-term memory. Journal of inequalities in pure and applied mathematics (2009).
- [19] M. Selmani and T. Messaoudi, A dynamic frictionless elastic-viscoelastic problem with normal damped response and damage. Mediterr. J. Math. 9 (2012), 81-94.
- [20] M. Sofonea and A. Matei, Elastic Antiplane Contact Problem with Adhesion, J. of Appl. Math. Phys. (ZAMP) 53 (2002), 962-972.
- [21] M. Sofonea, A. D. Rodriguez-Aros and J. M. Viano, A Class of Integro-Diferential Variational Inequalities with Applications to Viscoelastic Contact, preprint.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problèmes aux limites en piézoélectricité. Le problème est un contact avec adhésion entre un corps électro-élastique et une base.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle des problèmes.

Puis, on a montré l'existence et l'unicité de la solution par les arguments suivants: équation variationnelle dépendant du temps, équation différentielle et point fixe.

Abstract

In this thesis, we studied the existence and uniqueness of the solution of boundary contact problems in piezoelectricity. The problem is a contact with adhesion between an electro-elastic body and a base. We used the Green's formula for obtain the variational formulation of the problem and we proved the existence and uniqueness of the solution by the following arguments: variational equation time dependent, differential equation and fixed point.

Key words: variational equation time dependent, differential equation, fixed point.

ملخص

في هذه المذكرة درسنا وجود ووحداية الحل لمسألة حديثة في ميدان الضغطية الكهربائية، المسألة هي تواصل بتلاصق بين جسم كهرو مرن و قاعدة، استعملنا صيغة Green للحصول عن الشكل التغيري للمسألة ثم برهنا عن وجود ووحداية الحل بالحجج التالية : معادلة تغايرية مرتبطة بالزمن، معادلة تفاضلية ونقطة ثابتة.

الكلمات المفتاحية: معادلة تغايرية مرتبطة بالزمن، معادلة تفاضلية، نقطة ثابتة.