



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

***Opérateurs linéaires bornés auto-adjoint
dans les espaces de Hilbert***

Présenté par: - Terki Abdelbasset
- Terki Abdelfattah

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Beloul Said	MCA/Prof.	Président	Univ. El Oued
Abdelhamid Rehouma	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
Habita Khaled	MCA/MC	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2020 – 2021

REMERCIEMENT

*Nous tenons remercier avant tout **DIEU** qui nous a donné la force, la volonté, le courage, et la patience de pouvoir réaliser ce modeste travail.*

*On tient aussi remercier **Dr Rehouma Abdelhamid**, notre encadreur qui a su orienter notre travail, aussi pour sa disponibilité nous prodiguer des conseils, pour sa confiance et pour sa précieuse aide, on le remercie du fond du cœur.*

*Nous remercions **Le Docteur Khaoula Zaiz**, aux ses efforts et ses aides, en lui espérant une meilleure vie pleine de joie, de bonheur et de succès en différents domaines nous lui dédions ce modeste travail*

Nous sincères remerciements sont adressés tous les membres du jury qui ont accepté de juger notre modeste travail, et tous ceux qui, sans avoir été impliqués directement dans ce travail, ont toujours été d'un grand support : nos enseignants, nos familles, nos amis, nos collègues chacun son nom.

Dédicace

À mes très chers parents

*pour tous les soins et le suivi dont ils font preuve depuis ma naissance et au long de mes études
pour leur soutien et surtout leurs conseils et amour*

À mes très chères sœurs

À mes très chers frères

À ma grande famille

À toutes mes amies

À tous ceux qui m'aiment et que j'aime

Terkî

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des domaines des mathématiques. Les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers autre forment une classe assez particulière des opérateurs linéaires d'un espace vectoriel normé vers autre espace vectoriel normé.

L'étude des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert dans autre espace hilbertien. demande de bien connaître les opérateurs adjoint d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert qui est aussi un opérateur linéaire continu les deux normes d'un opérateur linéaire continu sur un Hilbert et son opérateur adjoint sont égales. l'opérateur linéaire adjoint possède les mêmes propriétés de l'opérateur linéaire original. Aussi les opérateurs inverses d'un opérateur linéaire continu inversible d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert qui est aussi un opérateur linéaire continu inversible.

Dans ce mémoire, on veut traiter quelques propriétés et notions des opérateurs linéaires continus auto-adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert.

Le contenu de ce mémoire se compose de 3 chapitres :

La première partie de chapitre un est consacré au rappel sur les espaces et sous espaces linéaires aussi les ensembles linéairement indépendants, sous-espaces engendrés. On expose rappel sur les espaces métriques, et les espaces normés, et sur les espaces de Hilbert, citons produits scalaires et orthogonalité et bases orthogonales et orthonormées, on parlera sur quelques propriétés fondamentales : comme l'égalité de parallélogramme, aussi le théorème de la projection orthogonale d'un point quelconque sur un sous ensemble fermé et convexe de cet espace de Hilbert.

La deuxième partie de chapitre un est consacré à l'étude des propriétés des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert dans autre espace hilbertien aussi on met l'accent sur les opérateurs inverses d'un opérateur linéaire continu inversible d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert qui est aussi un opérateur linéaire. En particulier on met l'accent sur quelques propriétés des opérateurs

linéaires continus inversibles d'un espace vectoriel normé vers autre et l'inégalité de l'énergie. On donne quelques exemples des opérateurs linéaires continus inversibles, la transformation inverse est linéaire mais n'est pas en général continue.

A la fin de ce chapitre on définit le spectre d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert dans autre espace hilbertien on donnera quelques explications..

Le troisième chapitre s'occupe de deux applications sur ce qui nous avons étudié dans les deux chapitres précédant, ces application sont illustrées par les propriétés structurelles citées aux chapitre un et chapitre deux.

La première application concerne des résultats trouvés sur la représentation d'un opérateur linéaire continu auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable on considère une base orthonormée puis on trouve la propriétés matricielle des opérateurs linéaires continus auto-adjoints associés. On trouve enfin des résultats sur le spectre opérateur linéaire continu auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude des opérateurs intégraux continus et le noyau de ce type des opérateurs intégraux aussi on fait le calcul des normes des opérateurs intégraux et les conditions permettant que ces opérateurs integraux soient auto-adjoints dans ce cas on trouvera facilement le spectre de ces opérateurs intégraux. On met l'accent sur un opérateur intégral à noyau hermitien continu.

NOTATIONS GÉNÉRALES

E	Espaces normes
$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert .
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire, $\ \cdot \ $ La norme, $ \cdot $ la valeur absolue, $d(.,.)$ distance.
A	L'opérateur linéaire .
$L(\mathcal{H})$	L'espace des opérateurs linéaires sur espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	L'espace des opérateurs linéaires bornés sur espace de Hilbert $\mathcal{H}$
A^{-1}	L'inverse de l'opérateur A .
A^*	L'adjoint de l'opérateur A .
$\mathcal{A}_k$	Opérateur Intégral de Noyau
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	Ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réel.
$I_{\mathcal{H}}$	Opérateur Identité.
$A^{\perp}$	Orthogonal de A .
$\text{Im}(A)$	L'image de l'opérateur A .
$\ker(A)$	Le noyau de l'opérateur A .
$\rho(A)$	L'ensemble résolvante de l'opérateur A .
$R_{\lambda}(A)$	La résolvante de l'opérateur A .
$\sigma(A)$	Le spectre de l'opérateur T .
$\sigma_p(A)$	Le spectre ponctuel de l'opérateur A .
$\sigma_r(A)$	Le spectre résiduel de l'opérateur A .
$\sigma_c(A)$	Le spectre continu de l'opérateur A .
$r(A)$	Le rayon spectral de l'opérateur A .
$\overline{B}_f(\varphi_0, r)$	Boule fermée, centrée en φ_0 de rayon r .

TABLE DES MATIÈRES

	ii
Notations générales	ii
1 Préliminaires	1
1.1 Espaces normés	2
1.2 Espace de Hilbert	2
1.2.1 Produit scalaire	2
1.2.2 Quelques propriétés	3
1.2.3 Orthogonalité	5
1.2.4 Bases orthonormales	6
1.3 Opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert	6
1.3.1 Opérateurs linéaires bornés	6
1.3.2 Puissance d'un opérateur	8
1.3.3 L'inverse d'un Opérateur linéaire bornée	8
1.4 Théorèmes Générales	10
1.5 Convergence sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$	11
1.6 Spectre d'un opérateur linéaire bornée	11
1.6.1 Définitions générales	11
2 Opérateurs auto-adjoints	13
2.1 Opérateurs linéaires bornée adjoints dans les espaces de Hilbert	14
2.1.1 Définition et exemples	14
2.1.2 Propriétés l'opérateur adjoint	15
2.2 Opérateurs linéaires bornés auto-adjoint dans les espaces de Hilbert	20
2.2.1 Définition et exemples	20

2.2.2	Norme d'un opérateur auto-adjoint	21
2.2.3	Propriétés des opérateurs auto-adjoints	22
2.2.4	Propriétés spectrales de l'opérateur adjoint	28
2.2.5	Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints	29
2.3	La relation entre l'opérateur auto-adjoint avec autre classes des opérateurs	34
2.3.1	Quelques classes d'opérateurs	34
2.3.2	Relation entre opérateur auto-adjoint et un opérateur positif	34
2.3.3	Relation entre opérateur auto-adjoint et un opérateur projecteur orthogonal	35
2.3.4	Relation entre opérateur auto-adjoint et un opérateur normal	36
3	Applications	37
3.1	Répresentation d'un opérateur	38
3.1.1	Réprésentation d'un opérateur sur un espace de Hilbert séparable	38
3.1.2	Polynôme caractéristique	39
3.1.3	Matrices diagonales	41
3.2	Opérateurs intégraux, propriétés et étude spectrale	43
3.2.1	Opérateur Intégral	43
3.2.2	Noyau d'un opérateur	43
3.2.3	Normes des opérateurs intégraux sur $L^2(\mathcal{I})$	43
3.2.4	Opérateur Intégral à Noyau Hermitien Continu	44
	Bibliographie	51

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

La première partie de chapitre un est consacré au rappel sur les espaces et sous espaces linéaires aussi les ensembles linéairement indépendants ,sous-espaces engendrés. On expose rappel sur les espaces métriques, et les espaces normés,et sur les espaces de Hilbert, citons produits scalaires et orthogonalité et bases orthogonales et orthonormées, on parlera sur quelques propriétés fondamentales :comme l'égalité de parallélogramme, aussi le théorème de la projection orthogonale d'un point quelconque sur un sous ensemble fermé et convexe de cet espace de Hilbert.

La deuxième partie de chapitre un est consacré à l'étude des propriétés des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert dans autre espace hilbertien aussi on met l'accent sur les opérateurs inverses d'un opérateur linéaire continu inversible d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert qui est aussi un opérateur linéaire.En particulier on met l'accent sur quelques propriétés des opérateurs linéaires continus inversibles d'un espace vectoriel normé vers autre et l'inégalité de l'énergie. On donne quelques exemples des opérateurs linéaires continus inversibles, la transformation inverse est linéaire mais n'est pas en général continue.

A la fin de ce chapitre un on définit le spectre d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert dans autre espace hilbertien on donnera quelques explications..

Dans le deuxième chapitre, on présente les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus auto-adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert On donne la définition des opérateurs linéaires continus auto-adjoints et les propriétés structurelles associés (norme ,image).

On définit aussi quelques classes des opérateurs linéaires continus auto-adjoints.Citons : opérateurs positifs ,opérateurs projecteurs ,opérateurs normaux, opérateurs compacts.On explique dans la même occasion les relations entre les des opérateurs linéaires continus auto-adjoints et les opérateurs normaux

1.1 Espaces normés

Définition 1.1.0.1

Soit E un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. On appelle semi-norme sur E , une application $\mathcal{P} : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que pour tout $\varphi, \psi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

- 1) $\mathcal{P}(\lambda\varphi) = |\lambda| \mathcal{P}(\varphi)$, (propriété d'homogénéité absolue).
- 2) $\mathcal{P}(\varphi + \psi) \leq \mathcal{P}(\varphi) + \mathcal{P}(\psi)$, (propriété de sous-additivité).

Il est clair que $\mathcal{P}(0) = 0$.

Un espace linéaire E muni d'une semi-norme s'appelle espace semi-normé.

Définition 1.1.0.2

Soit E un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. On appelle norme sur E , une application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $\| \cdot \|$ est une semi-norme pour E et de plus

- 3) $\| \varphi \| = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.

Un espace linéaire E muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(E, \| \cdot \|)$.

Exemple 1.1.0.1

L'espace $C([0, 1], E)$ est dit normé, lorsqu'il est muni d'une des normes suivantes :

1. $\| f \|_1 = \int_0^1 |f(\varphi)| d\varphi$.
2. $\| f \|_2 = \left(\int_0^1 |f(\varphi)|^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}}$.
3. $\| f \|_\infty = \sup_{\varphi \in [0, 1]} |f(\varphi)|$.

Définition 1.1.0.3 (Espace de Banach)

Un espace de Banach est un espace linéaire normé complet.

Note : On dit qu'un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .

Exemple 1.1.0.2

L'espace $E = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$. Le nombre

$$\| f \| = \max_{a \leq \varphi \leq b} | f(\varphi) |,$$

où $| \cdot |$ est la norme dans $\mathbb{R}^n$, définit une norme rendant $(E, \| \cdot \|)$ un espace de Banach.

1.2 Espace de Hilbert

1.2.1 Produit scalaire

Définition 1.2.1.1

Soit $\mathbb{X}$ un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, s'il existe un nombre complexe $\phi = \langle \varphi, \psi \rangle$ pour tout couple des vecteurs φ et ψ dans $\mathbb{X}$ qui vérifient les conditions suivantes :

1. $\forall \varphi \in \mathbb{X} \langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ et $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$
2. $\overline{\langle \varphi, \psi \rangle} = \langle \psi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{X}$
3. $\langle \varphi + \psi, \phi \rangle = \langle \varphi, \phi \rangle + \langle \psi, \phi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \text{ et } \phi \in \mathbb{X}$
4. $\langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{X} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{C}$

alors $\langle \varphi, \psi \rangle$ est dit produit scalaire de φ et ψ outrement dit que $(\mathbb{X}, \langle, \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Définition 1.2.1.2

On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire et on pose

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$$

dans ocas $(\mathbb{X}, \langle, \rangle)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.2.1.3

Un espace préhilbertien complet muni de la norme induit par le produit scalaire est dit espace de Hilbert.

Exemple 1.2.1.1

(1) l'espace

$$l^2(\mathbb{C}) = \left\{ \varphi = (\varphi_j)_j \quad \varphi_j \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^2 < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire $\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^k \varphi_j \overline{\psi_i}$ est un espace de Hilbert.

(2) Pour tout ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, l'espace $L^2(\Omega; \mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} f(\varphi) \overline{g(\varphi)} d\varphi$$

est un espace de Hilbert.

1.2.2 Quelques propriétés

• **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{X}$, on a

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}. \quad (1.1)$$

Preuve : L'inégalité (1.1) est trivialement satisfaite si $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$.

Nous supposons donc que $\langle \varphi, \psi \rangle \neq 0$. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \frac{\varphi}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}} - \frac{\langle \varphi, \psi \rangle \psi}{|\langle \varphi, \psi \rangle| \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}}, \frac{\varphi}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}} - \frac{\langle \varphi, \psi \rangle \psi}{|\langle \varphi, \psi \rangle| \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} \right\rangle \\ &\leq 1 - \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} + 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} + 1 &\Rightarrow \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} \leq 2 \\ &\Rightarrow |\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}. \end{aligned}$$

Généralisation (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\mathbb{X}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et S une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur $\mathbb{X}$. Alors, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathbb{X}, \quad |S(\varphi, \psi)| \leq \sqrt{S(\varphi, \varphi)} \sqrt{S(\psi, \psi)}. \quad (1.2)$$

Corollaire 1.2.2.1

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle). \quad (1.3)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} 0 \leq (\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} - \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle})^2 &= \left(\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}\right)^2 - 2\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}. \\ &\Rightarrow \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} \leq \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}\right)^2 \right), \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a (1.1)

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle).$$

- **Loi du parallélogramme [3] :** Pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{X}$, on a

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2). \quad (1.4)$$

Preuve :

En effet

$$\begin{aligned} \|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 &= \langle \varphi + \psi, \varphi + \psi \rangle + \langle \varphi - \psi, \varphi - \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle \\ &\quad + \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle \varphi, \psi \rangle - \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle \\ &= 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2). \end{aligned}$$

- **Identité de polarisation : [3]**

Soient $\varphi, \psi \in \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ on peut montrer que

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \begin{cases} 1) \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) + i (\|\varphi + i\psi\|^2 - \|\varphi - i\psi\|^2) & \text{dans } \mathbb{C} \\ 2) \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Preuve :

1) $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) + i(\|\varphi + i\psi\|^2 - \|\varphi - i\psi\|^2)] = \\ & = \frac{1}{4} [(\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle - \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle) + \\ & i(\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, i\psi \rangle + \langle i\psi, \varphi \rangle + i\bar{i}\langle \psi, \psi \rangle - \langle \varphi, \varphi \rangle - i\bar{i}\langle \psi, \psi \rangle + \langle \varphi, i\psi \rangle + \langle i\psi, \varphi \rangle)] \\ & = \frac{1}{4} [2\langle \varphi, \psi \rangle + 2\langle \varphi, \psi \rangle + 2\langle \varphi, \psi \rangle - 2\langle \varphi, \psi \rangle] = \langle \varphi, \psi \rangle \end{aligned}$$

2) $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) &= \frac{1}{4} [\langle \varphi + \psi, \varphi + \psi \rangle - \langle \varphi - \psi, \varphi - \psi \rangle] \\ &= \frac{1}{4} [\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle - \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &- \langle \psi, \psi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle] \\ &= \langle \varphi, \psi \rangle \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R} : \langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$

Théorème 1.2.2.1 [2]

1) Tout espace de Hilbert est normé.

2) Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ tel que :

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2). \quad (1.5)$$

Alors $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ est espace de Hilbert dans ce cas

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \begin{cases} 1) \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) + i(\|\varphi + i\psi\|^2 - \|\varphi - i\psi\|^2) & \text{dans } \mathbb{C} \\ 2) \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.2.3 Orthogonalité

Définition 1.2.3.1

1. Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ un espace de Hilbert.

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, si $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$, on dit que φ, ψ sont orthogonaux et on écrit $\varphi \perp \psi$.

2. L'orthogonale de $A \subset \mathcal{H}$ est défini par

$$A^{\perp} = \{\varphi \in \mathcal{H} : \langle \varphi, \alpha \rangle = 0; \forall \alpha \in A\}.$$

Exemple 1.2.3.1

Soit $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert alors :

1) $\mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$

2) $\{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$.

Définition 1.2.3.2

1) Un ensemble $E = \{e_i; i \in I\}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un système orthonormal si :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1.2.4 Bases orthonormales**Définition 1.2.4.1**

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.

On appelle base orthonormale de $\mathcal{H}$ tout sous ensemble fini ou dénombrable e_n qui vérifie :

1) $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$.

2) Le sous espace vectoriel engendré par e_n (par combinaisons linéaires finies) est dense dans $\mathcal{H}$.

1.3 Opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert**Définition 1.3.0.1**

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Une application $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est dite opérateur linéaire si A satisfait les deux conditions suivantes :

i) **Additivité** : $A(\varphi + \psi) = A(\varphi) + A(\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$.

ii) **Homogénéité** : $A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{C}$.

1.3.1 Opérateurs linéaires bornés**Définition 1.3.1.1**

Un opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit borné, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\|A\varphi\| \leq c\|\varphi\| \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}.$$

$\|A\|$ la norme d'opérateur A est défini par

$$\|A\| = \inf\{c > 0 : \|A\varphi\| \leq c\|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}\}.$$

Théorème 1.3.1.1 [10]

Pour tout opérateur linéaire et borné A , on a :

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|A\varphi\| : \|\varphi\| = 1\} \\ &= \sup\{\|A\varphi\| : \|\varphi\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle A\varphi, \psi \rangle| : \|\varphi\| = \|\psi\| = 1\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.1.2 [10]

Pour tout opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est borné.
- (ii) A est continu sur l'espace $\mathcal{H}$.
- (iii) A est continu en φ_0 dans $\mathcal{H}$.

Preuve :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit A un opérateur borné, φ_n une suite converge vers φ_0 dans $\mathcal{H}$, comme

$$0 \leq \|A\varphi_n - A\varphi_0\| = \|A(\varphi_n - \varphi_0)\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi_n - \varphi_0\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

la continuité de A .

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit A continu en $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ supposons que A est non borné (i.e : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \varphi_n \neq 0$ vecteur dans $\mathcal{H}$ $\|A\varphi_n\| > n \|\varphi_n\|$). On pose $\psi_n = \frac{\varphi_n}{n\|\varphi_n\|}$; $\|\psi_n\| = \frac{1}{n}$ Or $\psi_n \rightarrow 0$ alors $\psi_n + \varphi_0 \rightarrow \varphi_0$ mais

$$\|A(\psi_n + \varphi_0) - A(\varphi_0)\| = \|A\psi_n\| = \left\| A \frac{\varphi_n}{n\|\varphi_n\|} \right\| = \frac{1}{n\|\varphi_n\|} \|A\varphi_n\| > \frac{n\|\varphi_n\|}{n\|\varphi_n\|} = 1.$$

D'où

$$\|A(\psi_n + \varphi_0) - A(\varphi_0)\| > 1, \forall \psi_n.$$

A n'est pas continu en φ_0 , d'où la contradiction donc A est borné.

Théorème 1.3.1.3 [10]

Soient A et B deux opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on a les propriétés suivantes :

- (i) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
- (ii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
- (iii) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Exemple 1.3.1.1

l'opérateur A_φ est appelé opérateur de multiplication par φ , Et on définit comme .

$$A : (L^2[0, 1], \|\cdot\|_{L^2}) \rightarrow (L^2[0, 1], \|\cdot\|_{L^2}).$$

$$f(\varphi) \longrightarrow \varphi f(\varphi).$$

est borné car :

$$\text{on a } \|A_\varphi f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |A_\varphi f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ alors pour tout } \varphi \in [0, 1]$$

$$\|A f(\varphi)\|_{L^2}^2 = \|\varphi f(\varphi)\|_{L^2}^2$$

$$\leq \|f(\varphi)\|_{L^2}^2$$

$$\text{donc } \|A_\varphi f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Définition 1.3.1.2

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'image de A est défini par :

$$\text{Im}(A) = \{A\varphi : \varphi \in \mathcal{H}\}.$$

et le noyau est défini par :

$$\text{Ker}(A) = \{\varphi \in \mathcal{H} : A\varphi = 0\}.$$

1.3.2 Puissance d'un opérateur**Définition 1.3.2.1**

Soit A un opérateur sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, où

$$A^n \varphi = \underbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}_{n \text{ fois}} \varphi \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } A^0 = I_{\mathcal{H}} (\text{opérateur identité})$$

A^n est dit l'opérateur puissance de A .

Proposition 1.3.2.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1.3.3 L'inverse d'un Opérateur linéaire bornée**Définition 1.3.3.1**

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on dit que A est inversible si il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, qui vérifie

$$AB = BA = I_{\mathcal{H}}.$$

B sera dit l'inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

Exemple 1.3.3.1

L'opérateur $I_{\mathcal{H}}$ est inversible, et $I_{\mathcal{H}}^{-1} = I_{\mathcal{H}}$.

Théorème 1.3.3.1 [13]

L'opérateur A^{-1} , inverse d'un opérateur linéaire A , est aussi linéaire.

Définition 1.3.3.2

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est, dit coercive si :

$$\exists \alpha > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{H}, \|A\varphi\| > \alpha \|\varphi\|.$$

Lemme 1.3.3.1 [11]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur inversible alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{H} \quad \|A\varphi\| \geq \|A^{-1}\|^{-1} \|\varphi\|.$$

Preuve :

$\forall \varphi \in \mathcal{H}$ on a

$$\|\varphi\| = \|A^{-1}(A\varphi)\| \leq \|A^{-1}\| \|A\varphi\|$$

$$\text{alors} \quad \frac{\|\varphi\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|A\varphi\|$$

donc

$$\|A^{-1}\|^{-1} \|\varphi\| \leq \|A\varphi\|.$$

Lemme 1.3.3.2

Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si A_1 et A_2 sont inversibles alors

$$(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Preuve :

Montrons d'abord que $A_1 \circ A_2$ admet une inverse sur $\mathcal{H}$, et que

$$(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

En effet

$$(A_1 A_2)\mathcal{H} = A_1\mathcal{H} = \mathcal{H}.$$

et

$$(A_1 A_2)(A_2^{-1} A_1^{-1}) = (A_2^{-1} A_1^{-1})(A_1 A_2) = I_{\mathcal{H}}.$$

puisque l'élément inverse, s'il existe, est unique

$$(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Théorème 1.3.3.2 [12]

Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\|A\| < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'opérateur $I_{\mathcal{H}} - A$ est inversible et

$$(I_{\mathcal{H}} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

Remarque 1.3.3.1

Il convient de savoir utiliser le résultat du théorème sous la forme suivante :

Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est tel que $\|I_{\mathcal{H}} - A\| < 1$, alors A est inversible et on a

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (I_{\mathcal{H}} - A)^n.$$

Théorème 1.3.3.3

si $\dim \mathcal{H} < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) A est inversible.
- 2) A est injectif.
- 3) A est surjectif.
- 4) A admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $A \circ U = I_{\mathcal{H}}$).
- 5) A admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $V \circ A = I_{\mathcal{H}}$).

1.4 Théorèmes Générales**Théorème 1.4.0.1** (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(\varphi, \psi) d\psi \right) d\varphi = \int_c^d \left(\int_a^b f(\varphi, \psi) d\varphi \right) d\psi.$$

Théorème 1.4.0.2 [5] (représentation de Riesz)

soit U une forme linéaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors il existe un vecteur et un seul $f \in \mathcal{H}$, tel que pour tous $\varphi \in \mathcal{H}$

$$U(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle.$$

Théorème 1.4.0.3 [8] (Lax-Milgram)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit B une forme hermitienne sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. On suppose que :

- (1) la forme B est continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que, pour x et y dans $\mathcal{H}$ on ait $|B(\varphi, \psi)| \leq M \|\varphi\| \|\psi\|$
- (2) la forme B est coercive, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, $B(\varphi, \varphi) \geq C \|\varphi\|^2$

Alors, il existe un unique opérateur A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, inversible et auto-adjoint tel que

$$B(\varphi, \psi) = \langle A\varphi, \psi \rangle, \quad \|A\| \leq M \quad \text{et} \quad \|A^{-1}\| \leq C.$$

Théorème 1.4.0.4 [16] (Arzela-Ascoli)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace norme compact, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace norme complet. Une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1. A est équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall f \in A, \forall \psi \in E \|\varphi - \psi\|_E < \eta \Rightarrow \|f(\varphi) - f(\psi)\|_F < \epsilon.$$

2. Pour tout $\varphi \in E$, l'ensemble $A(\varphi) = \{f(\varphi); f \in A\}$ est relativement compact, (i.e. A est uniformément borné).

1.5 Convergence sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

Définitions 1.5.0.1 [4]

Soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$

- 1 • On dit que $(A_n)_n$ est convergente uniformément vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

appelé aussi convergence en norme et on écrit $A_n \xrightarrow{u} A$.

- 2 • On dit que $(A_n)_n$ est convergente fortement vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$\forall \varphi \in \mathcal{H} : \|A_n \varphi - A \varphi\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

et on écrit $A_n \xrightarrow{s} A$.

- 3 • On dit que $(A_n)_n$ est convergente faiblement vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} : \langle A_n \varphi, \psi \rangle \rightarrow \langle A \varphi, \psi \rangle \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

et on écrit $A_n \xrightarrow{w} A$.

1.6 Spectre d'un opérateur linéaire bornée

1.6.1 Définitions générales

Définition 1.6.1.1 (Valeur propre et vecteur propre)

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle valeur propre de l'opérateur A , si l'équation $(A - \lambda I_{\mathcal{H}})\varphi = 0$ admet une solution $\varphi \neq 0$ dans $\mathcal{H}$.

Une telle solution φ est appelée vecteur propre (ou une fonction propre) associé à la valeur propre λ .

Définition 1.6.1.2 (point régulier)

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle un point régulier de l'opérateur A si $(A - \lambda I_{\mathcal{H}})$ est inversible.

Définition 1.6.1.3 (ensemble résolvante et la résolvante)

On appelle ensemble résolvante de A l'ensemble des points réguliers de l'opérateur A et note par $\rho(A)$ tel que

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ inversible} \}.$$

L'ensemble résolvante $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

- On définit la résolvante de l'opérateur A comme

$$R_{\lambda}(A) = (A - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}.$$

Définition 1.6.1.4 (Spectre d'un opérateur)

Spectre de A l'ensemble

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ n'est pas inversible} \}.$$

Corollaire 1.6.1.1

1. $\sigma(A) \cup \rho(A) = \mathbb{C}$.
2. $\sigma(A) \cap \rho(A) = \emptyset$.
3. Le spectre d'un opérateur borné n'est jamais vide i.e. $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Définition 1.6.1.5 (Le spectre ponctuel)

On appelle spectre ponctuel de A l'ensemble des valeurs propres de A , noté $\sigma_p(A)$ tel que

$$\sigma_p(A) = \{ \lambda \in \sigma(A), A - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ non injectif} \}.$$

Remarque 1.6.1.1

Lorsque $\mathcal{H}$ est de dimension finie, alors $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Mais si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, on a $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.

Définition 1.6.1.6 (Le spectre continu)

On appelle spectre continu de A et on note par $\sigma_c(A)$, l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{ \lambda \in \sigma(A), A - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(A - \lambda I_{\mathcal{H}})} = \mathcal{H} \}.$$

Définition 1.6.1.7 (Le spectre résiduel)

On appelle spectre résiduel de A et on note par $\sigma_r(A)$, l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{ \lambda \in \sigma(A), A - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(A - \lambda I_{\mathcal{H}})} \neq \mathcal{H} \}.$$

Remarque 1.6.1.2

Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Définition 1.6.1.8 (Rayon spectrale)

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on définit le rayon spectral de A comme suit

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Aussi sous une autre forme

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

CHAPITRE 2

OPÉRATEURS AUTO-ADJOINTS

Dans le deuxième chapitre, on présente les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus auto-adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. On donne la définition des opérateurs linéaires continus auto-adjoints et les propriétés structurelles associées (norme ,image).

On définit aussi quelques classes des opérateurs linéaires continus auto-adjoints. Citons : opérateurs positifs ,opérateurs projecteurs ,opérateurs normaux, opérateurs compacts. On explique dans la même occasion les relations entre les des opérateurs linéaires continus auto-adjoints et les opérateurs normaux

2.1 Opérateurs linéaires bornée adjoints dans les espaces de Hilbert

2.1.1 Définition et exemples

Définition 2.1.1.1 (Opérateur adjoint)

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_2$, l'opérateur linéaire noté A^* défini de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_1$ est dit opérateur adjoint de A si l'on a pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Exemples 2.1.1.1

1. On considère **opérateur shift** $S : (l^2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{l^2(\mathbb{C})}) \rightarrow (l^2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{l^2(\mathbb{C})})$ défini par :

$$S(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = (0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$$

Soit (φ_n) et (ψ_n) dans $l^2(\mathbb{C})$: Alors

$$\begin{aligned} \langle S\varphi_n, \psi_n \rangle &= \langle (0, \varphi_1, \varphi_2, \dots), (\psi_1, \psi_2, \dots) \rangle \\ &= \varphi_2 \bar{\psi}_1 + \varphi_3 \bar{\psi}_2 + \dots \\ &= \langle (\varphi_1, \varphi_2, \dots), (\psi_2, \psi_3, \dots) \rangle \\ &= \langle \varphi_n, S^*\psi_n \rangle. \end{aligned}$$

Alors S^* est défini par :

$$S^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = (\varphi_2, \varphi_3, \dots)$$

2. On considère l'opérateur de Volterra défini sur $L^2([0, 1])$ par :

$$Vf(\varphi) = \int_0^\varphi f(\psi) d\psi.$$

L'adjoint de V :

Soient f et g deux éléments de $L^2([0, 1])$, alors

$$\begin{aligned} \langle Vf, g \rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^\varphi f(\psi) d\psi \right) g(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^1 f(\psi) \left(\int_\psi^1 g(\varphi) d\varphi \right) d\psi \\ &= \langle f, V^*g \rangle. \end{aligned}$$

Cela montre que l'adjoint de l'opérateur V est donné par

$$V^*f(\varphi) = \int_\varphi^1 f(\psi) d\psi.$$

2.1.2 Propriétés l'opérateur adjoint

Théorème 2.1.2.1 [17] (Existence de l'opérateur adjoint)

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, alors il existe un opérateur linéaire borné unique noté A^* défini de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_1$ tel que l'on a pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

De plus, on a :

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Preuve :

• **Existence**

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on définit une fonctionnelle linéaire bornée U de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ comme suit

$$\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \mapsto U(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle.$$

La fonctionnelle U est linéaire car :

pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_1, \psi \in \mathcal{H}_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} U(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) &= \langle A(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2), \psi \rangle \\ &= \langle \alpha_1 A(\varphi_1) + \alpha_2 A(\varphi_2), \psi \rangle \quad \text{car } A \text{ est linéaire} \\ &= \langle \alpha_1 A(\varphi_1), \psi \rangle + \langle \alpha_2 A(\varphi_2), \psi \rangle \\ &= \alpha_1 \langle A\varphi_1, \psi \rangle + \alpha_2 \langle A\varphi_2, \psi \rangle \\ &= \alpha_1 U(\varphi_1) + \alpha_2 U(\varphi_2). \end{aligned}$$

La fonctionnelle U est borné car :

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\begin{aligned} |U(\varphi)| &= |\langle A\varphi, \psi \rangle| \\ &\leq \|A\varphi\| \|\psi\| \quad \text{Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1)} \\ &\leq \|A\| \|\varphi\| \|\psi\| \quad \text{car } A \text{ est borné.} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz 1.4.0.2 il existe un élément unique $f \in \mathcal{H}_1$, tel que

$$U(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, f \rangle.$$

Cette égalité définit un opérateur noté A^* de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_1$ tel que

$$A^*\psi = f.$$

Ou encore

$$U(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle.$$

• **Unicité**

Soient A_1^* et A_2^* deux opérateurs adjoints de l'opérateur A alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on écrit

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A_1^*\psi \rangle = \langle \varphi, A_2^*\psi \rangle.$$

Autrement dit, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\langle \varphi, A_1^*\psi \rangle = \langle \varphi, A_2^*\psi \rangle.$$

D'où,

$$A_1^*\psi = A_2^*\psi$$

Ou encore

$$A_1^* = A_2^*.$$

• **Linearité de l'opérateur adjoint A^***

Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, A^*(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) \rangle &= \langle A\varphi, \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 \rangle \\ &= \langle A\varphi, \alpha_1\psi_1 \rangle + \langle A\varphi, \alpha_2\psi_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha}_1 \langle A\varphi, \psi_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle A\varphi, \psi_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha}_1 \langle \varphi, A^*\psi_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle \varphi, A^*\psi_2 \rangle \\ &= \langle \varphi, \alpha_1 A^*\psi_1 \rangle + \langle \varphi, \alpha_2 A^*\psi_2 \rangle \\ &= \langle \varphi, \alpha_1 A^*\psi_1 + \alpha_2 A^*\psi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$A^*(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1 A^*\psi_1 + \alpha_2 A^*\psi_2.$$

• **Egalité des normes $\|A\|$ et $\|A^*\|$**

Il est clair que l'on a

$$\begin{aligned} \|A^*\psi\|^2 &= \langle A^*\psi, A^*\psi \rangle \\ &= \langle AA^*\psi, \psi \rangle \\ &\leq \|AA^*\psi\| \|\psi\| && \text{Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1)} \\ &\leq \|A\| \|A^*\psi\| \|\psi\| && \text{car } A \text{ est borné.} \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\|A^*\psi\| \leq \|A\| \|\psi\|$$

ou encore

$$\|A^*\| \leq \|A\|.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \|A\varphi\|^2 &= \langle A\varphi, A\varphi \rangle \\
 &= \langle A^*A\varphi, \varphi \rangle \\
 &\leq \|A^*A\varphi\| \|\varphi\| && \text{Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1)} \\
 &\leq \|A^*\| \|A\varphi\| \|\varphi\| && \text{car } A^* \text{ est borné.}
 \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\|A\varphi\| \leq \|A^*\| \|\varphi\|$$

ou encore

$$\|A\| \leq \|A^*\|.$$

D'où, l'égalité des normes

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Corollaire 2.1.2.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors

- (i) $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.
- (ii) $A^*A = 0$ ou $AA^* = 0$ implique $A = 0$.

Preuve :

(i) En l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1), on cauchy

$$\begin{aligned}
 \|A^*A\| &= \sup_{\substack{\varphi_1 \in \mathcal{H}_1 \\ \varphi_2 \in \mathcal{H}_2}} \frac{\langle \varphi_2, A^*A\varphi_1 \rangle}{\|\varphi_1\| \|\varphi_2\|} = \sup_{\substack{\varphi_1 \in \mathcal{H}_1 \\ \varphi_2 \in \mathcal{H}_2}} \frac{\langle A\varphi_2, A\varphi_1 \rangle}{\|\varphi_1\| \|\varphi_2\|} \\
 &\geq \sup_{\varphi \in \mathcal{H}_1} \frac{\|A\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2} \\
 &= \|A\|^2.
 \end{aligned}$$

d'autre part, $\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$, donc $\|A^*A\| = \|A\|^2$. L'autre égalité s'obtient en échangeant les rôles de A et A^* .

(ii) Si $A^*A = 0$ alors $\|A^*A\| = \|A\|^2 = 0$, donc $A = 0$. On procède de même manière pour AA^* .

Proposition 2.1.2.1 [10]

Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors, on a les relations suivantes

- i) $(\lambda A_1)^* = \bar{\lambda} A_1^*$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
- ii) $(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^*$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- iii) $(A_1^*)^* = A_1$.

Preuve :

i) Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1, \psi \in \mathcal{H}_2$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}\langle \varphi, (\lambda A_1)^* \psi \rangle &= \langle (\lambda A_1) \varphi, \psi \rangle \\ &= \lambda \langle A_1 \varphi, \psi \rangle \\ &= \lambda \langle \varphi, A_1^* \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, \bar{\lambda} A_1^* \psi \rangle.\end{aligned}$$

D'où la relation

$$(\lambda A_1)^* \psi = \bar{\lambda} A_1^* \psi$$

Ou encore

$$(\lambda A_1)^* = \bar{\lambda} A_1^*.$$

ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\begin{aligned}\langle \varphi, (\alpha A_1 + \beta A_2)^* \psi \rangle &= \langle (\alpha A_1 + \beta A_2) \varphi, \psi \rangle \\ &= \langle \alpha A_1 \varphi + \beta A_2 \varphi, \psi \rangle \\ &= \langle \alpha A_1 \varphi, \psi \rangle + \langle \beta A_2 \varphi, \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, \bar{\alpha} A_1^* \psi \rangle + \langle \varphi, \bar{\beta} A_2^* \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, \bar{\alpha} A_1^* \psi + \bar{\beta} A_2^* \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, (\bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^*) \psi \rangle.\end{aligned}$$

D'où la relation

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* \psi = (\bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^*) \psi$$

Ou encore

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = (\bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^*).$$

iii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\begin{aligned}\langle A_1 \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, A_1^* \psi \rangle \\ &= \overline{\langle A_1^* \psi, \varphi \rangle} \\ &= \overline{\langle \psi, (A_1^*)^* \varphi \rangle} \\ &= \langle (A_1^*)^* \varphi, \psi \rangle\end{aligned}$$

D'où la relation

$$A_1 \varphi = (A_1^*)^* \varphi$$

Ou encore

$$(A_1^*)^* = A_1.$$

Proposition 2.1.2.2 [10]

Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$. Alors, on a la relation suivante

$$(BA)^* = A^* B^*. \quad (2.1)$$

Preuve :

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_3$, on a

$$\begin{aligned}\langle \varphi, (BA)^* \psi \rangle &= \langle (BA) \varphi, \psi \rangle \\ &= \langle B(A\varphi), \psi \rangle \\ &= \langle A\varphi, B^* \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, A^* B^* \psi \rangle.\end{aligned}$$

D'où la relation

$$(BA)^* \psi = (A^* B^*) \psi$$

Ou encore

$$(BA)^* = A^* B^*.$$

Proposition 2.1.2.3 [10]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors

Si A est inversible d'inverse A^{-1} , alors A^* est inversible d'inverse

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Preuve :

On veut montrer que : $(A^*)^{-1} \psi = (A^{-1})^* \psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}$.

Soit $\omega \in \mathcal{H}$ tel que $\omega = (A^*)^{-1} \psi$ alors $\psi = A^* \omega$ On a

$$\begin{aligned}\langle \varphi, (A^{-1})^* \psi \rangle &= \langle A^{-1} \varphi, \psi \rangle \\ &= \langle A^{-1} \varphi, A^* \omega \rangle \\ &= \langle AA^{-1} \varphi, \omega \rangle \\ &= \langle \varphi, (A^*)^{-1} \psi \rangle.\end{aligned}$$

D'où la relation

$$(A^*)^{-1} \psi = (A^{-1})^* \psi$$

Ou encore

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Proposition 2.1.2.4 [9]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors, on a

1. $\ker(A) = [\operatorname{Im}(A^*)]^\perp$
2. $\overline{\operatorname{Im}(A)} = [\operatorname{Ker}(A^*)]^\perp$.

Preuve :

1. En effet, on a

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(A) &= \{\varphi \in \mathcal{H} : A\varphi = 0\} \\
 &= \{\varphi \in \mathcal{H} : \forall \psi \in \mathcal{H} : \langle A\varphi, \psi \rangle = 0\} \\
 &= \{\varphi \in \mathcal{H} : \forall \psi \in \mathcal{H} : \langle \varphi, A^*\psi \rangle = 0\} \\
 &= [\text{Im}(A^*)]^\perp.
 \end{aligned}$$

2. Par (1), si on prend A^* à la place de A , on obtient

$$\begin{aligned}
 \ker(A^*) &= (\text{Im}(A))^\perp \\
 \Leftrightarrow (\ker(A^*))^\perp &= (\text{Im}(A))^\perp{}^\perp = \overline{\text{Im}(A)}.
 \end{aligned}$$

2.2 Opérateurs linéaires bornés auto-adjoint dans les espaces de Hilbert

2.2.1 Définition et exemples

Définition 2.2.1.1

On dit que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur auto-adjoint si $A = A^*$ c'est-à-dire :

$$\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle.$$

Exemples 2.2.1.1

1. On a $\langle I\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, I^*\psi \rangle$, or $\langle I\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle$, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Donc

$$I^* = I.$$

2. On considère l'opérateur de multiplication A qui est défini par

$$\begin{aligned}
 A : (L^2([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2}) &\longrightarrow (L^2([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2}) \\
 f(\varphi) &\longmapsto \varphi f(\varphi).
 \end{aligned}$$

A est un opérateur auto-adjoint, en effet :

Soient f et g deux éléments de $L^2([0, 1])$, qu'on peut supposer à valeurs réelles. On a

$$\begin{aligned}
 \langle A\varphi, g \rangle &= \int_0^1 \varphi f(\varphi) \overline{g(\varphi)} d\varphi \\
 &= \int_0^1 f(\varphi) [\overline{\varphi g(\varphi)}] d\varphi \\
 &= \langle f, Ag \rangle.
 \end{aligned}$$

3. Considérons l'opérateur A qui est défini par

$$\begin{aligned}
 A : (L^2([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2}) &\longrightarrow (L^2([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2}) \\
 f(\varphi) &\longmapsto e^{-|\varphi|} f(\varphi).
 \end{aligned}$$

A est un opérateur auto-adjoint, en effet :

Soient f et g deux éléments de $L^2([0, 1])$, qu'on peut supposer à valeurs réelles. On a

$$\begin{aligned}\langle Af, g \rangle &= \int_0^1 e^{-|\varphi|} f(\varphi) \overline{g(\varphi)} \\ &= \int_0^1 f(\varphi) [\overline{e^{-|\varphi|} g(\varphi)}] \\ &= \langle f, Ag \rangle.\end{aligned}$$

2.2.2 Norme d'un opérateur auto-adjoint

Définition 2.2.2.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjoint. On note :

$$\begin{aligned}m_A &\stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\langle A\varphi, \varphi \rangle, \|\varphi\| = 1\} \\ M_A &\stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\langle A\varphi, \varphi \rangle, \|\varphi\| = 1\}.\end{aligned}$$

Proposition 2.2.2.1 [7]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors $m_A, M_A \in [-\|A\|, +\|A\|]$.

Preuve :

$$\begin{aligned}|\langle A\varphi, \varphi \rangle| &\leq \|A\varphi\| \|\varphi\| && \text{Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1)} \\ &\leq \|A\| \|\varphi\|^2 && \text{car } A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}-\|A\| \|\varphi\|^2 &\leq \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq +\|A\| \|\varphi\|^2 \\ -\|A\| &\leq \underbrace{\inf_{\|\varphi\|=1} \langle A\varphi, \varphi \rangle}_{=m_A} \leq +\|A\| \\ -\|A\| &\leq \underbrace{\sup_{\|\varphi\|=1} \langle A\varphi, \varphi \rangle}_{=M_A} \leq +\|A\|.\end{aligned}$$

Théorème 2.2.2.1 [8]

Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est auto-adjoint, alors

$$\|A\| = \sup\{|\langle A\varphi, \varphi \rangle|, \|\varphi\| = 1\}.$$

Preuve :

Soit $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|\langle A\varphi, \varphi \rangle|, \|\varphi\| = 1\}$

• On a vu que :

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz(1.1),

$$|\langle A\varphi, \varphi \rangle| \leq \|A\| \|\varphi\|^2$$

Donc

$$\gamma \leq \|A\|.$$

• Montrons l'autre inégalité on a

pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, comme $A^* = A$, on a

$$\langle A(\varphi + \psi), \varphi + \psi \rangle = \langle A\varphi, \varphi \rangle + 2\operatorname{Re}\langle A\varphi, \psi \rangle + \langle A\psi, \psi \rangle. \quad (2.2)$$

$$\langle A(\varphi - \psi), \varphi - \psi \rangle = \langle A\varphi, \varphi \rangle - 2\operatorname{Re}\langle A\varphi, \psi \rangle + \langle A\psi, \psi \rangle. \quad (2.3)$$

On fait (2.2) – (2.3) nous trouvons,

$$\begin{aligned} 4\operatorname{Re}\langle A\varphi, \psi \rangle &\leq \langle A(\varphi + \psi), \varphi + \psi \rangle - \langle A(\varphi - \psi), \varphi - \psi \rangle \\ &\leq \gamma \left(\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 \right) \quad \text{Par Inégalité de Cauchy-Schwartz(1.1)} \\ &= 2\gamma \left(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 \right) \quad \text{Par loi du parallélogramme(1.4).} \end{aligned}$$

et par suite, quels que soient φ et ψ de norme 1, $\operatorname{Re}\langle A\varphi, \psi \rangle \leq \gamma$. Prenons $\psi = \frac{A\varphi}{\|A\varphi\|}$, lorsque $A\varphi \neq 0$, on en déduit que

$$\frac{\operatorname{Re}\langle A\varphi, A\varphi \rangle}{\|A\varphi\|} = \|A\varphi\| \leq \gamma$$

En prenant le maximum sur l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{H}$ de norme 1, on arrive à l'inégalité $\|A\| \leq \gamma$ et par suite à l'égalité cherchée.

Corollaire 2.2.2.1

1. $\|A\| = \max\{|m_A|, |M_A|\}$.

2. On a :

Ou bien $m_A = -\|A\|$.

Ou bien $M_A = +\|A\|$.

Ces deux égalités peuvent se produire simultanément.

Exemple 2.2.2.1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$m_A = -2, \quad M_A = 3 \text{ et } \|A\| = 3$$

$$m_B = -3, \quad M_B = 3 \text{ et } \|B\| = 3.$$

2.2.3 Propriétés des opérateurs auto-adjoints

Proposition 2.2.3.1 [1]

Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ deux opérateurs auto-adjoints. Alors

- 1) $\alpha A + \beta B$ est un opérateur auto-adjoint pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- 2) AB est un opérateur auto-adjoint si et seulement si $AB = BA$.

3) (i) et (ii) et (iii) sont des opérateurs auto-adjoints.

(i) A^*A .

(ii) AA^* .

(iii) $A + A^*$.

Preuve :

1) En effet pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \langle (\alpha A + \beta B)\varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, (\alpha A + \beta B)^*\psi \rangle \\ &= \langle \varphi, (\bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*)\psi \rangle \\ &= \langle \varphi, (\alpha A^* + \beta B^*)\psi \rangle && \text{car } \bar{\alpha} = \alpha \text{ et } \bar{\beta} = \beta \\ &= \langle \varphi, (\alpha A + \beta B)\psi \rangle && \text{car } A^* = A \text{ et } B^* = B. \end{aligned}$$

D'où,

$$\langle (\alpha A + \beta B)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, (\alpha A + \beta B)\psi \rangle$$

Ou encore

$$\alpha A + \beta B = (\alpha A + \beta B)^*.$$

2) $\Rightarrow$) : En effet pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \langle AB\varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, AB\psi \rangle \\ &= \langle (AB)^*\varphi, \psi \rangle && \text{Par définition} \\ &= \langle B^*A^*\varphi, \psi \rangle && \text{car } (AB)^* = B^*A^* \\ &= \langle BA\varphi, \psi \rangle && \text{car } A^* = A \text{ et } B^* = B. \end{aligned}$$

D'où,

$$\langle AB\varphi, \psi \rangle = \langle BA\varphi, \psi \rangle$$

Qu encore

$$AB = BA.$$

$\Leftarrow$) : En effet pour tout $\varphi, \psi \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle AB\varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, (AB)^*\psi \rangle && \text{Par définition} \\ &= \langle \varphi, B^*A^*\psi \rangle && \text{car } (AB)^* = B^*A^* \\ &= \langle \varphi, BA\psi \rangle && \text{car } A^* = A \text{ et } B^* = B \\ &= \langle \varphi, AB\psi \rangle && \text{car } AB = BA. \end{aligned}$$

D'où,

$$\langle AB\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, AB\psi \rangle$$

Ou encore

$$AB = (AB)^*$$

.

3)

(i) En effet : pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \langle AA^* \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, (AA^*)^* \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, A^* A^{**} \psi \rangle && \text{car } (AB)^* = B^* A^* \\ &= \langle \varphi, AA^* \psi \rangle && \text{car } A^* = A^{**} = A. \end{aligned}$$

D'où,

$$\langle AA^* \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, AA^* \psi \rangle$$

Ou encore

$$AA^* = (AA^*)^*.$$

(ii) En effet pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \langle A^* A \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, (A^* A)^* \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, A^{**} A^* \psi \rangle && \text{car } (AB)^* = B^* A^* \\ &= \langle \varphi, AA^* \psi \rangle && \text{car } A^* = A^{**} = A. \end{aligned}$$

D'où,

$$\langle A^* A \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^* A \psi \rangle$$

Ou encore

$$A^* A = (A^* A)^*.$$

(iii) En effet pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \langle A + A^* \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, (A + A^*)^* \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, (A^* + A^{**}) \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, (A + A^*) \psi \rangle && \text{car } A^* = A^{**} = A. \end{aligned}$$

D'où,

$$\langle (A + A^*) \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, (A + A^*) \psi \rangle$$

Ou encore

$$A + A^* = (A + A^*)^*.$$

Proposition 2.2.3.2 [12]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint, alors l'opérateur puissance $A^n = \underbrace{A \circ A \circ \cdots \circ A}_{n \text{ fois}}$ est un opérateur auto-adjoint pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle A^n \varphi, \psi \rangle &= \langle AA^{n-1} \varphi, \psi \rangle \\
 &= \langle A^{n-1} \varphi, A\psi \rangle \quad \text{car } A = A^* \\
 &= \langle AA^{n-2} \varphi, A\psi \rangle \\
 &= \langle A^{n-2} \varphi, A^2 \psi \rangle \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &= \langle A^{n-j} \varphi, A^j \psi \rangle \quad \forall j \leq n \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &= \langle \varphi, A^n \psi \rangle.
 \end{aligned}$$

D'où,

$$A^n = (A^n)^* \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 2.2.3.1

A^n est auto-adjoint $\nRightarrow A$ est auto-adjoint, pour tout $n \geq 2$

Exemple 2.2.3.1

En effet, soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est auto-adjoint, mais } A \text{ n'est pas auto-adjoint.}$$

Corollaire 2.2.3.1

Soit $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, un opérateur auto-adjoint, alors $(BAB^*)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est auto-adjoint pour tout opérateur B .

Preuve :

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Alors

$$\begin{aligned}
 \langle BAB^* \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, (BAB^*)^* \psi \rangle \\
 &= \langle \varphi, (AB^*)^* B^* \psi \rangle \quad \text{car } (AB)^* = B^* A^* \\
 &= \langle \varphi, B^{**} A^* B^* \psi \rangle \quad \text{car } (AB)^* = B^* A^* \\
 &= \langle \varphi, BAB^* \psi \rangle \quad \text{car } B^{**} = B \text{ et } A = A^*.
 \end{aligned}$$

Alors BAB^* est auto-adjoint donc D'après la proposition 2.2.3.2 on a

$$(BAB^*)^n = ((BAB^*)^n)^*.$$

Théorème 2.2.3.1 [8]

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ Si $\langle A\varphi, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, alors $A = 0$.

Preuve :

Pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle A(\varphi + \psi), \varphi + \psi \rangle &= \underbrace{\langle A\varphi, \varphi \rangle}_{=0} + \langle A\varphi, \psi \rangle + \langle A\psi, \varphi \rangle + \underbrace{\langle A\psi, \psi \rangle}_{=0} \\ &= \langle A\varphi, \psi \rangle + \langle A\psi, \varphi \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Si on remplace ψ par $i\psi$ on trouve :

$$-i\langle A\varphi, \psi \rangle + i\langle A\psi, \varphi \rangle = 0. \tag{2.5}$$

Multiplions (2.5) par i et on ajoute (2.4) on trouve :

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = 0. \tag{2.6}$$

Prenant

$$\psi = A\varphi.$$

On trouve

$$\|A\varphi\|^2 = 0.$$

Et donc :

$$A\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H},$$

i-e ;

$$A = 0.$$

Remarque 2.2.3.2

Si A est un Hilbert sur $\mathbb{R}$, alors le théorème 2.2.3.1 précédent n'a pas été vérifié.

Exemple 2.2.3.2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a , $\langle A\varphi, \varphi \rangle = 0$ mais $A \neq 0$.

Remarque 2.2.3.3

Si A est auto-adjoint sur un $\mathbb{R}$ -Hilbert, alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}, \quad \langle A\varphi, \varphi \rangle = 0 \implies A = 0.$$

Théorème 2.2.3.2 [8]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'opérateur A est auto-adjoint si et seulement si $\langle A\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$.

Preuve :

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, \varphi \rangle - \overline{\langle A\varphi, \varphi \rangle} &= \langle A\varphi, \varphi \rangle - \langle \varphi, A\varphi \rangle \\ &= \langle A\varphi, \varphi \rangle - \langle A^*\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle (A - A^*)\varphi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

• **Premièrement** si $\langle A\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$, pour tous $\varphi \in \mathcal{H}$, alors

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle - \overline{\langle A\varphi, \varphi \rangle} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle (A - A^*)\varphi, \varphi \rangle &= 0 \\ \implies A - A^* &= 0 \\ \implies A &= A^*. \end{aligned}$$

Alors A est auto-adjoint.

• **Deuxièmement** si A est auto-adjoint, on a

$$\langle (A - A^*)\varphi, \varphi \rangle = 0.$$

C'est à dire

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle = \overline{\langle A\varphi, \varphi \rangle}.$$

Donc $\langle A\varphi, \varphi \rangle$ est réel pour tous $\varphi \in \mathcal{H}$.

Théorème 2.2.3.3

L'ensemble des opérateurs auto-adjoints forme un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Preuve :

Soit Ω l'ensemble des opérateurs auto-adjoints tel que

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} : \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle\}.$$

• Il est clair que $\Omega \subset \overline{\Omega}$ tels que $\overline{\Omega}$ est l'adhérence de Ω

• soit $A \in \overline{\Omega}$ donc il existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tel que : pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ on a

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, \psi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n\varphi, \psi \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, A_n\psi \rangle \\ &= \langle \varphi, A\psi \rangle \end{aligned}$$

Alors $A \in \Omega$ c'est - à-dire $\overline{\Omega} \subset \Omega$, donc $\overline{\Omega} = \Omega$.

Proposition 2.2.3.3

Soit A_n une suite d'opérateurs linéaires auto-adjoints définis sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lui même, si la suite A_n converge faiblement vers A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n \varphi, \psi \rangle = \langle A \varphi, \psi \rangle, \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

Alors, A est un opérateur auto-adjoint.

Preuve :

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on a

$$\langle A_n \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A_n \psi \rangle.$$

Passons à la limite des deux membres, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n \varphi, \psi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, A_n \psi \rangle$$

Ou encore

$$\langle A \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A \psi \rangle.$$

Remarque 2.2.3.4

Soit A_n une suite d'opérateurs auto-adjoints A_n converge fortement vers l'opérateur A , c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \varphi = A \varphi, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}$$

Alors, l'opérateur A est un opérateur auto-adjoint.

Remarque 2.2.3.5

Soit A_n une suite d'opérateurs auto-adjoints A_n converge en norme vers l'opérateur A , c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors, l'opérateur A est un opérateur auto-adjoint.

2.2.4 Propriétés spectrales de l'opérateur adjoint

Proposition 2.2.4.1 [11]

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a

1. $\rho(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} \in \rho(A)\}, \sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} \in \sigma(A)\}.$
2. Pour tout $\lambda \in \rho(A^*), R_\lambda(A^*) = (R_{\bar{\lambda}}(A))^*.$

Preuve :

1. On a équivalence : $\lambda I_{d_{\mathcal{H}}} - A^*$ est inversible si et seulement si $(\lambda I_{d_{\mathcal{H}}} - A^*)^*$ est inversible (d'après le proposition 2.1.2.3). Or, $(\lambda I_{d_{\mathcal{H}}} - A^*)^* = \bar{\lambda} I_{d_{\mathcal{H}}} - A$ donc

$$\begin{aligned}\rho(A^*) &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_{d_{\mathcal{H}}} - A^* \text{ est inversible} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\bar{\lambda} I_{d_{\mathcal{H}}} - A)^* \text{ est inversible} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} I_{d_{\mathcal{H}}} - A \text{ est inversible} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} \in \rho(A) \}.\end{aligned}$$

De plus, $\sigma(A^*) = \mathbb{C} \setminus \rho(A^*)$, ce qui donne le résultat.

2. Si $\lambda \in \rho(A^*)$, alors, on a

$$\begin{aligned}R_{\lambda}(A^*) &= (\lambda I_{d_{\mathcal{H}}} - A^*)^{-1} \\ &= \left((\bar{\lambda} I_{d_{\mathcal{H}}} - A)^* \right)^{-1} \quad \text{car } (\lambda I_{d_{\mathcal{H}}})^* = \bar{\lambda} I_{d_{\mathcal{H}}} \\ &= \left((\bar{\lambda} I_{d_{\mathcal{H}}} - A)^{-1} \right)^* \quad \text{car } (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \\ &= (R_{\bar{\lambda}}(A))^*.\end{aligned}$$

2.2.5 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

Nous avons discuté ci-dessus des propriétés spectrales de l'opérateur adjoint et maintenant nous présentons les propriétés spectrales de l'opérateur auto-adjoint.

Proposition 2.2.5.1 [14] (Valeurs propres des opérateurs auto-adjoints)

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. alors,

1. $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$
2. $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\text{Im}(\lambda I_{\mathcal{H}} - A)} \neq \mathcal{H}$
3. Si $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, alors $\ker(\lambda I_{\mathcal{H}} - A) \perp \ker(\mu I_{\mathcal{H}} - A)$, i.e. les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Preuve :

1. Si $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors il existe $\varphi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$. D'où

$$\lambda = \frac{\langle \lambda\varphi, \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2} = \frac{\langle A\varphi, \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2} \in \mathbb{R}.$$

2. D'après la Proposition 2.1.2.4 on a

$$\begin{aligned}\overline{\text{Im}(\lambda I_{\mathcal{H}} - A)} &= [\ker(\lambda I_{\mathcal{H}} - A)^*]^{\perp} \\ &= [\ker(\bar{\lambda} I_{\mathcal{H}} - A^*)]^{\perp} \quad \text{car } (\lambda I_{\mathcal{H}})^* = \bar{\lambda} I_{\mathcal{H}} \\ &= [\ker(\bar{\lambda} I_{\mathcal{H}} - A)]^{\perp} \quad \text{car } A = A^*.\end{aligned}$$

Puisque $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
 \lambda \in \sigma_p(A) &\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A) \\
 &\Leftrightarrow \ker(\bar{\lambda}I_{\mathcal{H}} - A) \neq \{0\} \\
 &\Leftrightarrow (\ker(\bar{\lambda}I_{\mathcal{H}} - A))^{\perp} \neq \mathcal{H} \quad \text{car } \{0\}^{\perp} = \mathcal{H} \\
 &\Leftrightarrow \overline{\text{Im}(\lambda I_{\mathcal{H}} - A)} \neq \mathcal{H}.
 \end{aligned}$$

3. Si $\varphi \in \ker(\lambda I_{\mathcal{H}} - A)$ et $\psi \in \ker(\mu I_{\mathcal{H}} - A)$, alors

$$A\varphi = \lambda\varphi \quad \text{et} \quad A\psi = \mu\psi.$$

Comme $A = A^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 (\lambda - \mu)\langle \varphi, \psi \rangle &= \langle \lambda\varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, \mu\psi \rangle \\
 &= \langle A\varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, A\psi \rangle \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

D'où $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu$. Autrement dit, $\ker(\lambda I_{\mathcal{H}} - A) \perp \ker(\mu I_{\mathcal{H}} - A)$.

Lemme 2.2.5.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint, alors

Supposons que $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$ on a

$$\|(A - \lambda I)\varphi\| \geq |\beta| \cdot \|\varphi\|, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 \|(A - \lambda I)\varphi\|^2 &= \|A - (\alpha + i\beta)I\varphi\|^2 \\
 &= \langle (A - \alpha I)\varphi - i\beta\varphi, (A - \alpha I)\varphi - i\beta\varphi \rangle \\
 &= \|(A - \alpha I)\varphi\|^2 + |\beta|^2 \|\varphi\|^2 + \underbrace{i\beta \langle (A - \alpha I)\varphi, \varphi \rangle - i\beta \langle \varphi, (A - \alpha I)\varphi \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{car } A - \alpha I = (A - \alpha I)^*}} \\
 &= \|(A - \alpha I)\varphi\|^2 + |\beta|^2 \cdot \|\varphi\|^2 \\
 &\geq |\beta|^2 \cdot \|\varphi\|^2
 \end{aligned}$$

Donc $\|(A - \lambda I)\varphi\| \geq |\beta| \cdot \|\varphi\|.$

La démonstration de la proposition est ainsi terminée.

Les propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints sont réunies dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.5.1 [7]

On suppose $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m_A = \inf_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ \varphi \in \mathcal{H}}} \langle A\varphi, \varphi \rangle \quad \text{et} \quad M_A = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ \varphi \in \mathcal{H}}} \langle A\varphi, \varphi \rangle.$$

Alors, on a

1. $m_A, M_A \in \sigma(A)$.
2. $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$.
3. $\|A\| = r(A)$.

Preuve :

1. On pose $S = A - m_A I_{\mathcal{H}}$ et De plus, m_A étant réel, on obtient pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle S\varphi, \psi \rangle &= \langle A\varphi - m_A\varphi, \psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle - \langle m_A\varphi, \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, A\psi \rangle - \langle \varphi, m_A\psi \rangle = \langle \varphi, S\psi \rangle. \end{aligned}$$

Donc S est hermitienne. Enfin, par définition de m_A , pour tout $\varphi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, on a

$$m_A \leq \left\langle A \left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|} \right), \left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|} \right) \right\rangle$$

d'où $m_A \|\varphi\|^2 \leq \langle A\varphi, \varphi \rangle$. Ainsi, on obtient

$$\langle S\varphi, \varphi \rangle = \langle A\varphi - m_A\varphi, \varphi \rangle = \langle A\varphi, \varphi \rangle - m_A \|\varphi\|^2 \geq 0$$

et donc S est une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur $\mathcal{H}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.2) , pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on a

$$|\langle S\varphi, \psi \rangle|^2 \leq \langle S\varphi, \varphi \rangle \langle S\psi, \psi \rangle. \quad (2.7)$$

D'une part, par définition de m_A , il existe une suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{H}$ avec $\|\varphi_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, telle que

$$\langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_A$$

autrement dit

$$\langle S\varphi_n, \varphi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.8)$$

D'autre part, en appliquant (2.7) avec $\varphi = \varphi_n$ et $\psi = S\varphi_n$, où $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$|\langle S\varphi_n, S\varphi_n \rangle|^2 \leq \langle S\varphi_n, \varphi_n \rangle \langle S(S\varphi_n), S\varphi_n \rangle.$$

On en déduit

$$\|S\varphi_n\|^4 \leq \langle S\varphi_n, \varphi_n \rangle \|S\| \|S\varphi_n\| \|S\varphi_n\|$$

et donc

$$\|S\varphi_n\|^2 \leq \langle S\varphi_n, \varphi_n \rangle \|S\|. \quad (2.9)$$

Alors, d'après (2.8) et (2.9) , on obtient

$$S\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement, supposons que $m_A \notin \sigma(A)$, alors $S = A - m_A I_{\mathcal{H}}$ est inversible et on a

$$\varphi_n = S^{-1} S\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

ce qui est absurde puisque $\|\varphi_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $m_A \in \sigma(A)$. De plus, en considérant l'opérateur $-A$, on obtient

$$\inf_{\|\varphi\|=1} \langle -A\varphi, \varphi \rangle \in \sigma(-A),$$

d'où

$$M_A = \sup_{\|\varphi\|=1} \langle A\varphi, \varphi \rangle = - \inf_{\|\varphi\|=1} \langle -A\varphi, \varphi \rangle \in \sigma(A)$$

2. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [m_A, M_A]$, alors $d = \text{dist}(\lambda, [m_A, M_A]) > 0$. Or, pour tout $\varphi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \|\lambda\varphi - A\varphi\| &\geq | \langle (\lambda I_{\mathcal{H}} - A)(\varphi), \varphi \rangle | = | \lambda \|\varphi\|^2 - \langle A(\varphi), \varphi \rangle | \\ &= \|\varphi\|^2 \left| \lambda - \underbrace{\left\langle A \left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|} \right), \left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|} \right) \right\rangle}_{\in [m_A, M_A]} \right| \\ &\geq \|\varphi\|^2 \cdot d. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda I_{\mathcal{H}} - A$ est coercive donc appliquant le théorème de Lax-Milgram 1.4.0.3 on voit que $\lambda I_{\mathcal{H}} - A$ est inversible, i.e. $\lambda \in \rho(A)$.

3. On va montrer que $r(A) = \|A\|$, comme A est un opérateur auto-adjoint nous allons la propriété suivante

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle A\varphi, \varphi \rangle|$$

alors

$$\|A^2\| = \|AA^*\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \langle A^*A\varphi, \varphi \rangle = \sup_{\|\varphi\|=1} \langle A\varphi, A\varphi \rangle = \sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\|^2 = \|A\|^2$$

Comme n'importe quelle puissance entière de A est encore auto-adjoint, on peut étendre ce résultat à A^4 :

$$\|A^4\| = \|(A^2)^2\| = (\|A^2\|)^2 = \|A\|^4$$

et par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}.$$

Donc, en utilisant la définition de rayon spectral :

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\|.$$

Alors

$$r(A) = \|A\|.$$

Corollaire 2.2.5.1 [7]

Sur un espace de Hilbert réel, le seul opérateur auto-adjoint A tel que $\sigma(A) = 0$ est l'opérateur nul.

Preuve :

D'après la théorème 2.2.5.1, on a $m_A = M_A = 0$, et donc $\langle A(\varphi), \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$. Cela entraîne la nullité de A .

Théorème 2.2.5.2 [1]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Preuve :

D'après la lemme 2.2.5.1 si $\beta \neq 0$ alors $A - \lambda I_{\mathcal{H}}$ est inférieurement borné donc inversible alors $\lambda \notin \sigma(A)$ d'où la contradiction, donc $\beta = 0$, alors $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.5.1

Si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ il n'est pas nécessaire que A est auto-adjoint.

Contre exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A) = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$$

n'est pas auto-adjoint mais son spectre est réel.

Exemple 2.2.5.1

Soit $\mathcal{H} = L^2([0, 1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de multiplication $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ défini par

$$Af(\varphi) = \varphi f(\varphi), \quad \forall \varphi \in [0, 1].$$

- On a vu que l'opérateur A est auto-adjoint.
- On a $\sigma(A) = [0, 1]$. De plus, l'opérateur A n'a pas de valeurs propres. En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{H}$, $\varphi \in [0, 1]$, on a

$$(Af - \lambda f)(\varphi) = \varphi f(\varphi) - \lambda f(\varphi)$$

$$= (\varphi - \lambda)f(\varphi) \quad \forall \varphi \in [0, 1]$$

- il suffit de montrer que l'opérateur non inversible si et seulement si $\lambda \in [0, 1]$

$\forall g \in \mathcal{H}$ on a

$$(\varphi - \lambda)f(\varphi) = g(\varphi) \quad \forall \varphi \in [0, 1],$$

donc

$$f(\varphi) = \frac{g(\varphi)}{(\varphi - \lambda)} \quad \forall \lambda \notin [0, 1].$$

- Ainsi, A est inversible si et non inversible dans les autres cas

$$\lambda \in [0, 1] \Rightarrow \sigma(A) = [0, 1].$$

- On suppose maintenant que λ soit une valeur propre de A et f le vecteur propre associé dans $\mathcal{H}$.

Alors, on a

$$\lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_{\mathcal{H}}) \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists h \neq 0 \text{ tel que } (A - \lambda I_{\mathcal{H}})h(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in [0, 1].$$

Donc

$$(\varphi - \lambda)h(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \varphi = \lambda.$$

Mais c'est impossible à réaliser car λ est constant, donc $\sigma_p(A) = \emptyset$.

2.3 La relation entre l'opérateur auto-adjoint avec autre classes des opérateurs

2.3.1 Quelques classes d'opérateurs

Définition 2.3.1.1 (Opérateur Positif)

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lui même, on dit que A est un opérateur positif et que l'on note $A \geq 0$, si pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on a

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

Définition 2.3.1.2 (Opérateur Projecteur)

Soit P un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lui même,

Un opérateur P est dit projection si et seulement si $P^2 = P$.

Définition 2.3.1.3 (Opérateur Projecteur Orthogonal)

Soit P un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lui même,

Un opérateur P est dit projection orthogonal si et seulement si $P^2 = P = P^*$.

Définition 2.3.1.4 (Opérateur Normal)

Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On dit que A est opérateur normal si :

$$A^*A = AA^*.$$

Définition 2.3.1.5 (Opérateur Compact)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur compact si $\overline{A}(\overline{B}_f(0, 1))$ est un compact de F , où $\overline{B}_f$ est la boule unité fermée de E

2.3.2 Relation entre opérateur auto-adjoint et un opérateur positif

Proposition 2.3.2.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint alors est un opérateur positif.

Preuve :

En effet, car l'opérateur A est auto-adjoint si et seulement si pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on a $\langle A\varphi, \varphi \rangle$ un réel.

Mais l'inverse n'est pas vrai.

Contre exemple :

l'opérateur A défini par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est un opérateur auto-adjoint .

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, telque $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ et $\psi = (\psi_1, \psi_2)$

$$\begin{aligned}\langle A\varphi, \psi \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -2\varphi_1 \\ -2\varphi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -2\varphi_1\overline{\psi_1} - 2\varphi_2\overline{\psi_2} \\ &= \varphi_1(\overline{-2\psi_1}) + \varphi_2(\overline{-2\psi_2}) \\ &= \langle \varphi, A\psi \rangle.\end{aligned}$$

Mais n'est pas positif car :

$$\begin{aligned}\langle A\varphi, \varphi \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -2\varphi_1 \\ -2\varphi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) < 0\end{aligned}$$

2.3.3 Relation entre opérateur auto-adjoint et un opérateur projecteur orthogonal

Proposition 2.3.3.1

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un projecteur orthogonal. Notons F son image.

Alors A est auto-adjoint.

Preuve :

En effet, pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in F$ et $\psi_1, \psi_2 \in F^\perp$

$$\langle A(\varphi_1 + \psi_1), \varphi_2 + \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1 + \psi_1, A(\varphi_2 + \psi_2) \rangle$$

De plus $\langle A(\varphi_1 + \psi_1), \varphi_1 + \psi_1 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \|\varphi_1\|^2 \geq 0$ pour tous $\varphi_1 \in F$ et $\psi_1 \in F^\perp$.

Ainsi $A \geq 0$. donc A auto-adjoint.

Mais l'inverse n'est pas vrai .

Contre exemple :

On a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que A est auto-adjoint car $A = A^*$.

Mais n'est pas projection orthogonale car :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\neq A. \end{aligned}$$

2.3.4 Relation entre opérateur auto-adjoint et un opérateur normal

Proposition 2.3.4.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint alors est un opérateur normal.

Preuve :

On a

$$AA^* = A^*A \quad \text{car } A = A^*$$

. Mais l'inverse n'est pas vrai .

Contre exemple :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{C} \\ A^*A &= \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}a & 0 \\ 0 & \bar{b}b \end{pmatrix}. \\ AA^* &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{a} & 0 \\ 0 & b\bar{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc A opérateur normal, mais n'est pas auto-adjoint car $A \neq A^*$.

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Le troisième chapitre s'occupe de deux applications sur ce qui nous avons étudié dans les deux chapitres précédant, ces applications sont illustrées par les propriétés structurelles citées aux chapitres un et chapitre deux.

La première application concerne des résultats trouvés sur la représentation d'un opérateur linéaire continu auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable (on considère une base orthonormée puis on trouve la propriété matricielle des opérateurs linéaires continus auto-adjoints associés. On trouve enfin des résultats sur le spectre opérateur linéaire continu auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable

La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude des opérateurs intégraux continus et le noyau de ce type des opérateurs intégraux aussi on fait le calcul des normes des opérateurs intégraux et les conditions permettant que ces opérateurs intégraux soient auto-adjoints dans ce cas on trouvera facilement le spectre de ces opérateurs intégraux. On met l'accent sur un opérateur intégral à noyau hermitien continu.

3.1 Représentation d' un opérateur

3.1.1 Représentation d'un opérateur sur un espace de Hilbert séparable

Tout espace linéaire $\mathbb{X}$ sur K de $\dim \mathbb{X} = n$ est isomorphe à l'espace $\mathbb{K}^n$, et chaque opérateur linéaire sur $\mathbb{X}$ peut être représenté, dans une base choisie pour $\mathbb{X}$, par une matrice d'ordre n . Étant donné qu'un espace de Hilbert séparable est isomorphe à ℓ^2 il est facile de prévoir des propriétés analogues.

Soit donc $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et soit $E = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormale pour $\mathcal{H}$. Nous avons pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty.$$

D'autre part, nous obtenons pour $T \in L(\mathcal{H})$ et $e_i \in E$

$$Te_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2 < \infty ; i \in \mathbb{N}$$

où $\alpha_{ik} = \langle Te_i, e_k \rangle$, $i, k \in \mathbb{N}$.

Nous avons ainsi associé à T une matrice infinie A , par rapport à la base orthonormale E , où

$$A = (\alpha_{ik}), i, k \in \mathbb{N}.$$

Étudions maintenant la transformation des coordonnées.

Soit $\psi = T\varphi$, où $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ et $\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e_j$. Nous allons exprimer η_j à l'aide des ξ_k et de la matrice A .

Pour

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

Nous avons

$$T\xi_n e_n = \sum_{i=1}^n \xi_i Te_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_k \right).$$

Puisque T est un opérateur linéaire continu et puisque $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \varphi$, nous avons

$$T\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_k \right) = T\varphi,$$

ce qui entraîne que

$$\langle T\varphi, e_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T\xi_n e_n, e_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_k \right) = \eta_k$$

et

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \alpha_{ik} ; i, k \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

ce qui entraîne que

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = (\alpha_{ik})^* \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.1.1.1

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, $T \in L(\mathcal{H})$ et $(\alpha_{ik}), i, k \in \mathbb{N}$ la matrice correspondante à T , par rapport à une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Alors l'opérateur adjoint T^* est représenté dans la même base par la matrice $\overline{\alpha_{ki}}, i, k \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Soit $\alpha_{ik} = \langle Te_i, e_k \rangle, i, k \in \mathbb{N}$ et soit $(\beta_{ik}), i, k \in \mathbb{N}$, la matrice correspondante à T^* , i.e.

$\beta_{ik} = \langle T^*e_i, e_k \rangle$. Alors

$$\beta_{ik} = \langle T^*e_i, e_k \rangle = \langle e_i, Te_k \rangle = \overline{\langle Te_k, e_i \rangle} = \overline{\alpha_{ki}}.$$

Corollaire 3.1.1.1

Soit $(\alpha_{ik}), i, k \in \mathbb{N}$ la matrice correspondante à $T \in L(\mathcal{H})$. Alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2 < \infty, k \in \mathbb{N}.$$

Corollaire 3.1.1.2

Soient $T \in L(\mathcal{H})$ et (α_{ik}) la matrice correspondante à T par rapport à une base orthonormale pour $\mathcal{H}$. Alors T est hermitienne si et seulement si

$$\alpha_{ik} = \overline{\alpha_{ki}}, \quad i, k \in \mathbb{N}.$$

3.1.2 Polynôme caractéristique

- On note le $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n par

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \left\{ A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Définition 3.1.2.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

tel que

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} \text{ est un polynôme}$$

$$= \sum_{j=0}^n \alpha_j \lambda^j.$$

Théorème 3.1.2.1

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow P(\lambda) = 0.$$

Preuve :

Soit λ est une valeur propre de A . Alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ non injective} \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ non bijective} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$

Remarque 3.1.2.1

toute matrice hermitienne $n \times n$ carrée possède n valeur propre simple et n vecteurs propres correspondant orthogonaux deux à deux donc on obtient n spectres.

Théorème 3.1.2.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ hermitienne possède n valeurs propres et n vecteurs propres orthogonaux deux à deux.

Preuve :

Orthogonalité des vecteurs propres. Si φ_1 et φ_2 sont deux vecteurs propres d'une matrice hermitienne A , associés respectivement à λ_1 et λ_2 , avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors φ_1 et φ_2 sont orthogonaux. En effet, on sait déjà que λ_1 et λ_2 sont réelles. Donc, si

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \text{ et } A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$$

alors

$$\begin{aligned} \left\langle \underbrace{A\varphi_1}_{\lambda_1\varphi_1}, \varphi_2 \right\rangle &= \left\langle \varphi_1, \underbrace{A^* \varphi_2}_A \right\rangle \\ \lambda_1 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \lambda_2 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

3.1.3 Matrices diagonales

Définition 3.1.3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale si $\forall i, j = \overline{1, n} \quad (i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$ il s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

se note $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ou encore $\text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Exemple 3.1.3.1

Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 1 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- A est hermitienne puisque $\overline{A^t} = A$.
- Calculons d'abord les valeurs propres de A .

Le polynôme caractéristique P est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 1 - \lambda & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

c-à-dire

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)^3 - 4(1 - \lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)(\lambda - 3).$$

Comme il fallait s'y attendre, les valeurs propres sont réelles

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(1 + \lambda)(\lambda - 3) = 0$$

donc valeurs propres $\{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3\}$.

D'après le théorème 3.1.2.1 on obtient

$$\sigma(A) = \{1, -1, 3\}.$$

- On calcule les valeurs propres correspondants $(u, v, w) = \varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$
- 1° $\lambda = +1$

$$\begin{aligned} i\sqrt{2}v &= 0, \\ -i\sqrt{2}u - i\sqrt{2}w &= 0, \\ i\sqrt{2}v &= 0, \end{aligned} \quad \text{d'où le vecteur propre} \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2° $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} 2u + i\sqrt{2}v &= 0, \\ -i\sqrt{2}u + 2v - i\sqrt{2}w &= 0, \\ i\sqrt{2}v + 2w &= 0, \end{aligned} \quad \text{d'où le vecteur propre} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3° $\lambda = +3$

$$\begin{aligned} -2u + i\sqrt{2}v &= 0, \\ -i\sqrt{2}u - 2v - i\sqrt{2}w &= 0, \\ i\sqrt{2}v - i2w &= 0, \end{aligned} \quad \text{d'où le vecteur propre} \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ sont orthogonaux deux à deux.

Par exemple le produit scalaire hermitien $\varphi_2 \varphi_3$ est

$$\varphi_2 \varphi_3 = \sqrt{2}\sqrt{2} + (2i)(-2i) + \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 - 4 + 2 = 0.$$

Alors, on obtient la base orthonormale de $\mathbb{C}^3$ constituée des vecteurs propres de A . En suite, on calcule les normes suivantes

- 1) $\|\varphi_1\|_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- 2) $\|\varphi_2\|_2 = \sqrt{2+4+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- 3) $\|\varphi_3\|_2 = \sqrt{2+4+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

La base orthonormale cherchée est ainsi

$$C = \left\{ \frac{\varphi_1}{\sqrt{2}}, \frac{\varphi_2}{2\sqrt{2}}, \frac{\varphi_3}{2\sqrt{2}} \right\}.$$

et la matrice de passage U est unitaire

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base de $\mathbb{C}$, on a la matrice diagonale réelle

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

telle que

$$A = UDU^{-1}.$$

3.2 Opérateurs intégraux, propriétés et étude spectrale

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement. Les opérateurs intégraux interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles, les phénomènes de diffusion et les équations intégrales.

3.2.1 Opérateur Intégral

On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire $\mathcal{A}_k$ défini sur un espace Hilbert $\mathcal{H}$ à valeurs dans un espace Hilbert $\mathcal{H}$ donné sous la forme

$$\mathcal{A}_k f(\varphi) = \int_{\mathcal{I}_2} K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi, \quad \varphi \in \mathcal{I}_1,$$

où $K(\varphi, \psi)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ et $f(\psi)$ est une fonction mesurable définie sur $\mathcal{I}_2$.

3.2.2 Noyau d'un opérateur

La fonction mesurable $K(\varphi, \psi)$ est dite noyau de l'opérateur intégral $\mathcal{A}_k$.

3.2.3 Normes des opérateurs intégraux sur $L^2(\mathcal{I})$

Soit $\mathcal{A}_k$ un opérateur intégral défini sur $L^2(\mathcal{I}_1)$, la norme de l'opérateur $\mathcal{A}_k$ est donnée par

$$\|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} = \left(\int_{\mathcal{I}_1} \left(\int_{\mathcal{I}_2} |K(\varphi, \psi)|^2 d\psi \right) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $K(\varphi, \psi)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$

Théorème 3.2.3.1

Soit $\mathcal{A}_k$ un opérateur intégral de norme finie

$$\|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} < \infty$$

alors l'opérateur intégral $\mathcal{A}_k$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathcal{I}_2)$ dans $L^2(\mathcal{I}_1)$. De plus, on a

$$\|\mathcal{A}_k f\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \leq \|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}.$$

Preuve :

Par l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}_1} |\mathcal{A}_k f(\varphi)|^2 d\varphi &= \int_{\mathcal{I}_1} \left(\int_{\mathcal{I}_2} |K(\varphi, \psi)| |f(\psi)| d\psi \right)^2 d\varphi \\ &\leq \int_{\mathcal{I}_1} \left[\left(\int_{\mathcal{I}_2} |K(\varphi, \psi)|^2 d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{I}_2} |f(\psi)|^2 d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 d\varphi \\ &= \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}^2 \int_{\mathcal{I}_1} \left(\int_{\mathcal{I}_2} |K(\varphi, \psi)|^2 d\psi \right) d\varphi \\ &= \|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)}^2 \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}^2. \end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $\mathcal{A}_k f(\varphi) = \int_{\mathcal{I}_2} K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi$ de $L^2(\mathcal{I}_2)$ dans $L^2(\mathcal{I}_1)$. De plus, on a

$$\left(\int_{\mathcal{I}_1} |\mathcal{A}_k f(\varphi)|^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}$$

ou encore

$$\|\mathcal{A}_k f\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \leq \|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}.$$

Remarque 3.2.3.1

La condition $\|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} < \infty$ donnée sur la norme de l'opérateur intégral $\mathcal{A}_k$ est uniquement suffisante et non nécessaire pour la continuité de cet opérateur.

3.2.4 Opérateur Intégral à Noyau Hermitien Continu

Proposition 3.2.4.1

Soit $\mathcal{A}_k$ un opérateur intégral défini à partir d'un noyau K continu sur $[a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ par la formule suivante, pour tout $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$

$$\forall \varphi \in [a, b], \quad \mathcal{A}_k f(\varphi) = \int_a^b K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi$$

Alors, l'opérateur $\mathcal{A}_k$ admet un unique opérateur adjoint $\mathcal{A}_k^*$ pour le produit scalaire usuel de $L^2([a, b], \mathbb{C})$

Pour tout $\varphi \in [a, b]$

$$\mathcal{A}_k^* f(\varphi) = \int_a^b \overline{K(\psi, \varphi)} f(\psi) d\psi.$$

Preuve :

pour tout $f, g \in L^2([a, b], \mathbb{C})$, on a

$$\langle \mathcal{A}_k f, g \rangle = \langle f, \mathcal{A}_k^* g \rangle.$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_k f, g \rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi \right) \overline{g(\varphi)} d\varphi \\ &= \int_a^b f(\psi) \left(\int_a^b K(\varphi, \psi) \overline{g(\varphi)} d\varphi \right) d\psi \quad \text{Par la théorie de Fubini(1.4.0.1)} \\ &= \int_a^b f(\psi) \overline{\left(\int_a^b \overline{K(\varphi, \psi)} g(\varphi) d\varphi \right)} d\psi \\ &= \langle f, \mathcal{A}_k^* g \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{A}_k^*$ est l'opérateur intégral de noyau K^* avec $K^*(\varphi, \psi) = \overline{K(\psi, \varphi)}$.

Autrement dit

$$\mathcal{A}_k^* f(\varphi) = \int_a^b \overline{K(\psi, \varphi)} f(\psi) d\psi.$$

Corollaire 3.2.4.1

L'opérateur integral $\mathcal{A}_k$ de noyau K est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau K est hermitien :

$$K(\varphi, \psi) = \overline{K(\psi, \varphi)}, \quad \forall \varphi, \psi \in [a, b]$$

Théorème 3.2.4.1 [8] (Propriétés du spectre d'un opérateur compact)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{A}_k$ un opérateur compact sur $\mathcal{H}$. Alors

- (i) Si $\dim \mathcal{H} = +\infty$ alors $0 \in \sigma(\mathcal{A}_k)$
- (ii) $\sigma(\mathcal{A}_k) = \sigma_p(\mathcal{A}_k) \cup \{0\}$.

Exemple 3.2.4.1

Soit $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ et $\mathcal{A}_k \in L(\mathcal{H})$ défini, pour $f \in \mathcal{H}$ et $\varphi \in [0, 1]$, par

$$(\mathcal{A}_k f)(\varphi) = \int_0^1 K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi$$

avec

$$K(\varphi, \psi) = \begin{cases} \psi(\varphi + 1) & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \psi \leq 1 \\ \varphi(\psi + 1) & \text{si } 0 \leq \psi \leq \varphi \leq 1 \end{cases}$$

► $\mathcal{A}_k$ est continue car :

On a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_k\| &= \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(\varphi, \psi)|^2 d\psi \right) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.2.3.1 on obtient $\mathcal{A}_k$ est continue donc $\mathcal{A}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

► $\mathcal{A}_k$ est un opérateur auto-adjoint et compact car :

• $\mathcal{A}_k$ est un opérateur auto-adjoint :

$$\begin{aligned} \overline{K(\psi, \varphi)} &= \begin{cases} \overline{\varphi(\psi + 1)} & \text{si } 0 \leq \psi \leq \varphi \leq 1 \\ \overline{\psi(\varphi + 1)} & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \psi \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \psi(\varphi + 1) & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \psi \leq 1 \\ \varphi(\psi + 1) & \text{si } 0 \leq \psi \leq \varphi \leq 1 \end{cases} \\ &= K(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

• $\mathcal{A}_k$ est un opérateur compact :

On utilise le théorème d'Ascoli Arzela pour montrer que l'opérateur $\mathcal{A}_k$ est compact.

- $\mathcal{A}_k(\overline{B_f}(0,1))$ est équicontinue :

Soit $f \in \overline{B_f}(0,1)$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{A}_k f(\varphi_1) - \mathcal{A}_k f(\varphi_2)| &= \left| \int_0^1 [K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)] f(\psi) d\psi \right| \\
 &\leq \int_0^1 |K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)| |f(\psi)| d\psi \\
 &\leq \|K(\varphi_1, \cdot) - K(\varphi_2, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \|f\|_{L^2([0,1])} \text{ Par l'inégalité de C-S (1.1)} \\
 &\leq \|K(\varphi_1, \cdot) - K(\varphi_2, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \\
 &= \left(\int_0^{\varphi_1} |\psi|^2 |\varphi_1 - \varphi_2|^2 d\psi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)|^2 d\psi \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\varphi_2}^1 |\psi + 1|^2 |\varphi_1 - \varphi_2|^2 d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(\int_0^{\varphi_1} |\varphi_1 - \varphi_2| (|\varphi_1| + |\varphi_2|) d\psi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (|K(\varphi_1, \psi)| + |K(\varphi_2, \psi)|)^2 d\psi \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\varphi_2}^1 4 |\varphi_1 - \varphi_2| (|\varphi_1| + |\varphi_2|) d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(\int_0^1 2 |\varphi_1 - \varphi_2| d\psi + 16 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\psi + 8 \int_0^1 |\varphi_1 - \varphi_2| d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sqrt{26} \sqrt{|\varphi_1 - \varphi_2|}.
 \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in [0,1]$, soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha = \frac{\varepsilon^2}{26}$

$\forall \psi \in [0,1], |\varphi - \psi| < \alpha \Rightarrow |\mathcal{A}_k f(\varphi_1) - \mathcal{A}_k f(\psi)| < \varepsilon \quad \forall f \in \overline{B_f}(0,1).$

- $\mathcal{A}_k(\overline{B_f}(0,1))$ est uniformément borné :

pour tout $f \in \overline{B_f}(0,1)$ et $\varphi \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{A}_k f(\varphi)| &\leq \int_0^1 |K(\varphi, \psi) f(\psi)| d\psi \\
 &\leq \|K(\varphi, \cdot)\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \quad \text{Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1)} \\
 &\leq \|K(\varphi, \cdot)\|_{L^2} \quad \text{car } \|f\| \leq 1 \\
 &\leq 2.
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}_k(\overline{B_f}(0,1))$ est uniformément borné.

Alors d'après le théorème d'Ascoli 1.4.0.4, et puisque $\mathcal{A}_k(\overline{B_f}(0,1))$ est relativement compact donc $\mathcal{A}_k$ est compact.

Alors d'après le théorème 3.2.4.1, on a $0 \in \sigma(\mathcal{A}_k)$ et $\sigma(\mathcal{A}_k) \setminus \{0\}$ est l'ensemble des valeurs propres non nulles de $\mathcal{A}_k$.

- Les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont des fonctions continues car :

Si $\mathcal{A}_k f = \lambda f$ pour un $\lambda \neq 0$, alors $f \in \text{Im}(\mathcal{A}_k)$ car :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k f = \lambda f &\Leftrightarrow \lambda^{-1} \mathcal{A}_k f = f && \text{car } \lambda \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A}_k(\lambda^{-1} f) = f && \text{car } \mathcal{A}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow \exists g = \lambda^{-1} f \text{ telle que } \mathcal{A}_k g = f \\ &\Leftrightarrow f \in \text{Im}(\mathcal{A}_k). \end{aligned}$$

Pour toute $f \in \mathcal{H}$, $\varphi \in [0, 1]$

$$\mathcal{A}_k f(\varphi) = \varphi \int_0^\varphi (\psi + 1) f(\psi) d\psi + (\varphi + 1) \int_\varphi^1 \psi f(\psi) d\psi.$$

On va montrer que $\mathcal{A}_k f$ continue sur $[0, 1]$.

D'abord, on montre la continuité de K

- Si $\varphi < \psi$ ou $\varphi > \psi$ on a K est continu car il est polynome.
- Si $\varphi = \psi$ on a :

$$\lim_{(\varphi, \psi) \rightarrow (t, t)} \psi(\varphi + 1) = \lim_{(\varphi, \psi) \rightarrow (t, t)} \varphi(\psi + 1) = t(t + 1) = K(t, t).$$

Donc K est continu sur $\{(t, t) : t \in [0, 1]\}$.

Alors la fonction K est uniformément continue sur le compact $[0, 1] \times [0, 1]$. Soit $\varepsilon > 0$, donc il existe $\delta > 0$ telque

$$\forall \varphi, \psi \in [0, 1], |\varphi_1 - \varphi_2| \leq \delta \Rightarrow |K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)| \leq \varepsilon$$

par l'inégalité de Schwarz, on a

$$|\mathcal{A}_k f(\varphi_1) - \mathcal{A}_k f(\varphi_2)| \leq \sup_{\psi \in [0, 1]} (|K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)|) \|f\|_{L^2([0, 1])} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2([0, 1])}.$$

Ceci exprime la continuité uniforme de $\mathcal{A}_k f$. Par suite $\mathcal{A}_k f$ est une fonction continue. Comme tout vecteur propre f relatif à une valeur propre non nulle λ vérifie $f = \lambda^{-1} \mathcal{A}_k f$ est une fonction continue.

- A la fin nous allons déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathcal{A}_k$

Comme $\mathcal{A}_k$ est auto-adjoint, alors toute valeur propre est réelle. L'équation aux (valeurs propres, vecteurs propres), (λ, f) est

$$\lambda f(\varphi) = \varphi \int_0^\varphi (\psi + 1) f(\varphi) d\psi + (\varphi + 1) \int_\varphi^1 \psi f(\psi) d\psi. \quad (3.2)$$

On va déduire, par dérivations successives une équation différentielle en f associée à des conditions aux limites.

$$\begin{aligned}
\lambda f'(\varphi) &= \int_0^\varphi (\psi + 1)f(\psi)d\psi + \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\int_0^\varphi (\psi + 1)f(\psi)d\psi \right) + \int_\varphi^1 \psi f(\psi)d\psi + (\varphi + 1) \frac{d}{d\varphi} \left(\int_\varphi^1 \psi f(\psi)d\psi \right) \\
&= \int_0^\varphi (\psi + 1)f(\psi)d\psi + \varphi(\varphi + 1)f(\varphi) + \int_\varphi^1 \psi f(\psi)d\psi + (\varphi + 1)(0 - \varphi f(\varphi)) \\
&= \int_0^\varphi (\psi + 1)f(\psi)d\psi + \int_\varphi^1 \psi f(\psi)d\psi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda f''(\varphi) &= \frac{d}{d\varphi} \left(\int_0^\varphi (\psi + 1)f(\psi)d\psi \right) + \frac{d}{d\varphi} \left(\int_\varphi^1 \psi f(\psi)d\psi \right) \\
&= \varphi(\varphi + 1)f(\varphi) + \varphi f(\varphi) \\
&= f(\varphi).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda f'(\varphi) = \int_0^\varphi (\psi + 1)f(\psi)d\psi + \int_\varphi^1 \psi f(\psi)d\psi \\ \lambda f''(\varphi) = f(\varphi) \\ \lambda f(0) = \int_0^1 \psi f(\psi)d\psi = \lambda f'(0) \\ \lambda f(1) = \int_0^1 (\psi + 1)f(\psi)d\psi = \lambda f'(1). \end{cases}$$

Le système suivant est équivalent à (3.2).

$$\begin{cases} \lambda f''(\varphi) = f(\varphi) \\ f(0) = f'(0) \\ f(1) = f'(1). \end{cases}$$

Deux cas sont à étudier.

(i) $\lambda = \mu^{-2}, \mu > 0$. Alors

$$\begin{cases} f(\varphi) = C_1 \exp(\mu\varphi) + C_2 \exp(-\mu\varphi) \\ (\mu - 1)C_1 - (\mu + 1)C_2 = 0 \\ (\mu - 1)C_1 \exp(\mu) - (\mu + 1)C_2 \exp(-\mu) = 0. \end{cases}$$

- Un couple $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ est solution si et seulement si $\mu^2 = 1$

On peut exprimer cette résultat par absurde, on suppose que $\mu^2 \neq 1$ donc $\mu \neq 1$ ($\mu > 0$), maintenant on va chercher la solution du système de variable C_1 et C_2

$$\begin{cases} (\mu - 1)C_1 - (\mu + 1)C_2 = 0 \dots\dots\dots (\star) \\ (\mu - 1)C_1 \exp(\mu) - (\mu + 1)C_2 \exp(-\mu) = 0 \dots\dots (\star\star). \end{cases}$$

En multipliant $(\star)$ par $\exp(\mu)$ on obtient

$$\begin{cases} (\mu - 1)C_1 \exp(\mu) - (\mu + 1)C_2 \exp(\mu) = 0 \\ (\mu - 1)C_1 \exp(\mu) - (\mu + 1)C_2 \exp(-\mu) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$C_1(\mu + 1)[\exp(\mu) - \exp(-\mu)] = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0 \quad \text{car } (\mu > 0 \text{ et } \mu \neq 1)$$

En multipliant $(\star)$ par $\exp(-\mu)$ on trouve

$$\begin{cases} (\mu - 1)C_1 \exp(-\mu) - (\mu + 1)C_2 \exp(-\mu) = 0 \\ (\mu - 1)C_1 \exp(\mu) - (\mu + 1)C_2 \exp(-\mu) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$C_1(\mu - 1)[\exp(-\mu) - \exp(\mu)] = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0 \quad \text{car } (\mu > 0 \text{ et } \mu \neq 1).$$

Alors $(C_1, C_2) = (0, 0)$ C'est une contradiction donc $\mu^2 = 1$ Cela signifie que $\mu = 1$

Alors $C_2 = 0$, Avec compensation en $(\star)$ on trouve $f(\varphi) = C_1 \exp(\varphi)$

$$\{(1, \text{Vect}(f_0)), \text{ où } f_0(\varphi) = \exp(\varphi)\}$$

est le seul couple solution.

Le théorème 3.2.4.1 exprime que $0 \in \sigma(\mathcal{A}_k)$ et $\sigma(\mathcal{A}_k) = \{0\} \cup \sigma_p(\mathcal{A}_k)$, on obtient donc

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = \{0, 1\}.$$

(ii) $\lambda = -\mu^{-2}, \mu > 0$. Alors

$$\begin{cases} f(\varphi) = C_1 \cos(\mu\varphi) + C_2 \sin(\mu\varphi) \\ \mu C_2 - C_1 = 0 \\ C_2 (1 + \mu^2) \sin \mu = 0. \end{cases}$$

Un couple $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ est solution si et seulement si $\sin(\mu) = 0$ donc $\mu = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$.

alors $C_1 = n\pi C_2$ ça signifie

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= C_2 n\pi \cos(n\pi\varphi) + C_2 \sin(n\pi\varphi) \\ &= C_2 [n\pi \cos(n\pi\varphi) + \sin(n\pi\varphi)] \end{aligned}$$

$$\left\{ \left(-(n\pi)^{-2}, \text{Vect}(f_n) \right), f_n(\varphi) = n\pi \cos(n\pi\varphi) + \sin(n\pi\varphi), n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

sont les solutions.

Le théorème 3.2.4.1 exprime que $0 \in \sigma(\mathcal{A}_k)$ et $\sigma(\mathcal{A}_k) = \{0\} \cup \sigma_p(\mathcal{A}_k)$; on obtient donc

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = \left\{ (-n\pi)^{-2}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}.$$

CONCLUSION

On a étudié dans ce mémoire, les caractérisations fondamentales des opérateurs linéaires continus autoadjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. Dans chapitre trois de ce travail nous avons apporté deux applications différentes illustrées dans le domaine de la théorie des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert. La première application concerne l'étude spectrale d'un opérateur linéaire continu auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable .On trouve que tout opérateur auto-adjoint possède des valeurs propres réelles.

La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude des opérateurs intégraux continus et le noyau de ce type des opérateurs intégraux aussi on fait le calcul des normes des opérateurs intégraux et les conditions permettant que ces opérateurs integraux soient auto-adjoints dans ce cas on trouvera facilement le spectre de ces opérateurs intégraux. On met l'accent sur un opérateur intégral à noyau hermitien continu.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Aubrun, Théorie des Opérateurs M1 Mathématiques, Université de la Réunion.
- [2] J. Bass. de mathématique "TOME III", Masson et C^{IE} , Éditeurs 120, Boulevard Saint-Germain, Paris, 1971
- [3] S. K. Berberian, introduction to hilbert space, Chelsea publishing company, 1961 .
- [4] S.K Berberian, Introduction to Hibert space. 1971, New York.
- [5] H. Boccara, Analyse fonctionnelle, Edition Marketing, Paris, 1984.
- [6] S. Bouzenada, Etude des opérateurs finis et leurs caractérisations, Thèse de Doctorat, Université de Annaba (2008).
- [7] H. BREZIS, Analyse fonctionnelle, théorie et application, MASSON Paris New York Ba.
- [8] H. Chebli. Analyse Hilbertienne, Centre publication universitaire, Tunis, 2001.
- [9] C. CHERIFA, Sur le théorème de Fuglede-Putnam (Mémoire magister, Université D'Oran Es-Senia), 2011.
- [10] N. Dunford, J. T. Shwartz, Linear operator, I, II and III, Interscience, New York, 1958.1963 and 1971 .
- [11] T. Furuta, Invitation to linear operators, Taylor and Fran. Loondon, (2001).
- [12] L. KANTOROVITCH, D. AKILOV. Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir Moscou 1981.
- [13] A. Kolmogrov, Fomine S. Eléments de la théorie des fonctions et de lanalyse !fonctionnelle, Mir .
- [14] S. Maingot, D. Manceau, Théorie spectrale. Polycopié disponible à l'adresse
- [15] S. Mechri, Some recent results on operator commutators and related operators with applications, Lecture Monograph, (2010).
- [16] L. Schwartz, Analyse 1, théorie des ensembles et topologie, 1997.

- [17] B. Ünalın Uzun, A Note on the Operator Equation $AX - XB = Y$, International Mathematical Forum, 5,2010,3211-3220

RESUME

Dans ce mémoire on expose quelques connaissances et propriétés principales des opérateurs linéaires continus auto-adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. On a commencé par quelques préliminaires des opérateurs linéaires continus sur les espaces de Hilbert. Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacrée à l'étude des propriétés fondamentales générales des opérateurs linéaires continus auto-adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. Le troisième chapitre de ce mémoire est consacrée aux deux projets applications sur les opérateurs linéaires continus auto-adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. La première application concerne l'étude des propriétés spectrales d'un opérateur linéaire continu auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable. La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude des opérateurs intégraux continus et le noyau de ce type des opérateurs intégraux aussi on fait le calcul des normes des opérateurs intégraux et les conditions permettant que ces opérateurs intégraux soient auto-adjoints dans ce cas on trouvera facilement le spectre de ces opérateurs intégraux. On met l'accent sur un opérateur intégral à noyau hermitien continu.

ABSTRACT

In this memorial we expose a few basic facts and fundamental properties of continuous linear operator from Hilbert space to other Hilbert space. The second chapter of this memorial is specified to study the general and fundamental properties on linear continuous operators self-adjoints from Hilbert space to itself. The third chapter of this memorial is to make use of two projects works and applications off linear continuous operators self-adjoints from Hilbert space to itself. The first application concerne the study of spectra of linear continuous operator self-adjoints on Hilbert separable space. The second application is to invest some proprieties of integral operator continuous. We gave a few considerations to so called Integral operator with hermitien continuous kernel.

ملخص

في هذه المذكرة سنعرض بشيء من التفصيل الى الخواص الأساسية للمؤثرات الخطية المستمرة القرينه لنفسها من هيلبرت نحو فضاء هيلبرت. نبدأ بالتطرق الى بعض المفاهيم حول المؤثرات الخطية المستمرة من هيلبرت نحو فضاء هيلبرت. الفصل الثاني نخصصه للحديث بالتفصيل عن الخواص الأساسية للمؤثرات الخطية المستمرة القرينه لنفسها من هيلبرت نحو فضاء هيلبرت. الفصل الثالث نخصصه لمشروعين عمليين على المؤثرات الخطية المستمرة من هيلبرت نحو فضاء هيلبرت. التطبيق الأول هو دراسة طيفه لمؤثر خطي مستمر قرين لنفسه معرف على فضاء هيلبرت قابل للفصل.. التطبيق العملي الثاني هو دراسة مفصلة لنوع من المؤثرات الخطية المستمرة التكاملية و نتطرق بما تيسر لما يعرف بالمؤثرات الخطية التكاملية ذات نوى هرميته مستمرة.