

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---



UNIVERSITE HAMMAA LAKHDAR EL OUED

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de Master

En Mathématique

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Par :

MAROUA GHODBANE

MALIKA HAMEL

Thème :

**Solutions périodique, stabilité asymptotique pour  
certaines équations différentielles à retard**

Soutenue publiquement le : 21/06/2021 Devant le jury composé de :

|                        |     |           |                 |
|------------------------|-----|-----------|-----------------|
| Dr. Gabsi Hocine       | MCB | Encadreur | Univ. d'El-Oued |
| Dr. Beloul Said        | MCB | Président | Univ. d'El-Oued |
| Dr. Ghendir Abdellatif | MCB | Examineur | Univ. d'El-Oued |

Année universitaire : 2020 \ 2021



.... Je dédie ce travail :

À

Papa le compatissant , merci pour ta confiance  
Allah vous guérit  
Maman la parfaite , merci pour ton amour  
Pour tous leurs sacrifices, leurs encouragements  
Et leurs amours qui ont été la raison de ma réussite.  
Que dieu leur présente à une bonne santé et une longue vie.

À

Mes chers soeurs  
Leila, karima, Fatma et Messaouda  
Mes chers frères  
ELhawari , Said , Kamel et Aimen  
Merci pour vos encouragements constants et votre soutien  
moral pour moi .

À

Ma grande famille et mes amies  
Surtout ma copine et ma soeur Hadjera.B

À

Tous mes professeurs,  
En particulier, le professeur encadreur D.Gabsi Hocine pour son  
aide continue, ses précieux conseils et être patient avec nous

À

Nous dédions ce travail au Dieu  
Tout-puissant pour trouver l'acceptation et le succès.

Maroua Ghodbane



.... Je dédie ce travail :

À

Mes chers parents  
Pour leur soutien et leurs encouragements.

À

Mes chers frères  
Nouhe ,Taher et Alaa Elddine

À

Mes chères soeurs  
Amira ,Sabrine et Intissar

À

L'ensemble du personel de l'université Echahid Hamma Lakdar  
d'El Oued

Et spécialement les professeurs et plus en particulier le  
professeur encadreur Dr. Gabsi Hocine

À

Tous ceux qui n'ont pas été mentionnés  
Et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce  
travail vous nos .

Malika Hamel



Avant toute chose, nous tenons à remercier "Allah" le tout puissant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Comme nous tenons à remercier vivement, encadreur de mémoire Dr.Gabsi Hocine maitre de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de ce travail.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Nous remercions vivement nos parents et nos frères pour l'aide et le soutien moral qu'ils nous ont prodigués

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également au nos camarades de la promotion 2021 de Mathématiques et nos amis surtout matira , Hadjera , Halima et Radja pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal .

Que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.

Enfin ,Nous remercions tous nos Personnel universitaires qui nous accueillent chaque matin avec le sourire

# Sommaire

|            |                                                                              |           |
|------------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Préliminaires</b>                                                         | <b>10</b> |
| I.1        | Distances et normes . . . . .                                                | 10        |
| I.2        | Théorèmes de point fixe . . . . .                                            | 11        |
| I.2.1      | Théorème du point fixe de Banach . . . . .                                   | 11        |
| I.2.2      | Théorème du point fixe de Schauder . . . . .                                 | 12        |
| I.2.3      | Théorème du point fixe de Krasnoselskii . . . . .                            | 13        |
| I.3        | Équations différentielles à retard et de type neutre . . . . .               | 14        |
| I.3.1      | Équations différentielles à retard . . . . .                                 | 14        |
| I.3.2      | Équations différentielles de type neutre . . . . .                           | 17        |
| I.4        | Stabilité de solutions pour les équations différentielles à retard . . . . . | 18        |
| I.5        | Stabilité par la méthode de point fixe . . . . .                             | 19        |
| <b>II</b>  | <b>Stabilité asymptotique d'équation différentielle linéaire à retard</b>    | <b>20</b> |
| II.1       | L'équation . . . . .                                                         | 20        |
| II.2       | Inversion et transformation de l'équation . . . . .                          | 21        |
| II.3       | Bornétude et stabilité asymptotique de la solution . . . . .                 | 22        |
| II.4       | Application . . . . .                                                        | 29        |
| <b>III</b> | <b>Existence des solutions périodiques positives d'équation à retard</b>     | <b>33</b> |
| III.1      | Introduction à l'équation . . . . .                                          | 33        |
| III.2      | Résultats Préliminaires . . . . .                                            | 33        |
| III.3      | Transformation et inversion de l'équation . . . . .                          | 37        |
| III.4      | Existence de solution périodique positive . . . . .                          | 39        |
| III.4.1    | Cas : $\lambda = 1$ . . . . .                                                | 39        |
| III.4.2    | Cas 2 : $\lambda > 0$ . . . . .                                              | 41        |
|            | Bibliographie . . . . .                                                      | 45        |

# Notations générales

|                           |                                                                    |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{S}$              | un ensemble non vide.                                              |
| $\rho$                    | une distance sur $\mathbb{S}$ .                                    |
| $\  \cdot \ $             | La norme.                                                          |
| $\mathbb{R}_+$            | ensemble des nombres réels positifs ou nuls.                       |
| $\mathbb{N}$              | ensemble des entiers naturels.                                     |
| $\mathbb{R}^n$            | espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.  |
| $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ | ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ . |
| $ \cdot $                 | Orthogonal valeur absolue d'un nombre réel .                       |
| $(S_\psi, d)$             | un sous espace métrique complet.                                   |
| $C_\omega^+$              | ensemble des fonctions continues positives périodiques.            |
| $C_\omega^-$              | ensemble des fonctions continues négatives périodiques.            |

# Introduction

Toutes les équations considérées dans ce mémoire sont des équations à retard. Dans la description mathématique d'un grand nombre de phénomènes, en biologie, en médecine, en chimie, en physique, en technologie, et en sciences économiques, ... etc, on a l'habitude de supposer que l'évolution du système dépend uniquement de son état actuel. Mais il existe des situations où l'évolution d'un processus dépend non seulement de son état actuel, mais aussi des états antérieurs. On rencontre de tels phénomènes dans de nombreux domaines, en particulier dans des systèmes de dynamique de population. Parmi les modèles mathématiques qui peuvent décrire de telles situations, on rencontre des équations différentielles à retard, et des équations de type neutre. On trouve alors des équations dont les termes temporels sont, d'une manière générale, des termes non locaux, faisant intervenir les valeurs de l'état à des instants antérieurs, discrets ou distribués. Ces termes non locaux sont soit d'ordre 0 (équations à retard), soit d'ordre 1 (équations de type neutre). Enfin, les problèmes étudiés peuvent se placer dans des domaines spatiaux ou autres et se modélisent sous forme d'équations aux dérivées partielles. D'une manière générale, les retards apparaissent à cause du temps nécessaire pour que le système réponde à une certaine évolution, ou parce qu'un certain seuil doit être atteint avant que le système ne soit activé. L'introduction des retards dans les modèles entraîne l'apparition de fluctuations avec des phases d'explosion, suivies de phases latentes ou même des phases d'extinctions. On peut grossièrement situer les équations à retard comme étant à mi-chemin entre les équations ordinaires et les équations aux dérivées partielles. La différence avec les équations ordinaires est que les données initiales sont elles mêmes des fonctions. Ceci nécessite une étude mathématique plus élaborée que pour les équations différentielles ordinaires. La nature du retard (discret, continu, infini, dépendant de l'état, ...) complique potentiellement l'étude de l'équation. De manière générale, les équations à retard apparaissent de plus en plus fréquemment dans la modélisation de l'évolution des populations. Les phénomènes à " **retard** " s'observent également en physique, en mécanique des matériaux, dans la modélisation des chocs de particules, ... etc. Dans la plupart des situations de la physique ou de la mécanique, le retard est considéré comme petit et estimé sans effet qualitatif, il est donc le plus souvent ignoré. Dans l'étude des populations vivantes, la nécessité de tenir compte du retard s'est imposée progressivement. Elle est introduite en écologie par V. Volterra, elle a été étendue dans les années 70 à la biologie (prolifération de certains constituants du sang, Glass et Mackey [30]), production cellulaire, Arino et Kimmel [1], à la théorie des épidémies Yorke [48] et Cooke [12] et a, peu à peu, fait son chemin dans ces domaines. Dans le contexte des dynamiques des populations et de la biologie mathématique en général, nous citons le livre de Bellman et Cooke [8] dans lequel nous pouvons trouver les motivations pour étudier les systèmes à retard. Des motivations biologiques, pour modéliser et étudier théoriquement les systèmes à retard, peuvent être trouvées aussi dans les livres de May [31], Smith [32] et de Pielou [33]. Des exemples concrets de modèles à retard en biologie mathématiques sont contenus



dans les livres de Cushing [13], Mac Donald [29] et Gopalsamy [24]. Nous citons aussi le livre de Hale [25, 34] et Yang Kuang [23] qui ont poussé l'étude des équations à retard à un niveau très avancé, motivé par une application biologique. Volterra considéra en 1928 dans [46] le modèle suivant

$$x'(t) = \int_{t-r}^t a(t-s)x(s)ds. \quad (1)$$

avec un retard constant  $r > 0$ . Volterra a proposé une méthode pour construire une fonctionnelle de Liapunov pour cette équation et son œuvre a servi de plateforme pour tous les investigateurs venu après lui. En 1963, motivé par les remarques de Volterra, Levin [26] a construit une fonctionnelle de Liapunov pour l'analogue non linéaire de (1). Il révisa ensuite ce travail conjointement avec Nohel [27] et inclura dans ses études l'équation

$$x'(t) = - \int_{t-r}^t a(t,s)g(x(s))ds \quad (2)$$

avec la valeur initiale

$$x(t) = \psi(t) \text{ sur } I$$

On observe que si  $t = 0$  l'équation (2) devient

$$x'(0) = - \int_{-r}^0 a(0,s)g(x(s))ds.$$

Ceci nécessite la donnée initiale d'une fonction définie sur tout l'intervalle  $[-r, 0]$  de  $\mathbb{R}$ . Lorsque  $I = [-r, 0]$ , il s'agit là d'équations différentielles à retard fini auquel cas l'espace de phase  $C_r$  est l'espace des fonctions continues de  $[-r, 0]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la convergence uniforme. Donc la solution  $x$  de (1) doit dépendre d'un retard fonctionnel telle que  $x(t) = \psi(t)$ ,  $t \in [-r, 0]$ . Lorsque  $\psi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x(t) = \psi(t)$ ,  $t \in (-\infty, 0]$ , alors pour résoudre l'équation (1) pour  $t \geq 0$ , nous allons lui associer un retard fonctionnel infini qui n'est pas nécessairement constant. On observe que lorsque le retard est non borné, on parlera d'équations différentielles à retard infini et cette propriété a permis de développer une théorie complète des équations différentielles à retard sur des espaces multi dimensionnels. Néanmoins, l'investigation des équations avec retard infini sur de tels espaces exige et nécessite le développement d'autres outils d'analyse fonctionnelle pour faire face aux problèmes liés à l'aspect qualitatif des solutions. Les EDR et EIDR ont des applications dans une très grande variété de domaines. Nous donnerons quelques exemples d'EDR et EIDR appliquées à la biologie et à l'écologie ainsi à l'électricité. D'autres exemples peuvent se trouver dans la littérature foisonnante de ce domaine des mathématiques.

Dans le premier chapitre de cette thèse nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous donnons en particulier quelques résultats fondamentaux sur la théorie de la point fixe et degré topologique pris en majorité du fameux livres [15]. Un rappel sur les équations différentielles à retard et les équations différentielles de type neutre est donné et pour de amples détails on renvoi aux références [24, 18, 20, 25, 23, 34].

Dans le deuxième chapitre, nous allons étudier un modèle motivé par une application biologique qui a été considéré est une équations différentielles à retard à retards,  $\tau_j(t) \geq 0$   $j = \overline{1, N}$ . Elle s'identifie à la forme

$$x'(t) = - \sum_{j=1}^N b_j(t)x(t - \tau_j(t)) + \sum_{j=1}^N c_j(t)x'(t - \tau_j(t)) \quad (3)$$



Ainsi, nous associons à cette équation une condition initiale,

$$x(t) = \psi(t), t \in [m(t_0), t_0],$$

où

$$\begin{aligned} \psi &\in C([m(t_0), t_0], \mathbb{R}), m_j(t_0) = \inf\{t - \tau_j(t), t \geq t_0\}, \\ m(t_0) &= \min\{m_j(t_0) \mid 1 \leq j \leq N\}, \end{aligned}$$

et

$$\tau_j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, b_j, c_j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont des fonctions différentiables avec  $t - \tau_j(t) \longrightarrow \infty$ ,  $j = \overline{1, N}$  lorsque  $t \longrightarrow \infty$  et  $a_j, c_j : \mathbb{R}^+ \times [m(t_0), \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ , sont des fonctions continues. Beaucoup d'investigateurs des cas particuliers de (3) ont étudié la bornétude et la stabilité de l'équation (3) par la technique de point fixe, Par exemple, Burton considéra dans [38] l'équation différentielle linéaire à retard

$$x'(t) = -b(t)x(t - \tau(t)) \quad (4)$$

avec la condition initial

$$x = \psi \text{ sur } t \in [m(t_0), t_0], \quad (5)$$

Zhang a étudié Dans [56] la a proposé le modèle suivant

$$x'(t) = - \sum_{j=1}^N b_j(t)x(t - \tau_j(t)) \quad (6)$$

Il révisa ensuite ce travail Jin dans [11] et a considérait l'équation différentielle non linéaire à retard de type neutre suivante

$$x'(t) = -a(t)x(t) + b(t)g(x(t - \tau(t))) + c(t)x'(t - \tau(t)) \quad (7)$$

Nous allons proposer des conditions pour qu'une solution périodiques puisse exister. L'idée consiste à faire une analyse sur les fonctions  $b, c$  de sorte que l'équation (3) admette l'inversion pour produire une nouvelle, mais équivalente, équation intégrale ayant les mêmes propriétés. La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie du contrôle. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de stabilité. En particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov. Les résultats que nous développerons de ce Chapitre s'appuieront sur ces concepts pour démontrer des propriétés de stabilité des systèmes à retards étudiés.

Dans le dernier chapitre nous considérons l'équation différentielle de second ordre non linéaire à retard ( $r > 0$ ). du type neutre. donnée sous la forme

$$\left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' = a(t)x(t) - \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr \quad (8)$$

$$\left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' = -a(t)x(t) + \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr \quad (9)$$

Où  $\lambda > 0$  est un paramètre,  $c$  est une constante telle que  $|c| < 1$ ;  $a, b \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$  sont des fonctions continues  $\omega$ -périodiques  $f \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$  et  $\int_{-\infty}^0 K(r)dr = 1$ . Avant

d'entamer le cas général, nous rappelons d'abord que Wu dans [22] a proposé une méthode pour établir un théorème d'existence d'une solution périodique pour l'équation

$$(x(t) - cx(t - \delta))'' + a(t)x(t) = \lambda b(t)f(x(t - \tau(t)))$$

où  $\lambda > 0$ ,  $\delta$  et  $c$  sont des constantes avec  $|c| \neq 1$ ,  $a, b \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$ ,  $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$  et  $a(t), b(t), \tau(t)$  sont des fonctions continues  $\omega$ -périodiques. Dans ce chapitre, Nous allons donner un résultat d'existence de la solution du problème périodique pour cela nous utilisons alors le théorème de Krasnoselskii qui est très robuste et efficace pour montrer l'existence d'une solution périodique de (8-9). Un choix convenable des hypothèses permet de valider les conditions de ce dernier théorème de sorte qu'une solution périodique du problème étudié est conclue.

Nous allons proposer des conditions pour qu'une solution périodiques puisse exister. L'idée consiste à faire une analyse sur les fonctions  $a, b, K$  et  $f$  de sorte que l'équation (8-9) admette l'inversion pour produire une nouvelle, mais équivalente, équation intégrale ayant les mêmes propriétés. Cette nouvelle équation se met sous forme d'une somme de deux applications, la première est une contraction et l'autre continue à image compact. Un choix convenable des hypothèses permet de valider les conditions de ce dernier théorème de sorte qu'une solution périodique du problème étudié est conclue. Malheureusement, les conditions qui permettent d'aboutir à l'unicité de cette solution restent encore à trouver.

Le but principal dans la suite est d'étudier quelques propriétés qualitatives et quantitatives des solutions comme la stabilité, stabilité asymptotique et l'existence de solutions périodiques. Nous nous intéressons à la stabilité asymptotique de la solution zéro. Dans un premier temps on va présenter sommairement la théorie de la stabilité des équations différentielles à retard fonctionnel de type neutre. Dans une deuxième étape on présente deux exemples d'équations différentielles à retard, la première étant linéaire et l'autre non linéaire. Ces exemples font parties des problèmes qui ont résisté à l'étude par la méthode de Lyapounov. Les résultats établis dans ce mémoire constituent, ce que l'on souhaite, une étape avancée dans ce domaine de recherche car l'étude que nous proposons ici prend en charge des équations intégro-différentielles totalement non linéaires de type neutre non traitées jusqu'ici. En outre notre méthode de point fixe améliore nettement les résultats antérieurs particulièrement ceux de Becker et Burton [36, 7, 37] avec beaucoup moins de restrictions et avec plus de rigueurs. La méthode de point fixe utilisée pour des fins de stabilité a été utilisée dans un certain nombre de travaux récents comme [4, 3, 36, 10, 57]. Cette méthode repose sur trois éléments fondamentaux. A savoir,

- ❶ Une application de point fixe,
- ❷ Un espace fonctionnel convenable apte à contenir les solutions souhaitable,
- ❸ Un théorème de point fixe convenable.

Cette méthode a montré des avantages significatifs sur celle de Liapunov. En particulier lorsque les coefficients sont non bornés et/ou si le retard est non borné la méthode directe de Liapunov a montré ses limites contrairement à celle du point fixe. De plus, les conditions de la méthode de point fixe sont en moyenne par contre celles de la deuxième sont toujours ponctuelles.

# Préliminaires

Ce chapitre est présenter et rappeler un certain nombre d'outils d'analyse, comme la théorie de point fixe et les équations différentielles à retard fonctionnel ainsi que l'essentiel des éléments qui seront utilisés dans la suite de notre travail. Nous en profiterons également pour introduire les principales notations.

## I.1 Distances et normes

Les définitions peuvent être données pour des fonctions à valeurs complexes. Mais, dans notre contexte, on parlera seulement des fonctions à valeurs réelles.

**Définition I.1.1** [44] Soit  $\mathbb{S}$  un ensemble non vide. On dit que  $\rho$  est une distance sur  $\mathbb{S}$  si et seulement si  $\rho$  une application de  $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$  dans  $\mathbb{R}_+$  pour tout  $x, y$  et  $z$  de  $\mathbb{S}$  telle que :

- (d1)  $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, x) = 0, \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
- (d2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (symétrie)
- (d3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  (inégalité triangulaire).

**Définition I.1.2** [44] Soit  $(\mathbb{S}; \rho)$  un espace métrique et  $(x_n)$  une suite d'élément de  $\mathbb{S}$ . On dit que  $(x_n)$  est une suite de cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0) \text{ et } (q \geq n_0) \implies \rho(x_p, x_q) \leq \epsilon$$

On dit que  $\mathbb{S}$  est complet si et seulement si toute suite de cauchy de  $\mathbb{S}$  converge.

**Définition I.1.3** [36] Un espace vectoriel  $(\mathbb{S}, +, \cdot)$  est dit un espace normé s'il existe une application  $\| \cdot \|$  de  $\mathbb{S}$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que pour tout  $x, y \in \mathbb{S}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$

- (i)  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ ,
- (ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Remarque I.1.1** Un espace normé est un espace vectoriel dont la norme définit une distance en posant  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . Mais un espace vectoriel avec une métrique n'est pas toujours un espace normé.

**Définition I.1.4** [44] Un espace de Banach est un espace normé complet pour la distance associée à sa norme. Les exemples d'espaces suivants sont très utilisés dans cette thèse.

**Théorème I.1.1** [44] Un sous espace fermé d'un espace de Banach est lui-même de Banach.

**Exemple I.1.1** [44] L'espace  $C = C([a, b], \mathbb{R}^n)$  de fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^n$  est un espace vectoriel. Le nombre  $\|f\| = \max |f(t)|$ , où  $|\cdot|$  est la norme dans  $\mathbb{R}^n$ , définit une norme rendant  $(C, \|\cdot\|)$  un espace de Banach.

**Exemple I.1.2** [44] Soit  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue et soit  $\mathbb{S}$  l'ensemble de fonctions continues et bornées  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $f(t) = \psi(t)$  pour  $a \leq t \leq b$  pour  $f, g \in \mathbb{S}$ , on définit

$$\rho(f, g) = \sup_{a \leq t \leq \infty} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_\infty$$

Alors  $(\mathbb{S}, \rho)$  est un espace métrique complet.

Définissons

$$\mathbb{M} := \{\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} / \varphi \in C, |\varphi(t)| \leq 1, \varphi \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty\}$$

**Exemple I.1.3**  $(\mathbb{M}, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach.

**Définition I.1.5** Soit  $(S, d)$  une espace métrique  $f : S \rightarrow S$  est dite lipschitzienne de rapport  $k \geq 0$  si ;

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \text{ pour tout } x, y \in S$$

$k$  est dite constante de Lipschitz.

**Remarque I.1.2** L'application lipschitzienne  $f$  est appelée contraction si  $0 < k < 1$ .

## I.2 Théorèmes de point fixe

### I.2.1 Théorème du point fixe de Banach

Banach établit un théorème qui s'applique aux fonctions contractantes définies sur des espaces métriques complets. Il affirme qu'une contraction sur espace de Banach a un point fixe unique. Ce théorème (appelé aussi principe de l'application contractante) forme un outil fascinant qui facilite l'étude de la stabilité pour les équations différentielles à retard.

**Définition I.2.1** [15] Soit  $f$  une application sur un ensemble  $\mathbb{S}$ . On appelle point fixe de  $f$  tout point  $x$  satisfaisant  $f(x) = x$ . S'il existe un tel  $x$ , on dit que  $f$  possède un point fixe, ce qui est équivalent à dire que l'équation  $f(x) - x = 0$  possède une solution nulle.

**Exemple I.2.1** [15] Si  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  est une fonction continue alors  $f$  admet un point fixe au moins sur  $[a, b]$ .

En 1922 Stefan Banach établit un théorème qui s'applique aux fonctions contractantes définies sur des espaces métriques complets. Ce théorème a fait preuve d'une grande utilité en analyse. En particulier il a donné des résultats concluant dans le domaine de l'existence de solutions et le calcul approché pour de nombreux problèmes émanant de l'analyse non linéaire.

**Théorème I.2.1 (Principe de l'application contractante)** [44] Soit  $(\mathbb{S}, d)$  un espace de Banach, et soit  $P : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$  une contraction. Alors, il existe un et seulement un  $x \in \mathbb{S}$ , tel que  $f(x) = x$ . De plus  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , où  $x_{n+1} = f(x_n)$  et où  $x_1$  est choisie arbitrairement dans  $\mathbb{S}$ .

**Théorème I.2.2** [44] Soit  $(\mathbb{S}, d)$  un espace métrique complet, supposons qu'il existe une application  $P : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ , telle que  $P^m$  est une contraction pour certain entier positif  $m$ . Alors  $P$  admet un point fixe dans  $\mathbb{S}$

**Preuve.** Puisque  $P^m$  est une contraction, il existe un et un seul point  $x$  vérifie  $P^m(x) = x$ , ceci implique que  $PP^m(x) = Px$  et  $P^m(x) = P^mPx$ , donc  $P^mP(x) = Px$ . D'où,  $Px$  est aussi un point fixe de  $P^m$  et d'après l'unicité de  $x$ ,  $Px = x$ . Ainsi,  $x$  est un point fixe de  $P$ . De plus  $x$  est unique en effet, si  $Px = y$ , alors  $P^m y = y$  et  $x = y$ . ce qui achève la démonstration. ■

**Théorème I.2.3** [44] Soit  $(\mathbb{S}, d)$  un espace métrique compact non vide, et supposons que

$$P : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}, \text{ avec } d(Px, Py) < d(x, y), \text{ pour } x \neq y.$$

Alors  $P$  admet un point fixe.

**Théorème I.2.4 (Principe de l'application contractante)**[15]

Soit  $(\mathbb{S}, d)$  un espace métrique complet non vide et soit  $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$  une contraction i.e, il existe une constante  $0 \leq k \leq 1$  telle que  $d(fx, fy) \leq kd(x, y)$ , pour tout  $x, y \in \mathbb{S}$  : Alors  $f$  admet un et seul point fixe  $x^* \in \mathbb{S}$  ( $fx^* = x^*$ ).

En règle générale, il est évident que, pour résoudre un problème de point fixe on doit identifier trois éléments fondamentaux, à savoir,

1. Un ensemble convenable  $\mathbb{S}$  apte pour contenir les solutions du problème ;
2. Une application  $p : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$  ayant la particularité qu'un point fixe est solution du problème ;
3. Un théorème de point fixe qui assure l'existence d'un tel point fixe de  $P$  sur  $\mathbb{S}$ .

## I.2.2 Théorème du point fixe de Schauder

**Définition I.2.2** [44] Un ensemble  $\mathbb{M}$  dans un espace métrique  $(\mathbb{S}, \rho)$  est dite compacte si toute suite  $\{x_n\}$  de  $\mathbb{M}$  admet une sous suite convergeant vers une limite appartenant à  $\mathbb{M}$ .  $\mathbb{M}$  est relativement compacte si toute suite de  $\mathbb{M}$  admet une sous suite convergeant vers une limite appartenant à  $\mathbb{S}$  (i.e. si la fermeture de  $\mathbb{M}$  est compacte).

**Définition I.2.3** [44] Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonction définie sur  $[a, b]$  et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

- (a)  $\{f_n\}$  est uniformément borée sur  $[a, b]$  s'il existe un constante  $M > 0$  telle que  $|f_n(t)| \leq M$  pour tout  $n$  et tout  $t \in [a, b]$ .
- (b)  $\{f_n\}$  est équicontinue si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  telle que :  $t_1, t_2 \in [a, b]$  et  $|t_1 - t_2| < \delta$  implique  $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Théorème I.2.5 (Ascoli-Arzelà)**[44] Soit  $\{f_n(t)\}$  une suite de fonction à valeurs réelles dans  $[a, b]$ . Si  $\{f_n(t)\}$  est uniformément bornée et équicontinue, alors, il existe une sous suite qui converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction continue.

Lorsque on travaille sur des intervalles non compacts le théorème d'Ascoli-Arzelà peut être étendu comme suit.

**Théorème I.2.6** [36] Soit  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  et soit  $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue telle que  $q(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Si  $\{\phi_k(t)\}$  une suite équicontinue de fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $|\phi_k(t)| \leq q(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+$ , alors il existe une sous suite qui converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  vers une fonction  $\phi(t)$  avec  $|\phi(t)| \leq q(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Exemple I.2.2** [44]

- (a) L'espace  $C := (C[a, b], \mathbb{R}^n)$  constitué de fonctions continues  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est un espace vectoriel.
- (b) Le nombre  $\|f\| := \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ , où  $|\cdot|$  est une norme de  $\mathbb{R}^n$ , définit une norme rendant  $C$  un espace de Banach.
- (c) Pour toutes constantes positives  $M$  et  $K$ , l'ensemble

$$\mathbb{L} = \{f \in (C[a, b], \mathbb{R}^n) \mid \|f\| \leq M, |f(u) - f(v)| \leq K|u - v|\}$$

est compact. Pour voir cela, notons tout d'abord que le théorème d'Ascoli est également vrai pour les suites de vecteurs. Appliquons ce théorème à chaque composante successivement. Si  $\{f_n\}$  une suite dans  $\mathbb{L}$ , alors  $\{f_n\}$  est uniformément bornée et équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite  $\{f_n\}$  admet une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Mais  $|f_n(t)| \leq M$ , pour tout  $t$  fixé, alors  $\|f\| \leq M$ . De plus on a pour  $u, v$  sont fixés, il existe  $\epsilon_n > 0$  et  $\delta_n > 0$  tels que

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)| &\leq |f(u) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(v)| + |f(v) - f_n(v)| \\ &\leq \epsilon_n + |f_n(u) - f_n(v)| + \delta_n \\ &\leq \epsilon_n + \delta_n + K|u - v| \rightarrow K|u - v| \end{aligned}$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . Par conséquent,  $f \in \mathbb{L}$  et  $\mathbb{L}$  est compact.

**Théorème I.2.7 (Premier théorème de Schauder)** [44]/[15] Toute partie convexe, compacte et non vide  $\mathbb{M}$  d'un espace de Banach a la propriété de point fixe.

**Définition I.2.4** [44] Soient  $M$  un sous ensemble d'un espace de Banach  $\mathbb{S}$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{S}$  une application. Si  $f$  est continue et  $f(M)$  est contenu dans un sous ensemble compact de  $\mathbb{S}$ , alors  $f$  est compacte.

**Théorème I.2.8 (Deuxième théorème de Schauder)** [15]/[36] Soit  $M$  une partie convexe et non vide d'un espace de Banach  $\mathbb{S}$  et soit  $P : M \rightarrow M$  une application compacte. Alors  $P$  admet un point fixe.

**Théorème I.2.9 (Schauder-Tychnov)** [15] Soient  $M$  un sous ensemble convexe, compact et non vide d'un espace topologique localement convexe, et  $P : M \rightarrow M$  une application continue. Alors  $P$  admet un point fixe.

Le théorème de Schauder s'applique en particulier aux équations différentielles non linéaires. Cependant, le théorème ne garantit pas l'unicité de la solution lorsque celle-ci existe. Il existe beaucoup de problèmes pour lesquels on peut conclure l'unicité de la solution obtenue par le théorème de Schauder avec des conditions moins restrictives que des conditions de Lipschitz.

### I.2.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

En 1955 Krasnoselskii (voir [35], [15]) a observé que dans un bon nombre de problèmes, l'intégration d'un opérateur différentiel perturbé donne naissance à une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Il déclare alors la recherche d'une solution de  $P\phi := B\phi + A\phi$  exige donc un théorème adéquat qui s'applique à cet opérateur hybride  $P$  et qui peut conclure l'existence d'un point fixe. En combinant les deux théorèmes de Banach et celui de Schauder en un seul théorème hybride mais puissant. En clair, il établit le résultat suivant

**Théorème I.2.10 (Krasnoselskii)** Soit  $M$  un convexe fermé et non vide d'un espace de Banach  $(\mathbb{S}, \|\cdot\|)$ . Supposons que  $A$  et  $B$  sont deux applications de  $M$  dans  $\mathbb{S}$  satisfaisant,

- i)  $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$  ;
- ii)  $A$  est continue et  $AM$  est contenu dans un ensemble compact ;
- iii)  $B$  est une contraction de constante  $\alpha < 1$ .

Alors, il existe  $x \in M$ , avec  $Ax + Bx = x$ .

**Remarque I.2.1** si  $A = 0$  ; le théorème se résume au théorème de Banach. Si  $B = 0$  ; alors le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.

## I.3 Équations différentielles à retard et de type neutre

Une équation différentielle à retard est une équation différentielle dont la dérivée par rapport au temps présent de la solution dépend d'une donnée (de cette solution) sur un temps postérieurs. Une équation différentielle à retard est un model spécifique d'équations différentielles fonctionnelles dans lesquelles la partie fonctionnelle de l'équation est l'évaluation d'une fonctionnelle sur une étape antérieure (le passé) au processus ([14], [18], [20], [23], Ce type d'équations a connu ces dernières décennies un grand intérêt. Les investigateurs de toute les disciplines, physique, biologie, économie, logistiques, informatique et autres, trouvent leurs models bien exprimés par des équations à retard qu'avec des EDOs.

### I.3.1 Équations différentielles à retard

Étant donné un nombre  $r > 0$ ,  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace vectoriel de dimension  $n$  muni de la norme euclidienne  $|\cdot|$ ,  $C([a, b], \mathbb{R}^n)$  est l'espace de Banach des fonctions continues définies sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la topologie de la convergence uniforme. Si  $[a, b] = [r, 0]$  on pose  $C = C([r, 0], \mathbb{R}^n)$  et on désigne la norme d'un élément  $\varphi \in C$  par  $\|\varphi\| = \sup_{-r \leq t \leq 0} |\varphi(t)|$ . Si

$$t_0 \in \mathbb{R}, A \geq 0 \text{ et } x \in C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n),$$

alors pour  $t \in [t_0, t_0 + A]$ , on définit  $x_t \in C$  par  $x_t(s) = x(s + t)$  pour tout  $s \in [-r, 0]$

**Définition I.3.1** [14] Si  $D$  est un sous ensemble de  $\mathbb{R} \in C$ , et  $f : D \in \mathbb{R}$  une fonction donnée, la relation

$$x'(t) := f(t, x_t) \tag{I.1}$$

ou

$$x_t(s) := x(t + s), s \in [-r, 0]$$

est une équation différentielle fonctionnelle à retard sur  $D$  notée parfois  $EDR(f)$ . Le nombre  $r$  est appelé le retard. En clair, le cas  $r = 0$  correspond au cas des équations différentielles ordinaires.

Il est évident qu'une condition initiale appropriée au temps  $t = t_0$  exige la détermination de la fonction  $x$  sur tout l'intervalle  $[t_0 - r, t_0]$ , i.e,

$$x(t) = \psi(t), t \in [t_0 - r, t_0]$$



Ou  $\psi : [t_0 - r, t_0] \in \mathbb{R}^n$  est une fonction donnée supposée continue appelée la condition initiale de l'équation à retard (I.1). Ainsi, l'équation (I.1) peut se mettre sous la forme

$$x'(t) := f(t, x_t), t \geq t_0$$

$$x(t) = \psi(t), t \in [t_0 - r, t_0],$$

avec  $\psi$  une fonction donnée continue sur tout l'intervalle  $[t_0 - r, t_0]$ . L'équation (I.1) est dite linéaire si  $f(t, \varphi) = L(t)\varphi$ , où  $L(t)$  est linéaire en chaque  $t$  : L'équation (I.1) est dite non homogène si  $f(t, \varphi) = L(t)\varphi + h(t)$ , où  $h(t) \neq 0$ . L'équation (I.1) est dite autonome si  $f(t, \varphi) = g(\varphi)$ ,  $g$  indépendante de  $t$ . A titre d'exemple, les équations suivantes sont des équations différentielles à retard

$$x'(t) = 2x(t) + 5x(t-1), \quad (\text{I.2})$$

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t-r(t)) + h(t), \quad (\text{I.3})$$

$$x'(t) = \int_{-r}^0 x(t+s)ds \quad (\text{I.4})$$

$a(t), b(t), r(t)$  sont des fonctions continues. L'équation (I.2) représente une équation différentielle linéaire autonome à retard constant  $r = 1$ , l'équation (I.3) est une équation différentielle linéaire à retard fonctionnelle non homogène non autonome et l'équation (I.4) représente une équation intégral-différentielle linéaire à retard.

**Définition I.3.2** *Étant donnés  $\psi \in C$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ , une solution de l'Equation (I.1) est une fonction notée  $x(t)$  telle que  $x(t) = \psi(t)$  si  $t \in [t_0 - r, t_0]$  et satisfaisant (I.1) si  $t \in [t_0, t_0 + A]$   $A > 0$ . Une telle fonction  $x(t)$  est dite solution de (I.1) à travers  $(t_0, \psi)$  et est notée souvent par  $x(t) = x(t, t_0, \psi)$ .*

**Lemme I.3.1** [20] *Étant données une fonction  $\psi \in C$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $f(t, \psi)$  une fonction continue. La recherche d'une solution de l'équation (I.1) à travers  $(t_0, \psi)$  est équivalente à la résolution de l'équation intégrale*

$$x_{t_0} = \psi, \\ x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(u, x_u)du, t \geq t_0$$

Définissons l'application  $Ax$  par l'expression

$$Ax(t) := f(t, x_t), t \geq t_0, \\ x_{t_0} = \psi.$$

Pour démontrer l'existence d'une solution à travers  $(t_0, \psi) \in \mathbb{R} \times C$ , on considère un nombre  $\sigma > 0$ , et toutes les fonctions définies sur  $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$  qui sont continues et qui coïncident avec  $\psi$  sur  $[t_0 - r, t_0]$ , qui est,  $x_{t_0} = \psi$ . On demande que les valeurs de ces fonctions sur  $[t_0, t_0 + \sigma]$  répondent à la condition  $|x(t) - \psi(0)| \leq \beta$ . La fonction usuelle obtenue  $A$  correspondant à l'équation intégrale est définie et on démontre que  $\sigma$  et  $\beta$  peuvent être choisis de sorte que  $A$  envoie cette classe (de fonctions continues) dans elle-même, qu'elle est continue et à image compacte. Dans ce contexte, le théorème du point fixe de Schauder peut s'appliquer et implique l'existence d'une solution (pour de amples détails on renvoi aux livres ([20] et [23])).

**Remarque I.3.1** Généralement, on utilise la méthode des étapes pour résoudre les équations différentielles à retard, et pour bien comprendre cette méthode on va donner quelques exemples illustratifs.

**Exemple I.3.1** Si une EDO typique est donnée par  $\frac{dx}{dt} = Kx$ , alors un exemple d'une EDR s'écrit sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = Kx(t - r) \quad (\text{I.5})$$

ici, on prend  $k = -1$  et  $r = 1$ . Donc l'équation (I.5) devient,

$$\frac{dx}{dt} = -x(t - 1)$$

Si on veut résoudre l'équation, par exemple, au temps  $t = 0$  il est clair qu'on aura besoin de connaître la valeur de  $x$  au temps  $t = -1$ . Pour résoudre l'équation au temps  $t = 1$ , il est indispensable de savoir la valeur de  $x$  au temps  $t = 0$ . Par conséquent, pour avoir une solution complète de  $t = 0$  à  $t = 1$ , on est obligé de connaître une donnée initiale de  $t = -1$  à  $t = 0$ . Ainsi donc, on doit se doter d'une fonction initiale. Si une telle fonction est notée  $\psi(t)$  et qu'on lui attribue, par exemple, la valeur  $\psi(t) = 1$  ; pour  $t \in [-1, 0]$ . Alors, on voit qu'on a sur samment d'informations pour résoudre notre équation lorsque  $t \in [0, 1]$ , et la solution générale sera  $x(t) = -t + c$ ,  $c = \text{constante}$ . En remplaçant  $t$  par zero dans cette dernière équation (puisque  $\psi(t) = 1$ ), on constate que  $c = 1$ . Ainsi, on aura

$$x(t) = 1 - t, t \in [0, 1]$$

Maintenant, on peut exploiter ces informations pour progresser et résoudre l'équation pour des temps futurs, par exemple pour  $t \in [1, 2]$ . Ici on voit que

$$\begin{aligned} x'(t) &= -(1 - (t - 1)) \\ &= t - 2. \end{aligned}$$

Elle possède la solution générale

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + d, d = \text{Cost}$$

En utilisant la solution que nous avons trouvé pour  $t \in [0, 1]$  et exactement en  $t = 1$  on obtient la valeur  $d = \frac{3}{2}$ . Par conséquent,

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2, t \in [1, 2]$$

On peut progresser dans ce processus et résoudre l'EDR comme une série infinie d'EDO.

**Exemple I.3.2** Considérons une EDR donnée par

$$x'(t) = 2x(t - 1), t \geq 1 \quad (\text{I.6})$$

avec la condition initiale,  $\psi(t) = t$  si  $0 \leq t \leq 1$ . On résout l'équation (I.6) pour  $1 \leq t \leq 5$ . Comme dans l'exemple (1.9) on peut obtenir les résultats suivants

$$x(t) = \begin{cases} 1 + (t - 1)^2 & , 1 \leq t \leq 2 \text{ et } \psi(1) = 1 \\ \frac{2}{3}(t - 2)^3 + 2(t - 1) & , 2 \leq t \leq 3 \text{ et } \psi(2) = 2 \\ \frac{1}{3}(t - 3)^4 + 2(t - 2)^2 + \frac{8}{3} & , 3 \leq t \leq 4 \text{ et } \psi(3) = \frac{14}{3} \\ \frac{2}{15}(t - 4)^5 + \frac{4}{3}(t - 3)^3 + \frac{16}{3}(t - 2) - 1 & , 4 \leq t \leq 5 \text{ et } \psi(4) = 11 \end{cases}$$

**Théorème I.3.1 (Existence)** [5] Pour l'équation (I.1), supposons que  $\Omega$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R} \times C$  et  $f(t, \varphi)$  une application continue sur  $\Omega$ . Si  $(t_0, \psi) \in \Omega$ , alors il existe une solution de l'équation (I.1) passant par  $(t_0, \psi)$ .

**Définition I.3.3** [5] On dit que la fonction  $f(t, \varphi)$  est Lipschitzienne par rapport à  $\varphi$  sur un compact  $K$  de  $\mathbb{R} \times C$  s'il existe une constante  $K > 0$  telle que, pour tout  $(t, \varphi_i) \in K$ ,  $i = 1, 2$  on a

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \leq K|\varphi_1 - \varphi_2| \quad (\text{I.7})$$

**Théorème I.3.2 (Unicité)** [5] Supposons que  $\Omega$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R} \times C$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue,  $f(t, \varphi)$  est Lipschitzienne par rapport à  $\varphi$  sur tout sous ensemble compact de  $\Omega$ . Si  $(t_0, \psi) \in \Omega$ , alors il existe une unique solution pour l'équation (I.1) passant par  $(t_0, \psi)$ . Dans l'exemple suivant on va utiliser la méthode dites des étapes pour résoudre une équation à retard.

### I.3.2 Équations différentielles de type neutre

On donne ici la définition d'une équation différentielle de type neutre et on donne quelques exemples.

**Définition I.3.4** [50] Supposons que  $\Omega$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R} \times C$  d'éléments  $(t, \varphi)$ . Une fonction  $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite atomique au point  $\beta$  de  $\Omega$  si  $D$  est continue ainsi que sa première et seconde dérivée au sens de Frechet par rapport à  $\varphi$  et  $D_\varphi$  est continue.

**Définition I.3.5** [50] Supposons que  $\Omega$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R} \times C$ ,  $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont deux fonctions données continues avec  $D$  atomique en zéro. La relation

$$\frac{d}{dt}D(t, x_t) = f(t, x_t) \quad (\text{I.8})$$

est dite une équation différentielle de type neutre EDTN.

**Exemple I.3.3** [50] Si  $D(\varphi) = \varphi(0)$ ,  $\forall \varphi$ , alors  $D$  est atomique au point 0. Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue; le couple  $(D, f)$  définit une EDRN et donc l'EDFR est une EDRN.

**Exemple I.3.4** [50] Si  $r > 0$ ,  $(B)_{n \times n}$  une matrice donnée,  $D(\varphi) = \varphi(0) - B(\varphi - r)$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. Le couple  $(D, f)$  définit une EDRN,

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Bx(t - r)] = f(t, x_t)$$

**Exemple I.3.5** [50] Si  $r > 0$ ,  $D(\varphi) = \varphi(0) - \varphi^2(t - r)$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue. Le couple  $(D, f)$  définit une EDRN,

$$\frac{d}{dt}[x(t) - x^2(t - r)] = f(t, x_t)$$

**Définition I.3.6** [50] Une fonction  $x$  est dite solution de l'équation (I.8) sur  $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ , s'il existe un  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$  tels que  $x \in C([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ ,  $(t, x_t) \in \Omega$ ,  $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ ,  $D(t, x_t)$  est continument différentiable et satisfait (I.8) sur  $[t_0, t_0 + \sigma]$ . Etant donnés  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\psi \in C$  et  $(t_0, \psi) \in \Omega$  on dit que  $x(t, t_0, \psi)$  est une solution de (I.8) passant par  $(t_0, \psi)$  s'il existe  $\sigma > 0$  telle que  $x(t, t_0, \psi)$  est une solution de (I.8) sur  $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$  et  $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$ , on dit que  $x(t, t_0, \psi)$  est une solution de (I.8) sur  $[t_0 - r, \infty)$  si pour tout  $\sigma > 0$ ,  $x(t, t_0, \psi)$  est une solution de (I.8) sur  $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$  et  $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$ . Si  $D(t, \varphi) = D_0(t, \varphi) - g(t)$ ,  $f(t, \varphi) = L(t, \varphi) + h(t)$ , avec  $D_0(t, \varphi)$  et  $L(t, \varphi)$  sont linéaire, alors l'équation (I.8) est dite linéaire. Si  $g = 0$ ,  $h = 0$ , alors l'équation (I.8) est dite homogène.

**Théorème I.3.3 (Existence)**[50] Si  $\Omega$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R} \times C$  et  $(t_0, \psi) \in \Omega$ , alors il existe une solution pour l'équation (I.8) passant par  $(t_0, \psi)$ .

**Théorème I.3.4 (Existence et Unicité)**[50] Si  $\Omega$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R} \times C$  et  $f(t, \varphi)$  est Lipschitzienne sur tout sous ensemble compact  $\Omega$  de , alors pour tout  $(t_0, \psi) \in \Omega$  il existe une unique solution pour l'équation (I.8) passant par  $(t_0, \psi)$ .

## I.4 Stabilité de solutions pour les équations différentielles à retard

La méthode directe de Liapounov est la méthode la plus générale pour traiter les problèmes d'existence, d'unicité et de stabilité de solutions périodiques des équations différentielles que se soient ordinaires ou fonctionnelles. Néanmoins, pendant ces dernières décennies, plusieurs investigateurs ont rencontré beaucoup de difficultés qui persistent dans cette théorie. Dernièrement, des chercheurs ont réussi à contourner beaucoup de ces problèmes en se basant sur la théorie de point fixe.

Considérons le système différentiel

$$x'(t) = F(t, x_t), F(t, 0) = 0 \quad (\text{I.9})$$

On suppose que  $F : ]-\infty, \infty[ \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ , où  $C = C([-\alpha, 0], \mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions continues  $\psi : [-\alpha, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha > 0$ . Ce dernier espace est de Banach lorsque on le muni de la norme  $\|\psi\| = \sup_{-r \leq t \leq 0} |\psi(t)|$ ,  $\psi \in C$ . On suppose que  $F$  est continue et supposée satisfaire toutes les conditions qui garantissent une solution. On définit

$$C(t) = \{\psi : [t - \alpha, t] \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi \text{ continue}\}.$$

On a les définitions suivantes.

**Définition I.4.1** [44] La solution zero ( $x \equiv 0$ ) de l'équation (I.9) est dite

1) Stable si  $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta(\epsilon, t_0) > 0$  tel que,

$$[\psi \in C(t_0), \|\psi\| < \delta \text{ et } t \geq t_0] \Rightarrow |x(t, t_0, \psi)| < \epsilon$$

2) Uniformément stable si  $\delta$  de (1) est indépendante de  $t_0$ .

3) Asymptotiquement stable si elle est stable et si,  $\forall t_1 \geq t_0, \exists \eta > 0$  tel que,

$$[\psi \in C(t_1), \|\psi\| < \eta \text{ et } t \geq t_1] \Rightarrow |x(t, t_1, \psi)| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Si en outre toutes les solutions tendent vers zéro, alors  $x = 0$  est globalement asymptotiquement stable.

4) Uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et s'il existe  $\eta > 0$  tel que,

$$\forall \gamma > 0, \exists T > 0 \text{ telque } [t_1 \geq t_0, \psi \in C(t_1), \|\psi\| < \eta \text{ et } t \geq t_1 + T] \Rightarrow |x(t, t_1, \psi)| < \gamma$$

**Exemple I.4.1** Considérons, pour  $t \geq 1$ , l'équation différentielle à retard

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{t}x(t) - \frac{27t}{(t+2)^3}x^3\left(\frac{t+2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{t}x(t) - \frac{27t}{(t+2)^3}x^3(t - \tau(t)), \end{aligned}$$

avec  $\tau(t) = \frac{2}{3}(t-1)$ , avec la condition initiale  $x(1) = x_0$ . On vérifie facilement que la solution unique de ce problème est

$$x(t) = x_0 t e^{-x_0^2(t-1)}, t \geq 1;$$

Ainsi,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  pour tout  $x_0$ . Supposons que  $|x_0| = \delta$ , alors

$$|x(1 + \frac{1}{\delta^2})| = \frac{1}{e}(\delta + \frac{1}{\delta}) \geq \frac{2}{e};$$

Par conséquent, pour tout  $\delta$  la solution se trouve en dehors de la boule  $|x| = \frac{2}{e}$  en temps  $t = 1 + \frac{1}{\delta^2}$ , et la solution est donc instable

## I.5 Stabilité par la méthode de point fixe

Lorsqu'on veut étudier la stabilité de la solution triviale d'une équation différentielle à retard par la méthode de point fixe il va falloir procéder comme suit

- (I) Une équation différentielle à retard exige avant tout une donnée (une fonction) initiale définie sur un intervalle initial approprié  $I_{t_0}$  i.e.  $\psi : I_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On doit choisir aussitôt après un espace convenable  $\mathbb{S}$  de fonctions  $\varphi : I_{t_0} \cup [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui coïncident sur  $I_{t_0}$  avec  $\psi$ . Selon les cas de besoins on peut toujours ajouter d'autres restrictions aux fonctions  $\varphi$  de  $\mathbb{S}$  comme la bornétude par exemple ou la condition  $\varphi(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Cette dernière condition s'impose si on souhaite étudier la stabilité asymptotique.
- (II) Ensuite on doit inverser l'équation différentielle pour définir ce qu'on appelle une application de point fixe i.e. une application  $P : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$  dont le point fixe est solution de l'équation à retard donnée (l'équation originale). Néanmoins, cette inversion peut s'avérer une tâche délicate dans plusieurs cas. Par exemple, si l'équation ne possède pas un EDO terme linéaire dans sa structure on ne pourra pas utiliser la variation des paramètres. Il est donc indispensable d'agir autrement et essayer si une transformation de cette équation est possible.
- (III) A l'image de l'application  $P : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$  obtenu en (II), un théorème de point fixe doit être choisi permettant à l'équation  $P(x) = x$  d'avoir une solution. En particulier si  $P$  est une contraction on pourra appliquer le théorème de point fixe de Banach, si  $P$  est compacte alors on appliquera le théorème de Schauder ou Schaeffer et si  $P$  se met sous forme d'une somme d'une contraction et d'une application compacte alors le théorème hybride de Krasnoselskii peut donner satisfaction. Il devient donc clair que la méthode de stabilité par la méthode de point fixe repose sur trois choses essentielles, la variation des paramètres, un espace complet et un théorème de fixe. Si ces éléments sont réunis alors, on peut, en une étape, conclure l'existence (voire l'unicité) et la stabilité. En outre, on verra que cette méthode exige toujours des conditions en moyenne cependant les conditions de la méthode de Liapounov sont toujours ponctuelles.

# Stabilité asymptotique d'équation différentielle linéaire à retard

L'objectif dans ce chapitre est de présenter une extension des résultats et une amélioration des conditions utilisées dans [38, 11, 49, 56]. Cette tâche repose sur la définition d'une bonne fonction continue  $H$  et sur le choix des hypothèses sur cette fonction, sans restrictions sur l'inverse de  $t - \tau(t)$ , de sorte que, pour une fonction continue initialement donnée une application de point fixe  $P$  associée à (II.1) est construite sur un espace métrique complet  $S_\psi$  dans lui-même permettant à  $P$  d'avoir un point fixe. Cette démarche va permettre d'établir et prouver un Théorème de stabilité asymptotique de la solution zéro de (II.1) avec des conditions nécessaires et suffisantes moins restrictives.

## II.1 L'équation

On revient sur l'équation

$$x'(t) = - \sum_{j=1}^N b_j(t)x(t - \tau_j(t)) + \sum_{j=1}^N c_j(t)x'(t - \tau_j(t)) \quad (\text{II.1})$$

On désigne tout au long de ce chapitre la condition initiale

$$x(t) = \psi(t) \text{ pour } t \in [m(t_0), t_0] \text{ où } \psi \in C([m(t_0), t_0]), \mathbb{R}) \quad (\text{II.2})$$

Avec

$$m_j(t_0) = \inf\{t - \tau_j(t), t \geq t_0\}, m(t_0) = \min\{m_j(t_0), 1 \leq j \leq N\} \quad (\text{II.3})$$

pour parler de nouvelles conditions sur  $b_j$ ,  $\tau_j$  et  $c_j$  sans contraintes sur  $t - \tau_j(t)$  de sorte que, pour une fonction  $\psi$  initialement donnée, une application de point fixe peut être défini sur un espace métrique complet prudemment choisi dans lequel cette application possède un point fixe offrant une solution bornée et stable au problème posé. Ces conditions ont été proposées par Ardjouni et Djoudi [2], Jin et Luo [56]. Ardjouni et Djoudi ont déjà, dans [2] poussé le contexte de cet exposé à une étape plus avancée qui prend en charge des équations différentielles totalement non linéaires de type neutre et qui améliore nettement les résultats antérieurs particulièrement ceux de Burton, Jin, Raffoul et Zhang [38, 11, 49, 56]. avec moins de restrictions et plus de rigueurs. Rappelons que la méthode repose sur trois éléments fondamentaux.

- ✓ Un espace fonctionnel  $S_\psi$  convenable apte à contenir les solutions souhaitable.
- ✓ Une application de point fixe.  $P : S_\psi \rightarrow S_\psi$ .
- ✓ Un Théorème de point fixe de Banach.

L'application de cette méthode a aussi montré des avantages significatifs de cette méthode sur celle de Liapunov lorsque les coefficients sont non bornés et/ou si le retard est non borné. Les conditions de la première méthode sont en moyenne par contre celles de la deuxième sont toujours ponctuelles. L'idée fondamentale exposé ici permettant d'obtenir la stabilité asymptotique repose sur la donnée d'une fonction  $H$  continue soumise à une hypothèse à caractère asymptotique.

## II.2 Inversion et transformation de l'équation

Selon ce qu'on a vu au premier chapitre, pour chaque fonction  $\psi \in C([m(t_0), t_0], \mathbb{R})$ , une solution de (II.1) à travers  $(t_0, \psi)$  existe. C'est une fonction continue  $x : [m(t_0), \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ , pour une constante positive  $\sigma > 0$ , telle que  $x$  satisfait (II.1) sur  $[0, \sigma)$  et coïncide avec  $\psi$  sur  $[m(t_0), t_0]$ . Elle est notée par  $x(t) = x(t, t_0, \psi)$ . Cependant, le calcul de cette solution n'est pas une chose facile. Pire encore, l'absence d'un EDO terme non trivial complique la recherche d'une telle solution. On a besoin donc de faire des préparations si on veut aboutir à un quelconque résultat. Une transformation de l'équation (II.1) s'impose dans notre situation.

**Lemme II.2.1** Soient  $h_j : [m_j(t_0), \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, N$  sont des fonctions arbitraires continues. Supposons que  $\tau_j$  sont de classe  $C^2$  et  $\tau_j'(t) \neq 1$  pour  $j = 1, \dots, N$ . Si  $x$  est une solution de l'équation (II.1-II.2) sur un intervalle  $[t_0, T)$  et satisfait la condition initiale  $x(t) = \psi(t)$  sur  $[m(t_0), t_0]$  alors  $x$  est solution de l'équation intégrale suivante

$$\begin{aligned} x(t) = & \left\{ \psi(t_0) - \sum_{j=1}^N \frac{c_j(s)}{1 - \tau_j'(s)} \psi(t_0 - \tau_j(s)) - \sum_{j=1}^N \int_{t_0 - \tau_j(t_0)}^{t_0} h_j(s) \psi(s) ds \right\} e^{-\int_{t_0}^t H(u) du} \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{c_j(s)}{1 - \tau_j'(s)} x(t - \tau_j(s)) + \sum_{j=1}^N \int_{t - \tau_j(t)}^t h_j(s) x(s) ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \{b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)\} x(s - \tau_j(s)) ds \\ & - \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} H(s) \left( \int_{s - \tau_j(s)}^s h_j(u) x(u) du \right) ds. \end{aligned}$$

où

$$H(t) = \sum_{j=1}^N H_j(t) \text{ et } r_j(t) = \frac{(c_j(t)H(t) + c_j'(t))(1 - \tau_j'(t)) + c_j(t)\tau_j''(t)}{(1 - \tau_j'(t))^2}$$

**Preuve.** En multipliant les deux membres de l'équation (II.1) par  $e^{\int_{t_0}^t H(u) du}$  et intégrerons par rapport à  $s$  de  $t_0$  à  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} x(t) = & \psi(t_0) e^{-\int_{t_0}^t H(u) du} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \sum_{j=1}^N h_j(s) x(s) ds \\ & - \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \sum_{j=1}^N b_j(s) x(s - \tau_j(s)) ds \\ & + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \sum_{j=1}^N c_j(s) x'(s - \tau_j(s)) ds. \end{aligned}$$



Ainsi,

$$\begin{aligned} x(t) = & \psi(t_0)e^{-\int_{t_0}^t H(u)du} + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} h_j(s)x(s)ds \\ & - \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} b_j(s)x(s - \tau_j(s))ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} c_j(s)x'(s - \tau_j(s))ds. \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie, il vient

$$\begin{aligned} x(t) = & \psi(t_0)e^{-\int_{t_0}^t H(u)du} + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} d \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u)x(u)du \right) \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} \{-b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s))\}x(s - \tau_j(s))ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t \frac{c_j(s)}{1 - \tau_j'(s)} e^{-\int_s^t H(u)du} dx(s - \tau_j(s)) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} x(t) = & \left\{ \psi(t_0) - \sum_{j=1}^N \frac{c_j(s)}{1 - \tau_j'(s)} \psi(t_0 - \tau_j(s)) - \sum_{j=1}^N \int_{t_0 - \tau_j(t_0)}^{t_0} h_j(s)\psi(s)ds \right\} e^{-\int_{t_0}^t H(u)du} \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{c_j(s)}{1 - \tau_j'(s)} x(t - \tau_j(s)) + \sum_{j=1}^N \int_{t - \tau_j(t)}^t h_j(s)x(s)ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} \{b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)\}x(s - \tau_j(s))ds \\ & - \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u)x(u)du \right) ds. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Réciproquement, si une fonction arbitrairement  $x$  est coïncide avec  $\psi$  sur  $[m(t_0), t_0]$  et solution de (II.4) sur un intervalle  $[t_0, T_1]$ , alors  $x$  est une solution de (II.1) sur  $[t_0, T_1]$ . ■

## II.3 Bornétude et stabilité asymptotique de la solution

De l'équation (II.4) on extraire une application de point fixe  $P$  pour (II.1). Le défi ici est le choix d'un espace de fonctions métrisable dans lequel  $P$  peut être défini. Ci-dessous une métrique poids est défini sur un espace métrique bien spécifié.

Considérons  $C$  l'espace de fonctions continues et bornées définies sur  $[m(t_0), +\infty)$  muni de la norme du supremum  $\|\cdot\|$ , i.e.

$$\|\phi\| := \sup \{|\phi(t)| : t \in [m(t_0), \infty)\}, \quad \phi \in C. \quad (\text{II.5})$$

En d'autres expressions on va s'installer dans l'espace métrique  $(C, d)$  où  $d$  est la métrique induite du supremum  $d(\phi, \varphi) = \|\phi - \varphi\|$  pour  $\varphi, \phi \in C$ .

Si  $\psi : [m(t_0), t_0] \longrightarrow [-l, l]$ ,  $l > 0$ , est une fonction donnée, on pose

$$S_\psi := \{\phi : [m(t_0), +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \mid \phi \in C, \phi(t) = \psi(t) \text{ pour } t \in [m(t_0), t_0], |\phi(t)| \leq l\}. \quad (\text{II.6})$$

Comme  $S_\psi$  est un sous espace fermé de  $C$ ,  $(S_\psi, d)$  est par conséquent, un sous espace métrique complet.

Définissons l'application  $P$  sur  $S_\psi$  comme suit pour  $\phi \in S_\psi$   $(P\phi)(t) = \psi(t)$ ,  $t \in [m(t_0), t_0]$ , cependant, pour  $t > 0$  on pose

$$\begin{aligned} (P\varphi)(t) = & \left\{ \psi(t_0) - \sum_{j=1}^N \frac{c_j(s)}{1 - \tau'_j(s)} \psi(t_0 - \tau_j(s)) - \sum_{j=1}^N \int_{t_0 - \tau_j(t_0)}^{t_0} h_j(s) \psi(s) ds \right\} e^{-\int_{t_0}^t H(u) du} \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{c_j(s)}{1 - \tau'_j(s)} \varphi(t - \tau_j(s)) + \sum_{j=1}^N \int_{t - \tau_j(t)}^t h_j(s) \varphi(s) ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \{-b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau'_j(s)) - r_j(s)\} \varphi(s - \tau_j(s)) ds \\ & - \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} H(s) \left( \int_{s - \tau_j(s)}^s h_j(u) \varphi(u) du \right) ds \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Où  $\psi(t)$  est la restriction de  $(P\phi)(t)$  sur  $[m(t_0), t_0]$ . On pose

$$K = \sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-\int_0^t H(s) ds} \right\} \quad (\text{II.8})$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t H(s) ds > -\infty \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left| \frac{c_j(t)}{1 - \tau'_j(t)} \right| + \sum_{j=1}^N \int_{t - \tau_j(t)}^t |h_j(s)| ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} |-b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau'_j(s)) - r_j(s)| ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} |H(s)| \left( \int_{s - \tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds \\ & \leq \alpha < 1 \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

**Lemme II.3.1** *On admet que les hypothèses du lemme II.2.1 et les conditions (II.8)–(II.10) sont satisfaites alors  $P : S_\psi \rightarrow S_\psi$ .*

**Preuve.** Tout d'abord supposons que la condition (II.11) est vérifiée. Pour voir  $P : S_\psi \rightarrow S_\psi$  : En effet, la définition de  $P$  montre que il suffit de montrer que  $P\varphi \in S_\psi$  si  $\varphi$  est continue.  $P$  coïncide avec sur  $[m(t_0), t_0]$  et pour  $t \geq 0$  ; les conditions (II.8–II.10) montrent que

$$|P\varphi| \leq K \left( 1 + \sum_{j=1}^N \frac{c_j(t_0)}{1 - \tau'_j(t_0)} + \sum_{j=1}^N \int_{t_0 - \tau_j(t_0)}^{t_0} h_j(s) ds \right) \|\psi\| + \|\varphi\| \alpha < \infty$$

Ainsi,  $P\varphi$  est continuée et bornée. Reste démontrer que  $(P\varphi)(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Pour cela, désignons par  $I_1, I_2, \dots, I_5$  respectivement les cinq termes dans l'expression (II.7). Il

est évident que le premier terme  $I_1$  tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ , d'après la condition (II.11). En outre, du fait que  $\varphi(t) \rightarrow 0$  et  $t - \tau_j(t) \rightarrow \infty$  pour,  $j = 1, \dots, N$  quand  $t \rightarrow \infty$ , le second terme  $I_2$  en (II.7) tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Reste démontrer que chacun des termes restants de (II.7) tendent aussi vers zéro l'infini.

Soit  $\varphi \in S$  une fonction fixée. Pour  $\epsilon > 0$  donné, choisissons  $T_0 > t_0$  assez grand tel que  $t - \tau_j(t) \geq T_0$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , implique  $|\psi(s)| < \epsilon$  si  $s \geq t - \tau_j(t)$ . Par conséquent, le troisième terme  $I_3$  en (II.4) satisfait

$$|I_3| = \left| \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_j(t)}^t h_j(s) \varphi(s) ds \right| \leq \int_{t-\tau_j(t)}^t |h_j(s)| |\varphi(s)| ds \leq \epsilon \int_{t-\tau_j(t)}^t |h_j(s)| ds \leq \alpha \epsilon$$

Cela démontre que  $I_3 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Considérons maintenant le terme  $I_4$ . tant donné  $\epsilon > 0$ , il existe  $T_1 > t_0$  tel que  $s \geq T_1$  implique  $|\varphi(s - \tau_j(s))| < \epsilon$  pour  $j = 1, 2, \dots, N$ . Ainsi, pour  $t \geq T_1$ , le terme  $I_4$  dans (II.7) satisfait

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \{b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)\} \varphi(s - \tau_j(s)) ds \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u) du} |b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)| |\varphi(s - \tau_j(s))| ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{T_1}^t e^{-\int_s^t H(u) du} |b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)| |\varphi(s - \tau_j(s))| ds. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \sup_{\sigma \geq m(t_0)} |\varphi(\sigma)| \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u) du} |b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)| ds \\ &\quad + \epsilon \sum_{j=1}^N \int_{T_1}^t e^{-\int_s^t H(u) du} |b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)| ds. \end{aligned}$$

Selon la condition (II.11), nous pouvons trouver  $T_2 > T_1$  tel que  $t \geq T_2$  implique

$$\begin{aligned} &\sup_{\sigma \geq m(t_0)} |\varphi(\sigma)| \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u) du} |b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)| ds \\ &= \sup_{\sigma \geq m(t_0)} |\varphi(\sigma)| e^{-\int_s^t H(u) du} \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u) du} |b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)| ds \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Maintenant, appliquons (II.10) pour aboutir à  $|I_4| < \epsilon + \alpha \epsilon$ . Cela montre bien que  $I_4 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Pour chaque  $\epsilon > 0$ , il existe un  $T_1 > t_0$  tel que  $s \geq T_1$  implique que  $|x(s - \tau_j(s))| < \epsilon$  pour  $j = 1, 2, \dots, N$ . Ainsi, pour  $t \geq T_1$ , le dernier terme  $I_5$  dans (II.7) est satisfaisant

$$\begin{aligned}
|I_5| &= \left| \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u) \varphi(u) du \right) ds \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| |\varphi(u)| du \right) ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \int_{T_1}^t e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| |\varphi(u)| du \right) ds \\
&\leq \sup_{\sigma \geq m(t_0)} |\varphi(\sigma)| \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds \\
&\quad + \epsilon \sum_{j=1}^N \int_{T_1}^t e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds.
\end{aligned}$$

Par (II.11), il existe  $T_2 > T_1$  tel que  $t \geq T_2$  implique

$$\sup_{\sigma \geq m(t_0)} |\varphi(\sigma)| \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds < \epsilon$$

Faites une demande (5) pour obtenir  $|I_5| < \epsilon + \alpha\epsilon < 2\epsilon$ . Ainsi,  $I_5 \rightarrow 0$  comme  $t \rightarrow \infty$ . De même nous pouvons montrer que le reste des termes dans (II.7) le zéro d'approche comme  $t \rightarrow \infty$ . Cela cède  $(P\varphi)(t) \rightarrow 0$  comme  $t \rightarrow \infty$  et dorénavant  $P\varphi \in S_\psi$ . ■

**Lemme II.3.2** *Sous les conditions des lemmes II.2.1 et II.3.1. On a l'application  $P : S_\psi \rightarrow S_\psi$  est une contraction.*

**Preuve.** Aussi, par (II.10). D'autre part, selon la condition (II.10),  $P$  est une contraction avec une constante  $\alpha$ . En effet, pour  $\phi, \eta \in S_\psi$  et  $t > 0$

$$\begin{aligned}
|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| &\leq \left[ \sum_{j=1}^N \left| \frac{c_j(s)}{1 - \tau_j'(s)} \right| + \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_j(t)}^t |h_j(s)| ds \right. \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} | -b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s) | ds \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds \right] \|\phi - \eta\|
\end{aligned}$$

La condition (II.10) montre que  $P$  est une contraction avec une constante  $\alpha$ .  $P$  est trivialement une contraction sur  $[m(t_0), t_0]$ . D'après le principe de l'application contractante, Théorème (1.2),  $P$  admet un point fixe unique  $\varphi$  dans  $S$  qui constitue une solution de l'équation (4) avec  $x(t) = \psi(t)$  sur  $[m(t_0), t_0]$  et  $x(t) = x(t, t_0, \psi) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . ■

Avant d'expliciter cette construction, nous énonçons une définition importante de la stabilité

**Définition II.3.1** *La solution triviale de (II.1) est stable en  $t = t_0$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tel que si  $[\psi \in \mathcal{C}(t_0) : \|\psi\| < \delta]$  alors  $|x(t, t_0, \psi)| < \varepsilon$  quel que soit  $t \geq m(t_0)$ .*

**Définition II.3.2** La solution triviale de (II.1) est asymptotiquement stable si elle stable en  $t = t_0$  et il existe un  $\delta > 0$  telle pour toute fonction  $[\psi \in \mathcal{C}(t_0) : \|\psi\| < \delta_1]$ , la solution  $x$  satisfaisante  $x = \psi$  sur  $[m(t_0), t_0]$  tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

**Théorème II.3.1** Sous les hypothèses des lemmes II.2.1-II.3.2. Alors la solution zéro de (II.1) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\int_0^t H(s)ds \rightarrow \infty \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \quad (\text{II.11})$$

**Preuve.** Pour obtenir la stabilité asymptotique, nous devons montrer que la solution zéro de (4) est d'abord stable. Etant donné  $\epsilon > 0$ , on choisit  $\sigma > 0$  ( $\sigma < \epsilon$ ) satisfaisant  $2\sigma K + \alpha\epsilon < \epsilon$ . Si  $x(t) = x(t, t_0, \psi)$  est la solution de (4) avec  $\|\psi\| < \sigma$ , alors  $x(t) = (Px)(t)$ , ou  $P$  est définie par la formule (II.7). On affirme que  $|x(t)| < \epsilon$  pour tout  $t \geq t_0$ . Notons que  $|x(s)| < \epsilon$  sur l'intervalle  $[m(t_0), t_0]$ . S'il existe  $t^* > 0$  tel que  $|x(t^*)| = \epsilon$  et  $|x(s)| < \epsilon$  pour  $m(t_0) \leq s \leq t^*$ , alors à partir de II.7), on en tire

$$\begin{aligned} |x(t^*)| &\leq \|\psi\| \left( 1 + \sum_{j=1}^N \left| \frac{c_j(t_0)}{1 - \tau_j'(t_0)} \right| + \sum_{j=1}^N \int_{t_0 - \tau_j(t_0)}^{t_0} |h_j(s)| ds \right) e^{-\int_{t_0}^{t^*} H(u)du} \\ &+ \epsilon \sum_{j=1}^N \left| \frac{c_j(t^*)}{1 - \tau_j'(t^*)} \right| + \epsilon \sum_{j=1}^N \int_{t^* - \tau_j(t^*)}^{t^*} |h_j(s)| ds \\ &+ \epsilon \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{t^*} e^{-\int_s^{t^*} H(u)du} |b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)| ds \\ &+ \epsilon \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{t^*} e^{-\int_s^{t^*} H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s - \tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds \\ &\leq 2\sigma K e^{\int_0^{t_0} H(u)du} + \alpha\epsilon < \epsilon \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de  $t^*$ . Ainsi,  $|x(t)| < \epsilon$  pour tout  $t \geq 0$ , et la solution zéro de (4) est stable. Ceci montre que la solution triviale de l'équation (4) est asymptotiquement stable si la condition (II.11) est valable.

Inversement, supposons que la condition (II.11) n'est pas valide. Alors, la condition (II.9) permet de construire une suite  $t_n$  avec  $t_n \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow \infty$  et telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} H(u)du = l,$$

pour un certain  $l \in \mathbb{R}$ . Choisissons une constante positive  $J$  satisfaisant

$$-J \leq \int_0^{t_n} H(u)du \leq J,$$

pour tout  $n \geq 1$ . Pour simplifier les écritures on pose

$$\begin{aligned} W(s) &:= \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{t^*} |(h_j(s - \tau_j(s)) + B_j(s, s - \tau_j(s))) (1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)| ds \\ &+ \sum_{j=1}^N |H(s)| \left( \int_{s - \tau_j(s)}^s |h_j(u) + B_j(s, u)| du \right), \end{aligned}$$

pour tout  $s \geq 0$ . On a d'après la condition (II.10)

$$\int_0^{t_n} e^{\int_s^{t_n} H(u)du} w(s) ds \leq \alpha$$

Ceci entraîne

$$\int_0^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} w(s) ds \leq \alpha e^{\int_0^{t_n} H(u)du} \leq J$$

La suite  $\int_0^{t_n} e^{-\int_0^s H(u)du} w(s) ds$  est bornée, donc elle admet une sous suite convergente. Supposons, pour simplifier l'écriture, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} w(s) ds = \gamma$$

pour certain  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  et choisissons un entier positif  $m$  assez grand tel que

$$\int_0^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} w(s) ds < \delta_0/4K$$

pour tout  $n > m$ , avec  $\delta_0 > 0$  vérifiant  $2\delta_0 K e^J + \alpha \leq 1$ .

Selon (II.9), la constante  $K$  donnée dans la formule (II.8) est bien définie. Considérons maintenant la solution  $x(t) = x(t, t_m, \psi)$  de l'équation (II.1) avec  $\psi(t_m) = \delta_0$  et  $|\psi(t)| \leq \delta_0$  pour  $s \leq t_m$ . Nous pouvons choisir  $\psi$  de sorte que  $|x(t)| \leq 1$  pour  $t \geq t_m$  et,

$$\psi(t_m) - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{c_j(t_m)}{1 - \tau_j'(t_m)} \psi(t_m - \tau_j(t_m)) + \int_{t_m - \tau_j(t_m)}^{t_m} h_j(s) x(s) ds \right] \geq \frac{1}{2} \delta_0$$

. Si  $x(t) = (Px)(t)$ ,  $n \geq m$ , alors on en déduit, partir de (II.7), que

$$\begin{aligned} & \left| x(t_n) - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{c_j(t_n)}{1 - \tau_j'(t_n)} x(t_n - \tau_j(t_n)) + \int_{t_n - \tau_j(t_n)}^{t_n} h_j(s) x(s) ds \right] \right| \\ & \geq \frac{1}{2} \delta_0 e^{-\int_{t_m}^{t_n} H(u)du} - \int_{t_m}^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} H(u)du} W(s) ds \\ & = \frac{1}{2} \delta_0 e^{-\int_{t_m}^{t_n} H(u)du} - e^{-\int_0^{t_n} H(u)du} \int_{t_m}^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} W(s) ds \\ & = e^{-\int_{t_m}^{t_n} H(u)du} \left( \frac{1}{2} \delta_0 - e^{-\int_0^{t_m} H(u)du} \int_{t_m}^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} W(s) ds \right) \\ & \geq e^{-\int_{t_m}^{t_n} H(u)du} \left( \frac{1}{2} \delta_0 - K \int_{t_m}^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} W(s) ds \right) \\ & \geq \frac{1}{4} \delta_0 e^{-\int_{t_m}^{t_n} H(u)du} \geq \frac{1}{4} \delta_0 e^{-2J} > 0 \end{aligned} \tag{II.12}$$

D'autre part, si la solution zéro de (II.1) est asymptotiquement stable, alors  $x(t) = x(t, t_m, \psi) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Comme  $t_n - \tau_j(t_n) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$  alors compte tenu de (II.10), on aura

$$x(t_n) - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{c_j(t_n)}{1 - \tau_j'(t_n)} x(t_n - \tau_j(t_n)) + \int_{t_n - \tau_j(t_n)}^{t_n} h_j(s) x(s) ds \right] \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . Or ceci est une contradiction avec la condition (II.12). Ainsi la condition (II.11) est nécessaire pour la stabilité asymptotique de la solution zéro de (II.1). Ceci achève la démonstration. ■

**Remarque II.3.1** Il en résulte de la première partie de la preuve du Théorème (2.5) que la solution zéro de (II.1) est stable si les conditions (II.9) et (II.10) sont vérifiées. En outre, le Théorème (2.5) reste toujours valide si la condition (II.10) est satisfaite pour  $t \geq t_\delta$  pour un certain  $t_\delta \in \mathbb{R}_+$ .

Dans le cas particulier  $N = 2, \tau_1 = 0, \tau_2 = \tau, b_1 = a, b_2 = b, c_1 = 0, c_2 = c$ , nous obtenons le corollaire suivant.

**corollaire II.3.1** Supposons que  $\tau$  est différentiable, et  $\tau'(t) \neq 1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et qu'une fonction  $h_j : [m_j(t_0), \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue pour  $j = 1, 2$  et une constante  $\alpha \in (0, 1)$  existent et vérifient pour  $t \geq 0$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t H(s) ds > -\infty$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \frac{c(t)}{1 - \tau'(t)} \right| + \int_{t-\tau(t)}^t |h_2(s)| ds \\ & + \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} (| -a(s) + h_1(s) | + | -b(s) + h_2(s - \tau(s))(1 - \tau'(s)) - r(s) |) ds \\ & + \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau(s)}^s |h_2(u)| du \right) ds \\ & \leq \alpha \end{aligned} \tag{II.13}$$

où

$$H(t) = \sum_{j=1}^2 h_j(t) \quad \text{et} \quad r(t) = \frac{[c(t)H(t) + c'(t)](1 - \tau'(t)) + c(t)\tau''(t)}{(1 - \tau'^2)}$$

Alors la solution zéro de (7) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\int_0^t H(s) ds \rightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow \infty$$

**Remarque II.3.2** Quand  $h_1(s) = as$  et  $h_2(s) = h(s) - a(s)$ , corollaire (2.1) réduit à Théorème (2.4). Pour le cas spécial  $c_j(t) = 0$  nous pouvons obtenir

**corollaire II.3.2** Supposons que  $\tau_j$  est différentiable, et il existe une fonction  $h_j : [m_j(t_0), \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue pour  $j = 1, 2, \dots, N$  et une constante  $\alpha \in (0, 1)$  existent et vérifient pour  $t \geq 0$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t H(s) ds > -\infty$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_j(t)}^t |h_j(s)| ds + \sum_{j=1}^N \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} | -b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \tau'_j(s)) | ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds \\ & \leq \alpha \end{aligned} \tag{II.14}$$



où

$$H(t) = \sum_{j=1}^N h_j(t)$$

Alors la solution zéro de (6) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\int_0^t H(s)ds \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty$$

**Remarque II.3.3** Quand  $h_j(s) = b_j(g_j(s))$  Pour  $j = 1, 2, \dots, N$ , corollaire (II.3.2) réduit au Théorème .

## II.4 Application

un exemple pour illustrer les résultats du Théorème (2.5).

**Exemple II.4.1** Considérez l'équation de différentielle de retard neutre linéaire suivante

$$x'(t) = -b_1(t)x(t - \tau_1(t)) - b_2(t)x(t - \tau_2(t)) \quad (\text{II.15})$$

où

$$\begin{aligned} \tau_1(t) &= 0.273t \quad \text{et} \quad \tau_2(t) = 0.289t \\ b_1(t) &= \frac{1}{(1.454t + 2)} \quad \text{et} \quad b_2(t) = \frac{1}{(1.422t + 2)} \end{aligned}$$

Alors la solution zéro de (II.15) est asymptotiquement stable.

**Preuve.** Choisissons  $h_1(t) = h_2(t) = 0.62/(t + 1)$  dans le Corollaire (2.2), on a  $H(t) = 1.24/(t + 1)$  et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_{t-\tau_j(t)}^t |h_j(s)| ds &= \int_{0.727t}^t \frac{0.62}{s+1} ds + \int_{0.711t}^t \frac{0.62}{s+1} ds \\ &= 0.62 \ln \frac{t+1}{0.727t+1} + 0.62 \ln \frac{t+1}{0.711t+1} \\ &< 0.4092 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds &< \int_0^t e^{-\int_s^t (1.24/(u+1))du} \frac{1.24}{1+s} \times 0.4092 ds \\ &< 0.4092 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du} \left| -b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s)) (1 - \tau_j'(s)) - r_j(s) \right| ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\int_s^t (1.24/(u+1))du} \frac{1 - 1.24 \times 0.727}{0.727s + 1} ds + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\int_s^t (1.24/(u+1))du} \frac{1 - 1.24 \times 0.711}{0.711s + 1} ds \\ &< \frac{1}{2} \left( \frac{1 - 1.24 \times 0.727}{1.24 \times 0.727} + \frac{1 - 1.24 \times 0.711}{1.24 \times 0.711} \right) \int_0^t e^{-\int_s^t (1.24/(u+1))du} \frac{1.24}{s+1} ds \\ &< 0.1218 \end{aligned}$$

Il est facile de voir que toutes les conditios de Corollaire (2.2) tiennent pour  $\alpha = 0.4092 + 0.4092 + 0.1218 = 0.9402 < 1$ . Ainsi, le Corollaire (2.2) implique que la solution zéro (II.15) est asymptotiquement stable. .

Pourtant , le Théorème (2.2) ne peut pas être utilisé pour vérifier que la solution zéro de (II.15) est asymptotiquement stable. En fait,  $b_1(g_1(t)) = 1/(2t + 2)$ ,  $b_2(g_2(t)) = 1/(2t + 2)$ , and  $Q(t) = 1/(1 + t)$ . As  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_{t-\tau_j(t)}^t |b_j(g_j(s))| ds &= \int_{0.727t}^t \frac{1}{2s+2} ds + \int_{0.711t}^t \frac{1}{2s+2} ds \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{0.727t+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{0.711t+1} \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \ln(0.727 \times 0.711), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t Q(u)du} |Q(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |b_j(g_j(u))| du \right) ds \\ &= \int_0^t e^{-\int_s^t (1/(u+1))du} \frac{1}{1+s} \left( \int_{0.727s}^s \frac{1}{2u+2} du + \int_{0.711s}^s \frac{1}{2u+2} du \right) ds \\ &= \frac{1}{2(t+1)} \int_0^t [2 \ln(s+1) - \ln(0.727s+1) - \ln(0.711s+1)] ds \\ &= \ln(t+1) - \frac{t+1/0.727}{2(t+1)} \ln(0.727t+1) - \frac{t+1/0.711}{2(t+1)} \ln(0.711t+1) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \ln(0.727 \times 0.711), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t Q(u)du} |b_j(s)| |\tau_j'(s)| ds \\ &= \frac{1}{2(t+1)} \left[ 0.273 \int_0^t \frac{s+1}{0.727s+1} ds + 0.289 \int_0^t \frac{s+1}{0.711s+1} ds \right] \\ &= \frac{1}{2(t+1)} \left[ \frac{0.273t}{0.727} - \left( \frac{0.273}{0.727} \right)^2 \ln(0.727t+1) + \frac{0.289t}{0.711} - \left( \frac{0.289}{0.711} \right)^2 \ln(0.711t+1) \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{0.273}{0.727} + \frac{0.289}{0.711} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \limsup_{t \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{t-\tau_j(t)}^t |b_j(g_j(s))| ds + \sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t Q(u)du} |b_j(s)| |\tau_j'(s)| ds \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t Q(u)du} |Q(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |b_j(g_j(u))| du \right) ds \right\} \\ &= -\ln(0.727 \times 0.711) + \frac{1}{2} \left( \frac{0.273}{0.727} + \frac{0.289}{0.711} \right) \\ &\simeq 1.0509 \end{aligned}$$

En plus, le coté à gauche de l'inégalité suivante augmente dans  $t > 0$ , là existe alors un  $t_0 > 0$  tel cela pour  $t > t_0$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \int_{t-\tau_j(t)}^t |b_j(g_j(s))| ds + \sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t Q(u)du} |b_j(s)| |\tau_j'(s)| ds \\ & + \sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t Q(u)du} |Q(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |b_j(g_j(u))| du \right) ds > 1.05. \end{aligned}$$

Cela implique que la condition ( II.10 ) ne tient pas. Ainsi, Théorème (2.2) ne peut pas être appliqué Eq. (II.15) ■

**Remarque II.4.1** Exemple (2.1) est valid por certains des relations d'inégalité bien choisies sur  $\tau_j, j = 1, 2$ . Par exemple, Si nous laissons  $0.251t \leq \tau_1(t) \leq 0.294t, \tau_2(t) = 0.289t, b_1(t) = 1/(1.454t + 2)$  et  $b_2(t) = 1/(1.422t + 2)$ , alors nous obtenons des résultats de stabilité asympototic de la solution zéro (3.1) mais le Théorème (2.2) ne peut pas être appliqué pour de telles valeurs.

**Exemple II.4.2** Considérez l'équation de différentielle de retard neutre linéaire suivante

$$x'(t) = - \sum_{j=1}^2 b_j(t)x(t - \tau_j(t)) + \sum_{j=1}^2 c_j(t)x'(t - \tau_j(t)) \quad (\text{II.16})$$

où  $\tau_1(t) = 0.221t, \tau_2(t) = 0.217t, b_1(t) = 1/(1.558t + 2), b_2(t) = 1/(1.566t + 2), c_1(t) = 0.031, c_2(t) = 0.025$ . Alors la solution zéro de (II.16) est asymptotiquement stable.

**Preuve.** Choissions  $h_1(t) = h_2(t) = 0.63/(t + 1)$  dans le Théorème (2.5), on a  $H(t) = 1.26/(t + 1)$  et

$$\sum_{j=1}^2 \left| \frac{c_j(t)}{1 - \tau_j'(t)} \right| = \left| \frac{0.031}{1 - 0.221} \right| + \left| \frac{0.025}{1 - 0.217} \right| < 0.072,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_{t-\tau_j(t)}^t |h_j(s)| ds &= \int_{0.779t}^t \frac{0.63}{s+1} ds + \int_{0.783t}^t \frac{0.63}{s+1} ds \\ &= 0.63 \ln \frac{t+1}{0.779t+1} + 0.63 \ln \frac{t+1}{0.783t+1} \\ &< 0.312 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds < \int_0^t e^{-\int_s^t (1.26/(u+1))du} \frac{1.26}{s+1} \times 0.312 ds < 0.312,$$

et

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du} |-b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s)) (1 - \tau_j'(s)) - r_j(s)| ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t e^{-\int_s^t (1.26/(u+1)) du} \left| \frac{1}{2} \frac{1.26 \times 0.779 - 1}{0.779s + 1} - \frac{0.031 \times 1.26}{0.779(s+1)} \right| ds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t (1.26/(u+1)) du} \left| \frac{1}{2} \frac{1.26 \times 0.783 - 1}{0.783s + 1} - \frac{0.025 \times 1.26}{0.783(s+1)} \right| ds \\
&< \left( \frac{1}{2} \frac{1 - 1.26 \times 0.779}{1.26 \times 0.779} + \frac{0.031}{0.779} + \frac{1}{2} \frac{1 - 1.26 \times 0.783}{1.26 \times 0.783} + \frac{0.025}{0.783} \right) \int_0^t e^{-\int_s^t (1.26/(u+1)) du} \frac{1.26}{s+1} ds \\
&< 0.088
\end{aligned}$$

■

Il est facile de voir que toutes les conditions de Théorème (2.5) tiennent pour  $\alpha = 0.072 + 0.312 + 0.312 + 0.088 = 0.784 < 1$ . Ainsi, Le Théorème (2.5) implique que la solution zéro ([II.16](#)) est asymptotiquement stable.

# Existence des solutions périodiques positives d'équation à retard

## III.1 Introduction à l'équation

Le modèle qui a été considéré est un système d'équations différentielles à retards du type neutre motivé par une application biologique. On considère le problème à retard

$$\left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' = a(t)x(t) - \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr \quad (\text{III.1})$$

$$\left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' = -a(t)x(t) + \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr \quad (\text{III.2})$$

Où  $\lambda$  est un paramètre positif;  $c$  est un constant avec  $|c| < 1$ ;  $a(t) \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$ ,  $b(t) \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$ ,  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions continues  $\omega$ -périodiques  $f(x) \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$ ;  $K(r) \in C((-\infty, 0], [0, \infty))$  et  $\int_{-\infty}^0 K(r)dr = 1$ . Avant d'entamer le cas général, nous rappelons d'abord que Wu dans [22] a proposé une méthode pour établir un théorème d'existence d'une solution périodique pour l'équation

$$(x(t) - cx(t - \delta))'' + a(t)x(t) = \lambda b(t)f(x(t - \tau(t))) \quad (\text{III.3})$$

où  $\lambda > 0$ ,  $\delta$  et  $c$  sont des constants avec  $|c| \neq 1$ ,  $a(t), b(t) \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$ ,  $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$  et  $a(t), b(t), \tau(t)$  sont  $\omega$  des fonctions continues périodiques. Dans ce chapitre, Nous allons donner un résultat d'existence de la solution du problème périodique pour cela nous utilisons alors le théorème de Krasnoselskii qui est très robuste et efficace pour montrer l'existence d'une solution périodique de (III.1) et (III.2). Un choix convenable des hypothèses permet de valider les conditions de ce dernier théorème de sorte qu'une solution périodique du problème étudié est conclue.

## III.2 Résultats Préliminaires

L'objet de cette partie est de présenter les résultats intéressants pour l'existence de solutions périodiques. En effet soit

$$X = \{x(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x(t + \omega) = x(t), t \in \mathbb{R}\}$$

avec la norme

$$\|x\| = \sup_{t \in [0, \omega]} |x(t)|.$$

Clairement,  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace Banach. On définit les ensembles

$$\begin{aligned} C_\omega^+ &= \{x(t) \in C(\mathbb{R}, (0, +\infty)) : x(t+\omega) = x(t)\}; \\ C_\omega^- &= \{x(t) \in C(\mathbb{R}, (-\infty, 0)) : x(t+\omega) = x(t)\}. \end{aligned}$$

Et dénotons par

$$\begin{aligned} M &= \max\{a(t) : t \in [0, \omega]\}, \quad m = \min\{a(t) : t \in [0, \omega]\}, \\ \beta &= \sqrt{M}, \\ A_1 &= \frac{\exp(-\frac{\beta\omega}{2})}{\beta(1 - \exp(-\beta\omega))}, \quad B_1 = \frac{1 + \exp(-\beta\omega)}{2\beta(1 - \exp(-\beta\omega))}, \\ A_2 &= \frac{\cos \frac{\beta\omega}{2}}{2\beta \sin \frac{\beta\omega}{2}}, \quad B_2 = \frac{1}{2\beta \sin \frac{\beta\omega}{2}} \end{aligned}$$

on pose

$$F(x) = b(t)f(x(t+r)) - ca(t)x(t+r)$$

Pour obtenir notre résultats nous donnons d'abord quelques lemmes.

**Lemme III.2.1** *L'équation*

$$y''(t) - My(t) = h(t), h \in C_\omega^- \quad (\text{III.4})$$

*admet une solution continue  $\omega$ -périodique.*

$$y(t) = \int_t^{t+\omega} G_1(t, s)(-h(s))ds \quad (\text{III.5})$$

où

$$G_1(t, s) = \frac{\exp(-\beta(s-t)) + \exp(\beta(s-t-\omega))}{2\beta(1 - \exp(-\beta\omega))}, \quad s \in [t, t+\omega] \quad (\text{III.6})$$

**Preuve.** D'abord il est facile de voir que l'équation homogène associée à (III.4) admet une solution donnée par

$$y(t) = c_1 \exp(\beta t) + c_2 \exp(-\beta t)$$

En appliquant la méthode de la variation de paramètres on trouve que

$$c_1'(t) = \frac{h(t) \exp(-\beta t)}{2\beta}, c_2'(t) = \frac{h(t) \exp(\beta t)}{-2\beta}$$

le fait que  $y(t)$  et  $y'(t)$  sont des fonctions préiodiques on a donc

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int_t^{t+\omega} \frac{h(s) \exp(-\beta(s-\omega))}{2\beta(1 - \exp(\beta\omega))} ds, \\ c_2(t) &= \int_t^{t+\omega} \frac{h(s) \exp(\beta(s-\omega))}{2\beta(\exp(-\beta\omega) - 1)} ds. \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Donc

$$y(t) = \int_t^{t+\omega} G_1(t, s)(-h(s))ds,$$

où  $G_1(t, s)$  est donnée par (III.6). ■

**Lemme III.2.2**  $\int_t^{t+\omega} G_1(t, s)ds = \frac{1}{M}$  et  $0 < A_1 \leq G_1(t, s) \leq B_1$  pour tout  $t \in [0, \omega]$  et  $s \in [t, t+\omega]$ .

**Preuve.** Selon la définition de  $G_1(t, s)$ , il est facile de voir que  $\frac{\partial G_1(t, s)}{\partial s} = 0$  si seulement si  $s = t + \frac{\omega}{2}$ . Alors le fait que

$$\begin{aligned} G_1\left(t, t + \frac{\omega}{2}\right) &= \frac{\exp\left(\frac{-\beta\omega}{2}\right)}{\beta(1 - \exp(-\beta\omega))} = A_1 \\ G_1(t, t) &= G_1(t, t + \omega) = \frac{1 + \exp(-\beta\omega)}{2\beta(1 - \exp(-\beta\omega))} = B_1, \end{aligned}$$

On a  $0 < A_1 \leq G_1 \leq B_1$ . En plus ,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\omega} G_1(t, s) ds &= \int_t^{t+\omega} \frac{\exp(-\beta(s-t)) + \exp(\beta(s-t-\omega))}{2\beta(1 - \exp(-\beta\omega))} ds \\ &= \frac{1}{2\beta(1 - \exp(-\beta\omega))} \left[ -\frac{1}{\beta} \exp(-\beta(s-t)) + \frac{1}{\beta} \exp(\beta(s-t-\omega)) \right]_t^{t+\omega} \\ &= \frac{1}{2\beta(1 - \exp(-\beta\omega))} \left[ -\frac{1}{\beta} (\exp(-\beta\omega) - 1) + \frac{1}{\beta} (1 - \exp(-\beta\omega)) \right] \\ &= \frac{1}{2\beta(1 - \exp(-\beta\omega))} \frac{2}{\beta} (1 - \exp(-\beta\omega)) \\ &= \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

■

Maintenant nous étudierons la généralistaion de ( III.4)

$$y''(t) - a(t)y(t) = h(t), h \in C_\omega^- \quad (\text{III.8})$$

Nous définissons les applications  $T_1, B_1 : X \rightarrow X$

$$\begin{aligned} (T_1 h)(t) &= \int_t^{t+\omega} G_1(t, s)(-h(s)) ds, \\ (B_1 y)(t) &= [-M + a(t)]y(t). \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Clairement  $T_1, B_1$  sont complètement continues,  $(T_1 h)(t) > 0$  pour  $h(t) < 0$  et  $\|B_1\| \leq M - m$ . par le Lemme (III.2.1), la solution (III.8) peut être écrite sous la forme

$$y(t) = (T_1 h)(t) + (T_1 B_1 y)(t) \quad (\text{III.10})$$

Depuis

$$\|T_1 B_1\| \leq \|T_1\| \|B_1\| \leq \frac{1}{M}(M - m) = 1 - \frac{m}{M} < 1, \quad (\text{III.11})$$

alors

$$y(t) = (I - T_1 B_1)^{-1} (T_1 h)(t) \quad (\text{III.12})$$

Soit l'application  $P_1 : X \rightarrow X$

$$(P_1 h)(t) = (I - T_1 B_1)^{-1} (T_1 h)(t) \quad (\text{III.13})$$

**Remarque III.2.1** *il est évident que  $y(t) = (P_1 h)(t)$  est l'unique solution continue  $\omega$ -périodique de (III.8) pour toute  $h \in C_\omega^-$ .*

**Lemme III.2.3**  *$P_1$  est complètement continue et satisfaisant*

$$(T_1 h)(t) \leq (P_1 h)(t) \leq \frac{M}{m} \|T_1 h\|, h \in C_\omega^- \quad (\text{III.14})$$



**Preuve.** En appliquant la formule Neumann pour  $P_1$  on trouve que

$$\begin{aligned} P_1 &= (I - T_1 B_1)^{-1} T_1 \\ &= (I + T_1 B_1 + (T_1 B_1)^2 + \cdots + (T_1 B_1)^n + \cdots) T_1 \\ &= T_1 + T_1 B_1 T_1 + (T_1 B_1)^2 T_1 + \cdots + (T_1 B_1)^n T_1 + \cdots \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Comme  $T_1$  et  $B_1$  sont complètement continues alors  $P_1$  est aussi. D'après (III.15),  $\|T_1 B_1\| \leq 1 - \frac{m}{M}$ , et  $(T_1 h)(t) > 0$  on en déduit que, pour  $h(t) < 0$

$$(T_1 h)(t) \leq (P_1 h)(t) \leq \frac{M}{m} \|(T_1 h)(t)\|, h \in C_\omega^-$$

■

En utilisant un raisonnement analogue on montre que

**Lemme III.2.4** *L'équation*

$$y''(t) + M y(t) = h(t), h \in C_\omega^+ \quad (\text{III.16})$$

*admet une solution unique continue  $\omega$ -périodique donnée par*

$$y(t) = \int_t^{t+\omega} G_2(t, s) h(s) ds \quad (\text{III.17})$$

où

$$G_2(t, s) = \frac{\cos \beta \left( \frac{\omega}{2} + t - s \right)}{2\beta \sin \frac{\beta\omega}{2}}, s \in [t, t + \omega] \quad (\text{III.18})$$

**Preuve.** D'abord il est facile de voir que l'équation homogène associée (III.16) admet une solution  $y(t) = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t$ . En appliquant la méthode pour la variation de paramètres, nous arrivons

$$c_1'(t) = \frac{-\sin \beta t}{2\beta} h(t), \quad c_2'(t) = \frac{\cos \beta t}{2\beta} h(t)$$

En remarquant que  $y(t), y'(t)$  sont des fonctions périodique ce qui conduit que

$$c_1(t) = \int_t^{t+\omega} \frac{h(s) \cos \left( s - \frac{\omega}{2} \right)}{2\beta \sin \frac{\beta\omega}{2}} ds, \quad c_2(t) = \int_t^{t+\omega} \frac{h(s) \sin \left( s - \frac{\omega}{2} \right)}{2\beta \sin \frac{\beta\omega}{2}} ds \quad (\text{III.19})$$

alors

$$y(t) = c_1(t) \cos \beta t + c_2(t) \sin \beta t = \int_t^{t+\omega} G_2(t, s) h(s) ds$$

où  $G_2(t, s)$  est donnée par (III.18) ■

**Lemme III.2.5** *On a,  $\int_t^{t+\omega} G_2(t, s) ds = \frac{1}{M}$ , En outre, si  $\max\{a(t) : t \in [0, \omega]\} < \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$ , alors  $0 < A_2 \leq G_2(t, s) \leq B_2$  pour tout  $t \in [0, \omega]$  et  $s \in [t, t + \omega]$*

**Preuve.** Par définition de  $G_2(t, s)$ , on a

$$\int_t^{t+\omega} G_2(t, s) ds = \int_t^{t+\omega} \frac{\cos \beta \left( \frac{\omega}{2} + t - s \right)}{2\beta \sin \frac{\beta\omega}{2}} ds = \frac{-\sin \beta \left( \frac{\omega}{2} + t - s \right)}{2\beta^2 \sin \frac{\beta\omega}{2}} \Big|_t^{t+\omega} = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{1}{2\beta^2} = \frac{1}{M}$$

D'autre part, il est facile de voir que  $\frac{\partial G_2(t,s)}{\partial s} = 0$  si seulement si  $s = t + \frac{\omega}{2}$ . Alors le fait cela

$$G_2(t, t) = G_2(t, t + \omega) = \frac{\cos \frac{\beta\omega}{2}}{2\beta \sin \frac{\beta\omega}{2}} = A_2$$

$$G_2\left(t, t + \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2\beta \sin \frac{\beta\omega}{2}} = B_2$$

Comme  $\max\{a(t) : t \in [0, \omega]\} < \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$ , On remarque que  $0 < \frac{\beta\omega}{2} < \frac{\pi}{2}$ , ensuite  $0 < 2\beta \sin \frac{\beta\omega}{2}$  et  $0 < \cos \frac{\beta\omega}{2} < 1$ , ce qui implique que  $0 < A_2 \leq G_2(t, s) \leq B_2$  pour tout  $t \in [0, \omega]$  et  $s \in [t, t + \omega]$ . ■

Maintenant nous étudions l'équation suivante conforme (III.16),

$$y''(t) + a(t)y(t) = h(t), \quad h \in C_\omega^+ \quad (\text{III.20})$$

Définissent  $T_2, B_2 : X \rightarrow X$  par

$$(T_2h)(t) = \int_t^{t+\omega} G_2(t, s)h(s)ds, \quad (B_2y)(t) = [M - a(t)]y(t). \quad (\text{III.21})$$

Clairement  $T_2, B_2$  sont complètement continus,  $(T_2h)(t) > 0$  pour  $h(t) > 0$  et  $\|B_2\| \leq M - m$ . par le lemme III.2.4, la solution de (III.20) peut être écrite dans la forme

$$y(t) = (T_2h)(t) + (T_2B_2y)(t) \quad (\text{III.22})$$

depuis  $\|T_2B_2\| \leq \|T_2\| \|B_2\| \leq \frac{1}{M}(M - m) = 1 - \frac{m}{M} < 1$  on a

$$y(t) = (I - T_2B_2)^{-1}(T_2h)(t). \quad (\text{III.23})$$

On définit l'application  $P_2 : X \rightarrow X$  par

$$(P_2h)(t) = (I - T_2B_2)^{-1}(T_2h)(t) \quad (\text{III.24})$$

Clairement, Si  $\max_{0 \leq t \leq \omega} \{a(t)\} < \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$ .  $y(t) = (P_2h)(t)$  est une solution positive  $\omega$ -périodique de (III.20). pour toute  $h \in C_\omega^+$

**Lemme III.2.6**  $P_2$  est complètement continue. En outre, si  $\max\{a(t) : t \in [0, \omega]\} < \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$ , alors

$$(T_2h)(t) \leq (P_2h)(t) \leq \frac{M}{m} \|(T_2h)(t)\|, \text{ pour toute } h \in C_\omega^+. \quad (\text{III.25})$$

### III.3 Transformation et inversion de l'équation

Rappelons l'équation (III.1), et réécrivons cette équation sous la forme équivalente,

$$\begin{aligned} & \left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' \\ &= a(t) \left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right) \\ &+ ca(t) \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr - \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr \\ &= a(t) \left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right) \\ &+ \int_{-\infty}^0 K(r)[- \lambda b(t)f(x(t+r)) + ca(t)x(t+r)]dr. \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

En prenant  $y(t) = x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr$ , alors on peut transformer (III.26) sous une autre forme en écrivant, formellement

$$y''(t) - a(t)y(t) = \int_{-\infty}^0 K(r)[- \lambda b(t)f(x(t+r)) + ca(t)x(t+r)]dr. \quad (\text{III.27})$$

On définit les applications  $Q_1, S : X \rightarrow X$  par

$$\begin{aligned} (Q_1x)(t) &= P_1 \left( \int_{-\infty}^0 K(r)[- \lambda b(t)f(x(t+r)) + ca(t)x(t+r)]dr \right) \\ (Sx)(t) &= c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

**Remarque III.3.1** *A partiès de (III.27) et (III.8) il est facile de voir que l'existence de solutions périodiques de (III.1) est équivalente à l'existence de solutions de l'équation opérationnelle de la forme*

$$Q_1x + Sx = x, \quad x \in X \quad (\text{III.29})$$

Rappelons l'équation (III.2). Il peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} &\left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' \\ &= -a(t) \left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right) \\ &\quad + \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr - ca(t) \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \\ &= -a(t) \left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right) \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 K(r)[\lambda b(t)f(x(t+r)) - ca(t)x(t+r)]dr \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

En prenant  $y(t) = x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr$ , alors (III.30) est transformée comme suite

$$y''(t) + a(t)y(t) = \int_{-\infty}^0 K(r)[\lambda b(t)f(x(t+r)) - ca(t)x(t+r)]dr \quad (\text{III.31})$$

Définissons des opérateurs  $Q_2, S : X \rightarrow X$  par

$$\begin{aligned} (Q_2x)(t) &= P_2 \left( \int_{-\infty}^0 K(r)[\lambda b(t)f(x(t+r)) - ca(t)x(t+r)]dr \right) \\ (Sx)(t) &= c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

**Remarque III.3.2** *On observe que a partiès de (III.31) et (III.20), l'existence de solution périodique de (III.2) est équivalente à l'existence d'une solution de l'équation opérationnelle qui peut se mettre sous la forme*

$$Q_2x + Sx = x, \quad x \in X \quad (\text{III.33})$$

**Lemme III.3.1**  *$Q_i (i = 1, 2)$  sont des applications complètement continues dans  $X$ .*

**Preuve.** Le fait que  $P_i (i = 1, 2)$  sont des applications complètement continues dans  $X$ . ■

**Lemme III.3.2** Si  $|c| < 1$ ,  $S$  est contractante.

**Preuve.** Pour toute  $x_1, x_2 \in X$ , on a  $\int_{-\infty}^0 K(r)dr = 1$  On conclut que

$$\begin{aligned} |(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| &= \left| c \int_{-\infty}^0 K(r)x_1(t+r)dr - c \int_{-\infty}^0 K(r)x_2(t+r)dr \right| \\ &= \left| c \int_{-\infty}^0 K(r) [x_1(t+r) - x_2(t+r)] dr \right| \\ &\leq |c| \|x_1 - x_2\| \left| \int_{-\infty}^0 K(r)dr \right| \\ &= |c| \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

qui l'implique  $\|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)\| \leq |c| \|x_1 - x_2\|$ . Par conséquent,  $S$  est une application contractante si  $|c| < 1$ . ■

## III.4 Existence de solution périodique positive

Dans cette partie, nous considérons d'abord le cas particulier où  $\lambda = 1$ , ensuite nous considérons le cas générale.

### III.4.1 Cas : $\lambda = 1$ .

**Théorème III.4.1** si  $c \in (0, 1)$  et

$$(1 - c)c \leq F(x) \leq 1 - c \quad \text{pour tout } t \in [0, \omega] \quad \text{et } x \in \left[ \frac{c}{M}, \frac{1}{m} \right], \quad (\text{III.34})$$

Alors (III.1) admet au moins une solution positive  $\omega$ -périodique  $x(t)$ , avec  $0 < \frac{c}{M} \leq x(t) \leq \frac{1}{m}$ .

**Preuve.** On a

$$K_1 = \{x \in X : x \in [\frac{c}{M}, \frac{1}{m}]\}$$

c'est évident que  $K_1$  est un ensemble convexe fermé borné dans  $X$ . De plus, pour tout  $x \in K_1$ , il est facile de vérifier que  $Q_1, S$  qui défini comme (III.28) sont continus et

$$(Q_1x)(t + \omega) = (Q_1x)(t), (Sx)(t + \omega) = (Sx)(t)$$

C'est,  $Q_1(K_1) \subset X, S(K_1) \subset X$ . Ensuite, nous affirmons que  $Q_1x + Sy \in K_1$  pour tout  $x, y \in K_1$ . Depuis  $F(x) \geq (1 - c)c > 0$  ce qui implique

$$\int_{-\infty}^0 K(r)[-b(t)f(x(t+r)) + ca(t)x(t+r)]dr < 0$$

et pour tout  $x, y \in K_1$ , par Lemmes III.2.2 et III.2.3, on a

$$Q_1x(t) + Sy(t) \leq \frac{1}{m} \quad (\text{III.35})$$

D'autre part, par Lemmes III.2.2 et III.2.3

$$Q_1x(t) + Sy(t) \geq \frac{c}{M} \quad (\text{III.36})$$

Combinant (III.35) et (III.36), on a  $Q_1x + Sy \in K_1$  pour tout  $x, y \in K_1$ .

De plus, de Lemmes III.3.1 et III.3.2,  $Q_1$  est complètement continue et  $S$  est un opérateur contractuel en  $X$ . D'où par Théorème III.4.1,  $Q_1 + S$  a un point fixe  $x \in K_1$ , c'est-à-dire, (III.1) admet un solution positif  $\omega$ -périodique  $x(t)$  avec

$$0 < \frac{c}{M} \leq x(t) \leq \frac{1}{m}.$$

■

**Théorème III.4.2** *Si  $c = 0$  et  $0 < F(x) \leq 1$ , alors (III.1) admet au moins une solution positive  $\omega$ -périodique avec*

$$0 < x(t) \leq \frac{1}{m}$$

**Preuve.** Dans ce cas dégénéré,  $S$  est l'opérateur zéro. On a

$$K_1 = \{x \in X : x \in [0, \frac{1}{m}]\}$$

comme dans le Théorème III.4.2. Suivant les étapes de la preuve du Théorème III.4.2, nous obtenons facilement que l'Eq. (III.1) admet au moins une solution positive  $\omega$ -périodique avec  $0 \leq x(t) \leq \frac{1}{m}$ . Depuis  $F(x) > 0$ , il est facile de voir de (III.29) et (III.36) Cette  $x(t) > 0$ , i.e. (III.1) admet au moins un solution positif  $\omega$ -périodique  $x(t)$  avec  $0 < x(t) \leq \frac{1}{m}$ . ■

**Théorème III.4.3** *Supposons que  $c \in (-\frac{m}{M}, 0)$  et*

$$-cM < F(x) \leq m, \text{ pour tout } t \in [0, \omega] \text{ et } x \in [0, 1], \quad (\text{III.37})$$

*ensuite (III.1) admet au moins un positif solution  $\omega$ -périodique  $x(t)$  avec  $0 < x(t) \leq 1$*

**Preuve.** On a

$$K_2 = \{x \in X : x \in [0, 1]\}.$$

Évidemment,  $K_2$  est un ensemble convexe fermé borné et  $Q_1(K_2) \subset X$ ,  $S(K_2) \subset X$ . Lemmes III.3.1 et III.3.2 tient toujours, et nous avons seulement besoin de prouver  $Q_1x + Sy \in K_2$ ,  $\forall x, y \in K_2$ . En fait, pour tout  $x, y \in K_2$ , on a de Lemmes III.2.2 et III.2.3 que :

$$Q_1x(t) + Sy(t) \leq 1 \quad (\text{III.38})$$

D'autre part, par Lemmes III.2.2 et III.2.3

$$Q_1x(t) + Sy(t) \geq 0 \quad (\text{III.39})$$

Donc de (III.38) et (III.39), on a  $Q_1x + Sy \in K_2$  pour tout  $x, y \in K_2$ . Figure  $F(x) > -cM$ , de (III.29) et (III.39), c'est clair que  $x(t) > 0$ , Par conséquent  $0 < x(t) \leq 1$ , c'est-à-dire l'Eq. (III.1) admet une solution positive  $\omega$ -périodique  $x$  avec  $0 < x(t) \leq 1$ . ■

Considérant l'opérateur Eq. (III.33) de la même manière que ci-dessus, nous pouvons obtenir les résultats suivants :

**Théorème III.4.4** Si  $\max\{a(t) : t \in [0, \omega]\} < (\frac{\pi}{\omega})^2, c \in (0, 1)$ , et

$$(1 - c)c \leq F(x) \leq 1 - c \text{ pour tout } t \in [0, \omega] \text{ et } x \in \left[\frac{c}{M}, \frac{1}{m}\right] \quad (\text{III.40})$$

ensuite (III.2) admet au moins une solution positif  $\omega$ -périodique  $x(t)$  avec  $0 < \frac{c}{M} \leq x(t) \leq \frac{1}{m}$ .

**Théorème III.4.5** Si  $\max\{a(t) : t \in [0, \omega]\} < (\frac{\pi}{\omega})^2, c = 0$ , et  $0 < F(x) \leq 1$ , ensuite (III.2) admet au moins une solution positif  $\omega$ -périodique  $x(t)$  avec  $0 < x(t) \leq \frac{1}{m}$ .

**Théorème III.4.6** Si  $\max\{a(t) : t \in [0, \omega]\} < (\frac{\pi}{\omega})^2, c \in (-\frac{m}{M}, 0)$ , et

$$-cM < F(x) \leq m, \forall t \in [0, \omega], x \in [0, 1] \quad (\text{III.41})$$

Alors (III.2) admet au moins une solution positive  $\omega$ -périodique  $x(t)$  avec  $0 < x(t) \leq 1$ .

### III.4.2 Cas 2 : $\lambda > 0$

On note

$$\begin{aligned} L(r) &= \max_{0 \leq x \leq r} f(x), \quad l(r) = \min_{0 \leq x \leq r} f(x), \quad b_0 = \min_{t \in [0, \omega]} b(t). \\ f_0 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \text{ et } f_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ i_0 &= \text{nombre de zéros dans l'ensemble } \{f_0, f_\infty\}, \\ i_\infty &= \text{nombre d'infinis dans l'ensemble } \{f_0, f_\infty\}. \end{aligned}$$

D'après la définition de  $i_0, i_\infty$ , il est clair que  $i_0, i_\infty = 1, 2$ . Nous allons maintenant montrer que (III.1) et (III.2) ont  $i_0$  ou  $i_\infty$  solution positive  $\omega$ -périodique pour suffisamment grand ou petit  $\lambda$ , respectivement.

**Théorème III.4.7** Supposons que  $\lambda b(t)f(x(t+r)) > ca(t)x(t+r)$ , avec  $c \in [0, 1)$ .

si  $f_0 = 0$ , puis (III.1) admet une solution positif  $\omega$ -périodique pour

$$\lambda \geq \frac{cMr_1\omega}{l(r_1) \int_0^\omega b(s)ds}.$$

**Preuve.** si  $f_0 = 0$ , on peut choisir  $0 < r_1 < 1$  pour que  $f(x) \leq \varepsilon x$  pour  $0 \leq x \leq r_1$ , où  $\varepsilon > 0$  satisfait

$$\lambda \frac{M}{m} B_1 \varepsilon \int_0^\omega b(s)ds + c \leq 1$$

. Soit  $K_1 = \{x \in X : 0 \leq x(t) \leq r_1\}$ , il est facile de voir que  $K_1$  est un ensemble borné fermé convexe de  $X$ , et  $Q_1(K_1) \subset X, S(K_1) \subset X$ . Dans la suite, nous montrerons que  $Q_1x + Sy \in K_1, \forall x, y \in K_1$ . pour tout  $x, y \in K_1$ ,

$$(Q_1x)(t) + (Sy)(t) \leq r_1. \quad (\text{III.42})$$

D'autre part, par  $f(x) \geq l(r_1)$  pour  $x \in K_1$ , on a pour tout  $x, y \in K_1$  que

$$(Q_1x)(t) + (Sy)(t) \geq 0 \quad (\text{III.43})$$

Si  $\lambda \geq \frac{cMr_1\omega}{l(r_1) \int_0^\omega b(s)ds}$ . Puis à partir de (III.42) et (III.43), on a  $Q_1x + Sy \in K_1$  pour tout  $x, y \in K_1$ . De Lemmes III.3.1 et III.3.2,  $Q_1$  est un opérateur complètement continu,  $S$  est un opérateur contractuel. Par conséquent,  $Q_1 + S$  admet un point fixe  $x \in K_1$  par Théorème III.4.1. Figure  $\lambda b(t)f(x(t+r)) > ca(t)x(t+r)$ , de (III.29) et (III.13), on peut avoir  $0 < x(t) \leq r_1$ , ce qui signifie  $x(t)$  est une solution positif  $\omega$ -périodique de (III.1) ■

**Théorème III.4.8** *Supposons que  $\lambda b(t)f(x(t+r)) > ca(t)x(t+r)$  détient,  $c \in [0, 1)$ . si  $f_\infty = 0$ , alors (III.1) admet un solution positif  $\omega$ -périodique pour*

$$\lambda \geq \frac{(1-c)H_1 + cA_1Mr_2\omega}{A_1l(r_2) \int_0^\omega b(s)ds}$$

**Preuve.** si  $f_\infty = 0$ , il existe  $H_1 > 1$  tel que  $f(x) \leq \varepsilon x$  pour  $x \geq H_1$ .

Soit  $r_2 = \max\{2, \frac{B_1H_1}{A_1}\}$ , et  $\varepsilon > 0$  satisfait

$$\lambda r_2 \varepsilon \int_0^\omega b(s)ds - cmH_1\omega \geq \frac{(1-c)r_2m}{B_1M}.$$

on a  $K_2 = \{x \in X : H_1 \leq x(t) \leq r_2\}$ , il est facile de voir que  $K_2$  est un ensemble fermé borné convexe de  $X$ . Dans la suite, nous montrerons que  $Q_1x + Sy \in K_2, \forall x, y \in K_2$ . pour tout  $x, y \in K_2$ , On a

$$Q_1x(t) + Sy(t) \leq r_2 \quad (\text{III.44})$$

D'autre part, par  $f(x) \geq l(r_2)$  pour  $x \in [H_1, r_2]$ , ce qui signifie

$$Q_1x(t) + Sy(t) \geq H_1 \quad (\text{III.45})$$

Si  $\lambda \geq \frac{(1-c)H_1 + cA_1Mr_2\omega}{A_1l(r_2) \int_0^\omega b(s)ds}$  De (III.44) et (III.45), on a  $Q_1x + Sy \in K_2$  pour tout  $x, y \in K_2$ . Encore une fois par Lemmes III.3.1 et III.3.2, nous savons  $Q_1 + S$  admet un point fixe  $x \in K_2$  par Théorème III.4.1. En outre,  $H_1 \leq x(t) \leq r_2$ , ce qui signifie  $x(t)$  est un solution positif  $\omega$ -périodique de (III.1). ■

**Théorème III.4.9** *Supposons que  $\lambda b(t)f(x(t+r)) > ca(t)x(t+r)$  détient,  $c \in [0, 1)$ , si  $f_0 = \infty$ , alors (III.1) admet un solution positif  $\omega$ -périodique pour*

$$0 < \lambda \leq \frac{(1-c)mr_3}{MB_1L(r_3) \int_0^\omega b(s)ds}$$

**Preuve.** si  $f_0 = \infty$ , on peut choisir  $0 \leq r_3 \leq 1$  de sorte que  $f(x) \geq \eta x$  pour  $0 \leq x \leq r_3$ , et les constantes  $\eta > 0$  satisfaire  $\lambda b_0$  et  $a - cM \geq 0$ . , on a

$$K_3 = \{x \in X : 0 \leq x(t) \leq r_3\},$$

il est facile de voir que  $K_3$  est un ensemble convexe fermé borné de  $X$ . Dans la suite, nous montrerons que  $Q_1x + Sy \in K_3 \forall x, y \in K_3$ . Pour tout  $x, y \in K_3$ ,

$$(Q_1x)(t) + (Sy)(t) \geq 0. \quad (\text{III.46})$$

D'autre part, par  $f(x) \leq L(r_3)$  pour  $x \in [0, r_3]$ , donc si  $\lambda \leq \frac{(1-c)mr_3}{MB_1L(r_3) \int_0^\omega b(s)ds}$ , on a

$$(Q_1x)(t) + (Sy)(t) \leq r_3. \quad (\text{III.47})$$

par (III.46) et (III.47), on a  $Q_1x + Sy \in K_3$  pour tout  $x, y \in K_3$ .

Encore une fois par Lemmes III.3.1 et III.3.2, nous savons  $Q_1 + S$  admet un point fixe  $x \in K_3$  par Théorème III.4.1. Figure  $\lambda b(t)f(x(t+r)) > ca(t)x(t+r)$ , de (III.29) et (III.46), on peut conclure  $0 < x(t) \leq r_3$ , ce qui signifie  $x(t)$  est un solution positif  $\omega$ -périodique de (III.1) ■

**Théorème III.4.10** *On admet que  $\lambda b(t)f(x(t+r)) > ca(t)x(t+r)$  détient,  $c \in [0, 1)$ . si  $f_\infty = \infty$ , ensuite (III.1) admet un solution positif  $\omega$ -périodique pour*

$$0 < \lambda \leq \frac{(1-c)mr_4 + cmMB_1H_2\omega}{MB_1L(r_4) \int_0^\omega b(s)ds}$$

**Preuve.** si  $f_\infty = \infty$ , nous pouvons choisir un  $H_2 > 1$  de sorte que  $f(x) \geq \eta x$  pour  $x \geq H_2$ , soit  $r_4 = \max \left\{ 2, \frac{B_1 H_2}{A_1} \right\}$ , et les constantes  $\eta > 0$  satisfait

$$\lambda A_1 \eta H_2 \int_0^\omega b(s) ds - c A_1 M r_4 \omega + c H_2 \geq H_2.$$

on a  $K_4 = \{x \in X : H_2 \leq x(t) \leq r_4\}$ , c'est facile de voir ça  $K_4$  est un ensemble convexe fermé borné de  $X$ . dans la suite, nous montrerons que  $Q_1 x + S y \in K_4 \forall x, y \in K_4$ . Pour tout  $x, y \in K_4$

$$(Q_1 x)(t) + (S y)(t) \geq A_1 \lambda \eta H_2 \int_0^\omega b(s) ds - c A_1 M r_4 \omega + c H_2 \quad (\text{III.48})$$

D'autre part, par  $f(x) \leq L(r_4)$  pour  $x \in [H_2, r_4]$ , donc si  $\lambda \leq \frac{(1-c)mr_4 + cmMB_1H_2\omega}{MB_1L(r_4) \int_0^\omega b(s) ds}$ , on a

$$(Q_1 x)(t) + (S y)(t) \leq r_4 \quad (\text{III.49})$$

par (III.48) et (III.49), on a  $Q_1 x + S y \in K_4$  pour tout  $x, y \in K_4$ . Encore une fois par Lemmes III.3.1 et III.3.2, nous savons  $Q_1 + S$  a un point fixe  $x \in K_4$  par Théorème 3.1. en outre,  $H_2 \leq x(t) \leq r_4$ , ce qui signifie  $x(t)$  est un solution positif  $\omega$ -périodique de (III.1), ■

Des Théorèmes III.4.8 et III.4.9, nous pouvons facilement obtenir

**Théorème III.4.11** *On admet que  $\lambda b(t)f(x(t+r)) > ca(t)x(t+r)$  pour,  $c \in [0, 1)$ . Si  $f_0 = f_\infty = 0$ . Alors (III.1) admet deux solutions pour*

$$\lambda \geq \max \left\{ \frac{c M r_1 \omega}{l(r_1) \int_0^\omega b(s) ds}, \frac{(1-c)H_1 + c A_1 M r_2 \omega}{A_1 l(r_2) \int_0^\omega b(s) ds} \right\}$$

A partiés de Théorème III.4.10 et Théorème III.4.11 on peut conclure le théorème suivant

**Théorème III.4.12** *On admet que  $\lambda b(t)f(x(t+r)) > ca(t)x(t+r)$  pour  $c \in [0, 1)$ . si  $f_0 = f_\infty = \infty$ , Alors (III.1) admet deux solutions pour*

$$0 < \lambda \leq \min \left\{ \frac{(1-c)mr_3}{MB_1L(r_3) \int_0^\omega b(s) ds}, \frac{(1-c)mr_4 + cmMB_1H_2\omega}{MB_1L(r_4) \int_0^\pi b(s) ds} \right\}$$

**Remarque III.4.1** *si vous ajoutez l'hypothèse  $\max\{a(t) : t \in [0, \omega]\} < \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$ , alors les théorèmes III.4.7 et III.4.12 sont valables pour l'Eq (III.2).*



## Conclusion générale

1. Le but principale dans ce travail est de présenter une extension des résultats et une amélioration des conditions. Cette extension s'applique à une classe plus large d'équations intégrales-différentielles/différentielles à retard fonctionnel non borné.
2. La méthode de Point Fixe a montré des avantages significatifs pour montrer l'existence d'une solution et/ou conclure la stabilité asymptotique pour les problèmes non linéaire.

# Bibliographie

## Bibliographie

- [1] Arino O., Kimmel M. A non differentiable semigroup generated by a model of cell population dynamics. In Appl. Math. Comput. Sci, volume 4(2), pages 211-221, (1986).
- [2] A.Ardjouni A.Djoudi Fixed points and stability in linear neutral differential equations with variable delays, Nonlinear Analysis 74 (2011) 2062–2070
- [3] A. Ardjouni, A. Djoudi, Fixed point and stability in neutral nonlinear differential equations with variable delays, Opuscula Mathematica, VoL. 32, No. 1, 2012, pp. 5-19.
- [4] A. Ardjouni, A. Djoudi, Fixed points and stability in linear neutral differential equations with variable delays, Nonlinear Analysis 74 (2011) 2062-2070
- [5] Arino O., Hbid M. L., Ait Dads E., Delay differential equations and applications, Published by Springer, P. O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands (2002)
- [6] A. Djoudi, R. Khemis, Fixed point techniques and stability for neutral nonlinear differential equations with unbounded delays, Georgian Mathematical Journal 13 (1) (2006) 25-34.
- [7] Becker L. C., Burton T. A. Stability, fixed points and inverse of delays, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 136A 245-275, (2006).
- [8] Bellman, R. E., Cooke K. L. Differential-difference equations, volume 6. Academic press INC (londo), Elsevier (1963).
- [9] B.L. You, Ordinary Differential Equation Complementary Curriculum, Ppeople Education Press, Beijing, 1982 .
- [10] C.H. Jin, J.W. Luo, Stability in functional differential equations established using fixed point theory, Nonlinear Analysis 68 (2008) 3307-3315.
- [11] C.H. Jin, J.W. Luo, Fixed points and stability in neutral differential equations with variable delays, Proceedings of the American Mathematical Society 136 (3) (2008) 909-918.
- [12] Cooke K. L. Stability analysis for a vector disease model. Journal of Mathematics 9.1 pages 31-42, (1979).
- [13] Cushing J. M. Integro-differential equations and delay models in population dynamics. Vol. 20. Springer Science & Business Media, (2013).
- [14] Driver, Rodney David. Ordinary and delay differential equations. Vol. 20. Springer Science Business Media, 2012.
- [15] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, in : Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 66, Cambridge University Press, London, New York, 1974

- [16] G.R. Liu, J.R. Yan, F.Q. Zhang, Positive periodic solutions for a neutral delay Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis TMA* 67 (2007) 2642-2653
- [17] G.P. Rangaiah, P.R. Krishnaswamy, Gamma distribution model - A limiting form of gamma distributed time delay model, *Chemical Engineering Science* 43 (1988) 929-932.
- [18] Hale J. K. Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional differential equations. *Journal of Differential Equations* 1.4, 452-482 (1965).
- [19] H.I. Freedman, J. Wu, Periodic solutions of single-species models with periodic delay, *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 23(1992) 689-701
- [20] Hale, J.k, *Theory of functional differential equations*, Springer- Verlag, New York, (1977).
- [21] H.F. Huo, Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses, *Computers and Mathematics with Applications* 48(2004) 1833-1846.
- [22] J. Wu, Z.C. Wang, Two periodic solutions of second-order neutral functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 329 (2007) 677-689.
- [23] Kuang, Yang, *Delay differential equations : with applications in population dynamics*. Vol. 191. Academic Press, 1993.
- [24] K. Gopalsamy. *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*. In Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [25] Kato J. Hale J. Phase space for retarded equations with infinite delay. *Funkcial Ekvac*, 21 : 11-41, 1978.
- [26] Levin J. J. The asymptotic behavior of the solution of a Volterra equation. *Proceedings of the American Mathematical Society* 14.4 pages 534-541, (1963).
- [27] Levin J. J., Nohel J. A. On a nonlinear delay equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 8.1 pages 31-44 (1964).
- [28] M.R. Zhang, Nonuniform non-resonance at the first eigenvalue of the  $p$ -Laplacian, *Nonlinear Analysis TMA* 29 (1997) 41-51.
- [29] MacDonald N. *Time Lags in Biological Models*, *Lecture Notes in Biomathematics* Vol 27, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1978).
- [30] Mackey, M. C., Glass. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science* 197.4300 pages 287-289 (1977).
- [31] May, Robert M. Biological populations obeying difference equations : stable points, stable cycles, and chaos. *Journal of Theoretical Biology* 51.2 pages 511-524, (1975).
- [32] Maynard Smith J. *Models in ecology*, cambridge university press, (1978).
- [33] Pielou E. C. *Mathematical Ecology*, John Wiley and Sons, New York (1977).
- [34] Smith, Hal. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*. Vol. 57. Springer Science & Business Media, 2010.
- [35] Seifert G., Liapunov-Razumikhin conditions for for stability and boundness of functional differential equations of Volterra type, *J. Differential equations*, 14 (1973), 424-430
- [36] T.A. Burton, *Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations*, Dover Publications, New York, 2006.

- [37] T.A. Burton, Liapunov functionals, fixed points, and stability by Krasnoselskii's theorem, *Nonlinear Studies* 9 (2001) 181-190.
- [38] T.A. Burton, Stability by fixed point theory or Liapunov's theory : a comparison, *Fixed Point Theory* 4 (2003) 15-32.
- [39] T.A. Burton, Fixed points and stability of a nonconvolution equation, *Proceedings of the American Mathematical Society* 132 (2004) 3679-3687.
- [40] T.A. Burton, T. Furumochi, A note on stability by Schauder's theorem, *Funkcialaj Ekvacioj* 44 (2001) 73-82.
- [41] T.A. Burton, T. Furumochi, Fixed points and problems in stability theory, *Dynamical Systems and Applications* 10 (2001) 89-116.
- [42] T.A. Burton, T. Furumochi, Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems, *Dynamic Systems and Applications* 11 (2002) 499-519.
- [43] T.A. Burton, T. Furumochi, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability, *Nonlinear Analysis* 49 (2002) 445-454.
- [44] T. A. Burton Stability and periodic solutions of ordinary functional differential equations, Academic Press. NY, (1985).
- [45] T. A.v, Integral equations, implicit functions, and fixed points, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), 2383-2390.
- [46] Volterra V. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 7 pages 249-298, (1928).
- [47] V.B. Lal, Karmeshu, S. Kaicker, Modeling innovation diffusion with distributed time lag, *Technological Forecasting and Social Change* 34 (1988) 103-113 .
- [48] Yorke J. A. Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations, *Journal of Differential equations* 7.1 pages 189-202, (1970).
- [49] Y.N. Raffoul, Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory, *Mathematical and Computer Modelling* 40 (2004) 691-700.
- [50] Yang K., Delay differential equations with applications in population dynamics, Copyright c (1993) by Academic Press, Inc, Volume 191
- [51] Y.M. Dib, M.R. Maroun, Y.N. Raffoul, Periodicity and stability in neutral nonlinear differential equations with functional delay, *Electronic Journal of Differential Equations* 2005 (142) (2005) 1-11.
- [52] Y.K. Li, Positive periodic solutions of periodic neutral Lotka-Volterra system with state dependent delays, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 330 (2007) 1347-1362.
- [53] Y. Luo, W.B. Wang, J.H. Shen, Existence of positive periodic solutions for two kinds of neutral functional differential equations, *Applied Mathematics Letters* (2007), doi : 10.1016 / j.aml .
- [54] Z.H. Yang, Z.H. Zhou, Periodic solutions of a class of neutral differential models with feedback control, *Applied Mathematics and Computation* 189 (2007) 996-1009.
- [55] Z. Li, X. Wang, Existence of positive periodic solutions for neutral functional differential equations, *Electronic Journal of Differential Equations* 34(2006) 1-8
- [56] Zhang, Fixed points and stability in differential equations with variable delays, *Nonlinear Analysis* 63 (2005) e233-242.

- [57] Zhang, B. : Fixed points and stability in differential equations with variable delays. *Nonlinear Anal.* 63, 233–242 (2005)
- [58] Z.X. Zheng. *Theory of Functional Differential Equations*, Anhui Educational Publishing House, Hefei, 1994 .

## Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier certaines propriétés essentielles de la solution triviale de l'équation différentielle linéaire à variables retards étant donnée par

$$x'(t) = - \sum_{j=1}^N b_j(t)x(t - \tau_j(t)) + \sum_{j=1}^N c_j(t)x'(t - \tau_j(t))$$

Nous imposerons des hypothèses appropriées sur  $a_j, c_j$  et  $\tau_j$  de sorte que, pour chaque fonction continue  $\psi$  initialement donnée, une application  $P$  est définie sur un espace métrique  $S_\psi$  prudemment choisi de telle façon qu'un point fixe de  $P$  est solution de l'équation traitée. Le résultat final est un théorème qui offre des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique de la solution zéro. Ces Théorèmes forment une étape significative dans la théorie de la stabilité en général. Enfin, nous présentons des résultats sont, bien évidemment obtenus et réalisés par la théorie de point fixe de Banach. Ensuite, nous intéressons à l'étude d'un problème d'existence de la solution périodique positive d'équation

$$\begin{aligned} \left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' &= a(t)x(t) - \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr \\ \left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' &= -a(t)x(t) + \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr \end{aligned}$$

Nous offrons ensuite quelques des hypothèses suffisantes sur  $c, \lambda, a, b$  et  $f$  pour laquelle on s'assure que cette équation admet au moins une solution périodique positive.

### Abstract

In this memory we interested on the study of the neutral differential equation stability with variable delay.

$$x'(t) = - \sum_{j=1}^N b_j(t)x(t - \tau_j(t)) + \sum_{j=1}^N c_j(t)x'(t - \tau_j(t))$$

We find suitable conditions for  $c_j, b_j$  and  $\tau_j$  so that for a given continuous initial function  $\psi$  a mapping  $P$  for the above equation can be defined on a carefully chosen complete metric space  $S_\psi$  in which  $P$  possesses a unique fixed point. The

final result is an asymptotic stability theorem for the zero solution with a necessary and sufficient condition. It follows, we are interested in the analysis of qualitative theory of periodic solutions of delay differential equations.

$$\begin{aligned} \left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' &= a(t)x(t) - \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr \\ \left( x(t) - c \int_{-\infty}^0 K(r)x(t+r)dr \right)'' &= -a(t)x(t) + \lambda b(t) \int_{-\infty}^0 K(r)f(x(t+r))dr \end{aligned}$$

We offer existence criteria based on sufficient conditions on  $c, \lambda, a, b$  and  $f$  to conclude existence of positive periodic solutions of this Equation.