

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



CENTRE UNIVERSITAIRE D'EL-OUED
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ETAT EN ELECTROTECHNIQUE

OPTION: Réseaux électriques

THEME

La Méthode des Eléments Finis de Galerkin Appliquée aux Equations de Maxwell

Proposé et dirigé par :

Mr. Chemsali

Présenté par:

Thamer Abdeldjabare

Haba Abdallah

Promotion Juin 2009

Remerciement

En tout premier lieu, notre profonde gratitude est envers notre Créateur, le tout puissant, qui nous a spécifié de l'intelligence pour bien croire à sa majesté.

*Nous tenons à exprimer nos impérissables remerciements à notre encadreur Monsieur **ALI CHEMSA** pour avoir d'abord proposé ce thème, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de cette thèse et qui n'a pas cessée de nous donner ses conseils et ses remarques.*

*Nous remercions **Mr D. BEN ATTOUS**, Maître de conférences au centre universitaire d'El- Oued, Qu'il trouve ici l'expression de notre très sincères reconnaissances pour leur précieuse directive, leur disponibilité, leurs fructueux conseils, leur suivi constant, leur courtoisie si raffinée et leurs qualités humaines.*

Nous remercions également les membres de jury d'examen qui nous font trop d'honneur en participant au jugement de ce travail.

Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidées à élaborer et réaliser ce mémoire, ainsi à tous ceux qui nous a aidés de près ou de loin à accomplir ce travail.

Nous remercions aussi tous les enseignants du département d'électrotechnique qui ont contribué à notre formation. Ces années d'étude ont été pour nous l'occasion de connaître des personnes exceptionnelles qui nous ont tout simplement offert leur sincère amitié et avec qui nous avons partagé d'agréables moments. Nous remercions très chaleureusement tous nos collègues de la promotion 2009.

Liste des Symboles

\vec{B}	:	Induction magnétique
\vec{H}	:	Champ magnétique
\vec{D}	:	Induction électrique
\vec{E}	:	Champ électrique
\vec{j}	:	Densité de courant électrique
Φ	:	Flux magnétique
q	:	Charge électrique
ε_0	:	Permittivité du vide
$\overrightarrow{grad}V$:	Gradient de V
$div \vec{E}$:	Divergence de \vec{E}
$\overrightarrow{rot} \vec{E}$:	Rotationnel de \vec{E}
ΔV	:	Laplacien de V
L	:	Operateur Différentielle
μ_i	:	Les Paramètres d'approximation
$\varphi_i(x)$:	Les Fonctions de base
$v(x)$:	Fonction de pondération (Fonction test)
$u_h(x)$:	Solution Approché de l'EDP
$\langle F, G \rangle$:	Produit scalaire des fonctions F et G
$a(.,.)$:	Forme bilinéaire symétrique
$l(.)$:	Forme linéaire
E_h	:	Espace vectorielle normé de dimension finie
ρ_0	:	Densité de volumique de charge
V	:	Le potentielle électrique
N_e	:	Nombre d'élément

- \vec{E}^{inc} : Champ électrique incident
- \vec{E}^{dif} : Champ électrique diffracté
- $J_n(x)$: la fonction de Bessel de n^{ème} espèce
- λ : la longueur d'onde
- : Fin de remarque.

Table de Matière

Introduction générale	1
Chapitre 01 : Généralité sur les équations de Maxwell	
1.1. Introduction	3
1.2. Le champ électromagnétique	4
1.2.1. Champ électromoteur et vecteur densité de courant	4
1.2.2. Le champ magnétique	6
1.3. Le régime variable	6
1.3.1. Le phénomène de propagation	6
1.3.2. Le phénomène d'induction	7
1.3.3. Le phénomène de capacité	7
1.4. L'induction électromagnétique	7
1.4.1. Loi de Faraday-Lenz	7
1.4.2. Équation de Maxwell-Faraday	8
1.5. Le théorème d'Ampère	9
1.5.1. Équation de continuité	9
1.5.2. Le théorème d'Ampère	10
1.6. Résumé des équations	11
1.7. Propagation des ondes électromagnétique dans le vide	11
1.7.1. Équation de propagation pour \vec{E} et \vec{B}	11
1.8. Réflexion et transmission des ondes électromagnétique	13
1.8.1. Équation de Maxwell dans les milieux parfaits	13
1.8.2. Propagation dans les milieux diélectrique	15
1.8.3. Relation de passage	16
1.8.4. Lois de Snell-Descartes	17
1.9. Forme standard des équations de l'électromagnétisme	19
1.10. Conclusion	20
Chapitre 02 : Méthode des résidus pondérés - Méthode de Galerkin	
2.1. Introduction	21
2.2. Méthodes des résidus pondérés	22
2.2.1. Formulation du problème	23
2.2.2. Construction de l'approximation	24
2.2.2.a. Cas des conditions aux limites homogènes	24
2.2.2.b. Cas des conditions aux limites non homogènes	25
2.2.3. Méthodes des résidus pondérés	25
a. Produit scalaire de fonction	25

b. Théorème d'analyse fonctionnelle.....	26
c. Méthode des résidus pondérés	26
2.2.4 . Discrétisation de l'équation intégrale	27
2.2.5 . La méthode de collocation par points	29
2.2.6. La méthode des moindres carrés	35
2.2.7. La méthode de Galerkin	40
2.3 . Formulation intégrale faible	43
2.3.1. Transformation des formes intégrales-théorème de Green- Ostrogradsky	44
2.3.2. Formulation intégrale faible.....	46
2.3.3. La méthode de Galerkin en formulation faible.....	48
2.4. Conclusion.....	48
Chapitre 03 : Méthode des éléments finis de Galerkin	
3.1. Introduction	50
3.2. Méthode de Galerkin.....	51
3.2.1. Exposé général de la méthode	51
3.3. Exemples en dimension 1 et introduction de la méthode des éléments finis	54
3.4. Introduction des éléments finis en dimension 2.....	66
3.4.1. Interpolation par des polynômes de degré 1	68
3.4.2. Exemples de matrices de discrétisation	74
3.5. Conclusion.....	79
Chapitre 4 : Résultats numériques et interprétations	
4.1. Introduction	81
4.2. Cas unidimensionnel : Deux plaques infinies parallèles	82
4.2.1. Solution analytique	82
4.2.2. Solution approximée par la méthode des éléments finis de Galerkin.....	83
4.2.2.1. Fonctions d'interpolation linéaires.....	83
4.2.2.2. Fonctions d'interpolation quadratiques (polynômes de deuxième degré)	88
4.3. Cas bidimensionnel : Cavité rectangulaire	91
4.3.1. Solution analytique	91
4.3.2. Solution approximée par la méthode des éléments finis de Galerkin.....	92
4.4. Problème de diffraction bidimensionnel.....	98
4.4.1. Solution analytique	98
4.4.2. Solution approximée par la méthode des éléments finis de Galerkin	102
4.5. Conclusion.....	106
Conclusion générale	107
Bibliographie	

Introduction générale

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexe, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Nous pensons bien sûr aux projets spatiaux, aéronautiques et nucléaires dans lesquels la sécurité est vitale. D'autres types de projets d'envergure sont liés à notre environnement : contrôle de pollution électromagnétique, acoustique ou chimique, aménagement des cours d'eau, gestion des nappes souterraines, prévision météorologique. Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

Les sciences de l'ingénieur (électrotechnique, mécanique des solides et des fluides,...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. Généralement, pour résoudre des telles équations il faut faire recours aux méthodes numériques efficaces adéquates. Parmi ces méthodes on cite une méthode fait parfaitement l'affaire, à savoir, la méthode de Galerkin combinée avec la méthode des éléments finis, connue sous le nom méthode des éléments finis de Galerkin. L'intégration du principe de discrétisation en éléments finis dans la méthode de Galerkin donne des meilleurs résultats. Cette méthode combinée est l'une des méthodes le plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations [1]. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'outil informatique. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un

domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

La discrétisation en éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équation algébrique. Elle fait appel aux trois domaines suivants,

- ✓ Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- ✓ Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- ✓ Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

Notre travail est partitionné comme suit,

Chapitre 01 : Sera consacré aux notions générales sur les équations de Maxwell.

Chapitre 02 : Exposé des méthodes de résidus pondérés et les méthodes variationnelles, et principalement la méthode de Galerkin pour mettre en évidence l'importance d'une telle méthode dans les équations aux dérivées partielles.

Chapitre 03 : Description de la méthode des éléments finis de Galerkin.

Chapitre 04 : Consiste à une formulation numérique dans laquelle on étudiera quelques équations de l'électromagnétisme pour des formes données par la méthode des éléments finis de Galerkin.

Chapitre 1

Généralités sur les équations de Maxwell

1.1. Introduction

Dans ce bref chapitre on aborde les notions essentielles pour l'étude des champs électrostatiques, magnétiques et électromagnétiques y compris le phénomène de diffraction des ondes électromagnétiques planes, mais d'une manière non exhaustive.

Afin de comprendre les phénomènes électromagnétiques comme le phénomène de diffraction (traité dans le chapitre 4) il faut résoudre les équations de Maxwell qui les traduisent. Donc, on se trouve devant des équations aux dérivées partielles à résoudre qui prennent une forme standard comme on la verra à la fin de ce chapitre.

Dans la plupart des cas la solution analytique est impossible de la trouver pour ce type d'équations [2]. On fait recours donc, aux méthodes numériques efficaces comme la méthode des éléments finis de Galerkin qui fait l'objet de notre travail.

1.2. Le champ électromagnétique

- **Propriétés du champ électrostatique**

Dans les états stationnaires, le champ électrique est appelé champ électrostatique. Le champ électrostatique \vec{E} créé par une distribution de charges de densité ρ située dans le vide, est à circulation conservative, c'est-à-dire qu'il satisfait les relations intégrale et locale [3]

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.1.a)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \quad (1.1.b)$$

où (Γ) est un contour fermé quelconque orienté.

Il satisfait également les relations intégrale et locale

$$\iint_{(S \text{ fermée})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \quad (1.2.a)$$

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2.b)$$

où (S) est une surface fermée quelconque orientée vers l'extérieur et (τ) est le volume intérieur à (S) . $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$ est la permittivité du vide.

1.2.1. Champ électromoteur et vecteur densité de courant

- **Le champ électromoteur**

Lorsqu'un courant électrique circule dans un conducteur, cela implique l'existence d'une force dite de Laplace \vec{f}_m agissant sur les porteurs de charge q et l'on définit le champ électromoteur \vec{E}_m par la relation

$$\vec{E}_m = \frac{\vec{f}_m}{q} \quad (1.3)$$

La circulation de ce champ le long d'un contour fermé orienté (Γ) n'est pas conservative c'est-à-dire qu'elle est différente de zéro. Par définition cette circulation est appelée la force électromotrice e relative au contour considéré

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad (1.4)$$

On peut bien entendu définir la f.é.m. relative à un tronçon \widehat{AB} orienté, non fermé

$$e = \int_{\widehat{AB}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad (1.5)$$

- **Le vecteur densité de courant**

Un courant électrique correspond à des charges électriques mobiles. On appelle vecteur densité de courant \vec{j} , le vecteur tangent à la ligne de courant, et défini par [4]

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1.6)$$

où ρ est la densité volumique de charges mobiles et \vec{v} la vitesse d'entraînement de ces charges mobiles. Le module de ce vecteur représente la charge qui traverse par unité de temps, l'unité de surface perpendiculaire à la direction de déplacement des charges mobiles; il s'exprime en $A.m^{-2}$.

En régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque le vecteur densité de courant \vec{j} est indépendant du temps, le flux de \vec{j} est conservatif [5] ce qui se traduit par les relations intégrale et locale

$$\iint_{(S \text{ fermé})} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.7.a)$$

$$\text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (1.7.b)$$

1.2.2. Le champ magnétique

Le champ magnétique \vec{B} créé par une distribution de courants de densité \vec{j} est à flux conservatif, c'est-à-dire qu'il satisfait les relations intégrale et locale [3]

$$\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.8.a)$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (1.8.b)$$

où (S) est une surface fermée quelconque.

Le champ magnétique \vec{B} satisfait les relations intégrale et locale

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.9.a)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \quad (1.9.b)$$

où (Γ) est un contour fermé et orienté quelconque et (S) une surface quelconque s'appuyant sur (Γ) et orientée à partir de (Γ) par la règle dite du "tire-bouchon de Maxwell" ou "du bonhomme d'Ampère". $\mu_0 = 1.2566370614 \times 10^{-6} \text{NA}^{-2}$ est la perméabilité magnétique du vide.

1.3. Le régime variable

1.3.1. Le phénomène de propagation [3]

Considérons un ensemble constitué par des circuits parcourus par des courants et par des distributions de charge variant en fonction du temps ; cet ensemble pouvant être au repos ou en mouvement. Au voisinage de ces distributions règnent un champ électrique et un champ magnétique. Contrairement au cas stationnaire, ces champs ne sont pas synchrones avec les sources, c'est-à-dire qu'à un instant t donné, ces champs dépendent des valeurs des sources à l'instant $t - \theta$; nous exprimons ce fait en disant qu'il y a propagation à vitesse finie des champs à partir des sources qui leur donnent naissance et le retard θ est d'autant plus grand que le point où l'on désire connaître les champs est éloigné des sources.

1.3.2. Le phénomène d'induction [5]

Un circuit filiforme au repos et parcouru par un courant invariable n'entraîne l'apparition d'aucune f.é.m. ou d'aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos. Il n'en est pas de même si le courant varie ou si les circuits en présence se déplacent l'un par rapport à l'autre : la f.é.m. ou le courant qui apparaissent sont dus au phénomène d'induction. Ce phénomène entraîne l'apparition d'un champ électrique supplémentaire (appelé champ induit); ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique.

1.3.3. Le phénomène de capacité [3]

Un circuit comprenant un condensateur alimenté par une source de tension variable en fonction du temps, est parcouru par un courant variable bien que la continuité électrique soit interrompue par l'espace entre les armatures du condensateur. Dans ce cas l'intensité du courant n'est plus conservée tout au long du circuit puisqu'elle est nulle dans l'espace entre les armatures. Il n'est donc plus possible d'appliquer le théorème d'Ampère. Pour conserver la validité de ce dernier, nous serons amenés à introduire un courant "fictif" appelé courant de déplacement.

1.4. L'induction électromagnétique

1.4.1. Loi de Faraday-Lenz

On peut induire une f.é.m dans un circuit filiforme (C) fermé en faisant varier le flux magnétique à travers le circuit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique [3].

Pendant un temps dt , la variation du flux magnétique total à travers une surface quelconque s'appuyant sur le circuit (C) est $d\Phi$; la f.é.m. induite e s'exprime à l'aide de la loi de Faraday

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.10)$$

Cette loi, établie expérimentalement pour des variations relativement lentes du flux magnétique en fonction du temps, est valable pour tout régime variable et elle sert de base à l'étude de l'électromagnétisme classique.

Puisque une f.é.m. apparaît dans le circuit (C) et y fait circuler un courant ceci implique l'existence d'un champ électromoteur agissant sur les porteurs de charge du circuit (C). Ce champ est appelé champ électrique induit.

1.4.2. Equation de Maxwell-Faraday

Considérons un circuit (C) au repos soumis à un champ variable. Un champ électrique va prendre naissance dans tout l'espace où existe un champ magnétique variable. Le champ électrique induit joue un rôle de champ électromoteur et la f.é.m. apparaissant dans tout le circuit (C) peut s'écrire

$$e = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.11)$$

où (S) est une surface orientée s'appuyant sur le contour orienté (C)

En permutant les opérateurs d'intégration et de dérivation on a

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial(\vec{B} \cdot d\vec{S})}{\partial t} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1.12)$$

car le circuit (C) étant immobile, la surface (S) l'est aussi et $d\vec{S}$ est indépendant du temps. En appliquant le théorème de Stokes nous pouvons écrire

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}(\vec{E}_i) \cdot d\vec{S} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1.13)$$

Cette égalité étant satisfaite quel que soit (S) s'appuyant sur (C), il en résulte

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}_i) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.14)$$

Remarquons que s'il existe en plus du champ électrique induit un champ électrostatique $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_s$. Le champ total satisfait encore la relation ci-dessus car

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E_S}) = \vec{0} \quad (1.15. a)$$

et on a la relation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E}) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \quad (1.15. b)$$

En définitive, nous devons retenir de l'étude du phénomène d'induction électromagnétique le résultat fondamental suivant : en chaque point de l'espace où existe un champ magnétique variable nous devons associer un champ électrique induit variable à circulation non conservative c'est-à-dire ne dérivant pas d'un potentiel. L'ensemble de ces deux champs constitue le champ électromagnétique.

1.5. Le théorème d'Ampère

1.5.1. Equation de continuité

Si on considère une surface fermée (S) entourant un volume (τ). Si ρ est la charge volumique et q la charge totale du volume (τ) à l'instant t ; on a

$$q = \iiint_{(\tau)} \rho d\tau \quad (1.16)$$

Pendant l'intervalle de temps dt , la variation de la charge totale est dq et on a

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(\tau)} \rho d\tau \right) \quad (1.17)$$

mais $\iint_{(S \text{ ferm } \acute{e})} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ représente la charge totale sortant de la surface (S) par unité de temps, donc par suite de la conservation de la charge

$$\frac{dq}{dt} = - \iint_{(S \text{ ferm } \acute{e} \acute{e})} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.18)$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(\tau)} \rho d\tau \right) = - \iint_{(S \text{ ferm } \acute{e} \acute{e})} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.19)$$

En changeant l'ordre des opérations par rapport à l'espace et par rapport au temps, on a

$$\iiint_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \iint_{(S \text{ fermée})} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.20)$$

or, d'après le théorème d'Ostrogradesky

$$\iint_{(S \text{ fermée})} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \text{div}(\vec{j}) d\tau \quad (1.21)$$

donc

$$\iiint_{(\tau)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) \right] d\tau = 0 \quad (1.22)$$

Cette équation dite de continuité traduit la conservation de la charge électrique et montre que le flux du vecteur densité de courant n'est plus conservatif comme dans le cas des états stationnaires [5], ce qui se traduit localement par

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.23)$$

où ρ représente la densité volumique de charges. L'équation de continuité peut alors s'écrire

$$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E})) = \text{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.24)$$

On voit que la relation fondamentale de conservation du flux de la densité de courant sera conservée si on l'applique à une densité de courant total \vec{j}_T égale à la somme de la densité de courant vrai \vec{j} (appelé courant de conduction) et d'une densité de courant fictif appelé courant de déplacement et défini par

$$\vec{j}_D = \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} \quad (1.25)$$

d'où $\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_D = \vec{j} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t}$ et $\text{div}(\vec{j}_T) = 0$

1.5.2. Le théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère peut être généralisé à condition de l'appliquer au courant total. La relation de Maxwell-Ampère qui en est la traduction s'écrit

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.26)$$

La relation intégrale du théorème d'Ampère généralisé est

$$\oint_{(\Gamma)} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{j}_T \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \left(\vec{j} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (1.27)$$

1.6. Résumé des équations :

En dehors des discontinuités, les équations de Maxwell s'écrivent

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss pour \vec{E}	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\iint_{(s \text{ ferm } \acute{e})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau$
Théorème de Gauss pour \vec{B}	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Loi de Faraday	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Théorème d'Ampère-Maxwell	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$

Table 1.1 : Tableau des équations de Maxwell

1.7. Propagation des ondes électromagnétique dans le vide

1.7.1. Equation de propagation pour \vec{E} et \vec{B}

En absence de charges et de courant, les équations de Maxwell s'écrivent [3]

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 \quad (1.28)$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (1.29)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.30)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.31)$$

Pour établir l'équation relative au champ électrique \vec{E} , on doit éliminer le champ magnétique \vec{B} . Pour cela, calculons le rotationnel de chacun des membres de la loi de Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (1.32)$$

en permutant l'ordre des dérivations, on obtient

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\} \quad (1.33)$$

Sachant que

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}} \operatorname{div}(\vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (1.34)$$

où Δ est le laplacien vectoriel, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivant

$$\Delta \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\operatorname{div}(\vec{E})) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\} \quad (1.35)$$

Comme en dehors des charges

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0$$

On obtient finalement

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.36)$$

Pour établir l'équation aux dérivées partielles pour le champ magnétique \vec{B} , calculons le rotationnel de chacun des membres du théorème d'Ampère-Maxwell

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\operatorname{div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\left\{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\} \quad (1.37)$$

mais

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = 0$$

et en inversant l'ordre des dérivation

$$-\Delta \vec{B} = +\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\text{rot}(\vec{E})] \quad (1.38)$$

or

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donc

$$-\Delta \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (1.39)$$

ou encore

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.40)$$

On obtient la même expression que pour le champ électrique. Donc

$$\Delta \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (1.41)$$

qui constitue l'équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide, où on a posé $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

1.8. Réflexion et transmission des ondes électromagnétique

1.8.1. Equation de maxwell dans les milieux parfaits

Nous supposons que l'onde se propage dans un milieu illimité satisfaisant les conditions suivantes (milieu parfait)

- Le milieu est considéré comme continu; ce qui est légitime pour les ondes habituellement rencontrées (hertziennes et lumineuses) dont les longueurs d'onde sont, en général, très supérieures aux distances interatomiques.
- Le milieu est homogène et isotrope.
- Le milieu peut être caractérisé par une permittivité ε et une perméabilité μ et une conductivité γ constantes égales à celles définies en régime stationnaire (milieu linéaire).

Ces hypothèses simplificatrices permettent de traiter un grand nombre de problèmes; il faut toutefois signaler qu'elles ne tiennent pas compte des phénomènes d'absorption, d'hystérésis et de dispersion (ϵ , μ et γ peuvent alors être complexes et dépendre de la fréquence).

Dans le cas des milieux homogènes, linéaires et isotopes, les équations de Maxwell deviennent

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss pour \vec{E}	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_{\text{libres}}}{\epsilon}$	$\iint_{(s \text{ ferm } \acute{e})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho_{\text{libres}}}{\epsilon} d\tau$
Théorème de Gauss pour \vec{B}	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Loi de Faraday	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Théorème d'Ampère-Maxwell	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \left(\mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$

Table 1.2 : Tableau des équations de Maxwell pour un milieu homogène, linéaire et isotrope

où

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ est la permittivité absolue du milieu diélectrique.

ϵ_r est la permittivité relative du milieu diélectrique.

$\epsilon_0 = 8.8541817 \times 10^{-12} \text{ Fm}$ est la permittivité du vide.

$\mu = \mu_0 \mu_r$ est la perméabilité absolue du milieu.

$\mu_0 = 1.2566370614 \times 10^{-6} \text{ NA}^{-2}$ est la perméabilité magnétique du vide.

En tout point d'un conducteur, il existe une relation entre le vecteur densité de courant \vec{j} et le champ électrique total \vec{E} (somme du champ électrostatique \vec{E}_S et du champ électromoteur \vec{E}_m) dite relation d'Ohm Kirchhoff

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E}_S + \vec{E}_m) \quad (1.42)$$

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \quad (1.43)$$

où γ est la conductivité du milieu conducteur.

Cas particulier

- Isolant, $\gamma = 0$.
- Conducteur parfaits, $\gamma \rightarrow \infty$.

1.8.2. Propagation dans les milieux diélectrique [5]

Les milieux diélectriques sont des milieux isolants. Leur conductivité est extrêmement faible, de l'ordre de 10^{-20} à 10^{-12} ($\Omega \cdot m^{-1}$), celle d'un conducteur métallique étant de l'ordre de 10^7 ($\Omega \cdot m^{-1}$), à température ambiante. Il est donc tout à fait raisonnable de prendre pour γ la valeur $\gamma = 0$. Par ailleurs dans un tel milieu $\rho_{libres} = 0$.

Les équations de Maxwell se simplifient alors en

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 \quad (1.44)$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (1.45)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.46)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.47)$$

En utilisant la même démarche que dans le paragraphe 1.7, on peut montrer que le champ électrique et le champ magnétique satisfont les équations de propagation suivantes

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.48)$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.49)$$

où la vitesse de propagation de l'onde est

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad (1.50)$$

$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ est l'indice de réfraction (ou indice optique) du milieu. Dans les milieux réels n est constant pour les grandes longueurs d'onde, tandis que pour les hautes fréquences il faut faire intervenir le phénomène de dispersion qui entraîne une dépendance de n avec la fréquence.

Dans la plupart des diélectriques $\mu_r = 1$, $n = \sqrt{\mu_r}$, d'où on peut également montrer que l'impédance caractéristique d'un tel milieu peut s'écrire

$$Z = \frac{Z_0}{n} \quad (1.51)$$

où Z_0 est l'impédance caractéristique du vide.

1.8.3. Relation de passage

- **Composante tangentielle et composant normale de \vec{E}**

A la traversée d'une surface (Σ) séparant deux milieux et portant des charges avec une densité superficielle σ , les relations locales s'écrivent

$$\vec{E}_{T1} - \vec{E}_{T2} = 0 \quad (1.52)$$

$$\varepsilon_2 E_{N2} - \varepsilon_1 E_{N1} = \sigma \quad (1.53)$$

où \vec{E}_T est la composante de \vec{E} dans le plan tangent à (Σ) en M , tandis que E_N mesure de la composante de \vec{E} suivant la normale \vec{n} en M et orientée du milieu (1) vers le milieu (2).

- **Composante tangentielle et composant de \vec{B}**

A la traversée d'une surface (Σ) séparant deux milieux et parcourue par des courants vrais de densité superficielle \vec{j}_S , les relations locales \vec{B} deviennent

$$B_{N2} = B_{N1} \quad (1.54)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{T2} - \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{T1} = \vec{j}_S \times \vec{n} \quad (1.55)$$

où B_N est la composante de \vec{B} suivant la normale au point M considéré orientée du milieu (1) vers le milieu (2); tandis que B_T est la composante de \vec{B} dans le plan tangent à (Σ) en M .

1.8.4. Lois de Snell-Descartes [3]

Considérons deux milieux 1 et 2, parfaits, isolants, non magnétiques et semi-infinis, caractérisés respectivement par $\varepsilon_1, \mu_1 = \mu_0, \gamma_1 = 0$ et par $\varepsilon_2, \mu_2 = \mu_0, \gamma_2 = 0$, et séparés par une interface plane.

Nous étudierons le cas d'une onde incidente polarisée rectilignement.

Définissons un trièdre de référence par une origine O appartenant au plan séparant les deux milieux, l'axe Oz étant perpendiculaire à ce plan et l'axe Oy étant tel que le plan xOy contienne le vecteur \vec{k}_1 de l'onde incidente. En appelant \vec{u}_1, \vec{u}'_1 et \vec{u}_2 les vecteurs unitaires des supports des vecteurs champs électriques des différentes ondes (Figure 1.1), nous pouvons représenter ces dernières en notation complexe par

- Onde incidente $\vec{E}_1 = E_{01} \vec{u}_1 e^{j(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1)}$
- Onde réfléchie $\vec{E}'_1 = E'_{01} \vec{u}'_1 e^{j(\omega'_1 t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r}_1)}$
- Onde transmise $\vec{E}_2 = E_{02} \vec{u}_2 e^{j(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2)}$

Dans ces expressions E_{01}, E'_{01} et E_{02} sont les amplitudes complexes des différents champs électriques. En un point quelconque M_0 du plan xOy tel que $\vec{OM}_0 = \vec{r}_0$, les ondes sont représentées par

- Onde incidente $\vec{E}_1 = E_{01} \vec{u}_1 e^{j(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0)}$
- Onde réfléchie $\vec{E}'_1 = E'_{01} \vec{u}'_1 e^{j(\omega'_1 t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r}_0)}$
- Onde transmise $\vec{E}_2 = E_{02} \vec{u}_2 e^{j(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0)}$

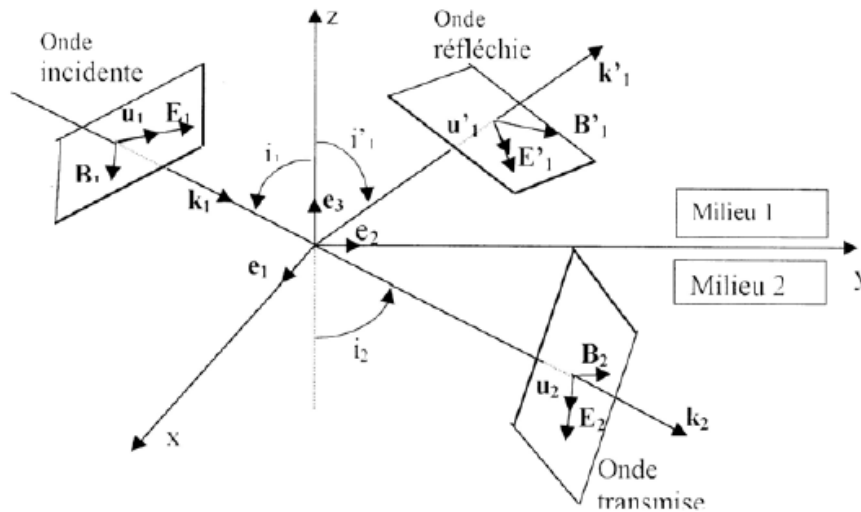


Fig.1.1 : Diffraction d'une onde plane

La continuité de la composante tangentielle du champ entraîne une relation entre les composantes tangentielles de la forme

$$\vec{a}_1 E_{01} e^{j(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0)} + \vec{a}'_1 E'_{01} e^{j(\omega'_1 t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r}_0)} = \vec{a}_2 E_{02} e^{j(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0)}$$

Pour que cette relation soit satisfaite à chaque instant en tout point M_0 de la surface de séparation, il faut que

$$\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0 = \omega'_1 t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r}_0 = \omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0$$

ce qui implique

$$\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2 \quad \text{et que} \quad \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0 = \vec{k}'_1 \cdot \vec{r}_0 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0$$

La dernière relation conduit à

$$(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_0 = 0$$

qui seront satisfaites quel que soit le point M_0 si $(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1)$ et $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$ sont perpendiculaires au plan xOy , c'est à dire si \vec{k}_1 , \vec{k}'_1 et \vec{k}_2 sont coplanaires ces trois vecteurs appartiennent au plan d'incidence (\vec{k}_1, \vec{e}_3) .

En prenant $\vec{r}_0 = \vec{e}_2$

$$\vec{k}'_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{k}_1 \cdot \vec{e}_2 \Rightarrow k'_1 \sin(i'_1) = k_1 \sin(i_1) \quad (1.56)$$

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{k}_1 \cdot \vec{e}_2 \Rightarrow k_2 \sin(i_2) = k_1 \sin(i_1) \quad (1.57)$$

or

$$\vec{k}_1 = \frac{\omega}{v_1}, \vec{k}'_1 = \frac{\omega}{v_1} \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

$$\sin(i'_1) = \sin(i_1) \Rightarrow i'_1 = i_1 \quad (1.58)$$

$$\frac{\sin(i_2)}{V_2} = \frac{\sin(i_1)}{V_1} \quad (1.59)$$

En multipliant les deux membres de la dernière relation par c (vitesse de propagation dans le vide) et en faisant intervenir les indices des milieux, on obtient

$$n_1 \sin(i_2) = n_2 \sin(i_1)$$

En définitive nous avons montré que

- Les ondes réfléchi et transmise ont même fréquence que l'onde incidente ;
- Les vecteurs d'onde réfléchi et transmis sont dans le plan d'incidence (plan et la normale à la surface de séparation au point d'incidence) ;
- L'angle de réflexion i'_1 est égal à l'angle d'incidence i_1 ;
- Les angles de transmission i_2 et d'incidence i_1 il sont liés par $n_1 \sin(i_2) = n_2 \sin(i_1)$ (loi de la réfraction).

Ces résultats représentent les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction.

1.9. Forme standard des équations de l'électromagnétisme

D'après tout ce qui précède on peut reformuler toutes les équations de l'électromagnétisme (en régimes stationnaire et non stationnaire) qui sont des équations aux dérivées partielles sous la forme générale [6]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \beta u = g \quad (1.60)$$

ou $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta, g$ sont on générale des fonction en x, y, z

Cette forme sera exploitée dans le calcul numérique par éléments finis de la solution de cette équation (voir chapitre 4).

1.10. Conclusion

Pour n'est pas être exhaustif, on a exposé dans ce chapitre des notions principales sur les équations de Maxwell et leur utilisation dans les phénomènes de propagation et diffraction des ondes.

On a aussi présenté la forme standard qui peut la prendre toutes les équations de l'électromagnétisme en régimes stationnaire et non stationnaire. Cette forme on l'utilisera dans le chapitre 4 pour résoudre ces équations numériquement par la méthode des éléments finis de Galerkin. La présentation de cette méthode fait l'objet des chapitres 2 et 3.

Chapitre 2

Méthodes des résidus pondérés : Méthode de Galerkin

2.1. Introduction

On a présenté dans le chapitre précédent des notions générales sur l'électromagnétisme, et on a vu que toutes les équations qui se dérivent des équations de Maxwell s'écrivent sous une forme standard, celle de l'équation (1.60). On présente dans ce chapitre quelques méthodes de résolution de telles équations. Ces sont principalement les méthodes des résidus pondérés. Ces méthodes, notamment la méthode de collocation par point, la méthode des moindres carrés et la méthode de Galerkin sont présentées à l'aide des exemples. Ces exemples permettent de tirer au clair les inconvénients et les avantages de chaque méthode. La méthode de Galerkin fait l'axe de notre travail. On va exposer donc les principes de la méthode de Galerkin d'une façon un peu vaste pour mettre en évidence l'importance d'une telle méthode dans les équations aux dérivées partielles.

2.2. Méthodes des résidus pondérés

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles la plupart des ingénieurs utilisent une méthode dite des différences finis à raison de sa simplicité théorique et informatique [7]. Une telle méthode est basée sur une formulation approchée des dérivées apparaissant dans les équations différentielles ou aux dérivées partielles. La méthode consiste principalement à mailler le domaine géométrique puis à construire un schéma aux différences en tout point du maillage ou grille. Un système d'équations algébriques est ainsi obtenu. La résolution du système d'équations permet de déterminer la solution approchée du problème.

Dans le cas des méthodes intégrales le procédé est tout autre. Au lieu d'approcher la dérivée en tout point du maillage on construit une approximation globale sur tout le domaine d'intégration ou sur des sous-domaines. La solution est donnée sous forme d'interpolation polynomiale ou trigonométrique. La précision est donnée par le nombre de paramètres de l'approximation choisie.

Une fois l'approximation est choisie on construit une équation intégrale, ou forme intégrale, spécifique à la méthode adoptée. La substitution de la valeur de l'approximation dans l'équation intégrale permet d'obtenir un système d'équations algébriques dont les inconnues sont les paramètres de l'approximation.

La figure 2.1 montre les principales étapes de la méthode utilisant des équations aux intégrales. On distingue deux types de méthodes utilisant des équations intégrales : les méthodes de résidu pondéré et les méthodes variationnelles. On étudie dans ce chapitre la méthode des résidus pondérés. Les étapes de la méthode sont données par l'organigramme de la figure 2.1.

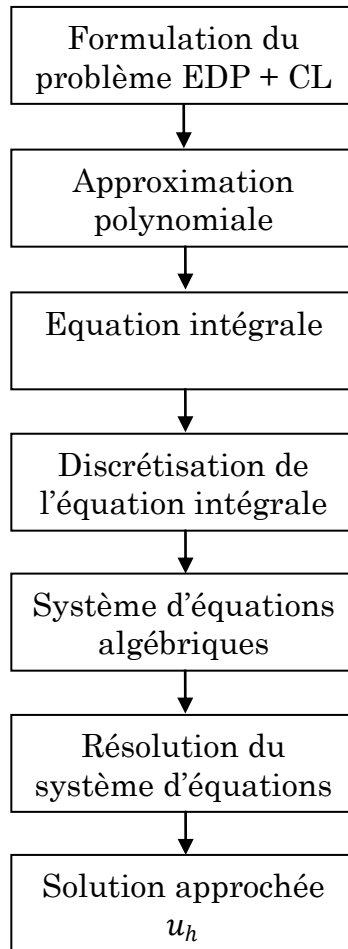


Fig 2.1 : Les principales étapes de la méthode des résidus pondérés utilisant des équations aux intégrales.

où EDP : équation aux dérivées partielle et CL : conditions aux limites ; u_h
Solution approchée

2.2.1. Formulation du problème

Dans cette étape on suppose que le problème est formulé par des équations aux dérivées partielles ou par des équations différentielles ordinaires. Les types de ces problèmes concernent aussi bien le problème de valeur limites, les problèmes de valeur initiale et les problèmes de vibration.

La formulation de tels problèmes se fait localement sur un élément différentiel $d\Omega$ du domaine d'intégration Ω . Il est avantageux dans ce chapitre de

présenter les équations aux dérivées partielles en utilisant la notation classique des opérateurs différentiels

$$Lu + f = 0 \quad \text{soit } u \in \Omega \quad (2.1)$$

$$Cu = g \quad \text{sur la frontière } \partial\Omega \quad (2.2)$$

où L et C sont les opérateurs différentiels comme le laplacien Δ , l'hamiltonien ∇ etc..., f et g sont des fonctions données.

L'équation différentielle (2.1) peut être donnée sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaire ou non [8].

L'opérateur est d'ordre n c'est-à-dire que les dérivées intervenant dans l'équation (2.1) sont n fois dérivables qui est aussi l'ordre de l'équation différentielle.

2.2.2. Construction de l'approximation

On se donne une fonction u_h écrite sous forme d'une série à termes finis de type polynomiale ou trigonométrique. Cette fonction doit obier à un certain critère notamment les conditions aux limites, la convergence, la continuité et la régularité [9]. L'approximation u_h est construite en tenant compte des deux types de conditions rencontrées : homogènes et non homogènes [8].

2.2.2.a. Cas des conditions aux limites homogènes

Pour un problème unidimensionnel, l'approximation s'écrit

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(x) \quad (2.3)$$

où μ_i et $\varphi_i(x)$ sont respectivement les paramètres (inconnus) et les fonctions de base (connues) ou termes de la base polynomiale de l'approximation, m est le nombre de paramètres d'approximation

2.2.2.a.1. Construction des fonctions de base

Les fonctions de base $\varphi_i(x)$ peuvent être données par des fonctions polynomiales ou trigonométriques et doivent répondre aux critères suivants [10]

- Elles sont nulles sur les frontières du domaine Ω ;
- Elles sont autant de fois dérivables que ne l'impose l'équation différentielle (2.1) ;
- Elles sont linéairement indépendantes c'est-à-dire qu'elles forment une famille libre ;
- Elles sont déterminées par les équations des frontières

$$f_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

m est le nombre des frontières.

L'équation (2.4) représente l'équation de la $i^{\text{ème}}$ courbe de la frontière S de $\partial\Omega$. Si on considère le produit $S(x)$

$$S(x) = F_1(x)F_2(x) \dots F_m(x) \quad (2.5)$$

Alors les fonctions de base $\varphi_i(x)$ sont construite par le produit $S(x)$ donné par l'équation (2.5) avec des puissances de x qui sont données par

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = S(x) \\ \varphi_2(x) = xS(x) \\ \varphi_3(x) = x^2S(x) \\ \dots \\ \varphi_m(x) = x^{m-1}S(x) \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.2.b. Cas des conditions aux limites non homogènes

L'approximation est donné par

$$u_h(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(x) \quad (2.7.a)$$

où $u_0(x)$ est une fonction qui doit satisfaire le second membre de la condition aux limites non homogène (2.2). on a

$$u_0(x) = g \quad x \in \delta\Omega \quad (2.7.b)$$

2.2.3. Méthodes des résidus pondérés

a. Produit scalaire de fonction [11]

Soient deux fonctions F et G définies pour tout point $M(x, y, z)$ du domaine Ω . On définit le produit scalaire de ces deux fonctions par l'intégrale suivante

$$\langle F, G \rangle = \int_{\Omega} F \cdot G \cdot d\Omega \quad (2.8)$$

b. Théorème d'analyse fonctionnelle [11]

Le produit scalaire a la propriété suivante

Si le produit scalaire de deux fonctions F et G est nul pour toute fonction G alors la fonction F est identiquement nulle. On a

$$\langle F, G \rangle = 0, \quad \forall G \Leftrightarrow F \equiv 0 \quad (2.9)$$

En utilisant la propriété du produit scalaire ci-dessus on obtient le résultat important suivant

$$\int_{\Omega} F \cdot G \cdot d\Omega = 0 \quad \forall G \Leftrightarrow F \equiv 0 \quad (2.10)$$

c. Méthode des résidus pondérés [9]

Soit à former l'équation intégrale suivante

$$\int_{\Omega} v(Lu + f)d\Omega = 0 \quad (2.11)$$

où v est une fonction vectorielle qu'on appelle fonction de pondération ou fonction test. Les fonctions v appartiennent à l'ensemble des fonctions admissibles qui satisfont les conditions limites (2.2) et qui sont dérivables jusqu'à l'ordre m .

La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher des solutions u qui annulent l'équation intégrale (2.11) pour toute fonction v .

D'après le théorème (2.10) on a

$$\int_{\Omega} v(Lu + f)d\Omega = 0 \quad \forall v \Leftrightarrow Lu + f \equiv 0 \quad (2.12)$$

Le résultat ci-dessus montre que la formulation (2.1) du problème est équivalente à la formulation intégrale $\int_{\Omega} v(Lu + f)d\Omega = 0$.

Toute solution de l'une est solution de l'autre. La résolution du problème donné par des équations aux dérivées partielles est équivalente à la résolution de l'équation intégrale suivante

$$\int_{\Omega} v(Lu + f)d\Omega = 0 \quad \forall v \quad (2.13)$$

La conséquence de cette formulation amène les deux remarques suivantes

- Si l'ensemble des fonctions v est arbitraire, les formulations différentielles et intégrales sont équivalentes c'est-à-dire que toute solution de (2.13) est solution de (2.1).
- Si l'ensemble des fonctions v est fini, toute solution de l'équation intégrale est alors une solution approchée u_h et ne satisfait pas exactement (2.1) en tout point du domaine Ω . La solution approchée u_h , substituée dans l'équation (2.1), donne le résidu ou erreur, définie par

$$\mathfrak{R}(u_h) = Lu_h + f \quad (2.14)$$

Le résidu est défini sur l'ensemble des points du domaine d'intégration Ω pour toute solution $u_h(x)$. Le résidu s'annule en tout point du domaine où la solution est exacte et prend des valeurs proches de zéro aux points où la solution est approchée.

La formulation intégrale s'écrit alors

$$\int_{\Omega} v_i \cdot \mathfrak{R}(u_h)d\Omega = 0 \quad v_i \text{ ensemble finis, } i = 1, \dots, m \quad (2.15)$$

L'expression (2.15) constitue la formulation intégrale de la méthode des résidus pondérés.

2.2.4 . Discrétisation de l'équation intégrale

L'approximation u_h et la fonction test v ont un nombre fini de termes. Ce nombre doit être identique pour les deux fonctions et égale au nombre de paramètres μ_i . En substituant ces deux fonctions dans l'équation intégrale (2.15), on

obtient un système d'équation algébriques dont le nombre est égal au nombre des paramètres de l'approximation.

En effet soit à considérer la fonction test v écrite sous la forme (2.3)

$$v(x) = \beta_1 v_1(x) + \beta_2 v_2(x) + \dots + \beta_m v_m(x) \quad (2.16)$$

où

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ sont des constantes arbitraires.

Sous la forme matricielle la relation (2.16) s'écrit

$$v(x) = [v]\{\beta\} = \{\beta\}^T [v]^T \quad (2.17)$$

où

$$[v(x)] = [v_1(x) \quad v_2(x) \quad \dots \quad v_m(x)]$$

$$\{\beta\}^T = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_m]$$

De même l'approximation (2.3) s'écrit sous forme matricielle

$$u_h(x) = [\varphi(x)]\{\mu\} \quad (2.18)$$

où

$$[\varphi(x)] = [\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_m(x)]$$

$$\{\mu\} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_m]^T$$

L'équation intégrale (2.15) s'écrit alors

$$\{\beta\}^T \int_{\Omega} \{v\} \cdot \mathfrak{R} d\Omega = 0 \quad (2.19)$$

Cette dernière relation est vérifiée quelque soit β_i , $i = 1, \dots, m$ soit

$$\int_{\Omega} \{v\} \cdot \mathfrak{R} d\Omega = 0 \quad (2.20)$$

Sous forme matricielle, le résidu s'écrit

$$\mathfrak{R} = L([v]\{\mu\}) + f \quad (2.21)$$

d'où en substituant dans l'équation (2.20)

$$\left[\int_{\Omega} \{v\} L[\varphi] d\Omega \right] \cdot \{\mu\} = - \int_{\Omega} \{v\} f d\Omega \quad (2.22)$$

qui s'écrit sous la forme d'un système d'équations

$$\{F\} = [K]\{\mu\} \quad (2.23)$$

où

$$[K] = \int_{\Omega} \{v\}[\varphi]d\Omega$$

$$\{F\} = - \int_{\Omega} \{v\}f d\Omega$$

$[K]$ et $\{F\}$ sont appelés en général matrice de rigidité et vecteur sollicitation

Le système d'équation algébrique (2.23) représente la discrétisation de l'équation intégrale par la méthode des résidus pondérés. C'est un système de m équation à m inconnus μ_i , m est le nombre de paramètres de l'approximation.

Selon la valeur de la fonction de test on obtient les méthodes de résidus pondérés

- a) La méthode de collocation par points ;
- b) La méthode de moindres carrés ;
- c) La méthode de Galerkin.

2.2.5 . La méthode de collocation par points[16]

Dans la méthode de collocation par points les fonctions test φ_i sont données par les fonctions de Dirac

$$v_i(x) = \delta(x - x_i) \quad (2.24)$$

où x_i représente la position du point de collocation.

Les points de collocation x_i sont des points géométriques du domaine Ω . Ils sont choisis selon les critères principaux suivants

- La symétrie du problème,
- Le nombre de points de collocation doit être égal au nombre de paramètre de l'approximation et ce pour avoir autant d'équations que d'inconnues intervenant dans l'approximation u_h .

En utilisant la propriété de la fonction de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_i)f(x)dx = f(x_i) \quad \forall f(x) \quad (2.25)$$

on obtient le résultat important suivant

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) \mathfrak{R}(x) dx = \mathfrak{R}(x_i) = 0 \quad (2.26)$$

Pour l'ensemble des m composantes de la fonction test $[v]$,

$$\delta(x - x_1), \delta(x - x_2), \dots, \delta(x - x_m),$$

L'équation (2.26) s'écrit

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) \mathfrak{R}(x) dx = \mathfrak{R}(x_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.27)$$

Soit

$$\mathfrak{R}(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.28)$$

L'équation ci-dessus définit la méthode de collocation par points : on obtient un système d'équation ou chaque équation est obtenue par l'annulation du résidu au point de collocation. Sous forme matricielle, la relation (2.28) s'écrit

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta(x - x_1) \\ \delta(x - x_2) \\ \dots \\ \delta(x - x_m) \end{Bmatrix} \left(L[\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_m(x)] \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{Bmatrix} + f \right) dx = 0 \quad (2.29)$$

En faisant sortir le vecteur $\{\mu\}$, indépendant de x , à l'extérieur de l'intégrale puis en distribuant l'opérateur L sur chacun des termes de la matrice polynômiale, l'équation (2.29) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \delta(x - x_1) L(\varphi_1(x)) dx & \int_{\Omega} \delta(x - x_1) L(\varphi_2(x)) dx & \dots & \int_{\Omega} \delta(x - x_1) L(\varphi_m(x)) dx \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_2) L(\varphi_1(x)) dx & \int_{\Omega} \delta(x - x_2) L(\varphi_2(x)) dx & \dots & \int_{\Omega} \delta(x - x_2) L(\varphi_m(x)) dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_m) L(\varphi_1(x)) dx & \int_{\Omega} \delta(x - x_m) L(\varphi_2(x)) dx & \dots & \int_{\Omega} \delta(x - x_m) L(\varphi_m(x)) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \delta(x - x_1) f(x) dx \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_2) f(x) dx \\ \dots \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_m) f(x) dx \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Appliquant la propriété (2.25) de la fonction de Dirac à chacun des termes matriciels on obtient

$$\begin{bmatrix} L\varphi_1(x)|_{x_1} & L\varphi_2(x)|_{x_1} & \dots & L\varphi_m(x)|_{x_1} \\ L\varphi_1(x)|_{x_2} & L\varphi_2(x)|_{x_2} & \dots & L\varphi_m(x)|_{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L\varphi_1(x)|_{x_m} & L\varphi_2(x)|_{x_m} & \dots & L\varphi_m(x)|_{x_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_m) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Le système d'équation (2.31) s'écrit sous la forme connue

$$\{F\} = [K]\{\mu\}$$

avec

$$[K] = \begin{bmatrix} L\varphi_1(x)|_{x_1} & L\varphi_2(x)|_{x_1} & \dots & L\varphi_m(x)|_{x_1} \\ L\varphi_1(x)|_{x_2} & L\varphi_2(x)|_{x_2} & \dots & L\varphi_m(x)|_{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L\varphi_1(x)|_{x_m} & L\varphi_2(x)|_{x_m} & \dots & L\varphi_m(x)|_{x_m} \end{bmatrix}, \quad \{F\} = - \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_m) \end{Bmatrix}$$

On détermine le vecteur $\{\mu\}$ en résolvant le système (2.31) par les méthodes directes comme la méthode d'élimination substitution de Gauss ou les méthodes itératives comme la méthode de sur-relaxation. Une fois le vecteur $\{\mu\}$ déterminé, l'approximation $u_h(x)$ est alors obtenue à l'aide de l'équation (2.18).

Exemple 2.1 [18]

On va résoudre par la méthode de collocation par points le problème de valeurs aux limites

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Examiner le cas où les fonctions de base sont polynomiales et trigonométriques puis on compare la solution trouvée avec la solution exacte

$$u(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

L'opérateur et la fonction f sont déterminés par l'identité

$$Lu + f \equiv \left[\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right] u + x = 0 \quad \text{d'où} \quad L = \left[\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right], \quad f(x) = x$$

Les fonctions de base sont données par

$$\varphi_1(x) = S(x) = x(x-1)$$

$$\varphi_2(x) = S(x) = x^2(x-1)$$

d'où

$$L(\varphi_1) = x^2 - x + 2, \quad L(\varphi_2) = x^3 - x^2 + 6x - 2$$

a. Approximation à un paramètre

L'approximation u_h s'écrit

$$u_h = \varphi_1(x)\mu_1$$

Calcul des termes des matrices $[K]$ et $\{F\}$

On a un seul point de collocation $x_1 = 0.5$.

Le système d'équation $\{F\} = [K]\{\mu\}$ se ramène à une équation

$$F_1 = K_{11}\mu_1$$

Les termes matriciels sont donnés par les équations (3.35) et (3.36)

$$K_{11} = L(\varphi_1(x))|_{x=x_1} = x^2 - x + 2|_{x=0.5} = \frac{7}{4},$$

$$F_1 = -f(x)|_{x=x_1} = -x|_{x=0.5} = -0.5$$

D'où la solution à un paramètre

$$\mu_1 = -\frac{2}{7}$$

$$u_{h_1}(x) = -\frac{2}{7}x(x-1)$$

b. Approximation à deux paramètres

L'approximation u_h s'écrit

$$u_h = \varphi_1(x)\mu_1 + \varphi_2(x)\mu_2$$

Calcul des termes des matrices $[K]$ et $\{F\}$

L'approximation étant à deux paramètres le système d'équation s'écrit

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Les points de collocation sont choisis de manière à conserver le système du problème.

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{4}$$

D'où les termes des matrices $[K]$ et $\{F\}$

$$K_{11} = L(\varphi_1(x_1)) = x^2 - x + 2|_{\frac{1}{4}} = \frac{29}{16}$$

$$K_{21} = L(\varphi_1(x_2)) = x^2 - x + 2 \Big|_{\frac{3}{4}} = \frac{29}{16}$$

$$K_{12} = L(\varphi_2(x_1)) = x^3 - x^2 + 6x - 2 \Big|_{\frac{1}{4}} = -\frac{35}{64}$$

$$K_{22} = L(\varphi_2(x_2)) = x^3 - x^2 + 6x - 2 \Big|_{\frac{3}{4}} = -\frac{151}{64}$$

$$F_1 = -f(x) \Big|_{x=x_1} = -x \Big|_{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$$

$$F_2 = -f(x) \Big|_{x=x_2} = -x \Big|_{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}$$

on obtient le système

$$\begin{bmatrix} 1.8125 & -0.5468 \\ 1.8125 & 2.3593 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{Bmatrix}$$

La résolution par les méthodes numérique donne

$$\mu_1 = -0.189 \quad \mu_2 = -0.172$$

La solution est donc

$$u_{h_2}(x) = -0.189x(x-1) - 0.172x^2(x-1)$$

c. Cas de fonction de base trigonométrique

Les fonctions de base trigonométrique sont données par

$$\varphi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$$

Dans le cas ou on choisit une approximation à deux paramètre, on obtient

$$u_{h_2}(x) = 0.0651 \sin(\pi x) - 0.0102 \sin(2\pi x)$$

Les figures 2.1 et 2.2 montrent les solutions obtenues par la méthode de collocation par points dans le cas ou on utilise une fonction polynomiale ou trigonométrique. Les solutions sont données pour différents paramètres μ . Dans tous les cas l'approximation u_{h_2} à deux paramètres donne une solution plus précise que l'approximation u_{h_1} à un paramètre.

Le tableau 2.1 montre que la précision obtenue pour l'approximation à deux termes est de l'ordre de 1%, tandis que celle obtenue pour l'approximation à un terme atteint 26% au point $x = 0.2$.

Les résultats obtenus montrent que l'approximation polynomiale converge mieux que l'approximation trigonométrique (Fig. 2.2).

x	u_{h_1}	u_{h_2}	u	Erreur relative (%)	
				ϵ_1	ϵ_2
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0	0
0.2	0.0457	0.0357	0.0361	26	0.98
0.4	0.0686	0.0619	0.0628	9.22	1.45
0.6	0.0686	0.0701	0.0710	3.45	1.25
0.8	0.0457	0.0523	0.0525	12.93	0.47
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0	0

Tab. 2.1 : Précision de la méthode de collocation par points

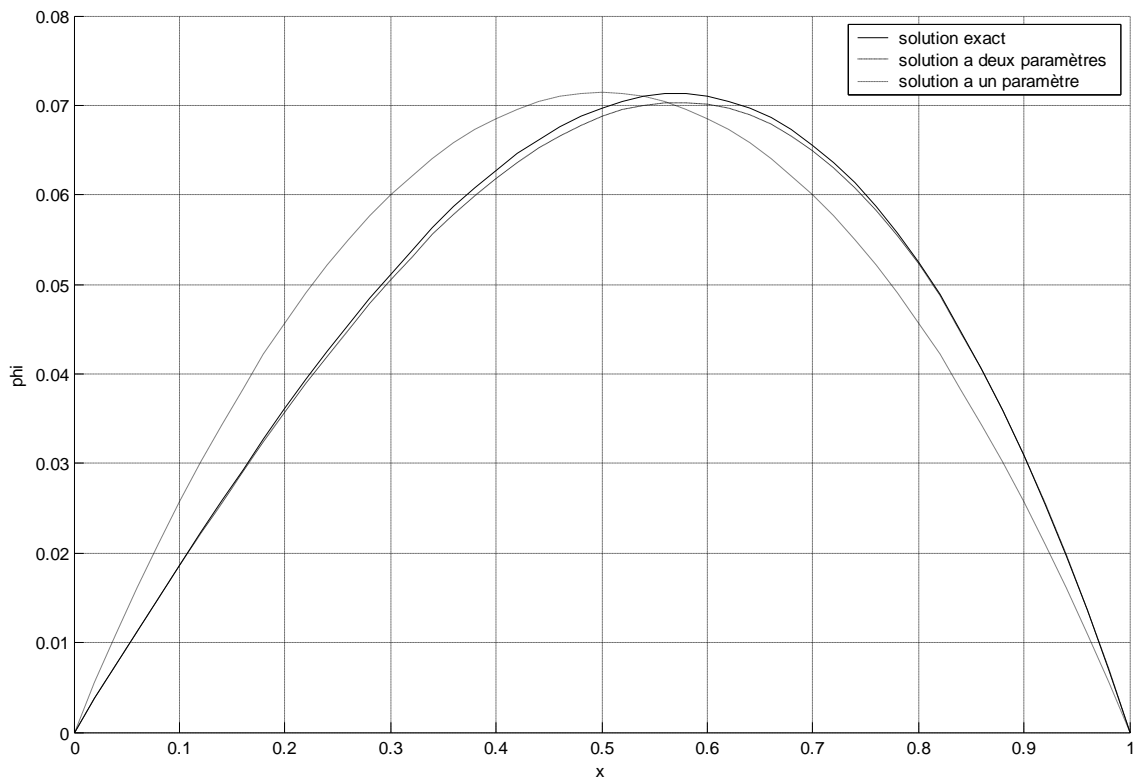


Fig 2.1 : Méthode de collocation par points selon le nombre de paramètres

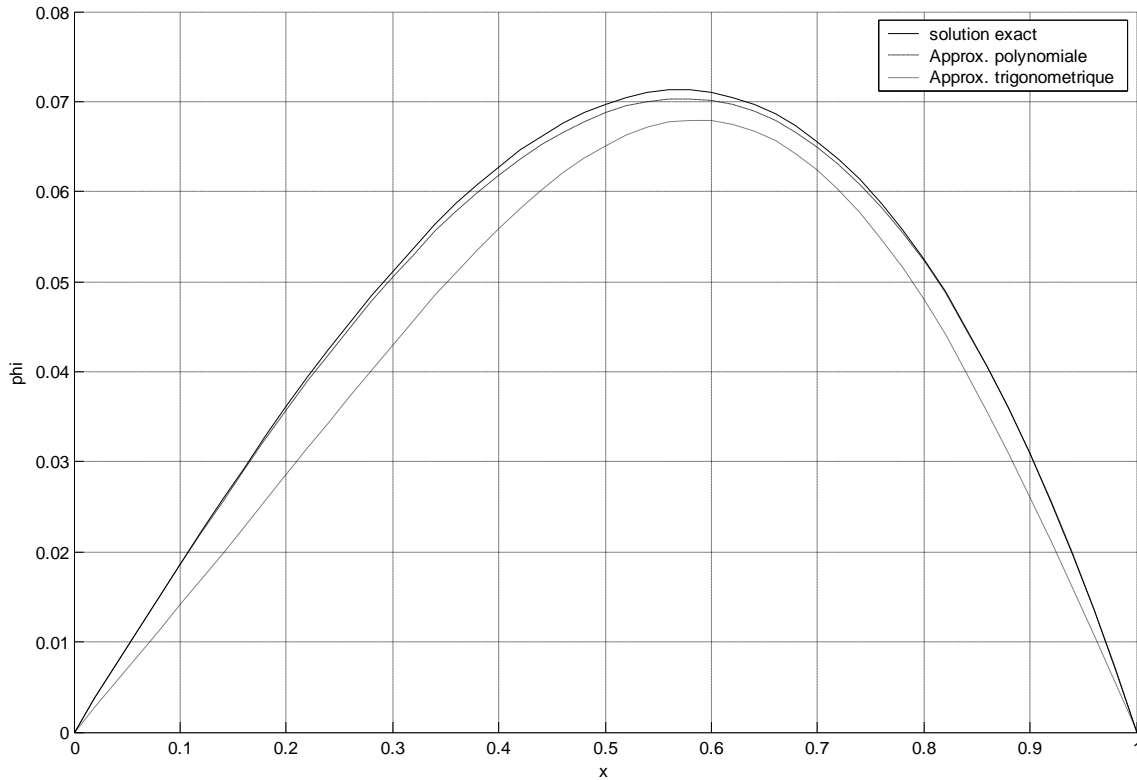


Fig 2.2 : Approximation à deux paramètres de type polynomial et trigonométrique

2.2.6. La méthode des moindres carrés [19]

Soit à former la moyenne du carré du résidu de l'équation différentielle définie sur le domaine Ω

$$J = \int_{\Omega} \mathfrak{R}^2 dx \quad (2.32)$$

La méthode des moindres carrés consiste à rechercher les meilleures valeurs μ_i de l'approximation u_h qui rendent l'intégrale J minimale, soit

$$\frac{\partial J}{\partial \mu_i} = 2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_i} \mathfrak{R} dx = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.33)$$

d'où

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_i} \mathfrak{R} dx = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.34)$$

L'équation (2.34) et l'équation intégrale (2.15) sont équivalentes, la fonction test pour la méthode des moindres carrés est donc égale à

$$v_i = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_i} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.35)$$

Sous forme matricielle l'équation (2.34) s'écrit

$$\int \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_m} \end{Bmatrix} \mathfrak{R} \cdot dx = 0 \quad (2.36)$$

Tenant compte de la valeur du résidu, le terme $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_i}$ s'écrit

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_i} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left(L[\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_m(x)] \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{Bmatrix} + f \right) \quad (2.37)$$

Soit

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_1} = \frac{\partial}{\partial \mu_1} L\varphi_1(x)$$

d'où

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu_m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L\varphi_1(x) \\ L\varphi_2(x) \\ \dots \\ L\varphi_m(x) \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

En substituant le vecteur dérivé donné par l'équation (2.38) dans l'équation intégrale (2.36), on obtient

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} L\varphi_1(x) \\ L\varphi_2(x) \\ \dots \\ L\varphi_m(x) \end{Bmatrix} \left(L[\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_m(x)] \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{Bmatrix} + f \right) dx = 0 \quad (2.39)$$

L'intégrale (2.39) se met sous la forme $\{F\} = [K]\{\mu\}$

avec

$[K] =$

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} L(\varphi_1(x))L(\varphi_1(x))dx & \int_{\Omega} L(\varphi_1(x))L(\varphi_2(x))dx & \dots & \int_{\Omega} L(\varphi_1(x))L(\varphi_m(x))dx \\ \int_{\Omega} L(\varphi_2(x))L(\varphi_1(x))dx & \int_{\Omega} L(\varphi_2(x))L(\varphi_2(x))dx & \dots & \int_{\Omega} L(\varphi_2(x))L(\varphi_m(x))dx \\ \int_{\Omega} L(\varphi_m(x))L(\varphi_1(x))dx & \int_{\Omega} L(\varphi_m(x))L(\varphi_2(x))dx & \dots & \int_{\Omega} L(\varphi_m(x))L(\varphi_m(x))dx \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\{F\} = - \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} L(\varphi_1(x))dx \\ \int_{\Omega} L(\varphi_2(x))dx \\ \dots \\ \int_{\Omega} L(\varphi_m(x))dx \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Exemple 2.2

On va résoudre l'exemple 2.1 par la méthode de moindres carrés en utilisant une approximation à un paramètre et une approximation à deux paramètres.

a. Approximation à un paramètre

Il suffit de calculer les termes des matrices $[K]$ et $\{F\}$ d'après les équations (2.40) et (2.41). on a

$$K_{11} = \int_0^1 L(\varphi_1)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + 2)^2 dx = \frac{101}{30}$$

$$F_1 = - \int_0^1 L\varphi_1 f dx = - \int_0^1 (x^2 - x + 2)x dx = -\frac{11}{12}$$

On a une seule équation

$$F_1 = K_{11}\mu_1$$

sa résolution donne

$$\mu_1 = -0.2722$$

d'où la solution

$$u_h(x) = -0.2722x(x - 1)$$

b. Approximation à deux paramètres

Sachant que

$$L(\varphi_1) = x^2 - x + 2$$

$$L(\varphi_2) = x^3 - x^2 + 6x - 2$$

Les termes des matrices $[K]$ et $\{F\}$ s'écrivent

$$K_{11} = \int_0^1 L(\varphi_1)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + 2)^2 dx = 3.37$$

$$K_{12} = \int_0^1 L\varphi_1 L\varphi_2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + 2)(x^3 - x^2 + 6x - 2) dx = 1.6834$$

$$K_{12} = K_{21} = 1.6834$$

$$K_{22} = \int_0^1 L(\varphi_2)^2 dx = \int_0^1 (x^3 - x^2 + 6x - 2)^2 dx = 3.7428$$

$$F_1 = - \int_0^1 L\varphi_1 f dx = - \int_0^1 (x^2 - x + 2)x dx = -0.9166$$

$$F_2 = - \int_0^1 L\varphi_2 f dx = - \int_0^1 (x^3 - x^2 + 6x - 2)x dx = -0.95$$

d'où en résolvant le système

$$\mu_1 = -0.1875 \quad , \quad \mu_2 = -0.1875$$

La solution approchée est donc

$$u_{h_2}(x) = -0.1875x(x-1) - 0.169x^2(x-1)$$

La solution approchée a deux termes utilisant des fonctions de base trigonométriques est donnée par

$$u_{h_2}(x) = 0.0718 \sin(\pi x) - 0.0083 \sin(2\pi x)$$

Les résultats obtenus sont donnés par les figures 2.3, 2.4 et le tableau 2.2.

La figure 2.3 illustre les résultats obtenus pour différents paramètres μ_i et la comparaison avec la solution exacte. La solution obtenue par l'approximation à deux paramètres est pratiquement confondue avec la solution exacte.

La figure 2.4 montre que pour un même nombre de paramètres l'approximation polynomiale donne une meilleure précision que l'approximation trigonométrique.

Le même ordre de grandeur de l'erreur est obtenu que pour les méthodes précédentes. On obtient une erreur de 4 à 20% dans le cas de l'approximation à un paramètre et une erreur de 2% pour l'approximation à deux paramètres.

x	u_{h_1}	u_{h_2}	u	Erreur relative (%)	
				ϵ_1	ϵ_2
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0	0
0.2	0.04350	0.0354	0.0361	20.65	1.87
0.4	0.06532	0.0613	0.0628	4.05	2.41
0.6	0.06532	0.0694	0.0710	8.01	2.27
0.8	0.04350	0.0517	0.0525	17.04	1.54
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0	0

Tab.2.2 : Précision de la méthode de moindres carrés de l'exemple 2.2.

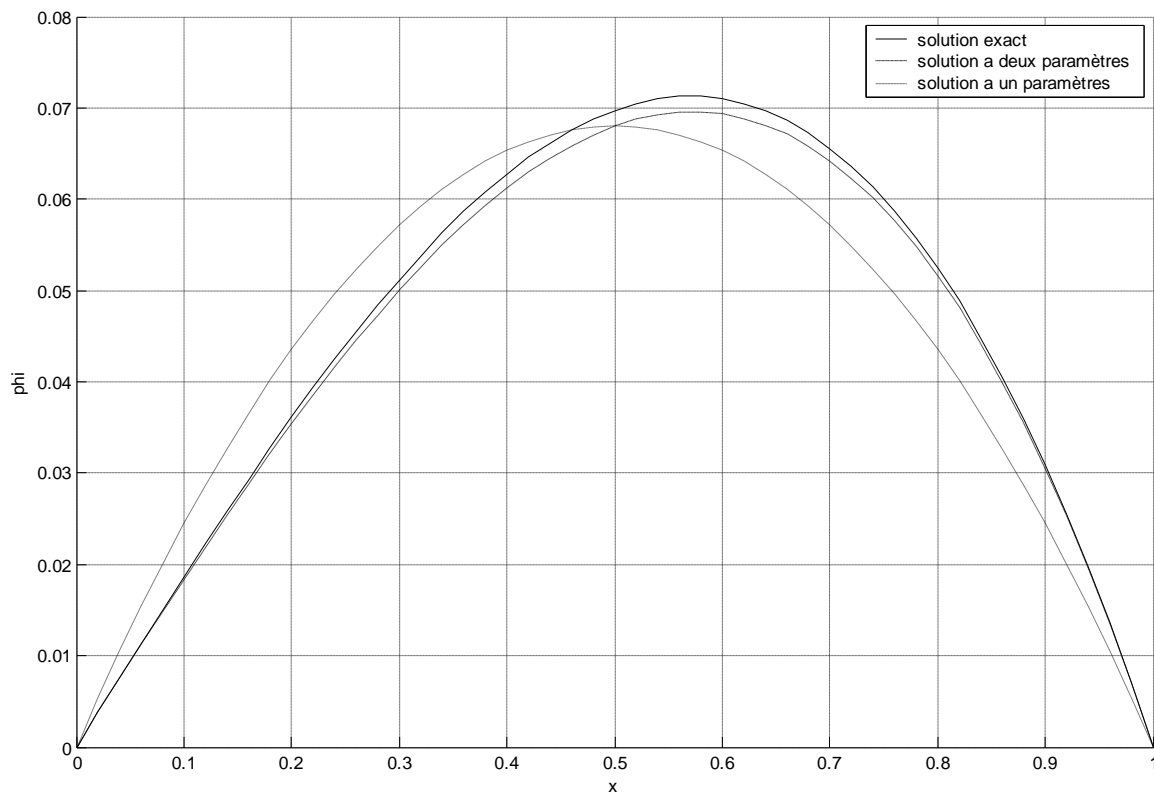


Fig 2.3 : Solution par la méthode des moindres carrés.

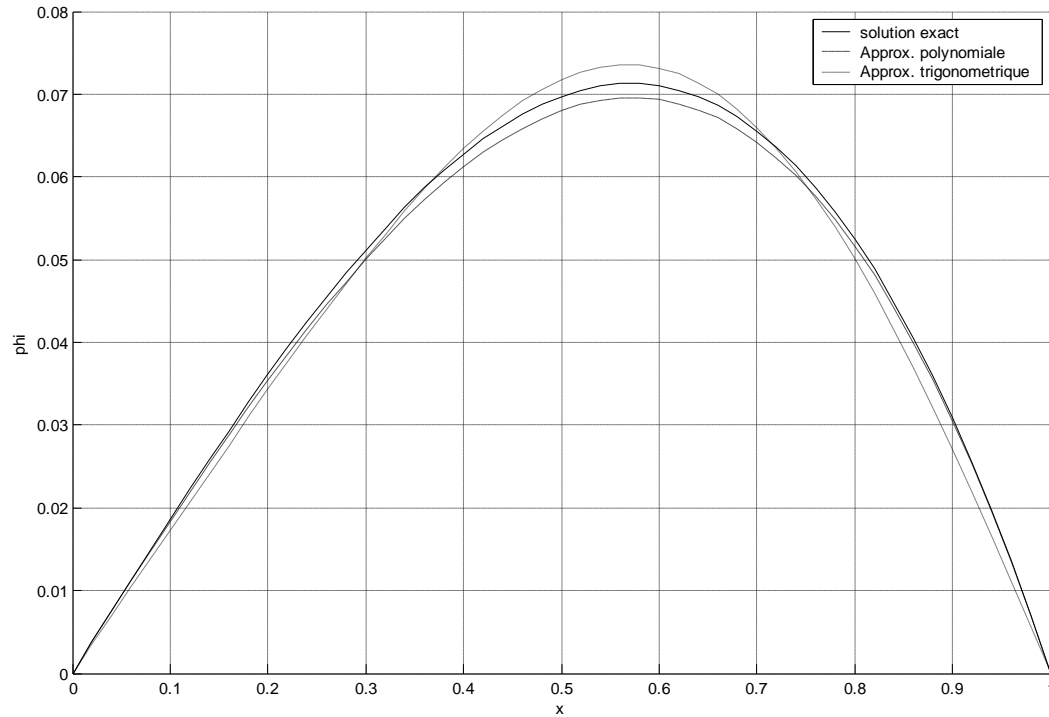


Fig 2.4 : Solution de type polynomiale et trigonométrique (deux paramètres)

2.2.7. La méthode de Galerkin [20]

Dans la méthode de Galerkin (appelée aussi méthode de Petrov-Galerkin) les fonctions de test $v_i(x)$ sont données par les fonctions de base $\varphi_i(x)$. On a

$$v_i(x) = \varphi_i(x) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.42)$$

En substituant $v_i(x)$ dans l'équation intégrale (2.15), on a

$$\int_{\Omega} \varphi_i(x) \mathfrak{R}(x) dx = 0 \quad 1, \dots, m \quad (2.43)$$

qui s'écrit sous forme matricielle

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_m(x) \end{Bmatrix} \left(L[\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_m(x)] \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{Bmatrix} + f \right) d\Omega = 0 \quad (2.44)$$

En développant on obtient

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \varphi_1 L(\varphi_1) dx & \int_{\Omega} \varphi_1 L(\varphi_2) dx & \dots & \int_{\Omega} \varphi_1 L(\varphi_m) dx \\ \int_{\Omega} \varphi_2 L(\varphi_1) dx & \int_{\Omega} \varphi_2 L(\varphi_2) dx & \dots & \int_{\Omega} \varphi_2 L(\varphi_m) dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{\Omega} \varphi_m L(\varphi_1) dx & \int_{\Omega} \varphi_m L(\varphi_2) dx & \dots & \int_{\Omega} \varphi_m L(\varphi_m) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} \varphi_1 f dx \\ \int_{\Omega} \varphi_2 f dx \\ \dots \\ \int_{\Omega} \varphi_m f dx \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

qui s'écrit sous la forme usuelle $\{F\} = [K]\{\mu\}$

avec

$$K = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \varphi_1 L(\varphi_1) dx & \int_{\Omega} \varphi_1 L(\varphi_2) dx & \dots & \int_{\Omega} \varphi_1 L(\varphi_m) dx \\ \int_{\Omega} \varphi_2 L(\varphi_1) dx & \int_{\Omega} \varphi_2 L(\varphi_2) dx & \dots & \int_{\Omega} \varphi_2 L(\varphi_m) dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{\Omega} \varphi_m L(\varphi_1) dx & \int_{\Omega} \varphi_m L(\varphi_2) dx & \dots & \int_{\Omega} \varphi_m L(\varphi_m) dx \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$F = - \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} \varphi_1 f dx \\ \int_{\Omega} \varphi_2 f dx \\ \dots \\ \int_{\Omega} \varphi_m f dx \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Exemple 2.3

On va résoudre l'exemple 2.1 par la méthode de Galerkin en utilisant une approximation à un paramètre et une approximation à deux paramètres.

On rappelle les résultats de l'exemple 2.1

$$\varphi_1(x) = x(x - 1)$$

$$\varphi_2(x) = x^2(x - 1)$$

$$L(\varphi_1) = x^2 - x + 2$$

$$L(\varphi_2) = x^3 - x^2 + 6x - 2$$

$$f(x) = x$$

a. Approximation à un paramètre

On calcule les matrices $[K]$ et $\{F\}$

$$K_{11} = \int_0^1 \varphi_1 L(\varphi_1) dx = \int_0^1 x(x - 1)(x^2 - x + 2) dx = -\frac{3}{10}$$

$$F_1 = - \int_0^1 \varphi_1 f dx = - \int_0^1 x(x^2 - x) dx = \frac{1}{12}$$

D'où la solution

$$\mu_1 = -0.2778$$

$$u_{h_1} = -0.2778x(x - 1)$$

b. Approximation à deux paramètres

Les termes des matrices $[K]$ et $\{F\}$ sont données par

$$K_{11} = \int_0^1 \varphi_1 L(\varphi_1) dx = -0.3 \quad , \quad K_{12} = \int_0^1 \varphi_1 L(\varphi_2) dx = -0.15$$

$$K_{21} = \int_0^1 \varphi_2 L(\varphi_1) dx = -0.15 \quad , \quad K_{22} = \int_0^1 \varphi_2 L(\varphi_2) dx = -0.1238$$

$$F_1 = - \int_0^1 \varphi_1 f dx = 0.0833 \quad , \quad F_2 = - \int_0^1 \varphi_2 f dx = 0.05$$

D'où la solution

$$\mu_1 = -0.1921 \quad , \quad \mu_2 = -0.1711$$

$$u_{h_2} = -0.1921x(x - 1) - 0.1711x^2(x - 1)$$

Les résultats obtenus sont donnée par le tableau 2.3 et la figure 2.5

x	u_{h_1}	u_{h_2}	u	Erreur relative (%)	
				ϵ_1	ϵ_2
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0	0
0.2	0.0444	0.0362	0.0361	20.65	1.87
0.4	0.0667	0.0625	0.0628	4.05	2.41
0.6	0.0667	0.0707	0.0710	8.01	2.27
0.8	0.0444	0.0526	0.0525	17.04	1.54
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0	0

Tab 2.3 : Résultat de la méthode de Galerkin.

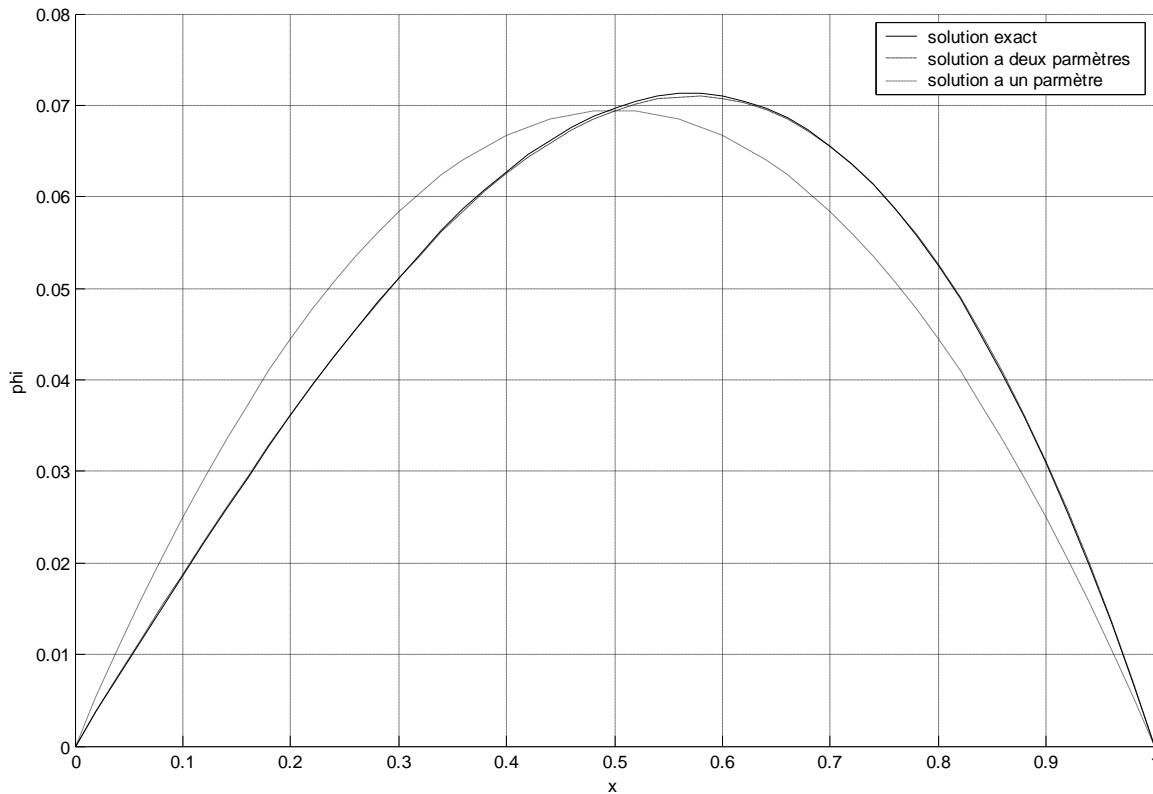


Fig 2.5 : Résolution par la méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est la plus précise des méthodes précédentes. L'erreur relative ne dépassant pas 0.4%. La solution à deux paramètres est pratiquement confondue avec la solution exacte.

2.3 . Formulation intégrale faible

La formulation faible consiste à obtenir une équation intégrale dont l'ordre des dérivées de u est inférieur à l'ordre des dérivées apparaissant dans l'équation intégrale de type (2.15). La transformation des termes contenant ces dérivées est obtenue par une intégration par parties.[21]

Soit $U(x)$ et $V(x)$ deux fonctions définies sur le domaine $[x_1, x_2]$ et leur produit $U(x) \cdot V(x)$. La formule d'intégration par partie 'écrit

$$\int_{x_1}^{x_2} V \frac{dU}{dx} dx = U \cdot V|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx} U dx \quad (2.48)$$

2.3.1. Transformation des formes intégrales-théorème de Green-Ostrogradsky [8]

a. Problème à une dimension du premier ordre

Le type d'intégrale est de la forme

$$\int_{x_1}^{x_2} v \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.49)$$

L'intégration par partie donc selon (2.48)

$$\int_{x_1}^{x_2} v \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial x} u dx + \left(v \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (2.50)$$

b. Problème à une dimension du second ordre

$$\int_{x_1}^{x_2} v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{du}{dx} dx + \left(v \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (2.51)$$

c. Problème à deux dimensions du premier ordre

Lors de la résolution on rencontre la forme intégrale suivante

$$\iint_S v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \quad (2.52)$$

où S est l'aire du domaine Ω .

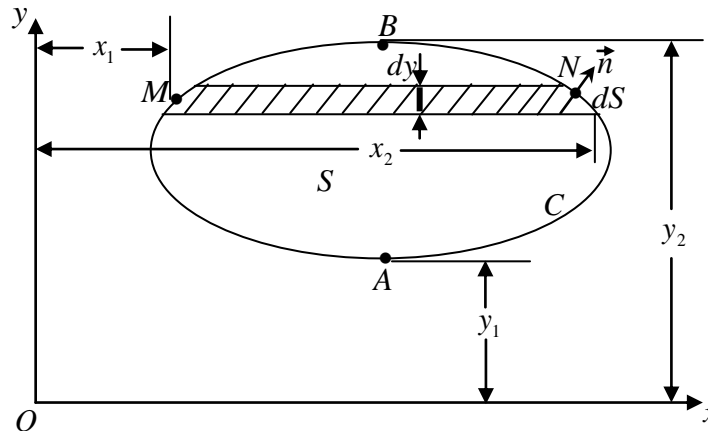


Fig 2.6 : Paramètres d'intégration 2D

On intègre par parties

$$\iint_S v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = - \iint_S \frac{\partial v}{\partial x} u dx dy + \int_{y_1}^{y_2} (vu) \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy \quad (2.53)$$

où (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dénotent les limites d'intégration pour x et y respectivement comme le montre la figure 2.6.

Le vecteur unitaire \vec{n} s'écrit

$$\vec{n} = \cos(n, x) \vec{i} + \cos(n, y) \vec{j} \quad (2.54)$$

où $\cos(n, x) = l_x$ et $\cos(n, y) = l_y$ sont les cosinus directeurs de normale \vec{n} selon x et y respectivement. On a d'après la figure 2.7

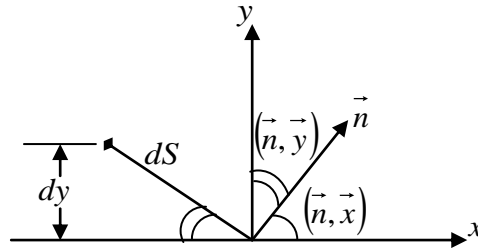


Figure 2.7 : Vecteur normal \vec{n} et abscisse curviligne dS

$$\frac{dy}{dS} = \cos(n, x) = l_x$$

Pour tout le contour C

$$dy = \pm dS \cdot l_x \quad (2.55)$$

En posant $F = vu$, le terme $\int_{y_1}^{y_2} (vu)|_{x_1}^{x_2} dy$ de l'équation (2.53) s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} F|_{x_1}^{x_2} dy &= \int_{y_1}^{y_2} \{F[x_2(y), y] - F[x_1(y), y]\} dy \\ \int_{y_1}^{y_2} F|_{x_1}^{x_2} dy &= \int_{ANB} F(x, y) dy + \int_{BMA} F(x, y) dy \end{aligned} \quad (2.56)$$

où ANB et BMA sont les arcs compris entre A et B du contour fermé C .

Puisque $ANB + BMA = C$ l'équation (2.56) s'écrit

$$\int_{y_1}^{y_2} F|_{x_1}^{x_2} dy = \int_C F(x, y) dy$$

En substituant la valeur de dy obtenue par la relation (2.55)

$$\int_{y_1}^{y_2} F|_{x_1}^{x_2} dy = \oint_C (vu) l_x dS$$

L'intégrale (2.52) s'écrit alors

$$\iint_S v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = - \iint_S \frac{\partial v}{\partial x} u dx dy + \oint_C (vu) l_x dS \quad (2.57)$$

Etant partie d'une intégrale double dans un plan Ω , on a transformé cette intégrale par intégration par partie, le deuxième terme obtenu est une intégrale curviligne calculée le long de la frontière C du domaine : c'est la formule de Green qui est en fait un cas particulier de la formule plus générale du mathématicien M. Ostrogradsky.

De même l'intégrale contenant les termes $\frac{du}{dy}$ est évaluée par

$$\iint_S v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = - \iint_S \frac{\partial v}{\partial x} u dx dy + \oint_C (vu) l_x dS$$

d. Problème à deux dimensions du second ordre

Pour l'intégrale $\iint_S v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy$, on obtient la transformation suivante

$$\iint_S v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = - \iint_S \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \oint_C v \frac{\partial u}{\partial x} l_x dS \quad (2.58)$$

e. Problème du premier ordre à trois dimensions

Pour le cas tridimensionnel on a le théorème Green-Ostrogradsky

$$\iiint_V v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = - \iint_S \frac{\partial v}{\partial x} u dx dy dz + \oint_S (vu) l_x dS \quad (2.59)$$

où V est le volume d'intégration et S la surface frontière limitant le volume V .

2.3.2. Formulation intégrale faible

La formulation ou équation intégrale faible est obtenue par transformation de l'équation intégrale (2.15). Les différentes transformations de la forme intégrale sont obtenues dans le paragraphe précédent.

Pour illustrer la formulation faible on considère le problème aux limites faisant intervenir une condition de Neumann sur une portion C_1 de la frontière C et une condition de Dirichlet sur l'autre partie C_2 de la frontière tel que l'on ait

$$L_1 u + f = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (2.60.a)$$

$$u = g_1 \quad \text{sur } C_1 \quad (2.60.b)$$

$$L_2 u = g_2 \quad \text{sur } C_2 \quad (2.60.c)$$

où L_2 désigne un opérateur différentiel d'ordre inférieur à celui de L_1 .

Pour avoir la formulation faible du problème (2.60) on construit tout d'abord la forme intégrale de type (2.15), c'est-à-dire que quelque soit v nulle sur la partie C_1 ou u est explicitement connue on a

$$\int_{\Omega} v(L_1 u + f) d\Omega = 0 \quad \forall v \quad (2.61)$$

$$\int_{\Omega} v(L_1 u) d\Omega + \int_{\Omega} v f d\Omega = 0 \quad \forall v \quad (2.62)$$

on transforme le premier terme en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky

$$\int_{\Omega} v(L_1 u) d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} (L_2 u) d\Omega + \oint_C v(L_2 u) l_x dS$$

or

$$\oint_C v(L_2 u) l_x dS = \oint_{C_1} v(L_2 u) l_x dC_1 + \oint_{C_2} v(L_2 u) l_x dC_2$$

mais

$\oint_{C_1} v(L_2 u) l_x dC_1 = 0$ car la fonction test v est nulle sur le contour C_1 ou u est explicitement connue selon la condition (2.60.b).

d'où

$$\oint_C v(L_2 u) l_x dS = \oint_{C_2} v(L_2 u) l_x dC_2$$

L'équation (2.62) s'écrit

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} (L_2 u) d\Omega + \int_{C_2} v(L_2 u) l_x dC_2 + \int_{\Omega} v f d\Omega = 0 \quad \forall v \quad (2.63)$$

en réarrangeant, on obtient

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} (L_2 u) - v f \right) d\Omega + \int_{C_2} v(L_2 u) l_x dC_2 = 0 \quad \forall v \quad (2.64)$$

L'équation (2.64) constitue la formulation faible du problème (2.60).

La formulation faible a les avantages suivants par rapport à la formulation forte (2.58)

- Une partie de condition aux limite (condition de type 2.60.c sont directement pris en charge par la formulation intégrale.

- L'ordre maximum des dérivés de u qui apparaît dans l'équation intégrale diminue. Les conditions de dérivabilité de u sont donc moins fortes.

Par contre l'intégration par partie fait apparaître la fonction de test v .

Donc les conditions de dérivabilité de v augmentent.

A priori les méthodes de résidus pondérés à fonctions de test constantes comme les méthodes de collocation par points ne peuvent être appliquées. Seule la méthode de Galerkin est donc visée par la formulation faible.

2.3.3. La méthode de Galerkin en formulation faible [22]

Dans la méthode de Galerkin les fonctions de test $v_i(x)$ sont données par les relations (2.42). En substituant $v_i(x)$ dans la forme intégrale faible (2.64) et en passant à la forme intégrale à termes finies de v et u , on a

$$-\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} (L_2 u_h) - v_i f \right) d\Omega + \oint_{C_2} v_i (L_2 u_h) l_x dC_2 = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

2.4. Conclusion

On a présenté dans ce chapitre quelques méthodes puissantes qui sont utilisées pour résoudre les équations aux dérivées après avoir les transformées en équations intégrales. On a vu que la méthode de Galerkin est la meilleure en terme de taux de convergence par rapport aux autres méthodes présentées dans ce travail.

Malgré cet avantage qui réside dans cette méthode, il y a des difficultés rencontrées quand on résout, par les méthodes intégrales, les différents problèmes. Ces difficultés apparaissent quand on calcule l'intégrale sur le domaine global. Les difficultés accroissent davantage pour les problèmes bidimensionnels.

Il y a en plus deux autres difficultés dans la méthode de Galerkin avec forme intégrale qui sont

- La difficulté de prendre en charge les domaines à frontières complexes.

- La difficulté de programmer cette méthode, car il n'existe pas un modèle qui se répète d'un exemple à un autre.

La résolution des équations intégrales demande de la décomposition du domaine global en sous-domaines. Ce concept trouve son application lors de la formulation de la méthode des éléments finis qui utilise une modélisation du domaine géométrique par des sous-domaines ou éléments finis standard. Ces éléments, une fois formulé par les méthodes intégrales, sont utilisé dans tous les problèmes.

La standardisation du procédé de résolution rend la méthode programmable et trouve avec l'appui de l'ordinateur de très vastes champs d'application qui étaient avant l'avènement de cette méthode soumis à l'analyse expérimentale seule.

L'intégration de la discrétisation en éléments finis dans la méthode de Galerkin forme ce qu'on appelle la méthode des éléments finis de Galerkin. Cette dernière fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Méthodes des éléments finis de Galerkin

3.1. Introduction

On a vu dans le chapitre précédent qu'une formulation sous forme d'une équation aux dérivées partielles pouvait être exprimée sous une formulation sous forme intégrale, en ce sens que toute solution d'une formulation est solution d'une autre formulation et réciproquement. La formulation forte du problème présente un intérêt dans la mesure où l'utilisation de la méthode des différences finies est envisagée pour effectuer une approximation du problème [12]. Dans le cas de la méthode des résidus pondérés, la formulation équivalente du problème est donnée par l'équation (2.13) comme suit

$$\int_{\Omega} v(Lu + f)d\Omega = 0 \quad \forall v$$

que l'on puisse mettre sous la forme suivante

$$\int_{\Omega} v Lu d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega \quad \forall v$$

c'est-à-dire

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} v Lu \, d\Omega \quad \text{et} \quad l(v) = \int_{\Omega} v f \, d\Omega$$

Dans ce chapitre on va baser sur cette dernière formulation en supposant que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique pour transformer le problème de trouver la solution u à un autre problème numérique qui consiste à chercher une solution approchée u_h qui donne une erreur minimale. Cette solution approchée est construit à partir de fonctions, facilement calculables, sous forme de combinaison linéaire. Ces fonctions dites fonctions de forme, et les coefficients de cette combinaison linéaire sont les inconnues du problème. Dans ce cas, pour déterminer le minimum de l'erreur revient alors à annuler les dérivées partielles de celle-ci par rapport à ces inconnues, ce qui conduit classiquement à la résolution d'un système linéaire. Nous ne développerons pas cette méthode. On va utiliser la méthode de Galerkin, qui consiste à choisir la fonction inconnue sous forme de combinaison linéaire de fonctions de forme de manière à obtenir un système discret en choisissant successivement comme fonction test dans la formulation faible ces mêmes fonctions de forme. On va introduire dans cette méthode de Galerkin le principe de discrétisation en éléments finis dans ce chapitre dont le grand intérêt est constitué par sa grande souplesse.

3.2. Méthode de Galerkin

3.2.1. Exposé général de la méthode

Généralement tous les problèmes d'équation aux dérivées partielles pouvaient se mettre sous la forme variationnelle suivante [13]

$$a(u, v) = l(v), \forall v \tag{3.1}$$

avec $a(u, v)$ forme bilinéaire ;

$l(v)$ forme linéaire.

Bien qu'il existe des méthodes d'approximation de la solution d'équation aux dérivées partielles sous forme d'une somme infinie de termes (en particulier

décomposition de la solution en série de Fourier), la principale difficulté du traitement numérique est liée à cette dernière caractéristique. Une des techniques pour contourner cette difficulté est d'approximer la solution sous une forme d'une somme finie.

Soit donc m fonctions de test $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$ linéairement indépendantes. On cherche la solution du problème, qu'on notera à présent u_h , sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions tests $\varphi_j(x)$ soit

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi_j(x) \quad (3.2)$$

et l'on considère le problème associé au problème (3.1), que l'on écrit comme suit

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \quad (3.3)$$

Remarque

Si l'on suppose que la forme bilinéaire $a(.,.)$ et la forme linéaire $l(.)$ sont continues et que la forme est continue, alors, le problème (3.3) admet une solution unique. De plus, on peut facilement vérifier que le problème (3.3) est équivalent à un problème de minimisation [13]. ■

On suppose que la forme bilinéaire $a(.,.)$ étant symétrique, alors la résolution du problème (3.3) aboutit à la résolution d'un système algébrique linéaire dont la matrice $A = (a(\varphi_j, \varphi_i))$ est symétrique, définie positive.

En effet, écrivons le problème (3.3), en remplaçant par son expression donnée par la relation (3.2); on a donc, en choisissant $v_h = \varphi_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et à cause de la bilinéarité de $a(.,.)$

$$\sum_{j=1}^m a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) \mu_j = l(\varphi_i(x)), \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (3.4)$$

Cette dernière relation définit un système linéaire dont les inconnues sont

les nombres $\{\mu_j\}_{j=1}^{j=m}$, qui représentent en fait les composantes de u_h dans la base $\{\varphi_j\}_{j=1}^{j=m}$. Or, la forme bilinéaire étant symétrique on a

$$a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) = a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)), \forall i, j \in \{1, \dots, m\} \quad (3.5)$$

La matrice $A = a(\varphi_j, \varphi_i)$ est donc symétrique. De plus soit Π le vecteur de composantes $\{\mu_j\}_{j=1}^{j=m}$ formons

$$A\Pi = \left(\sum_{j=1}^m a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) \mu_j \right) = \left(a \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \varphi_j(x), \varphi_i(x) \right) \right) = a(u_h, \varphi_i(x))$$

et

$$\Pi^t A \Pi = \sum_{j=1}^m a(u_h, \varphi_j(x)) \mu_j = a \left(u_h, \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi_j(x) \right) = a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|_{E_h}^2 > 0$$

et $\Pi^t A \Pi > 0$ dès que $\Pi \neq 0$; donc la matrice A est bien symétrique, définie positive.

On peut conclure donc que la matrice $A = (a(\varphi_j, \varphi_i))$ est inversible [14].

Remarque

La résolution du système linéaire précédent sera d'autant plus aisée que la matrice A a la structure la plus creuse possible et même possède une structure bande. L'obtention d'une telle structure dépend essentiellement du choix

- ✓ de la base $\{\varphi_j\}_{j=1}^{j=m}$;
- ✓ de la numérotation des points du maillage. ■

Le fait d'approximer la solution exacte u par une solution approchée u_h sous la forme d'une somme finie de termes a pour effet de faire perdre de l'information sur le problème initial; en fait, dans cette opération, on commet une erreur dont on peut donner, sans démonstration (cf. [1]), une majoration

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \text{Inf} \{ \|u - v_h\|, \forall v_h \} \quad (3.6)$$

Remarque

Le résultat précédent montre que la qualité de l'approximation des fonctions u par u_h dépend de la richesse de la base formée par les fonctions de test $\{\varphi_j\}_{j=1}^{j=m}$. ■

Remarque

Lorsque la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique, on peut obtenir une majoration plus fine du type

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \text{Inf}\{\|u - v_h\|, \forall v_h\}. \blacksquare$$

3.3. Exemples en dimension 1 et introduction de la méthode des éléments finis

Dans ce paragraphe, nous allons examiner un certain nombre d'exemples mettant en œuvre la méthode de Galerkin et qui permettront d'introduire la méthode des éléments finis.

Exemple 1

Considérons la situation la plus simple correspondant à l'équation de Poisson, définie dans le segment $[0,1]$ et munie des conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

La formulation variationnelle associée à ce problème, d'après ce qu'on a vu au chapitre 2, est donnée par

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \text{ tel que} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \end{cases} \quad (3.8)$$

avec

$$a(u, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad \text{et} \quad l(v) = \int_0^1 f v dx$$

Maintenant on va considérer plusieurs choix de fonctions de base $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$.

Premier choix de base

Soit $\varphi_j(x) = x(1-x)x^j$, $0 \leq j \leq m-1$. Remarquons que, pour tout indice $j \in \{0, \dots, m-1\}$, les fonctions $\varphi_j(x)$ sont nulles au bord; de plus, ces fonctions étant polynomiales de degré inférieur ou égal à $m+1$, elles sont de carré intégrable; en outre, ces fonctions sont indéfiniment différentiables et leurs dérivées étant polynomiales de degré inférieur ou égal à m sont également de carré intégrable. Il découle de ces propriétés que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est définie pour les fonctions de base $\varphi_j(x)$ pour tout indice $j \in \{0, \dots, m-1\}$. On peut calculer, les coefficients de la matrice A : tous calculs faits, on trouve

$$\begin{aligned} a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) &= \int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx \\ &= \int_0^1 ((i+1)(1-x)x^i - x^{i+1}) ((j+1)(1-x)x^j - x^{j+1}) dx \end{aligned}$$

soit

$$a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \frac{2(i+1)(j+1)}{(i+j+1)(i+j+2)(i+j+3)}$$

On remarque que $a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) > 0$, et en particulier $a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) \neq 0$. Par conséquent, bien que la base soit simple, on obtient une matrice de discrétisation pleine. Ainsi, si l'on résout le système linéaire obtenu par la méthode de Gauss, on devra effectuer, compte tenu de la symétrie de la matrice, de l'ordre $\frac{m^3}{3}$ d'opérations arithmétiques [12].

Second choix de base

Soient les fonctions $\varphi_j(x) = \sin(j\pi x)$ $1 \leq j \leq m$. De la même façon que lors de la situation précédente, on remarque que $\varphi_j(0) = \varphi_j(1)$, pour tout indice $j \in \{0, \dots, m-1\}$, et les fonctions $\varphi_j(x)$ vérifient les conditions aux bords. De plus, les fonctions $\varphi_j(x)$ sont indéfiniment différentiables, de carré intégrable, ainsi que leurs dérivées. Par conséquent, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est définie pour les fonctions de base $\varphi_j(x)$ pour tout indice $j \in \{0, \dots, m-1\}$. De plus

$$a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(i\pi x) \cos(j\pi x) dx \quad (3.9)$$

Tous calculs faits, on trouve

$$a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{i^2\pi^2}{2} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.10)$$

Donc, la matrice A est diagonale. Cela provient du choix particulier de fonctions de base. En effet, on vérifie simplement que les fonctions $\varphi_j(x)$ considérées sont les fonctions propres de l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$ associé aux conditions de Dirichlet homogènes. On a donc obtenu la matrice A la plus creuse possible et l'on peut penser avoir réglé le problème du choix optimal des fonctions de base, en choisissant les fonctions propres de l'opérateur aux dérivées partielles considéré. En fait, il n'en est rien, car si l'on change légèrement le problème aux limites en considérant le problème à coefficient variable

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(c(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x), x \in]0,1[\\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

auquel on associe, la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_0^1 c(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx \quad (3.12)$$

les coefficients de la matrice sont donnés par

$$a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = ij\pi^2 \int_0^1 c(x) \cos(i\pi x) \cos(j\pi x) dx \quad (3.13)$$

En général, pour une fonction $c(x)$ quelconque, il n'y a aucune raison pour que les coefficients $a(\varphi_i(x), \varphi_j(x))$ soient nuls pour $i \neq j$. Donc le choix particulier de fonctions de base considéré est mal adapté pour un problème plus général, dans la mesure où dans ce dernier cas, on obtient encore une matrice pleine. De plus, les fonctions propres de l'opérateur différentiel à coefficients variables sont en général peu commodes à déterminer.

Troisième choix de base

On va introduire une base élément fini pour la résolution numérique du problème aux limites considéré, ce choix pouvant être étendu à des situations plus générales. On considère, pour simplifier, un découpage uniforme de l'intervalle $[0,1]$ en $(m + 1)$ parties de longueur h avec $h = \frac{1}{m+1}$ et on pose $x_j = jh$, $j = 1, \dots, m, m + 1$, avec $x_0 = 0$ $x_{m+1} = 1$. On considère la fonction v_h linéaire sur chaque segment $[x_j, x_{j+1}]$ définie comme suit

$$v_h(x) = v_j + \frac{x - x_j}{h}(v_{j+1} - v_j), \forall x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (3.14)$$

où $v_h(x_j) = v_j$ une valeur donnée. Donc v_h n'est autre qu'une interpolation polynomiale, de degré inférieur à un, sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$.

Soit E_h l'espace engendré par les fonctions v_h défini comme suit

$$E_h = \{v_h, v_h(0) = v_h(1) = 0\}.$$

Pour tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, on considère une base de l'espace E_h qui est composée des fonctions $\varphi_j(x) \in E_h$, pour $i = 1, \dots, m$ continues sur $[0,1]$, linéaires sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, satisfaisant de plus $\varphi_j(x) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker). Ces fonctions de base sont appelées dans la littérature les **fonctions chapeaux**[23] et sont représentées sur les figures 3.1 et 3.2. Ces fonctions étant polynomiales par morceaux, de carré intégrable; de plus, les dérivées premières des fonctions $\varphi_j(x)$ sont des fonctions en escalier, donc de carré intégrable. Par ailleurs, on a $\varphi_j(0) = \varphi_j(1) = 0$, $j = 1, \dots, m$.

Soit $u_h \in E_h$; considérons le développement de u_h dans la base $\{\varphi_j\}_{j=1}^{j=m}$; on a

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi_j(x) \Rightarrow u_h(x_i) = u_i = \mu_i \text{ car } \varphi_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

donc

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^m u_j \varphi_j(x) \quad (3.15)$$

et les coefficients du développement de u_h dans la base $\{\varphi_j\}_{j=1}^{j=m}$ ne sont rien d'autre que les valeurs de la fonction u_h aux points du maillage x_j , $0 \leq j \leq m + 1$

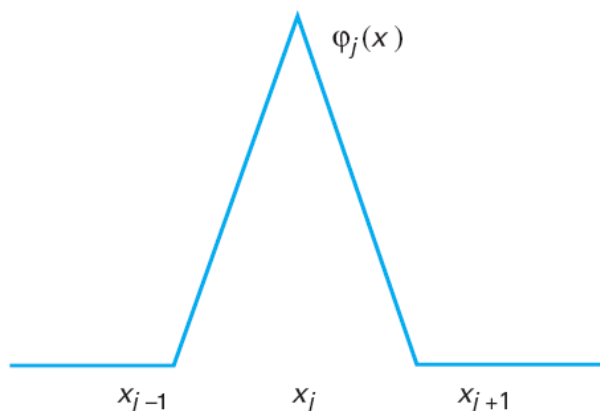


Fig. 3.1 : Fonction de base linéaire par morceaux.

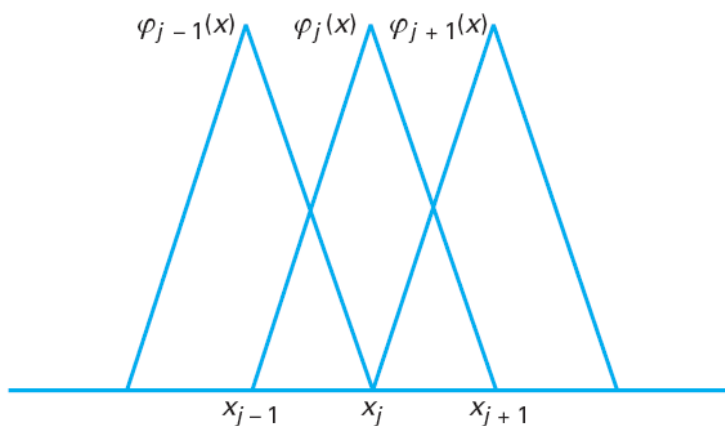


Fig. 3.2 : Fonctions de base associées à 3 points successifs.

Il convient de noter une propriété très importante dans la construction des fonctions de base ; en effet dans la méthode des éléments finis, les fonctions de forme sont à supports disjoints, excepté pour les points strictement contigus, c'est-

à-dire d'une part $\varphi_j(x)$ et $\varphi_{j+1}(x)$, ainsi que d'autre part $\varphi_j(x)$ et $\varphi_{j-1}(x)$. Cette propriété permet d'obtenir une matrice A creuse car, en général, on a

$$a(\varphi_j(x), \varphi_{j-1}(x)) \neq 0, \quad a(\varphi_j(x), \varphi_j(x)) \neq 0, \quad a(\varphi_j(x), \varphi_{j+1}(x)) \neq 0$$

et

$$a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) = 0 \text{ dès que } |i - j| \geq 2$$

Donc, en général, la matrice $A = (a(\varphi_j(x), \varphi_j(x)))$ est une matrice tridiagonale, dans le cas où les fonctions de base sont linéaires par morceaux. Plus précisément, on peut calculer exactement les coefficients de la matrice A : auparavant il est nécessaire de déterminer l'expression des fonctions de base et de leurs dérivées ; on procède par identification en cherchant une fonction $\varphi_j(x)$ de la forme $\varphi_j(x) = ax + b$ (a et b inconnues du problème), vérifiant sur chaque intervalle la condition $\varphi_j(x_i) = \delta_{i,j}$; tous calculs faits, on trouve

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h} & \text{sur } [x_{j-1}, x_j] \\ 0 & \text{sinon} \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} & \text{sur } [x_j, x_{j+1}] \end{cases}, \quad \frac{d\varphi_j(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{sur } [x_{j-1}, x_j] \\ 0 & \text{sinon} \\ -\frac{1}{h} & \text{sur } [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

On déduit aisément les coefficients de la matrice A de dimension m : en effet

$$a(\varphi_j, \varphi_j) = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi_j}{dx} \right)^2 dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{d\varphi_j}{dx} \right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{d\varphi_j}{dx} \right)^2 dx = \frac{2}{h} \quad (3.16)$$

et

$$a(\varphi_j, \varphi_{j+1}) = \int_0^1 \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_{j+1}}{dx} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_{j+1}}{dx} dx = -\frac{1}{h} \quad (3.17)$$

$$a(\varphi_j, \varphi_{j-1}) = \int_0^1 \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_{j-1}}{dx} dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_{j-1}}{dx} dx = -\frac{1}{h} \quad (3.18)$$

On vérifie bien que la matrice A est symétrique ; elle est aussi définie positive.

Finalement on a à résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx, 1 \leq j \leq m \\ u_0 = u_{m+1} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Remarques

1. Il est important de noter que, aussi bien dans le calcul des coefficients de la matrice que dans celui du second membre du système linéaire, le calcul des intégrales s'effectue sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n$, c'est-à-dire élément par élément.
2. Comme prévu, la matrice A est tridiagonale ; de plus quel que soit l'opérateur aux dérivées partielles considéré, on obtient une telle structure de matrice, en particulier si l'on considère un problème monodimensionnel à coefficient variable. Cette propriété provient du fait que les fonctions de base choisies sont à supports disjoints. On verra, par la suite, qu'il est possible de définir l'espace E_h en utilisant des fonctions de base polynomiales par morceaux de degré plus élevé à supports disjoints sauf pour les fonctions de base attachées à des points contigus ; dans ce cas, cependant, la demi-largeur de bande de la matrice augmente. Un autre choix de la base de l'espace E_h composé de fonctions à supports non disjoints conduit à une matrice de discrétisation pleine.
3. Si l'on modifie la numérotation des fonctions de base (c'est-à-dire des points du maillage), la matrice du système linéaire perd sa structure tridiagonale. ■

En général, il n'est pas toujours possible de calculer une primitive de l'intégrale $\int f(x)\varphi_j(x)dx$; dans la pratique, on utilise des formules d'intégration numérique. Si, par exemple, on utilise la formule des trapèzes, on obtient

$$\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx = hf(x_j)$$

et, dans ce cas particulier, on retrouve le schéma classique de discrétisation obtenu par différences finies [23]. C'est un hasard que l'on ne notera que dans peu de cas.

Dans le schéma défini précédemment, on obtient, en résolvant le système linéaire, une solution approchée; il conviendra d'estimer l'erreur commise. La façon la plus classique est de calculer l'erreur de troncature définie par

$$\epsilon_j = \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1}))}{h^2} - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \quad (3.20)$$

avec $u(x)$ solution exacte du problème de Poisson considéré.

En supposant que la solution exacte du problème est quatre fois continûment différentiable sur l'intervalle $[0,1]$ et en considérant les développements de $u(x_{j+1})$ et $u(x_{j-1})$ autour du point x_j , on obtient

$$\frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1}))}{h^2} = \frac{d^2u(x_j)}{dx^2} - \frac{h^2}{24} \left(u^{(4)}(\hat{x}_j) + u^{(4)}(\tilde{x}_j) \right) \quad (3.21)$$

avec $u^{(4)}(x)$ dérivée quatrième au point x , $x_{j-1} < \hat{x}_j < x_j$ et $x_j < \tilde{x}_j < x_{j+1}$

D'autre part, en supposant que la fonction $f(x)$ est deux fois continûment différentiable, on peut la développer autour du point x_j , ce qui conduit à

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx = f(x_j) + \frac{1}{2h} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (x - x_j)\varphi_j(x) \frac{d^2f(\xi)}{dx^2} dx, \quad x_j < \xi < x \quad (3.22)$$

car on vérifie facilement que

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (x - x_j)\varphi_j(x) dx = 0,$$

Si la dérivée seconde est continue, on a donc

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x) dx - f(x_j) \right| \leq \frac{h^2}{12} \text{Sup}_{0 < x < 1} \left(\left| \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right| \right)$$

or

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = f(x) \Rightarrow \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

et

$$|\epsilon_j| \leq \frac{h^2}{6} \sup_{0 < x < 1} \left(\left| \frac{d^4 u(x)}{dx^4} \right| \right) \quad (3.23)$$

Donc, le schéma numérique obtenu par discrétisation élément fini est donc une approximation de l'équation de Poisson à un terme h^2 près. Cette estimation permet, par des calculs simples, compte tenu du fait que la matrice A est définie positive, de donner une majoration de la norme discrète de l'erreur.

Exemple 2 [24]

Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + qu(x) = f(x), & x \in]0,1[, (q > 0) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

et la forme bilinéaire associée

$$a(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + quv \right) dx \quad (3.25)$$

Pour les fonctions chapeaux définies précédemment, on obtient, en effectuant le même type de calcul, une matrice de discrétisation par élément fini symétrique, tridiagonale de coefficients

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{2}{h} + \frac{2qh}{3}, \quad a(\varphi_i, \varphi_{j+1}) = a(\varphi_i, \varphi_{j-1}) = -\frac{1}{h} + \frac{qh}{6}$$

Cet exemple est intéressant dans la mesure où l'on constate que l'on ne retrouve pas la matrice de discrétisation obtenue par la méthode des différences finies .

Exemple 3 [23]

Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + qu(x) = f(x), x \in]0,1[\\ u(0) = 0, \quad \frac{du(1)}{dx} = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

dont la formulation variationnelle est

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v$$

et

$$a(u, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx, \quad l(v) = \int_0^1 f v dx$$

Pour discrétiser le problème précédent par la méthode des éléments finis, on considère l'espace E_h défini par

$$E_h = \{ v_h(x) \text{ continue sur } [0,1] \text{ et linéaire sur chaque segment } [x_j, x_{j+1}] \text{ et } v_h(0) = 0 \}$$

L'espace E_h est engendré par $m + 1$ fonction de base $\{\varphi_j\}_{j=1}^{j=m+1}$ où

- Pour $1 \leq j \leq m$, $\varphi_j(x)$ est une fonction chapeau considérée précédemment
- Pour $j = m + 1$, $\varphi_j(x)$ est une fonction demi-chapeau.

Remarque

Dans les exemples précédents, la dimension de E_h était m , alors qu'ici elle est $m + 1$; cela provient du fait que, dans le cas du problème avec conditions aux limites mêlées Dirichlet-Neumann, seule la dérivée au point $x = 1$ est connue, la valeur $u(1)$ ne l'étant pas, ce qui se traduit par un degré de liberté supplémentaire à déterminer. ■

Dans ces conditions, on peut développer la solution comme suit

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{m+1} v_j \varphi_j(x) \quad (3.27)$$

et, comme précédemment, le système linéaire se déduit de

$$a(u_h(x), \varphi_j(x)) = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1 \dots, m + 1 \quad (3.28)$$

or, pour $1 \leq j \leq m$, les calculs sont identiques à ceux effectués dans les exemples 1 et 2, et l'on retrouve les mêmes équations. Il ne reste donc plus qu'à déterminer la dernière équation du système linéaire, qui se déduit de l'écriture suivante

$$\begin{aligned} a(u_h(x), \varphi_{m+1}(x)) &= a(\varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x)) + a(\varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x))u_{m+1} \\ &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)\varphi_{m+1}(x)dx \end{aligned}$$

Le calcul des coefficients de la matrice se déduit des calculs précédents, et l'on trouve finalement

$$a(\varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x)) = \frac{1}{h}, \quad a(\varphi_{m+1}(x), \varphi_{m+1}(x)) = \frac{1}{h}$$

la dernière équation s'écrivant

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{h} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)\varphi_{m+1}(x)dx \quad (3.29)$$

Remarque

L'intégrale intervenant dans la dernière équation peut être évaluée en utilisant des formules de quadrature approchée ; par exemple, l'utilisation de la formule des trapèzes conduit à

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)\varphi_{m+1}(x)dx = \frac{h}{2}f(x_{m+1}) = \frac{h}{2}f(1). \blacksquare$$

Remarque

La matrice A du système linéaire est symétrique définie positive, car par le calcul direct montre que

$$U^t A U = u_1^2 + \sum_{j=1}^m (u_{j+1} - u_j)^2, \quad \forall U \in \mathbb{R}^{m+1}. \blacksquare$$

Exemple 4

Dans les exemples précédents, on a considéré une approximation par des fonctions linéaires par morceaux sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$; on peut considérer également des fonctions quadratiques par morceaux, et même plus généralement polynomiales de degré inférieur ou égal à k par morceaux.

Considérons le cas de l'approximation quadratique; on réalise une approximation dans l'espace E_h des fonctions continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 ; pour construire une telle base de l'espace, on introduit le point milieu noté $x_{j+\frac{1}{2}}$ de

chaque segment $[x_j, x_{j+1}]$. Dans le cas de problème avec conditions aux limites de Dirichlet, on aura donc $(2m + 1)$ degrés de liberté au lieu de m ; comme précédemment, à chaque point de discrétisation, on associe une fonction de base $\varphi_j(x)$ polynomiale de degré 2 sur chaque intervalle qui vérifie $\varphi_j(x) = \delta_{i,j}$ et on a $\dim(E_h) = 2m + 1$. La détermination des fonctions de base s'effectue par identification, ayant une expression analytique du type

$$\varphi_j(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.30)$$

On détermine les inconnues a, b et c par les équations données par $\varphi_j(x_j) = \delta_{i,j}$. On a donc deux types de fonctions de base

- ✓ celles attachées aux points x_j et déterminées par les conditions

$$\varphi_j(x_j) = 1, \varphi_j\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = \varphi_j(x_{j+1}) = 0$$

qui conduisent à l'expression suivante

$$\varphi(x) = \frac{2x^2}{h^2} - \frac{4x_j + 3h}{h^2}x + 1 + \frac{2x_j^2 + 3hx_j}{h^2} \quad (3.31)$$

- ✓ celles attachées aux points milieux $x_{j+\frac{1}{2}}$ et déterminées par les conditions

$$\varphi_{j+\frac{1}{2}}\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = 1, \varphi_{j+\frac{1}{2}}(x_j) = \varphi_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+1}) = 0$$

qui conduisent à l'expression suivante

$$\varphi_{j+\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4x^2}{h^2} + \frac{4(2x_j + h)}{h^2}x - \frac{4x_j(x_j + h)}{h^2} \quad (3.32)$$

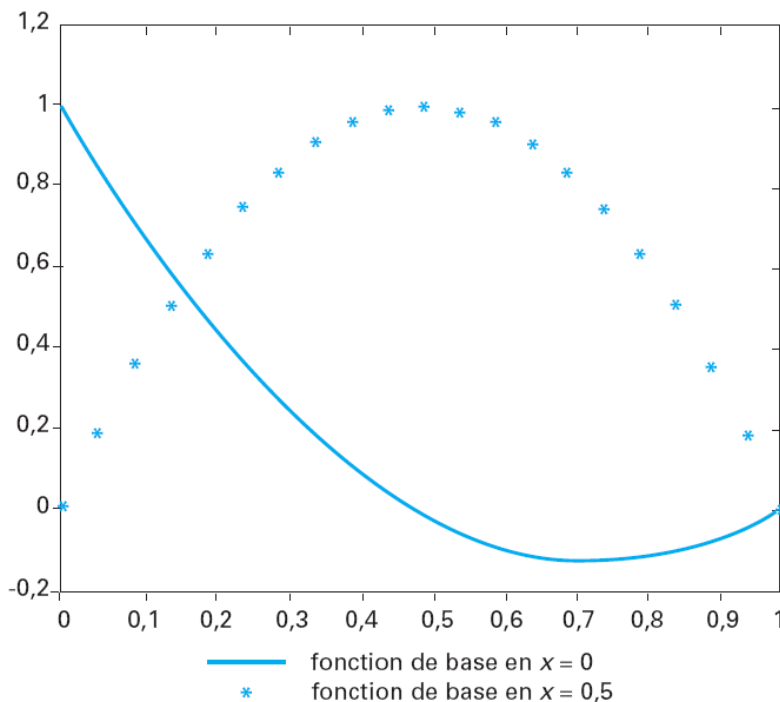


Fig. 3.3 : Fonctions de base attachées aux points $x = 0$ et $x = 0.5$ sur l'élément $K = [0, 1]$.

Tous calculs effectués, la matrice de discrétisation associée est pentadiagonale. Les fonctions $\varphi_j(x)$, $\varphi_{j+1}(x)$, et $\varphi_{j+\frac{1}{2}}(x)$ sont représentées sur la figure 3.3.

3.4. Introduction des éléments finis en dimension 2

Nous allons généraliser la méthode décrite au paragraphe 1; sauf indication contraire spécifiée dans les remarques qui suivront, on considérera dans le reste du chapitre le cas d'un problème aux limites avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes. On supposera que le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est polyédrique. On effectue une « triangulation » du domaine Ω , c'est-à-dire que l'on suppose que l'on peut découper Ω en M triangles K_i , tels que les conditions suivantes soient vérifiées

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^M K_i, \text{ avec } K_i \cap K_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{un sommet, } i \neq j \\ \text{un côté} \end{cases} \quad (3.33)$$

Cette « triangulation » est représentée sur la figure 3.4.

Remarque

On suppose dans la suite que d'un sommet de chaque triangle partent toujours plusieurs côtés, la situation représentée sur la figure 3.5 étant interdite. ■

Remarque

Si Ω n'est pas un polygone, on peut toujours le rendre polygonal en sous-tendant les arcs de la frontière $\partial\Omega$ par des cordes. On verra ultérieurement que l'on peut « trianguler » le domaine Ω en considérant les quadrilatères quelconques (carré, rectangle, parallélogramme, losange...), ainsi que des triangles et quadrilatères à côté courbe, ce qui permet de s'affranchir de l'hypothèse concernant sa forme polyédrique et de prendre en compte la courbure de la frontière. ■

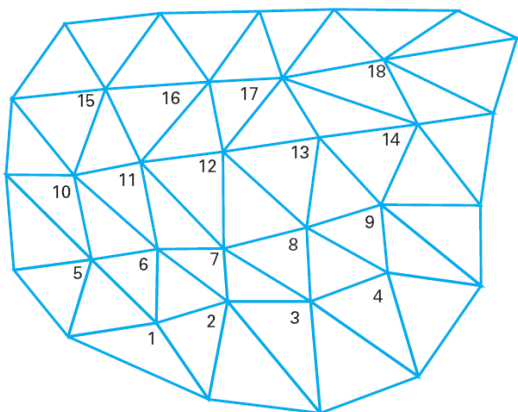


Fig. 3.4 : Exemple de maillage par des triangles.

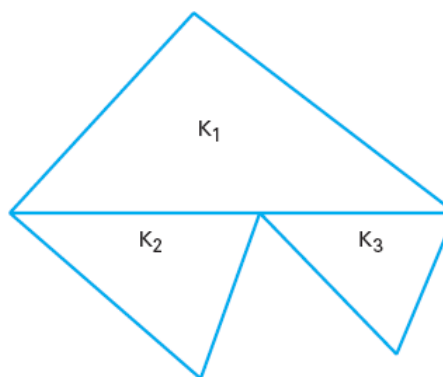


Fig. 3.5 : Situation interdite.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons construire l'espace E_h de fonctions v_h , polynomiales en x et y sur chaque « triangle » de degré inférieur ou égal à k et continues sur le domaine $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

3.4.1. Interpolation par des polynômes de degré 1 [26]

L'espace E_h est ici l'espace des fonctions v_h linéaires en x et en y sur chaque triangle K (c'est-à-dire de la forme $\varphi(x, y) = ax + by + c$) et continues sur $\bar{\Omega}$. On a le résultat préliminaire suivant

Lemme 1. Soit un triangle K dont les sommets A_i ont les coordonnées (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq 3$. Alors il existe un unique polynôme $p(x, y) \in \mathbf{P}_1$ de degré inférieur ou égal à un, prenant des valeurs données arbitraires P_i , $1 \leq i \leq 3$, aux sommets A_i .

Preuve

En effet, il suffit d'écrire $p_i = ax_i + by_i + c$, $1 \leq i \leq 3$. C'est un système linéaire de trois équations à trois inconnues, dont la matrice C a un déterminant donné par

$$\det(C) = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

$\det(C)$ est différent de zéro dès que les points A_i ne sont pas alignés, ce qui a été implicitement supposé. On peut donc déterminer de façon unique les réels a , b et c sur chaque triangle.

Le polynôme $p(x, y)$ peut s'exprimer de façon simple en fonction des coordonnées barycentriques, $\lambda_i(M) = \lambda_i(x, y)$, $1 \leq i \leq 3$, d'un point quelconque M intérieur au triangle K .

Définition. Soit un point $M = (x, y)$ quelconque intérieur au triangle K de sommets non alignés A_i , $1 \leq i \leq 3$; soit (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq 3$, les coordonnées des sommets du triangle. On appelle coordonnée barycentrique du point M par rapport aux trois points A_i , les scalaires $\lambda_i(M) = \lambda_i(x, y)$, $1 \leq i \leq 3$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i(x, y) = 1, \quad \sum_{i=1}^3 x_i \lambda_i(x, y) = x, \quad \sum_{i=1}^3 y_i \lambda_i(x, y) = y$$

Remarque

Posons $\Lambda = (\lambda_1(M), \lambda_2(M), \lambda_3(M))^t$ et $Z = (1, x, y)^t$. Les coordonnées barycentriques sont alors solutions du système linéaire $C^t \Lambda = Z$ et d'après le résultat du lemme 1, la matrice C^t est inversible, ce qui prouve l'existence et l'unicité des coordonnées barycentriques. ■

Notons S_1 l'aire du triangle A_2MA_3 , S_2 celle du triangle A_1MA_3 et S_3 la surface du triangle A_1MA_2 . Soit S l'aire du triangle K . On a évidemment $S = \sum_{i=1}^3 S_i$; de plus, on rappelle que

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}| = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \det(C)$$

$$S = \left(\frac{1}{2}\right) (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2))$$

On peut, de la même façon, déterminer S_i pour $1 \leq i \leq 3$. On vérifie alors que $\lambda_i(M) = \frac{S_i}{S}$, $1 \leq i \leq 3$. Dans le cas particulier où K est le triangle rectangle isocèle de côté l'unité, noté dans la suite \widehat{K} , les points A_i , $1 \leq i \leq 3$, ayant pour coordonnées $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (0,1)$ et $A_3 = (0,0)$, l'expression des coordonnées barycentriques associée au point s'écrit

$$\lambda_1(M) = x, \quad \lambda_2(M) = y, \quad \lambda_3(M) = 1 - x - y$$

à partir de cette notion on établit le résultat suivant

Lemme 2. Les coordonnées barycentriques du point, $\lambda_i(x, y)$, $1 \leq i \leq 3$, sont des polynômes de degré 1 en x et en y , vérifiant de plus, $\lambda_i(A_j) = \delta_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 3$. Le polynôme $P(x, y)$ de degré un prenant les valeurs données arbitraires P_i , $1 \leq i \leq 3$ aux sommets A_i s'exprime au moyen des coordonnées barycentriques de la façon suivante

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^3 P_i \lambda_i(x, y) \quad (3.34)$$

et la restriction de $P(x, y)$ pour un point M appartenant au côté $A_i A_k$ est un polynôme de degré 1 qui ne dépend que des valeurs P_i et P_k .

3.4.1.1. Preuve [22]

En effet, on a établi que $C^t \Lambda = Z$; or C étant inversible, on a $C^{-t} Z = \Lambda$ et, par conséquent, les composantes de Λ sont bien des polynômes de degré un. De plus, si on particularise le point M , en le choisissant confondu avec le sommet, on a

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i(A_1) = 1, \quad \sum_{i=1}^3 x_i \lambda_i(A_1) = x_1, \quad \sum_{i=1}^3 y_i \lambda_i(A_1) = y_1$$

On constate que $\lambda_1(A_1) = 1$ et $\lambda_2(A_1) = \lambda_3(A_1) = 0$ est solution de ce système; comme, d'après le résultat du lemme 1, ce dernier admet une solution unique, on a par permutation circulaire $\lambda_i(A_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$. Cette dernière propriété nous permet de vérifier trivialement que les nombres $\lambda_i(M)$, $1 \leq i \leq 3$, sont linéairement indépendants; comme ce sont également des polynômes de degré inférieur ou égal à un, l'ensemble $\lambda_i(M)$, $1 \leq i \leq 3$, constitue une base de \mathbf{P}_1 , ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. On peut donc écrire

$$p(M) = \sum_{i=1}^3 \theta_i \lambda_i(M) \quad (3.35)$$

Particularisons les points M au sommet A_j ; on a donc

$$p(A_j) = p_j = \sum_{i=1}^3 \theta_i \lambda_i(A_j) = \theta_j \quad \text{car } \lambda_i(A_j) = \delta_{ij} \quad (3.36)$$

Donc on peut écrire $p(x, y) = \sum_{j=1}^3 p_j \lambda_j(x, y)$. Enfin, soit M un point appartenant au côté $A_j A_k$ opposé au sommet A_j ; on peut toujours écrire $M = \theta A_k + (1 - \theta) A_j$, de sorte que les coordonnées x et y du point M sont également combinaison convexe de celles des points A_j et A_k ; $\lambda_i(M)$ étant un polynôme de degré un en x et en y , on a

$$\lambda_i(M) = \alpha x + \beta y + \chi$$

soit, puisque $\chi = \theta\chi + (1 - \theta)\chi$

$$\begin{aligned}\lambda_i(M) &= \alpha(\theta x_k + (1 - \theta)x_j) + \beta(\theta y_k + (1 - \theta)y_j) + \chi \\ &= \theta(\alpha x_k + (1 - \theta)x_j) + (1 - \theta)(\alpha x_j + \beta y_j + \chi)\end{aligned}$$

ou encore

$$\lambda_i(M)|_{M \in A_j A_k} = \theta\lambda_i(A_k) + (1 - \theta)\lambda_i(A_j) = 0$$

Donc

$$p(M)|_{M \in A_j A_k} = \lambda_i(M)p_i + \lambda_j(M)p_j + \lambda_k(M)p_k = \lambda_j(M)p_j + \lambda_k(M)p_k$$

A partir de ces résultats techniques préliminaires, on peut généraliser à la dimension 2 les résultats obtenus en dimension 1. Soit donc

$F_h =$

$\{v_h, v_h|_K \in \mathbf{P}_1, v_h \text{ entièrement déterminée par ses valeurs aux nœuds de la triangulation}\}$

l'espace des fonctions dont la restriction à chaque triangle K est un polynôme de degré inférieur ou égale à un, les fonctions de l'espace F_h étant entièrement déterminées par leur valeurs aux sommets A_j $1 \leq j \leq 3$ des triangles K . On a alors le résultat important que lorsque l'on passe d'un triangle K à un triangle adjacent K' , les fonctions v_h de F_h sont continues sur $K \cup K' \subset \bar{\Omega}$.

Soit à présent E_h le sous-espace de F_h des fonctions v_h nulles aux sommets situés sur la frontière $\partial\Omega$; ces fonctions sont en fait nulles sur toute la frontière. La dimension de E_h est égale au nombre N de sommets non situés sur la frontière $\partial\Omega$. Soit A_1, \dots, A_N , ces sommets, c'est-à-dire les nœuds de la « triangulation ». On considère les fonctions $\varphi_j(x, y)$ de E_h , représentées sur la figure 3.6, telles que $\varphi_j(A_i) = \delta_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq N$.

Le support de la fonction φ_j est formé de la réunion des triangles admettant A_j comme sommet. L'ensemble des fonctions $\{\varphi_j\}$ est une base de E_h . À chaque nœud A_j on associe donc une fonction de base φ_j , définie comme en dimension 1 par

1. $\varphi_j(A_i) = \delta_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq N$;
2. La restriction de φ_j à chacun des triangles possédant A_j comme sommet

est un polynôme de degré inférieur ou égal à un :

3. Pour chaque triangle K_j , n'appartenant pas à support φ_j , on a $\varphi_j(x, y) = 0$.

Soit u_j la solution approchée de l'équation de Poisson en dimension 2 avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes; posons $u_i = u_h(A_i)$. Si l'on développe dans la base φ_j , on aura comme précédemment

$$u_h(M) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(M), \forall M \in \underline{\Omega} \quad (3.37)$$

où les composantes, valeur de u_h aux sommets des triangles, sont données par la résolution du système linéaire

$$\sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = \langle f, \varphi_j \rangle, 1 \leq j \leq N \quad (3.38)$$

avec $\underline{\Omega}$ représente l'intérieur du domaine Ω .

Lorsque l'on calculera les éléments de matrice $a(\varphi_i, \varphi_j)$, ces termes seront nuls lorsque $\text{support}(\varphi_j) \cap \text{support}(\varphi_i) = \emptyset$. Donc cette matrice A sera creuse. La matrice A s'appelle **matrice de rigidité du système** [9]. Les points A_j auxquels sont attachées les valeurs u_i de la solution u_h s'appellent les **nœuds de la «triangulation»** ; les côtés des triangles sont les **arêtes de la «triangulation»**.

Si l'on considère le maillage représenté sur la figure 3.4, par des considérations sur les supports des fonctions de base, on peut donner la forme de la matrice de discrétisation (figure 3.7), où, dans cette représentation les croix représentent des éléments non nuls. On remarque que cette matrice est tridiagonale par blocs, les blocs diagonaux sont également tridiagonaux, conformément à la représentation de la figure 3.7.

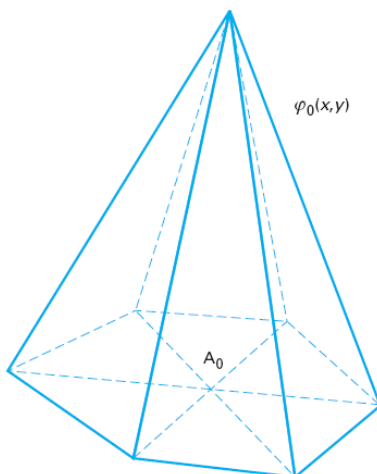


Fig. 3.6 : Fonction de base linéaire par morceaux associée aux points A_0 .

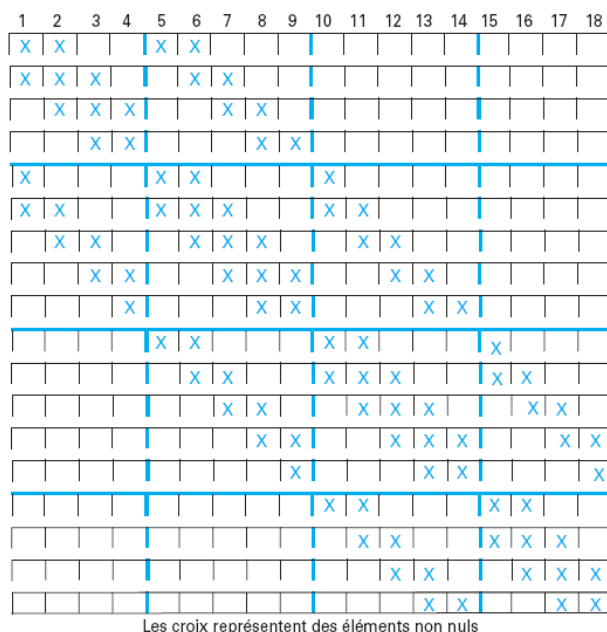


Fig. 3.7 : Matrice de discrétisation

Remarque

On cherchera à minimiser la largeur de la bande de la matrice en adoptant une numérotation des points du maillage adéquate. De manière générale, la largeur de bande est caractérisée par la différence maximale entre l'indice de la dernière et de la première fonction de base dont l'intersection des supports est différente du vide ; il existe des algorithmes automatiques de numérotation qui permettent une telle minimisation, tel l'algorithme de Cuthill-Mac Kee [15]. ■

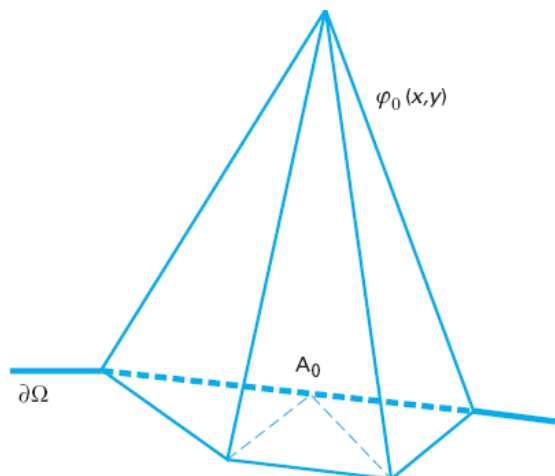


Fig. 3.8 : Fonction de base demi-chapeau linéaire par morceaux associée aux point frontière A_0

Remarque

Considérons le cas d'un problème aux limites avec condition de type Neumann. La dimension de l'espace d'approximation E_h elle est égale au nombre de nœuds appartenant à $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial \Omega$ à (et non $\underline{\Omega}$ intérieur de Ω), car la valeur de la fonction sur le bord n'est pas à priori connue. On aura donc deux sortes de fonctions de base

- ✓ les fonctions chapeaux pour les points, représentées sur la figure3.6;
- ✓ les fonctions demi-chapeaux pour les points, ces dernières étant représentées sur la figure3.8. ■

3.4.2. Exemples de matrices de discrétisation

On examine, dans ce paragraphe, un certain nombre de situations classiques.

Exemple 5 [23]

On considère le domaine $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, et le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + qu(x) = f(x), (q \geq 0) \text{ sur } \Omega \\ u(x) = 0, \text{ sur } \partial \Omega \end{cases} \quad (3.39)$$

On considère également une «triangulation» du domaine Ω par des triangles rectangles isocèles de coté h , comme représenté sur la figure3.9; on constate que chaque nœud est le centre d'un polygone à six côtés rassemblant six

triangles K_i , $i = 1, \dots, 6$, possédant donc ce nœud comme sommet. Soit A_0 un point de coordonnées (x_0, y_0) et, A_i , $i = 1, \dots, 6$, les voisins de ce point A_0 , les points A_1 , A_2 , A_4 et A_5 étant de plus en position de points cardinaux autour du point A_0 .

Soit $\varphi_0(x, y)$ la fonction de base attachée au point A_0 ; le support de la fonction de base $\varphi_0(x, y)$, représenté sur la figure 3.10, est constitué par l'union des triangles K_i , $i = 1, \dots, 6$. De plus, dans le cas de l'approximation par des fonctions de base linéaires par morceaux, on peut exprimer les restrictions de la fonction de base K_i , $i = 1, \dots, 6$, sur chaque triangle K_i , grâce à la condition $\varphi_j(A_i) = \delta_{i,j}$; en effet, on cherche $\varphi_0(x, y)$ de la forme

$$\varphi_0(x, y)|_{K_i} = a_i x + b_i y + c_i \quad (3.40)$$

Par identification sur chaque triangle K_i , on peut déterminer les coefficients a_i, b_i, c_i ; par exemple, si nous considérons, le triangle K_1 de sommets A_0 , $A_1 = (x_0 + h, y_0)$ et $A_2 = (x_0, y_0 - h)$, on obtient

$$\varphi_0(x, y)|_{K_1} = \frac{x_0 - x}{h} + \frac{y_0 - y}{h} + 1 \text{ et } \nabla \varphi_0(x, y)|_{K_1} = \left(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right) \quad (3.41)$$

La détermination de $\varphi_0(x, y)$ sur les autres triangles ne présente pas de difficulté majeure et est laissée à titre d'exercice. Par ailleurs, comme en dimension un, on devra déterminer, par le même principe, l'expression des fonctions de base $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, 6$, attachées aux points A_i , $i = 1, \dots, 6$, voisins du point A_0 . Par exemple, sur le triangle K_1 , l'expression de la fonction de base $\varphi_i(x, y)$ et celle de son gradient sont données par

$$\varphi_i(x, y)|_{K_1} = \frac{x - x_0}{h} \text{ et } \nabla \varphi_i(x, y)|_{K_1} = \left(\frac{1}{h}, 0\right)$$

Il convient de noter que seules les expressions de ces fonctions $\varphi_i(x, y)$, sur les triangles utiles, est nécessaire; en effet, dans la suite du calcul, on ne doit prendre en compte que les triangles pour lesquels $\text{support}(\varphi_j) \cap \text{support}(\varphi_0) = \emptyset$ pour $j \neq 0$. Le reste du calcul consiste à calculer les coefficients de la matrice A , c'est-à-dire un certain nombre d'intégrales doubles; par exemple, on aura

$$a = (\varphi_0, \varphi_0) = \iint_{\Omega} (|\nabla \varphi_0|^2 + q \varphi_0^2) dx dy = \sum_{j=1}^6 \iint_{K_j} (|\nabla \varphi_0|^2 + q \varphi_0^2) dx dy \quad (3.42)$$

soit, dans la situation considérée ici et puisque les gradients des fonctions de base sont constants sur chaque triangle et que $\text{aire}(K_i) = \frac{h^2}{2}$ pour tous les indices i , il vient

$$a = (\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{j=1}^6 (|\nabla\varphi_0|^2 \text{aire}(K_i)) + q \iint_{K_i} \varphi_0^2 dx dy = 4 + q \frac{h^2}{2} \quad (3.43)$$

Le calcul des termes hors diagonaux s'effectue de la même façon; par exemple

$$\begin{aligned} a = (\varphi_0, \varphi_1) &= \iint_{\Omega} (< \nabla\varphi_0, \nabla\varphi_1 > + q\varphi_0\varphi_1) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^6 \iint_{K_i} (< \nabla\varphi_0, \nabla\varphi_1 > + q\varphi_0\varphi_1) dx dy \end{aligned}$$

Or la fonction n'est différente de zéro que sur les triangles et ce terme se réduit à

$$\begin{aligned} a = (\varphi_0, \varphi_1) &= \iint_{K_1} (< \nabla\varphi_0, \nabla\varphi_1 > + q\varphi_0\varphi_1) dx dy + \iint_{K_6} (< \nabla\varphi_0, \nabla\varphi_1 > + q\varphi_0\varphi_1) dx dy \\ &= -1 + q \frac{h^2}{12} \end{aligned}$$

Finalement, tous calculs effectués, on trouve

$$a = (\varphi_0, \varphi_1) = a(\varphi_0, \varphi_2) = a(\varphi_0, \varphi_4) = a(\varphi_0, \varphi_5) = -1 + q \frac{h^2}{12}$$

et

$$a(\varphi_0, \varphi_3) = a(\varphi_0, \varphi_6) = q \frac{h^2}{12}$$

L'évaluation du second membre, s'effectue suivant le même principe dans la mesure où il suffit de calculer l'intégrale suivante

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^6 \iint_{K_i} f(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy \quad (3.44)$$

En général, il n'est pas toujours possible d'avoir une primitive de la fonction sous le signe \int , ici $f(x, y) \varphi_0(x, y)$; on utilise donc, pour évaluer cette intégrale, des formules d'intégration approchée. Nous considérons ci-dessous deux types d'approximation.

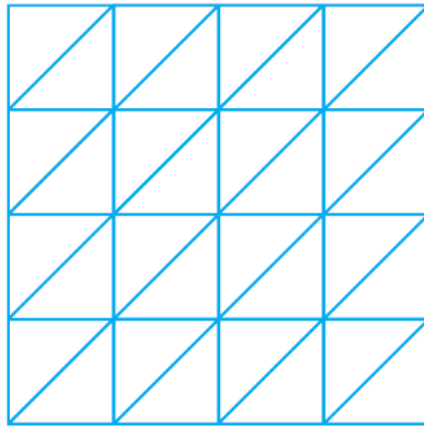
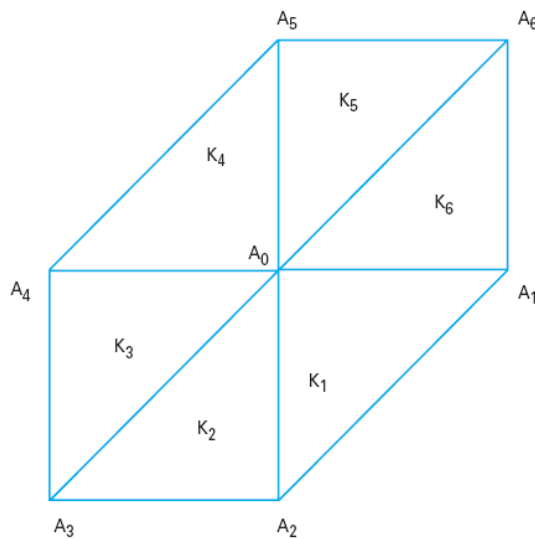


Fig. 3.9 : Maillage élément finis uniforme.

Fig. 3.10 : Support de la fonction φ_0 associée aux point A_0 .

Approximation n° 1

Pour calculer chacune des six intégrales, on utilise une formule de quadrature approchée qui donne un résultat exact pour les polynômes de degré inférieur ou égal à un

$$\iint_K g(x, y) dx dy = \frac{\text{aire}(K)}{3} \sum_{i=1}^3 g(A_i) \quad (3.45)$$

Par un calcul très simple on obtient

$$\iint_K f(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy = \frac{h^2}{6} f(A_0)$$

donc

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^6 \frac{h^2}{6} f(A_0) = h^2 f(A_0)$$

Approximation n° 2

Pour calculer $\iint_{\Omega} f(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy$, on interpole la fonction $f(x, y)$ dans la base $\{\varphi_i\}_{i=0}^6$, pour $(x, y) \in \cup_{i=1}^6 K_i$, on peut donc écrire

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^6 f(A_i) \varphi_i(x, y) \quad (3.46)$$

donc

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^6 f(A_i) \cdot \iint_{\Omega} \varphi_i(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy$$

Tous calculs faits, on trouve

$$\iint_{\Omega} \varphi_0^2(x, y) dx dy = \frac{h^2}{2} \text{ et } \iint_{\Omega} \varphi_i(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy = \frac{h^2}{12}, i = 1, 2, \dots, 6$$

ce qui permet d'avoir l'estimation

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy = \left(\frac{f(A_0)}{2} + \sum_{i=1}^6 \frac{f(A_i)}{12} \right) h^2 \quad (3.47)$$

Exemple 6 [23]

On considère le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ et le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + qu(x) = f(x), (q > 0) \text{ sur } \underline{\Omega} \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.48)$$

Discretisons ce problème en considérant de nouveau une triangulation du domaine par des triangles rectangles isocèles de côté h . Pour les points internes à Ω , il n'y a aucun changement par rapport à la situation envisagée dans l'exemple

précédent. Les seuls changements qui interviennent sont relatifs aux points appartenant à la frontière ; dans ce cas, il faut attacher à ces points frontières des fonctions demi chapeaux, de telle sorte que le support de la fonction de base reste inclus dans $\bar{\Omega}$; par conséquent, certains coefficients de la matrice de rigidité vont diminuer. On suppose, par exemple, que les points A_0, A_1 et A_4 sont situés sur $\partial\Omega$ et que, pour un tel point, le support de la fonction demi-chapeau est constitué par le polygone $A_4 A_5 A_6 A_1 A_0 A_4$. Dans ce cas, les contributions de $a(\varphi_0, \varphi_0)$, $a(\varphi_0, \varphi_1)$, et $a(\varphi_0, \varphi_4)$ sont diminuées de moitié, les autres $a(\varphi_0, \varphi_5)$ et $a(\varphi_0, \varphi_6)$ restant inchangées. Plus exactement, on obtient en effectuant les calculs

$$a(\varphi_0, \varphi_0) = 2 + q \frac{h^2}{4}, a(\varphi_0, \varphi_1) = a(\varphi_0, \varphi_4) = -\frac{1}{2} + q \frac{h^2}{24},$$

$$a(\varphi_0, \varphi_5) = -1 + q \frac{h^2}{12} \text{ et } a(\varphi_0, \varphi_6) = q \frac{h^2}{12}$$

de plus, pour ce point, la part contributive du second membre diminue de moitié, et on obtient dans le cadre du premier type d'approximation de l'intégrale de surface

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy = \frac{h^2}{2} f(A_0) \quad (3.49)$$

Remarque

Dans le cas de conditions aux limites de type Neumann non homogènes, il faut rajouter la contribution du terme de bord provenant de la formule de Green. Donc si $\frac{\partial u}{\partial n} = g$, on aura à tenir compte de l'expression suivante de la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + quv) dx dy = \iint_{\Omega} f v dx dy + \oint_{\partial\Omega} g v ds \quad (3.50)$$

et rajouter la part de l'intégrale curviligne. ■

3.5. Conclusion

On a présenté dans ce chapitre un problème à équations aux dérivées partielles avec une formulation variationnelle équivalente.

On a vu qu'avec cette formulation on peut approximer la solution sous une forme d'une somme finie, afin de transformer le problème de trouver la solution u à un autre problème numérique qui consiste à chercher une solution approchée u_h qui donne une erreur minimale.

Cette solution approchée est construite à partir des fonctions de forme sous forme de combinaison linéaire. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont les inconnues du problème.

Pour chercher cette la solution approchée on a vu qu'il fallait discrétiser le domaine de définition en éléments finis.

Les principes du choix des fonctions de forme, et de la discrétisation en éléments finis sont bien présentés dans ce chapitre, en se limitant sur les domaines unidimensionnels et bidimensionnels.

On a fait volontairement une façon mathématique dans la présentation de ces principes afin de leur donner une grande objectivité.

Pour voir l'efficacité de la méthode des éléments finis de Galerkin, il est très préférable de corroborer son étude mathématique, exposée dans ce chapitre, avec des études numériques et informatiques. Ceux-ci font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Résultats numériques et interprétations

4.1. Introduction

La programmation informatique permet l'évaluation de l'efficacité des méthodes des résolutions des différents problèmes, en particulier, les équations aux dérivées partielles, et constitue aussi un outil puissant qui aide à l'étude et le développement de tels méthodes. Parmi les raisons qui montrent l'importance de cet outil est que quelques niveaux d'analyse ne sont pas faisables avec les outils mathématiques traditionnels, surtout qu'on est en face d'un problème complexe.

L'évaluation des méthodes de résolution se fait en calculant l'erreur commise et le temps d'exécution (donc la complexité) de leurs programmes.

Dans ce chapitre on va limiter notre étude, sur la méthode des éléments finis de Galerkin, aux problèmes à une dimension et à deux dimensions, car les problèmes à trois dimensions sont très compliqués à étudier et à programmer. Il faut noter que même la programmation des problèmes à deux dimensions prend beaucoup d'effort surtout celui de la diffraction des ondes.

4.2. Cas unidimensionnel : Deux plaques infinies parallèles

Considérons deux plaques conductrices parallèles et infinies, qui sont normale à l'axe des x et séparées par une distance d comme le montre la figure 4.1. Une plaque est maintenue à un potentiel fixe $V = V_0$ et la deuxième plaque est maintenue à $V = 0$, le milieu entre les deux plaques, qui est supposé non magnétique, possède une permittivité relative ε_r et une densité volumique de charge ρ_0 .

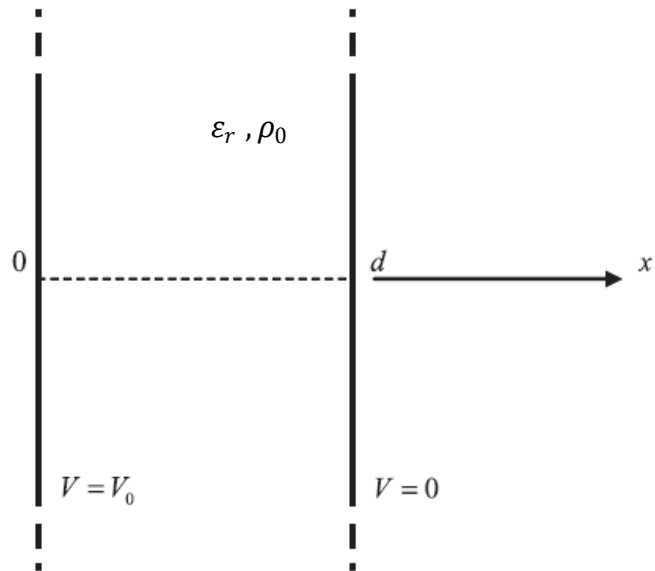


Fig. 4.1. Deux plaques infinies parallèles

Calculons le potentiel et le champ, entre les deux plaques électrostatiques.

4.2.1. Solution analytique

Le potentiel électrostatique en tout point entre les deux plaques obéit à l'équation de Poisson

$$\nabla(\varepsilon_r \nabla V) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \quad (4.1)$$

avec les conditions aux limites

$$V(0) = V_0, \quad V(d) = 0 \quad (4.2)$$

Pour un milieu homogène, linéaire et isotrope, l'équation de poisson avec une seule dimension s'écrit

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \quad (4.3)$$

Cette équation unidimensionnelle c'est un cas particulier de l'équation générale (1.60) exposé dans le chapitre 1.

On fait l'intégration deux fois on trouve

$$V(x) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} x^2 + c_1 x + c_0 \quad (4.4)$$

où les constantes c_1 et c_0 sont déterminés grâce aux conditions aux limites, les équations (4.2) et (4.4) donnent

$$V(x) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} x^2 + \left(\frac{\rho_0}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{V_0}{d} \right) x + V_0 \quad (4.5)$$

L'expression du champ électrique est obtenue en prenant le gradient négatif du potentiel

$$\vec{E}(x) = -\nabla V = -\hat{a}_x \frac{dV(x)}{dx} \quad (4.6)$$

alors

$$\vec{E}(x) = -\hat{a}_x \left[\frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} - \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \right] \quad (4.7)$$

On conclut que, le potentiel électrostatique entre les deux plaques est une fonction quadratique et le champ correspondant est une fonction linéaire.

4.2.2. Solution approximée par la méthode des éléments finis de Galerkin

Dans tout ce problème on va prendre pour les paramètres du montage constitué par les deux plaques (Fig.4.1) les valeurs

$$V_a = V_0 = 1, V_b = 0, \varepsilon_r = 1, \rho_0 = 10^{-8}, d = 8 \text{ cm.}$$

4.2.2.1. Fonctions d'interpolation linéaires

La figure 4.2.a montre la courbe de la solution exacte (courbes en ligne continue) et celle de la solution approchée de l'équation de Laplace pour la configuration de la figure 4.1 (l'autre courbe). Cette dernière solution est obtenue par la méthode des éléments finis de Galerkin pour un nombre d'éléments de discrétisation $N_e = 4$ et des fonctions d'interpolation linéaires. On remarque que la différence entre les deux solutions est remarquable dans ce cas. L'erreur quadratique moyenne est égale à 0.0117.

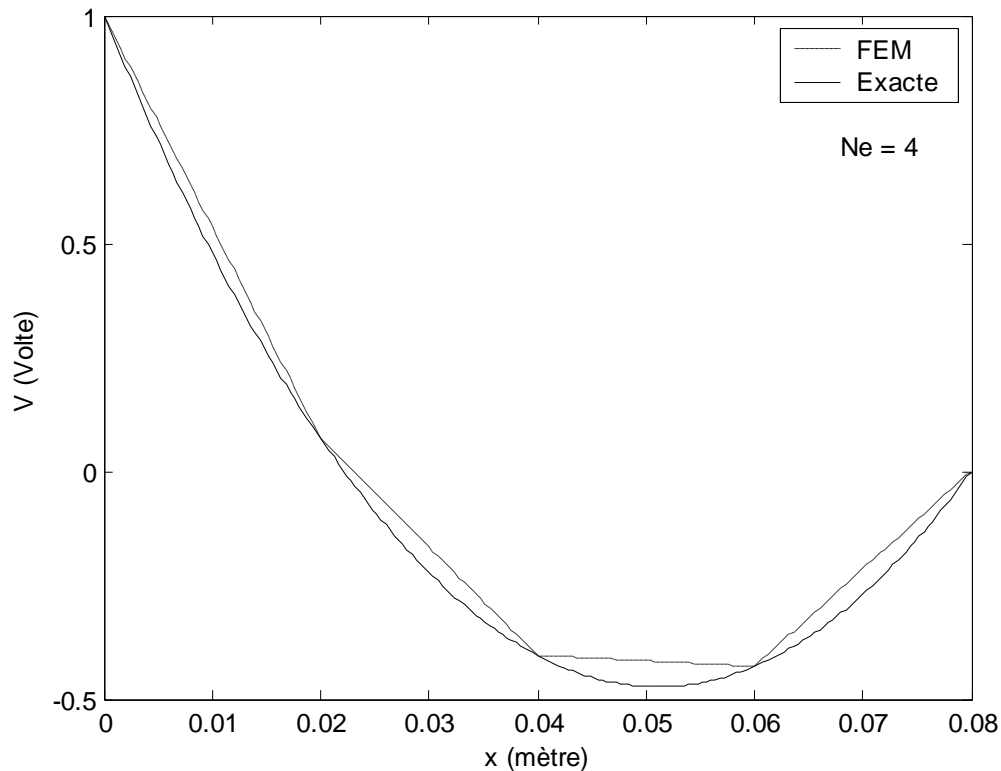


Fig. 4.2.a : Potentiels électriques exacte et approché avec $N_e = 4$.

La figure 4.2.b montre la courbe de la solution exacte (courbes en ligne continue) et celle de la solution approchée pour le champ électrostatique pour la configuration de la figure 4.1. La solution approchée est obtenue par la méthode des éléments finis de Galerkin pour un nombre d'éléments de discrétisation $N_e = 4$ et des fonctions d'interpolation linéaires. On remarque que la solution approchée est discontinue et ceci est prévisible car le potentiel approché associé à ce champ (Fig. 4.2.a) a une courbe brisée.

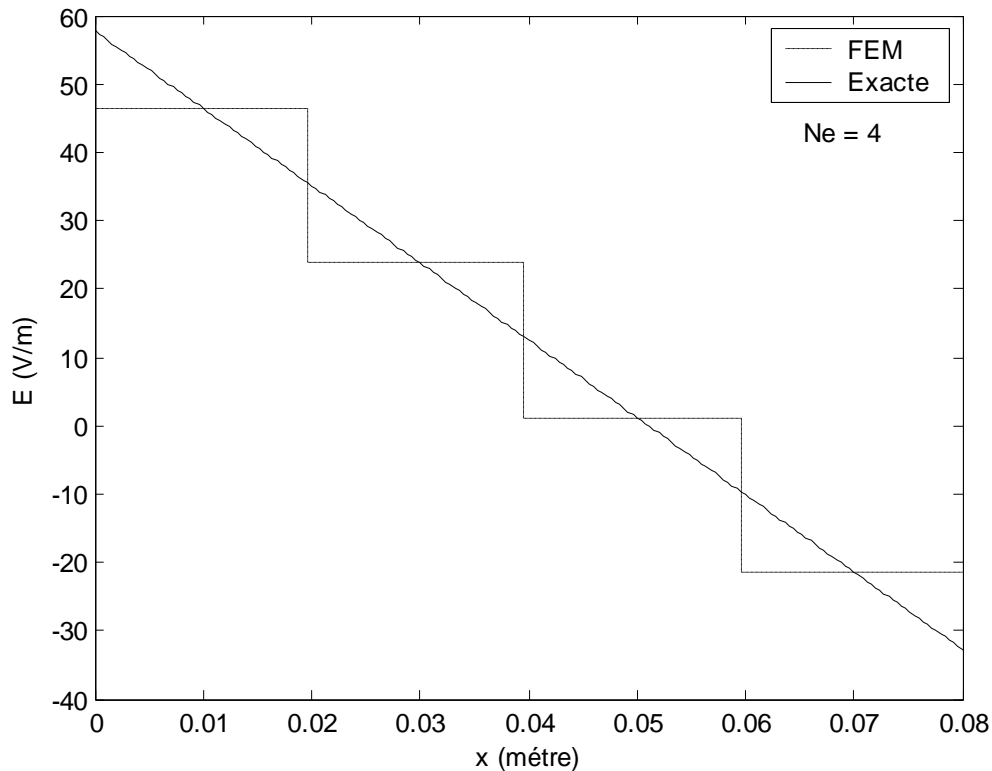


Fig. 4.2.b : Champs électriques exacte et approché avec $N_e = 4$.

La figure 4.3.a montre la courbe de la solution exacte (courbes en ligne continue) et celle de la solution approchée de l'équation de Laplace pour la configuration de la figure 4.1 (courbe en ligne brisée). Cette dernière solution est obtenue par la méthode des éléments finis de Galerkin pour un nombre d'éléments de discrétisation $N_e = 8$ et des fonctions d'interpolation linéaires. On remarque que la différence entre les deux solutions presque nulle dans ce cas. L'erreur quadratique moyenne est égale à 0.0029.

La figure 4.3.b montre la courbe de la solution exacte (courbes en ligne continue) et celle de la solution approchée pour le champ électrostatique pour la configuration de la figure 4.1. La solution approchée est obtenue par la méthode des éléments finis de Galerkin pour un nombre d'éléments de discrétisation $N_e = 8$ et des fonctions d'interpolation linéaires. On peut affirmer que tant que le

potentiel électrostatique approché a une courbe brisée son champ électrostatique associé est reste toujours une fonction en escalier (discontinue) et ceci revient à linéarité des fonctions d'interpolation.

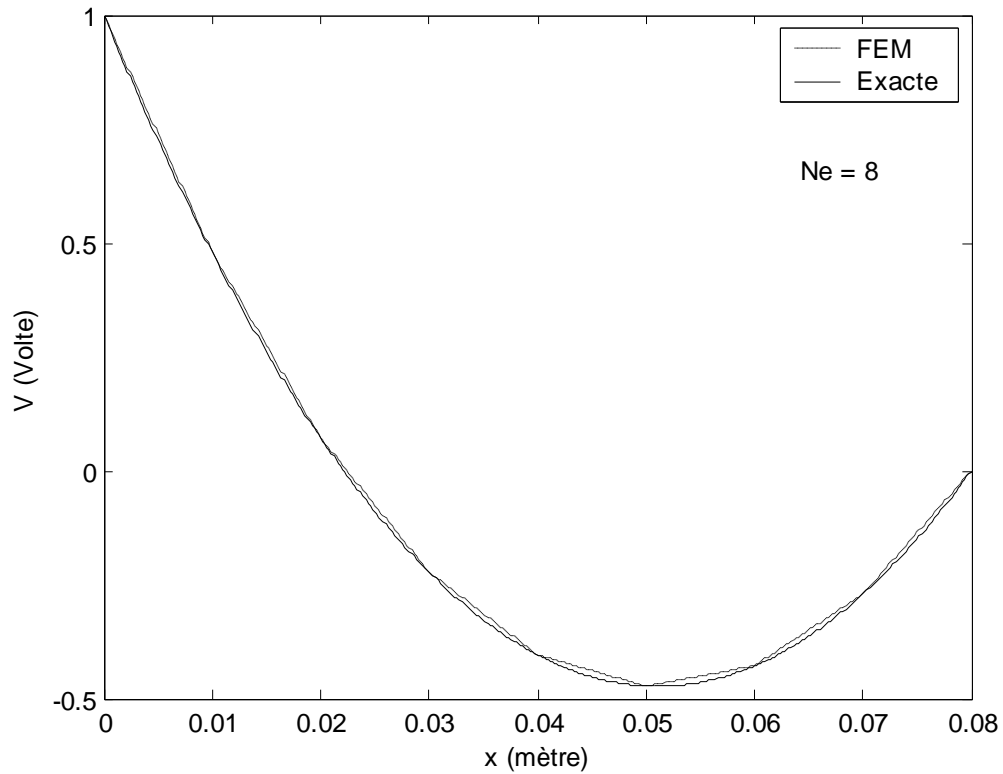


Fig. 4.3.a : Potentiels électriques exacte et approché avec $N_e = 8$.

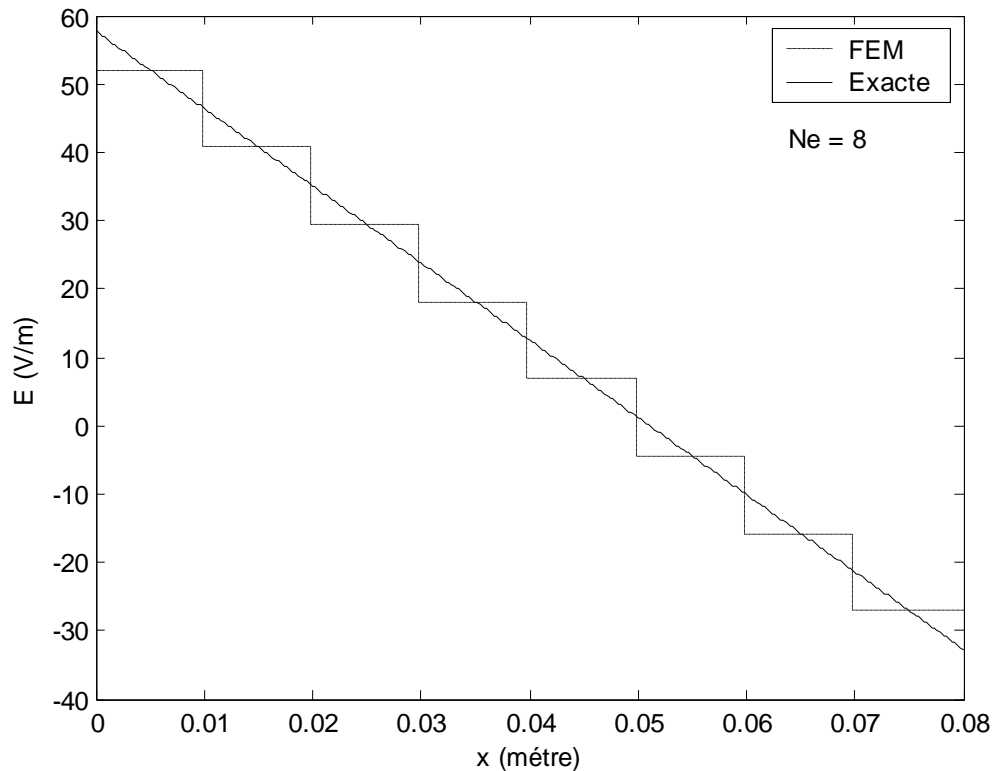


Fig. 4.3.b : Champs électriques exacte et approché avec $N_e = 8$.

Pour déterminer la relation entre l'erreur quadratique moyenne ϵ (bien entendu celle du potentiel électrostatique) et le nombre d'éléments de discrétisation N_e on a construit le tableau suivant

N_e	1	2	3	4	5	6	7	8
$1/N_e^2$	1	0.2500	0.1111	0.0625	0.0400	0.0278	0.0204	0.0156
ϵ	0.1867	0.0467	0.0207	0.0117	0.0075	0.0052	0.0038	0.0029

La figure 4.4 montre la courbe de la fonction $\epsilon = f(1/N_e^2)$. Cette figure met en évidence la relation entre l'erreur ϵ et le rapport $1/(N_e^2)$ qui est une relation purement linéaire avec une pente égale à 0.1867 (la courbe est une droite qui passe par l'origine). Du coup, on peut écrire $\epsilon = 0.1867/(N_e^2)$.

Cette dernière relation nous permet de conclure que dans le cas où les fonctions d'interpolation sont linéaires l'erreur quadratique moyenne est inversement proportionnelle avec le carré du nombre d'éléments de la discrétisation.

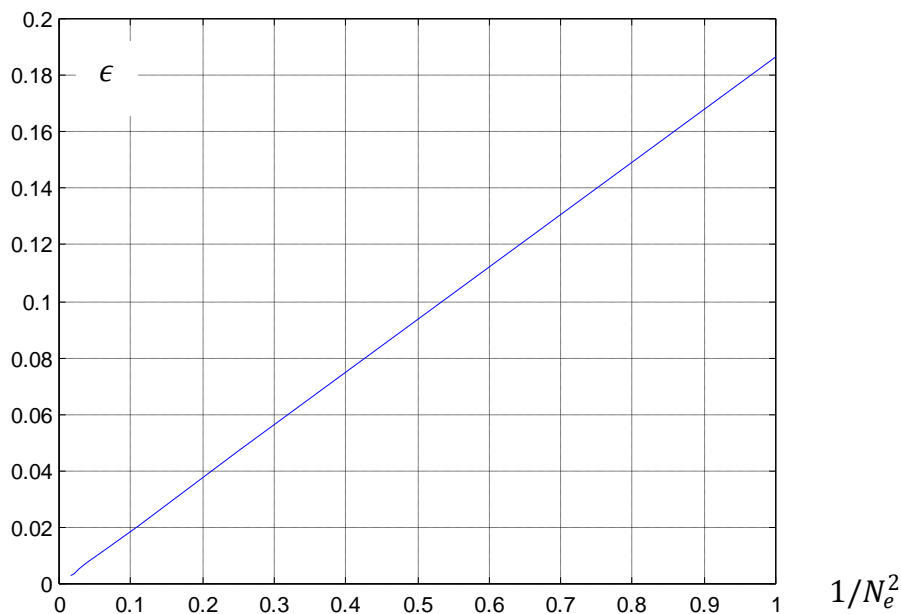


Fig. 4.4 : L'erreur quadratique en fonction $1/N_e^2$.

4.2.2.2. Fonctions d'interpolation quadratiques (polynômes de deuxième degré)

Dans les figures 4.5 et 4.6 on remarque que la solution approchée (pour le potentiel ou le champ électrostatique) se confond fermement avec la solution analytique bien que le nombre d'élément est petit. Ce résultat est devinable pour la bonne raison que les fonctions d'interpolation sont quadratiques. On peut conclure que la méthode des éléments finis de Galerkin donne des très bons résultats pour des fonctions d'interpolation quadratiques bien que le nombre d'éléments est faible. Il faut noter que dans la méthode de Galerkin les fonctions de test sont les mêmes avec les fonctions d'interpolation, ce qui donne plus d'avantage dans ce cas (interpolation quadratique) au niveau de convergence de la solution approchée vers la solution exacte. Le seul inconvénient du choix des

fonctions quadratiques c'est qu'il y a plus de calcul que si on choisit des fonctions linéaires pour le même nombre d'éléments.

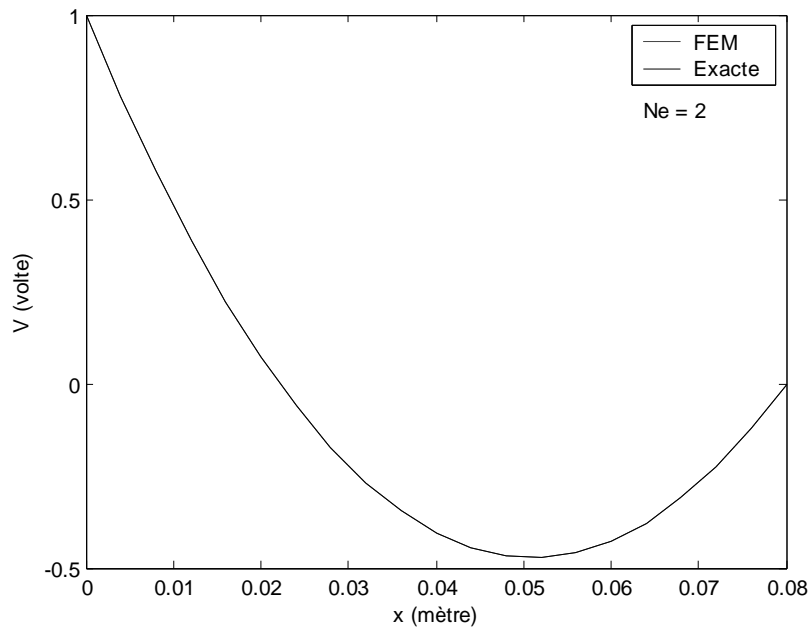


Fig. 4.5 : Potentiels électriques exacte et approché avec $N_e = 2$.

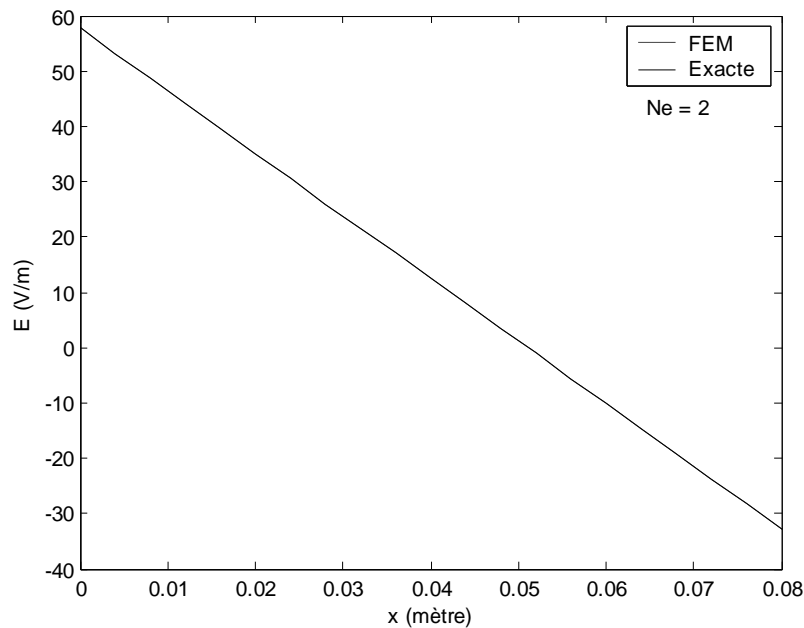


Fig. 4.6 : Champs électriques exacte et approché avec $N_e = 2$.

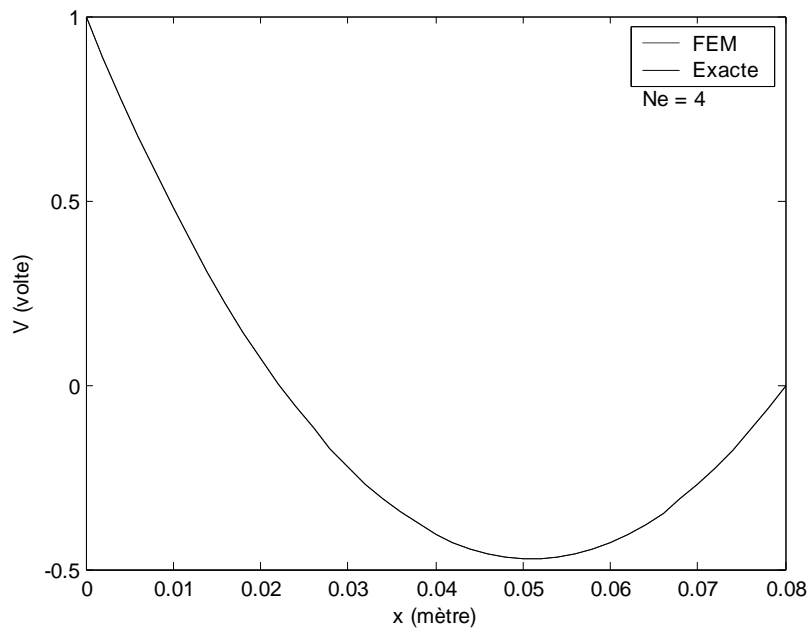


Fig. 4.7 : Potentiels électriques exacte et approché avec $N_e = 4$.

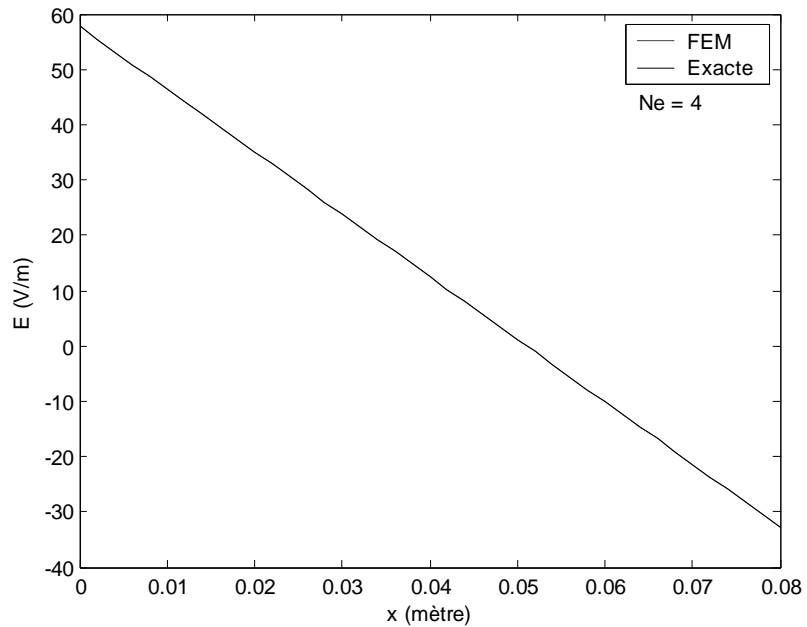


Fig. 4.8 : Champs électriques exacte et approché avec $N_e = 4$.

4.3. Cas bidimensionnel : Cavité rectangulaire

On considère une cavité rectangulaire à frontières métalliques comme montre la figure 4.9 Les frontières verticales et la frontière de bas ($x = 0, x = w$) ($y = 0$) sont maintenues à un potentiel nul. La frontière de haut ($y = h$) est maintenue à un potentiel $V = V_0$. L'intérieur de la cavité est dépourvu de toutes charges. On va utiliser la méthode des éléments finis de Galerkin pour trouver la solution approchée de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (4.8)$$

dont l'inconnue est le potentiel V .

Cette équation bidimensionnelle c'est un cas particulier de l'équation générale (1.60) exposé dans le chapitre 1 où $\alpha_x = \alpha_y = 1$, $\alpha_z = 0$, $\beta = 0$ et $g = 0$.

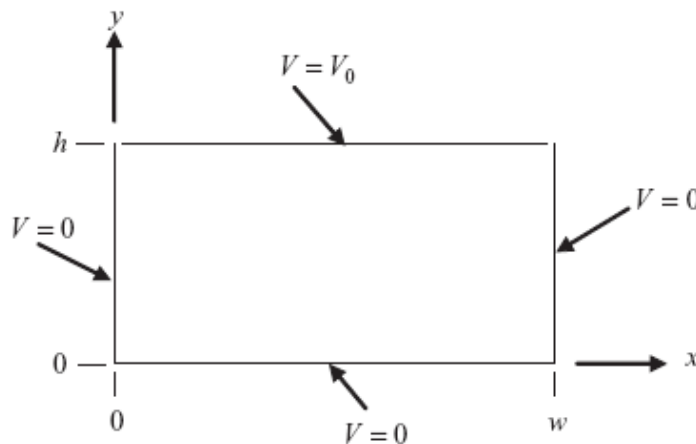


Fig. 4.9 : Cavité rectangulaire

4.3.1. Solution analytique

L'équation de Laplace (4.8) associée par le système des conditions aux limites

$$V(x, 0) = 0$$

$$V(x, h) = V_0$$

$$V(0, y) = 0$$

$$V(x, y) = 0$$

peut être solutionner analytiquement par la méthode de séparation des variables surnommée par la méthode de Fourier. La forme de la solution, qui est le potentiel électrostatique à l'intérieur de la cavité, en fonction de x et y est donnée par [17],

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{\omega}\right) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi y}{\omega}\right)}{(2k-1) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi h}{\omega}\right)} \quad (4.9)$$

4.3.2. Solution approximée par la méthode des éléments finis de Galerkin

Dans tout ce problème on va prendre pour les paramètres de la cavité de la (Fig.4.9) les valeurs $w = 1$ et $h = 1$.

Dans ce cas bidimensionnel on va utiliser le maillage le plus simple qui est le maillage à éléments finis triangulaires linéaires. Au niveau de programmation un tel maillage est relativement simple à programmer par rapport aux autres types de maillage. De plus l'erreur commise, proprement dite erreur de discrétisation, dans ce maillage est toujours faible. Ce sont les raisons pour lesquelles tout le monde qui s'intéresse par la FEM (Méthode des Eléments Finis) il favorise ce maillage.

La figure 4.10 montre la façon de discrétisation, en éléments finis triangulaires, et de numérotation des nœuds pour un domaine rectangulaire. On appelle cette opération le maillage en éléments finis.

On a programmé avec le Matlab cette opération de maillage. Notre programme donne pour un maillage qui contient $10 * 10 * 2 = 200$ éléments la figure 4.11.a (le nombre de division selon x est $n_x = 10$ et celui selon y est $n_y = 10$), pour un maillage qui contient $20 * 20 * 2 = 800$ éléments donne la figure 4.12.a ($n_x = 20$ et $n_y = 20$) et pour un maillage qui contient $40 * 40 * 2 = 3200$ éléments donne la figure 4.13.a ($n_x = 20$ et $n_y = 20$). On rappelle que le nombre des nœuds dans le cas bidimensionnel est égal à $(n_x + 1)(n_y + 1)$.

La figure 4.11.b illustre les lignes équipotentielles à l'intérieur de la cavité pour le potentiel approché obtenu par la méthode des éléments finis de Galerkin avec 200 éléments (bien entendu avec des fonctions d'interpolation linéaires).

En comparant les figures 4.11.b, 4.12.b et 4.13.b, on peut constater que les trois solutions approchées se convergent vers la même solution qui est la solution exacte donnée par l'équation (4.9), mais cette convergence varie d'une solution à une autre en fonction du nombre des éléments finis considéré dans le maillage. Bien sûr, si on augmente ce nombre la qualité de la solution approchée devient meilleure. Mais en contre partie la complexité des calculs augmente.

Donc, dans la méthode des éléments finis de Galerkin, l'augmentation du nombre des éléments jusqu'à à un seuil de 800 éléments ou plus donne des très bons résultats dans le problème de la cavité. Ce seuil est relativement grand, et ceci est dû l'utilisation des fonctions d'interpolation linéaires.

On peut montrer, comme dans le cas unidimensionnel, que lorsqu'on utilise de fonctions d'interpolation quadratiques on obtient des très bonnes solutions approchées bien que le nombre des éléments du maillage est petit.

Malgré que les résultats trouvés dans tel cas (i.e fonction d'interpolation quadratiques) représente un mystère pour cette méthode, mais au niveau de programmation c'est très difficile à traiter ce cas pour un problème bidimensionnel.

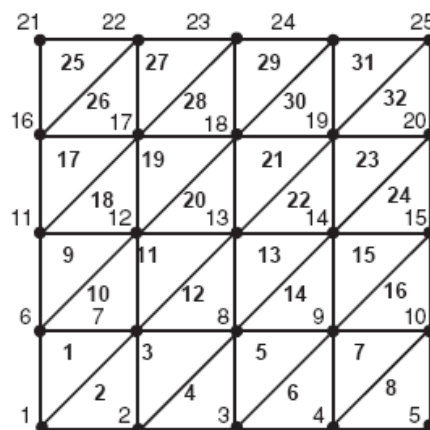


Fig. 4.10: Discrétisation et numérotation des éléments finis

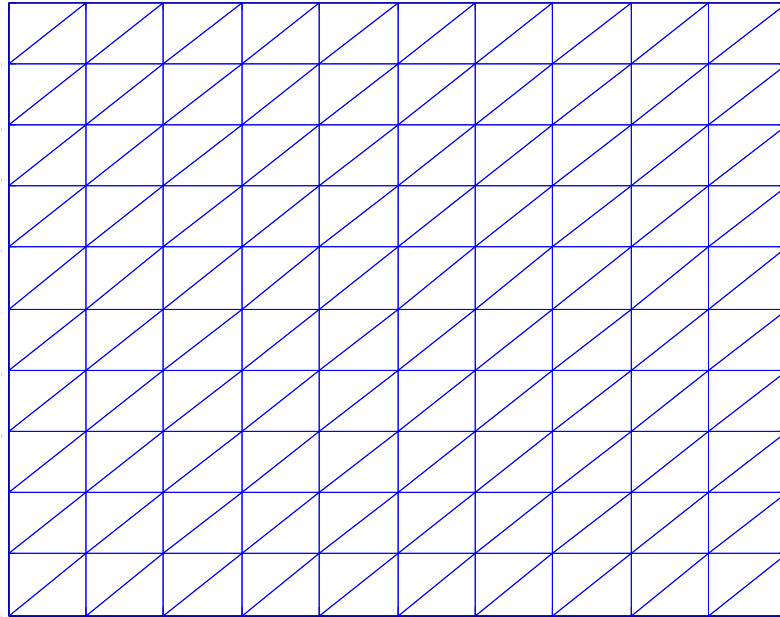


Fig. 4.11.a : Maillage en éléments finis avec $nx = ny = 10$ et 121 nœuds.

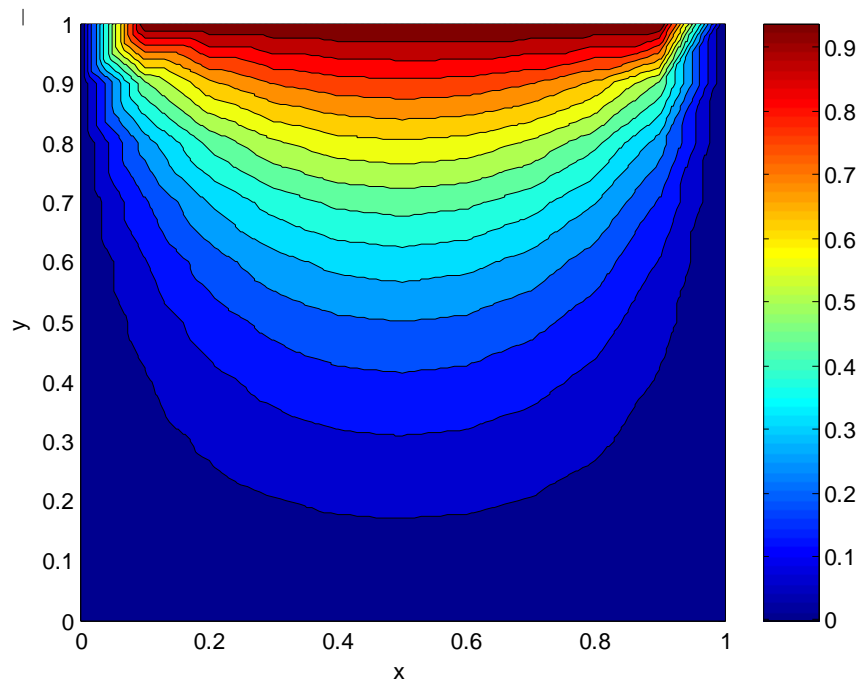


Fig. 4.11.b : Lignes équipotentielles approchées pour 200 éléments.

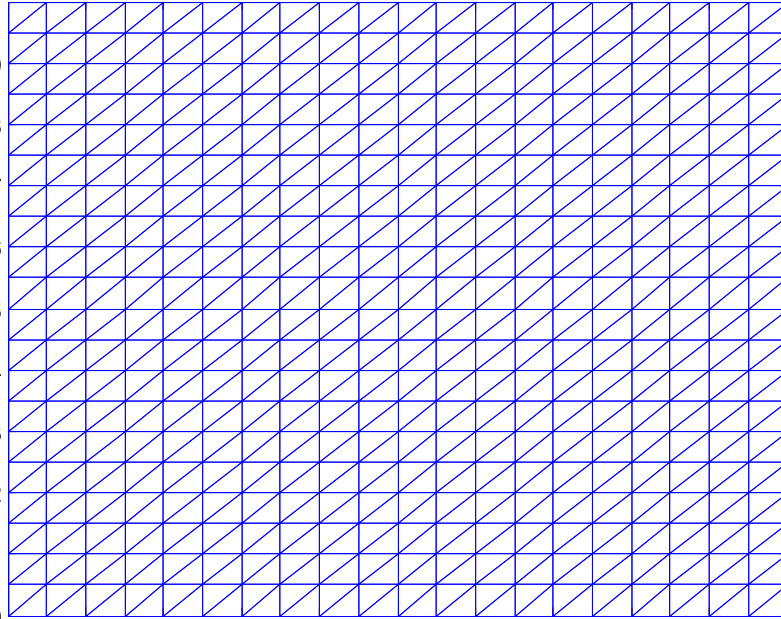


Fig. 4.12.a : Maillage en éléments finis avec $nx = ny = 20$ et 441 nœuds.

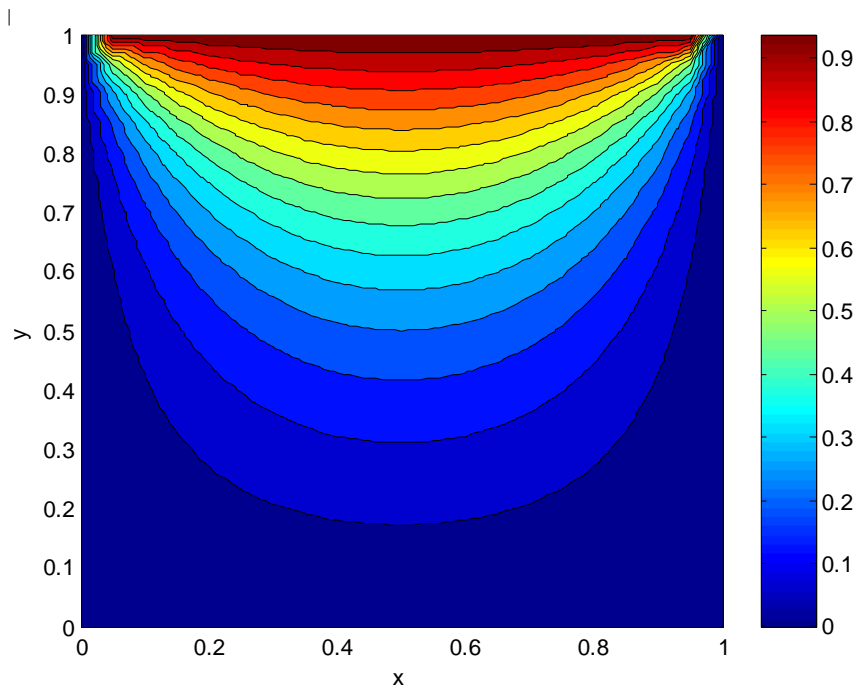


Fig. 4.12.b : Lignes équipotentielles approchées pour 400 éléments.

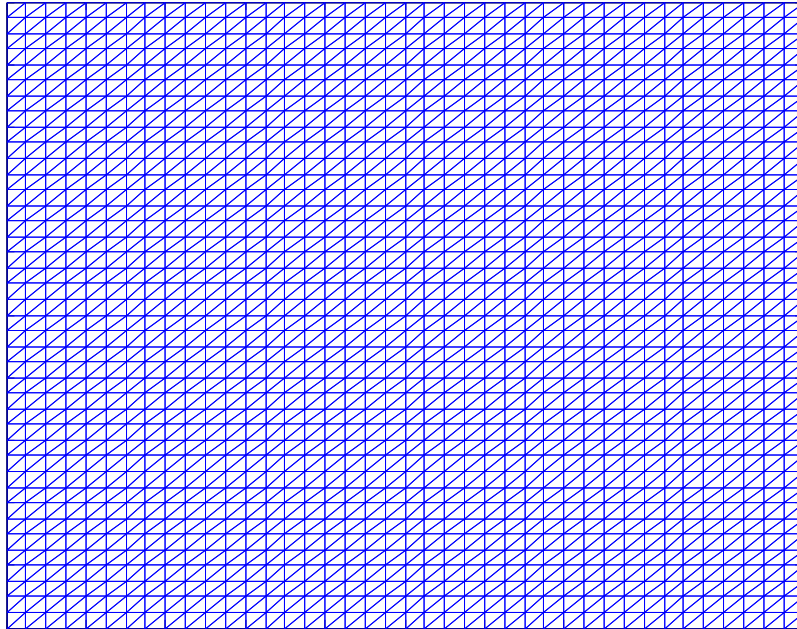


Fig. 4.13.a : Maillage en éléments finis avec $nx = ny = 40$ et 1681 nœuds.

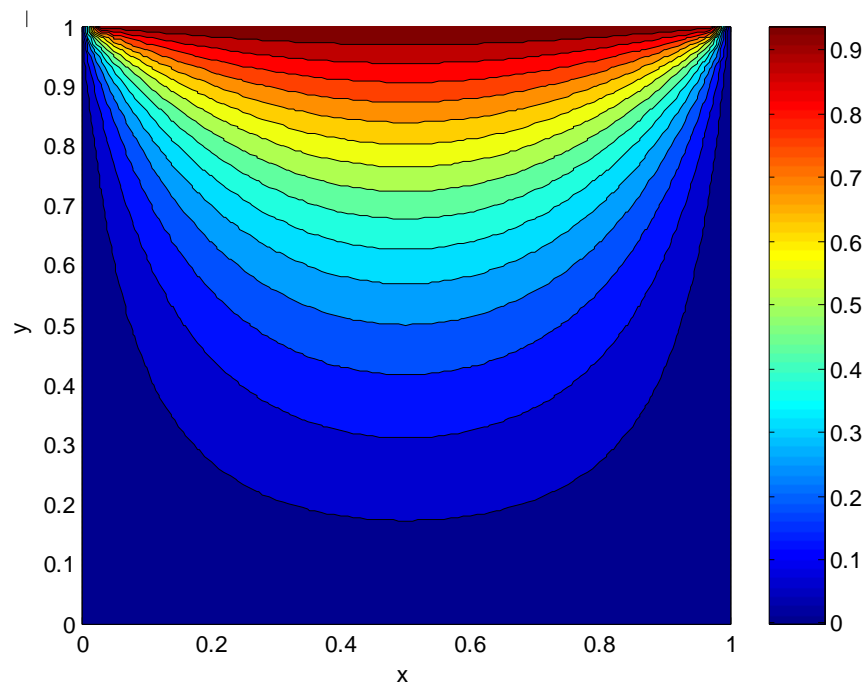


Figure 4.13.b : Lignes équipotentielles approchées pour 1600 éléments.

Pour déterminer la relation entre l'erreur quadratique moyenne ϵ et le nombre d'éléments du maillage $nx \times ny$ on construit le tableau suivant

$nx \times ny$	50	200	451	800	1250	1800	2450	3200	7200
Erreur ϵ	0.0631	0.0330	0.0226	0.0173	0.0139	0.0115	0.0098	0.0084	0.0049

La figure 4.14 montre la courbe de la fonction $\epsilon = f(nx \times ny)$. Cette figure met en évidence la relation entre l'erreur ϵ et $nx \times ny$ qui a une relation connue de la forme $\epsilon = C^{te} / (nx \times ny)^2$.

Cette dernière relation nous permet de conclure que dans le cas où les fonctions d'interpolation sont linéaires l'erreur quadratique moyenne est inversement proportionnelle avec le carré du nombre d'éléments du maillage.

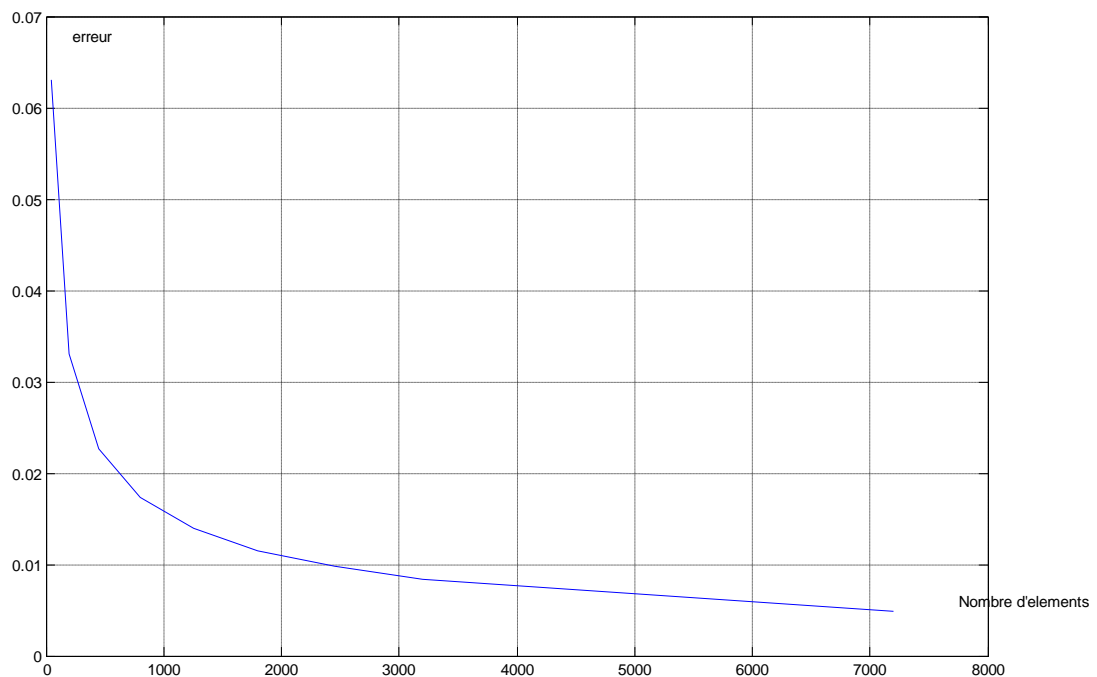


Fig. 4.14 : Erreur quadratique moyenne en fonction du nombre des éléments du maillage.

4.4. Problème de diffraction bidimensionnel

On considère une onde plane incidente en mode TM^z (Transversal Magnetic selon l'axe des z) sur un conducteur cylindrique, parfait et infini de rayon a comme le montre la figure 4.15. Le champ électrique incident peut être écrit comme suit

$$\vec{E}^{inc} = \hat{a}_z E_0 e^{-jk_0 x} = \hat{a}_z E_0 e^{-jk_0 \rho \cos \varphi} \quad (4.10)$$

où E_0 est l'amplitude de l'onde plane, k_0 est la constante de propagation en espace libre, ρ et φ sont les coordonnées cylindriques.

On prend $a = 0.5\lambda$ et $E_0 = 1 \text{ V/m}$, et on calcule le champ électrique total (champ incident + champ diffracté) en fonction de l'angle φ à une distance radiale $\rho = \lambda$ du centre du cylindre.

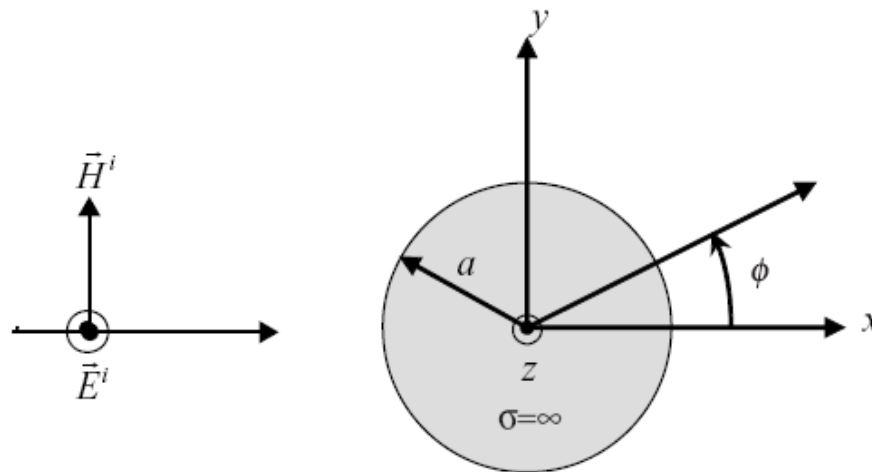


Fig. 4.15 : Onde plane incidente en mode TM^z dans un conducteur cylindrique parfait.

4.4.1. Solution analytique

Ce problème de diffraction, comme tout autre problème d'électromagnétique, il obéit aux équations de Maxwell (en régime harmonique)

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -j\omega\mu_0\mu_r\vec{H} \quad (4.11)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \quad (4.12)$$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (4.13)$$

$$\operatorname{div}(\vec{H}) = 0 \quad (4.14)$$

Comme le champ électrique incident est polarisé selon Oz (car l'onde incidente est en mode TM^z), alors c'est idem pour le champ diffracté par le conducteur en tenant compte que ceci est infini [5]. Du coup, le champ électrique total est polarisé selon Oz . En outre, il n'y aura pas de variations du champ le long de la direction Oz , puisque l'onde est transversale. C'est-à-dire

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

Dans ce cas, les équations de Maxwell se simplifient considérablement. L'équation (4.11) donne l'expression

$$\vec{H} = \frac{1}{j\omega \mu_0 \mu_r} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) \quad (4.16)$$

On la substitue dans (4.12) on trouve

$$-\frac{1}{j\omega \mu_0} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\frac{1}{\mu_r} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) \right) = \vec{J} + j\omega \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad (4.17)$$

En général, la perméabilité relative μ_r n'est pas constante, donc elle reste sous le signe de l'opérateur rotationnel.

Maintenant, le champ électrique total (incident + diffracté) peut s'écrire

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\frac{1}{\mu_r} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\hat{a}_z E_z) \right) = -j\omega \mu_0 (\hat{a}_z J_z) + k_0^2 \varepsilon_r (\hat{a}_z E_z) \quad (4.18)$$

où

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \quad (4.19)$$

et \hat{a}_z est le vecteur unitaire de l'axe Oz .

En utilisant la définition du rotationnel d'un vecteur en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \hat{a}_z \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{a}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{a}_x \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (4.20)$$

et en tenant compte de (4.15), on peut écrire

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu_r} \overrightarrow{rot}(\hat{a}_z E_z) \right) = \hat{a}_z \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \right] \quad (4.21)$$

En substituant (4.21) dans (4.18) on trouve l'équation suivante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + k_0^2 \varepsilon_r E_z = j\omega\mu_0 J_z \quad (4.22)$$

Cette équation est connue sous le nom de l'équation d'onde scalaire non homogène.

Dans une zone dépourvue de toute source de courant, comme dans notre cas (l'espace libre), on doit mettre $J_z = 0$, et l'équation (4.22) devient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + k_0^2 \varepsilon_r E_z = 0 \quad (4.23)$$

qui est l'équation d'onde scalaire homogène. Celle-ci est un cas particulier de l'équation générale (1.60) donnée dans le chapitre 1 où

$$u = E_z, \alpha_x = \alpha_x = \frac{1}{\mu_r}, \beta = k_0^2 \varepsilon_r, g = 0$$

On sait qu'à l'intérieur d'un conducteur parfait le champ électrique est nul toujours. Alors en se servant de l'équation de continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur la surface extérieur (Γ_1) du cylindre on écrit [3]

$$E_z = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_1) \quad (4.24)$$

L'équation (4.24) représente une condition aux limites. De plus, le domaine du problème est sans limite, car il s'agit d'un conducteur infini. Donc, le champ diffusé par le cylindre doit continuer de propager vers l'infini, sans perturbation.

Le calcul de la solution analytique exige trop de calculs mathématiques laborieux. On donne directement l'expression de cette solution [28]

$$E_z = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-1} \left[J_n(k_0 a) - \frac{J_n(k_0 a)}{(H_n^{(2)}(k_0 a))} H_n^{(2)}(k_0 \rho) \right] e^{jn\varphi} \quad (4.25)$$

où E_z est l'amplitude du champ électrique total, qui est selon z , $J_n(x)$ est la fonction de Bessel de premier espèce et $H_n^{(2)}$ est la fonction de Hankel du deuxième type définie par $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - j \cdot Y_n(x)$, avec $Y_n(x)$ est la fonction de Bessel de deuxième espèce. ($j^2 = -1$).

Remarque

Il faut noter qu'à grande distance du centre du cylindre, le champ diffracté E^{dif} vérifie l'équation suivante [26], [27]

$$\frac{\partial E^{dif}}{\partial \rho} + \left(jk_0 + \frac{1}{2\rho} \right) E^{dif} = 0 \quad (4.26)$$

et comme

$$E_z = E_z^{dif} + E_z^{inc} \Rightarrow E_z^{dif} = E_z - E_z^{inc} \quad (4.27)$$

alors

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \left(jk_0 + \frac{1}{2\rho} \right) E_z = \frac{\partial E_z^{inc}}{\partial \rho} + \left(jk_0 + \frac{1}{2\rho} \right) E_z^{inc} \quad (4.28)$$

L'analyse vectorielle donne [14]

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{a}_y \right) \cdot \hat{a}_n \quad (4.29)$$

A l'aide de l'équation (4.29) on peut (4.28) sous la forme

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{a}_y \right) \cdot \hat{a}_n + \left(jk_0 + \frac{1}{2\rho} \right) E_z \\ & = \left(\frac{\partial E_z^{inc}}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial E_z^{inc}}{\partial y} \hat{a}_y \right) \cdot \hat{a}_n + \left(jk_0 + \frac{1}{2\rho} \right) E_z^{inc} \end{aligned} \quad (4.30)$$

La forme générale de l'onde incidente du champ électrique est [5]

$$E_z^{inc} = E_0 e^{-jk_0(x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i)} \quad (4.31)$$

où φ_i est l'angle d'incidence. Sans perte de généralité, on peut prendre cet angle égal à zéro, et on trouve alors

$$E_z^{inc} = E_0 e^{-jk_0 x} \quad (4.32)$$

En substituant (4.32) dans (4.30) on obtient

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{a}_y\right) \cdot \hat{a}_n + \left(jk_0 + \frac{1}{2\rho}\right) E_z = -jk_0 E_z^{inc} (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_n) + \left(jk_0 + \frac{1}{2\rho}\right) E_z^{inc} \quad (4.33)$$

On peut utiliser cette équation pour vérifier la validité de la solution obtenue par la méthode des éléments finis de Galerkin, lorsque la distance ρ est relativement grande par rapport au rayon du cylindre. ■

4.4.2. Solution approximée par la méthode des éléments finis de Galerkin

Dans tout ce problème on va prendre le rayon du cylindre $a = 0.5\lambda$, $E_0 = 1 V/m$ et $\mu_r = \varepsilon_r = 1$, et on va calculer le champ électrique total approché en fonction de l'angle φ à une distance radiale $\rho = \lambda$ du centre du cylindre.

Dans ce cas bidimensionnel on va utiliser aussi le maillage à éléments finis triangulaires linéaires.

Dans ce problème le domaine à discrétiser doit être contourné le cercle du rayon $\rho = \lambda$ et ne chevauche pas avec la surface du conducteur. Donc on peut prendre la surface comprise entre les deux cercles des rayons $\rho = 0.5\lambda$ et $\rho = 1.5\lambda$.

On a programmé avec le Matlab cette opération du maillage de ce domaine. Notre programme donne pour un maillage qui contient 98 éléments la figure 4.16.a et pour un maillage qui contient 9139 éléments donne la figure 4.17.a.

La figure 4.16.b illustre les champs totaux exacte et approché pour $\rho = \lambda$, avec 98 éléments. Idem pour la figure 4.17.b mais avec 9139 éléments.

L'analyse de la figure 4.16.b permet de constater que la solution approchée est un peu loin de la solution exacte, malgré qu'elle suive à peu près la même allure que la solution exacte. Ceci implique qu'un nombre d'éléments dans l'ordre de 100 éléments, la solution approchée reste relativement de mauvaise qualité.

Par contre la figure 4.17.b nous permet de conclure que la solution approchée se coïncide fermement avec la solution exacte. Donc pour un nombre d'éléments dans l'ordre de 9000 éléments, la solution approchée devient pratiquement égale à la solution exacte.

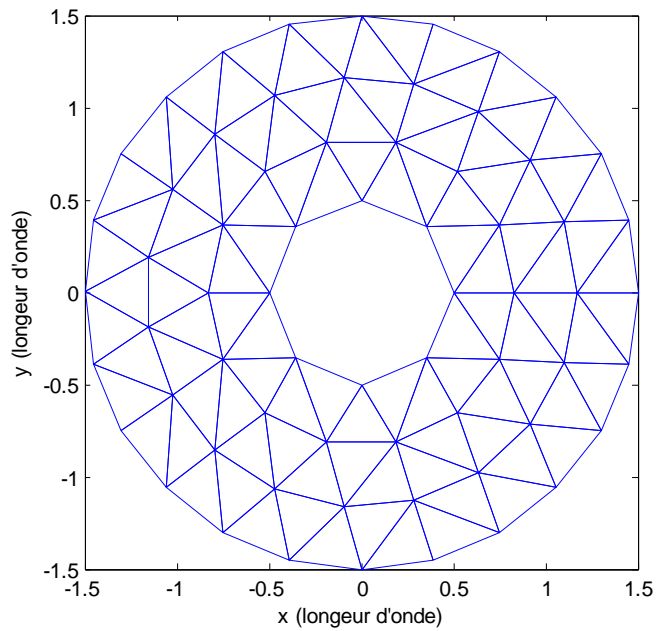


Fig. 4.16.a : Un maillage bidimensionnel de la zone proche du cylindre avec une taille de 98 éléments et de 65 nœuds.

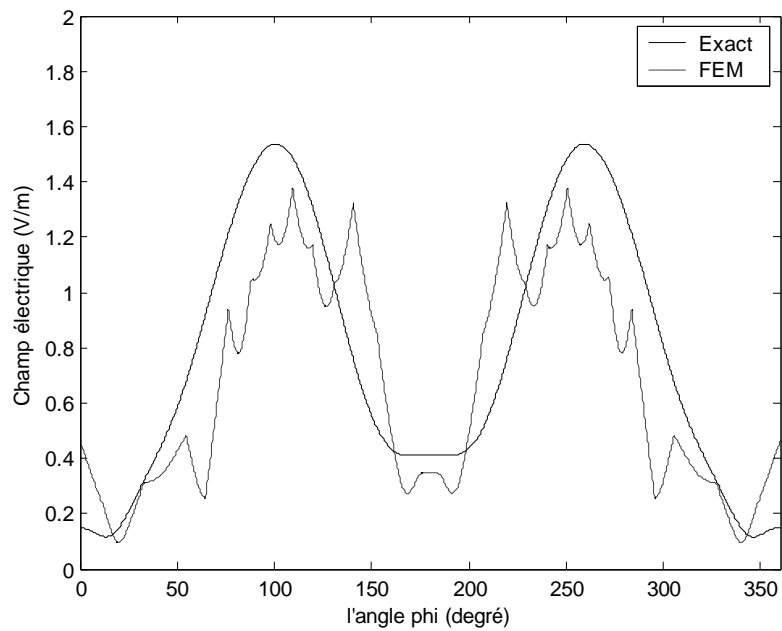


Fig. 4.16.b : Champs exacte et approché pour une taille du maillage 98 éléments.

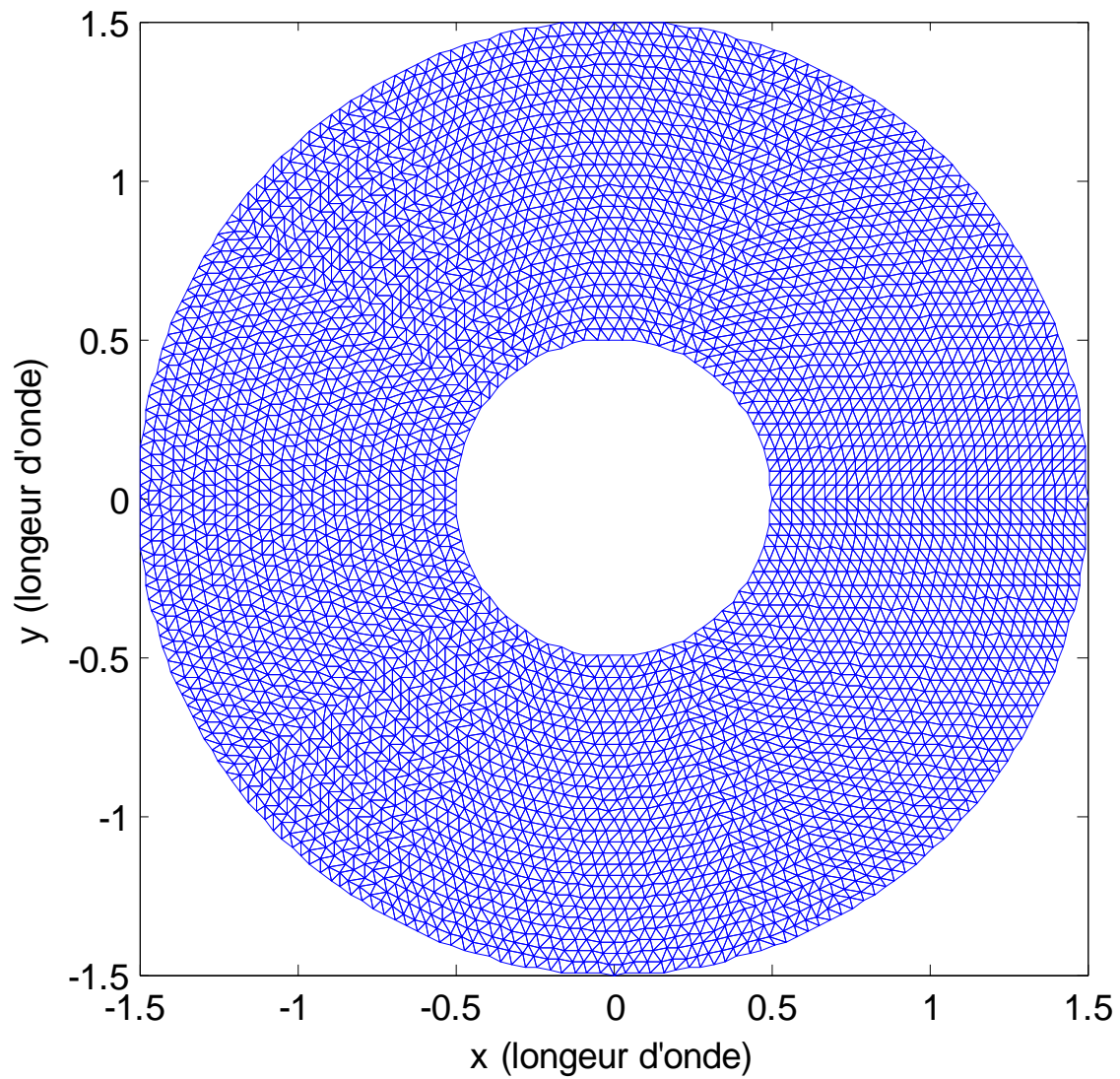


Fig. 4.17.a : Un maillage bidimensionnel de la zone proche du cylindre avec une taille de 9139 éléments et de 4727 nœuds.

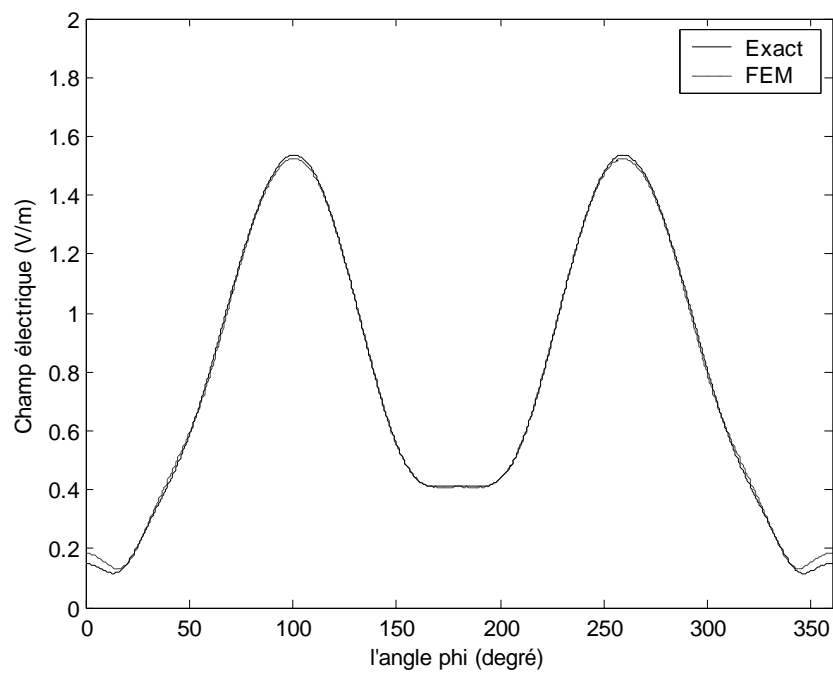


Fig. 4.17.b : Champs exacte et approché pour une taille du maillage 9139 éléments.

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié numériquement la méthode des éléments de Galerkin pour différentes équations aux dérivées partielles de type (1.60) pour des cas relativement simple à savoir : le cas unidimensionnel, le cas bidimensionnel et le problème de diffraction des ondes.

On a conclu que cette méthode donne des bons résultats si on augmente le nombre des éléments du maillage pour des fonctions d'interpolation linéaires. Mais si on utilisait des fonctions quadratiques on retrouverait aussi des bons résultats même le nombre d'élément est petit.

Les problèmes étudiés dans ce chapitre, et surtout celui de diffraction, montrent que le champ d'applications d'une telle méthode est très vaste même dans les structures complexes et ceci grâce à la discrétisation en éléments finis.

Conclusion générale

Dans ce travail on a présenté la méthode des éléments finis de Galerkin pour les équations de Maxwell. Cette méthode n'est autre que l'intégration du principe de discrétisation en éléments finis dans la méthode de Galerkin standard.

Les équations de Maxwell ou de l'électromagnétisme sont des équations aux dérivées partielles. Elles exposées d'une manière non exhaustive dans le chapitre 1. Et tant que dans le domaine de l'analyse numérique, la méthode de Galerkin est parmi les meilleures méthodes qui permettent de transformer un problème continu, comme les équations aux dérivées partielles, en un problème discret, on a exposé dans le chapitre 2 le principe de cette méthode. En outre, cette méthode est présentée en formulation faible. Celle-ci est très utilisée lorsqu'on passe de la solution exacte à la solution approchée avec une discrétisation du domaine en éléments finis. En fait, la solution approchée, d'après la méthode de Galerkin, est une combinaison linéaire de fonctions de base bien choisies. Afin d'avoir une authenticité de cette philosophie, on a exposée la méthode adoptée d'une façon mathématique dans le chapitre 3. L'implémentation numérique de la méthode en question, a été étalée dans le chapitre 4 pour différentes structures à savoir : structures unidimensionnelles et structures bidimensionnelles.

On a constaté de ce travail que la méthode étudiée donne des bons résultats si on augmente le nombre des éléments du maillage pour des fonctions d'interpolation linéaires. Et si on utilisait des fonctions quadratiques on retrouverait aussi des bons résultats même si le nombre d'élément est petit.

Pour bien connaître le comportement exact de la méthode des éléments finis de Galerkin, pour un problème donné, on propose comme perspectives de l'étudier pour des fonctions d'interpolation polynômiales de degrés supérieurs 2.

Bibliographies

- [1] Lars B. Wahlbin, "Superconvergence in Galerkin Finite Element Methods" John Wiley & Sons, Ltd 2007.
- [2] Jianming Jin «The finite element method in electromagnetic» Second Edition, Wiley-IEEE Press; 2 edition 2002. Degree
- [3] Paule L., Dale R.C, François L. « Les Phénomènes Électromagnétiques, cours et exercices corrigés » Dunod 2002.
- [4] William H.Hayt, Jr. John A. Buck « Engineering Electromagnetics » Sixth Edition, the McGraw-Hill Companies 2001.
- [5] P.F Combes « Micro-Ondes lignes-Guide et cavité, cours et exercices corrigé » Dunod 1996.
- [6] Anastasis Polycarpou A. «Introduction to the finite element method in Electromagnetics», Morgan & Claypool Publishers 2006.
- [7] M.V.K. Chari, S. J. Salon «Numerical Methods in Electromagnetism» Academic Press; 1 edition 1999.
- [8] Pierre-Arnuad Raviart, Jean-Marie Thomas « Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles ». Dunod, Paris, 1998.
- [9] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu « The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth edition » Butterworth-Heinemann 2005.
- [10] Tahar Abbes Miloud «Méthodes numériques, Tome1» Office des Publications Universitaires OPU, Algérie 2007.
- [11] N. BOCCARA «Analyse Fonctionnelle – une introduction pour physiciens», Ellipses 1984.
- [12] André Fortin « Analyse numérique pour ingénieurs », Edition de l'école Polytechnique de Montréal 2001.
- [13] Pierre Spiteri « Approche variationnelle pour la méthode des éléments finis», Techniques de l'ingénieur - AF 503, ENSEEIHT.
- [14] ELIE AZOULAY et JEAN AVIGNANT «Mathématique.4 Algèbre», McGRAW-HILL 1984.

- [15] Axelson (O.) et Barker (V.A). « Finite element solution of boundary value problems, theory and computation », Academic Press 1984.
- [16] Jacob Fish, Ted Belytschko «A First Course in Finite Elements » John Wiley & Sons, Ltd 2007.
- [17] M. N. O. Sadiku, «Numerical Techniques in Electromagnetics», 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2001.
- [18] Young W Kown, Hyochoong Bang «The finite element method using Matlab» CRC Press LLC 1997.
- [19] David V. Hutton « Fundamentals of finite element analysis » McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 1 edition 2003.
- [20] Pierre Thomas, « Eléments finis pour l'ingénieur : Grand principes et petites recettes » Edition tech & doc Lavoisier 2006.
- [21] Alain Bossavit « Computational Electromagnetism Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements » Academic Press 1998.
- [22] Jean-Pierre Demailly « Analyse numérique et équations différentielles », EDP Sciences; 3e édition 2006.
- [23] Bernard Héron, Françoise Issard-Roch, Colette Picard « Analyse numérique : Exercices et problèmes corrigés », DUNOD 2005.
- [24] Pierre SPITERI « Introduction à la méthode des éléments finis», Techniques de l'ingénieur - AF 504, ENSEEIHT.
- [25] Christian Grossmann, Hans-Georg Roos, Martin Stynes «Numerical Treatment of Partial Differential equations», Springer 2007.
- [26] A. Bayliss and E. Turkel, "Radiation boundary conditions for wave-like equations," Commun.Pure Appl. Math., 1980.
- [27] A. Bayliss, M. Gunzburger, and E. Turkel, "Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions," SIAM J. Appl. Math, 1982.
- [28] C. A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics. New York:Wiley, 1989.