N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

---

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Théorèmes de comparaison pour certaines équations différentielles fractionnaires à retard.

Présenté par: Bekkouche Mennoubia
Guedda Manel

Soutenu devant le jury composé de

M: Nisse Lamine	PROF	Rapporteur	Univ. d'El Oued
M: Zaouche Elmahdi	MCB	Présidente	Univ. d'El Oued
M: Nisse khdadija	MCB	Examinatrice	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2016 – 2017.

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nous avoir donnée les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur **Dr. Nisse Lamine** qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous on fait en acceptant de siéger à notre memoire.

D'autre parte, nous remercions tous les membres de nos familles surtout nos parents pour leur effort et leur fatigue, nos professeurs dés la primaire jusqu'au universitaire, nos amies, nos proches .

En fin, nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de cette étude.

Notations générales

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$ ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{R}_+$ ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{R}^n$ ensemble vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels .

$[a, b)$ intervalle semi ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b.

$\mathcal{C} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ ensemble des fonctions continues de $[-\tau, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$.

D^α opérateur de dérivation d'ordre non entier α.

$| \, . \, |$ valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe .

$\Gamma(.)$ fonction Gamma d'Euler.

E_α fonction de Mittag-Leffler .

I^αf(x) intégration d'ordre α.

${}^C D^\alpha$f(x) dérivée d'ordre α selon la définition de Caputo.

${}^{RL} D^\alpha$f(x) dérivée d'ordre α selon la définition de Riemann-Liouville.

Table des matières

Introduction générale

Dans le cas du calcul différentiel ordinaire (ordre entier), la dérivée d'ordre n ou la dérivée $n^{ème}$ d'une fonction $f(x)$ (n fois dérivable au sens usuel), notée $D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$, est bien connue lorsque n est un entier positif. En 1695, Marquis de L'Hôpital posa une question à Gottfried Wilhelm Leibniz concernant le sens qu'on pourrait donner à $D^n f(x)$ si n était une fraction. Depuis ce temps, le calcul fractionnaire a attiré l'attention de nombreux mathématiciens de renommée tels qu'Euler, Laplace, Fourier, Abel, Riemann, etc ... . Différentes définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégration d'ordre non entier ou fractionnaire [11],[10],[9].

Le comportement de nombreux systèmes physiques peut être correctement décrit par des équations différentielles à dérivées non entières. C'est le cas par exemple de certains systèmes thermiques, ou électrochimiques. Pour ces cas, l'utilisation de modèles classiques basés sur la dérivation entière n'est donc pas appropriée. La rareté (relative) des modèles basés sur des équations à dérivées non entières est due principalement à l'absence d'outils mathématiques permettant l'analyse, la simulation et la réalistion de ces systèmes fractionnaires. Des recherches ont été entamée dans ce sens, et actuellement il existe plusieurs méthodes d'approximations de la dérivée et de l'intégrale fractionnaires, dans le cas continu et dans la cas discret [12].

La modélisation mathématique de certains phénomènes, par exemple en biologie telle que : la dynamique des populations, ou l'épidéémiologie conduit souvent à des systèmes d'équations différentielles fonctionnelles, dont les plus connues sont les systèmes différentiels à retard. Dans ce type d'équations, la dérivée de la fonction (inconnue) en un instant t dépend de la fonction en des instants passés $t-\tau_i$ où $\tau_i > 0$.

Parmi les outils importants dans l'étude des équations et systèmes d'équations différentielles ordinaires ou fractionnaires, il y a les inégalités différentielles, qui aboutissent généralement aux théorèmes de comparaison.

Ce mémoire bien que introductif au calcul et à l'analyse fractionnaires, il est consacré essentiellement aux théorèmes de comparaison, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans le premier chapitre, on commence par quelques notions préliminaires et outils de base concernant le calcul et l'analyse fractionnaires.

Dans le deuxième chapitre, on introduit les équations différentielles fractionnaires à retard, on rappelle également quelques résultats sur les inégalités différentielles, et les théorèmes de comparaison dans le cas fractionnaire.

Le troisième et dernier chapitre est consacré à l'essentiel de notre travail. Dans une première partie du chapitre, on énonce et on démontre un théorème de comparaison dans le cas linéaire, adapté d'un théorème analogue pour une équation différentielle ordinaire. Dans la seconde partie de ce dernier chapitre, on propose une généralisation de ce résultat au cas non linéaire. On termine ce chapitre par un exemple illustratif du résultat obtenu.

Chapitre 1

Introduction au calcul fractionnaire

1.1 Quelques notions préliminaires

Dans ce paragraphe, on introduit quelques éléments nécessaires dans ce domaine de l'analyse réelle. Nous rappelons les définitions de quelques fonctions spéciales utilisées dans le calcul fractionnaire, et certaines notions sur l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ce paragraphe, et tout le contenu de ce chapitre, sont basés sur la documentation qui se trouve dans [3, 2, 11].

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions spéciales incontournables dans le calcul fractionnaire est la fonction d'Euler Gamma. C'est la généralisation de la fonction factorielle $n\,(n!)$ qui permet à n de prendre des valeurs non entières.

La définition de la fonction Gamma (en terme d'intégrale) est donnée par (1.1)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,\ z \in \mathbb{R}_+. \tag{1.1}$$

L'intégration par partie de (1.1) conduit à la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

Puisque $\Gamma(1) = 1$, en utilisant la relation (1.2), nous obtenons pour $z = 1, 2, 3, ...$

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3!$$

....

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n(n-1)! = n!. \tag{1.3}$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle possède des pôles simples pour $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$.

Son expression est :

$$\Gamma(z) = \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!}\frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!}\frac{(1)}{1+z} + \frac{(-1)^2}{2!}\frac{1}{2+z} + ...$$

avec :

$$\varphi(z) = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{1.4}$$

Ceci signifie que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend asymptotiquement vers l'infini.

1.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta est définie par

$$B(p,q) = \int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}d\tau = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, avec, \quad p > 0, \quad et \quad q > 0.$$

1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittage-Leffler est une fonction importante dans le calcul fractionnaire. Son rôle est analogue à celui joué par la fonction exponentielle dans le cas du calcul entier. Elle généralise la fonction exponentielle au calcul fractionnel.

La définition de la fonction de Mittage-Leffler à un paramètre est donnée par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad z \in \mathbb{R}\ (\alpha > 0).$$

Cette fonction a été introduite par Mittag-Leffler en 1903.

Sa valeur pour $\alpha = 1$ donne la fonction exponentielle usuelle

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

On a aussi la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres α et β, définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad z \in \mathbb{R}\ (\alpha > 0,\ \beta > 0). \tag{1.5}$$

Cette fonction a été introduite par R.P.Agarwal et Erdelyi en 1953-1954.

1.2 Opérateurs d'ordre non entier, définitions et propriétés

Dans ce paragraphe, nous introduisons les opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier. Une définition unique sera donnée pour l'intégration non entière, et au moins deux définitions de la dérivation non entière, correspondant à deux sens différents seront considérées.

1.2.1 Intégration non entière

Définition 1.2.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty)$. L'intégrale d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par*

$$I_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.6}$$

et elle s'appelle l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.

Dans (1.6), il est évident que l'intégrale d'ordre fractionnaire peut être exprimée sous forme de produit de convolution de la forme suivante

$$I_{t_0}^{\alpha} f(t) = \phi_{\alpha}(t) * f(t), \tag{1.7}$$

avec

$$\phi_{\alpha}(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \quad t_+^{\alpha-1} = 0, \quad \text{pour} \quad t < 0, \;\; t_+^{\alpha-1} = t^{\alpha-1}, \;\; \text{pour} \quad t \geq 0. \tag{1.8}$$

1.2.2 Dérivation non entière

Définition au sens de Riemann-Liouville.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, n un entier positif, $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$. La dérivée d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par

$$^{RL}D_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I_{t_0}^{(n-\alpha)}(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.9}$$

avec $n-1 < \alpha < n$.

Définition au sens de Caputo

Nous avons vu plus haut que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ s'obtient par une régularisation (application de $I_a^{n-\alpha}$) suivie d'une dérivation classique d'ordre n. La dérivée de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Définition 1.2.2 *Soit $\alpha \in]n-1, n[$ et $f \in C^n([a,b))$. On appelle dérivée de f au sens de Caputo la fonction définie par*

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = (I_a^{n-\alpha} f^{(n)})(x). \tag{1.10}$$

La dérivée de Caputo permet de rattraper certaines "anomalies " que nous avons rencontré dans le cas de Riemann-Liouville. En voici la première :

$${}^C D_a^\alpha 1 = 0$$

i.e, la dérivée de Caputo d'une constante est nulle.

1.2.3 Propriétés de l'opérateur d'ordre non entier

Parmi, les propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires on a (voir [1])

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique en z, alors sa dérivée fractionnaire ${}_\alpha D_z^\alpha f(z)$ est une fonction analytique en z et α.

2. Pour $\alpha = n$, où n est un nombre entier, l'opérateur ${}_\alpha D_z^\alpha$ produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.

3. Pour $\alpha = 0$, l'opérateur ${}_\alpha D_z^\alpha$ est l'opérateur identité

$${}_\alpha D_z^0 f(z) = f(z).$$

4. La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaires sont des opérations linéaires.

$${}_\alpha D_z^\alpha \{bf(z) + cg(z)\} = b_\alpha D_z^\alpha f(z) + c_\alpha D_z^\alpha g(z).$$

1.3 Quelques résultats et développements supplémentaires

Dans ce paragraphe on présente quelques résultats concernant l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (voir [1]).

Example 1.3.1 *Donnons d'abord un exemple de calcul d'une intégrale fractionnaire. Étant donné la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, on a alors*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt. \tag{1.11}$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)\tau$, d'où

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^\beta d\tau = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha}. \tag{1.12}$$

Le résultat ci-dessus, est obtenu aprés utilisation de la fonction béta, et l'une de ses propriétés.

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a

$$I_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}(x-a)^{\beta+1},$$

à cause de la relation bien connue $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Voici des identités utiles, dont quelques unes serviront par la suite.

Proposition 1.3.1 *(voir [1]) Soit $f \in C^0([a,b))$. Pour α, β complexes tels que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f. \tag{1.13}$$

Et pour $\alpha > 1$, on a

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f \tag{1.14}$$

Preuve. La démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction béta d'Euler. En effet :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta f)(s)ds \tag{1.15}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^s (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}f(t)dtds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds]dt.$$

A présent on pose $s = t + (x-t)\tau$, ce qui donne

$$\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds = (x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau$$
$$= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

c'est-à-dire le résultat annoncé. La deuxième identité se justifie par les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et l'utilisation de l'équation fondamentale de la fonction gamma d'Euler :$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. ■

La dérivée de Riemann-Liouville

Commençons par un exemple de calcul.

Example 1.3.2 *Revenons à l'exemple de la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, et calculons sa dérivée au sens de Riemann-Liouville*

$$^{RL}D_a^\alpha(x-a)^\beta = (\frac{d}{dx})^m[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha}]$$
$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \tag{1.16}$$

où nous avons utilisé la formule

$$(\frac{d}{dx})^m(x-a)^\lambda = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+1)(x-a)^{\lambda-m} \tag{1.17}$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-m)}(x-a)^{\lambda-m}.$$

Il est clair que la formule de dérivation (1.16) *se réduit pour* $\alpha = 1$ *à*

$$^{RL}D_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (x-a)^{\beta-1} = \beta (x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}(x-a)^\beta.$$

Dans l'exemple précédent si on prend $\beta = 0$ on obtient le résultat " non usuel " suivant

$$^{RL}D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

c'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est plus nulle.

Lemme 1.3.1 *(voir [1]) Soit* $\alpha \in]m-1, m[$ *et* f *une fonction vérifiant* $^{RL}D_a^\alpha f = 0$ *(appartenant au noyau de l'opérateur* $^{RL}D_a^\alpha$ *). Alors*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}, \tag{1.18}$$

où les c_j *sont des constantes quelconques.*

Preuve. Partons de $^{RL}D_a^\alpha f = (\frac{d}{dx})^m, [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0$, alors on a d'abord

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j,$$

et par application de I_a^α a on obtient

$$[I_\alpha^m f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} c_j (x-a)^{j+\alpha},$$

ensuite par dérivation (classique) le résultat. ■

Proposition 1.3.2 *(voir [1]) L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville* $^{RL}D_a^\alpha$ *possède les propriétés suivantes*

1. *c'est un opérateur linéaire.*
2. *En général* $^{RL}D_a^\alpha \circ ^{RL} D_a^\beta \neq ^{RL} D_a^\beta \circ ^{RL} D_a^\alpha$ *et aussi* $\neq ^{RL} D_a^{\alpha+\beta}$.
3. $\lim\limits_{x\to\alpha} {}^{RL}D_a^\alpha f = f^{(m-1)}$ *et* $\lim\limits_{\alpha\to m} {}^{RL}D_a^\alpha f = f^{(m)}$.
4. $^{RL}D_a^\alpha \circ I_a^\alpha = id$.
5. $[(I_a^\alpha \circ ^{RL} D_a^\alpha) f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)} \left\{ \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ >}} [(\frac{d}{dx})^j I_a^{m-\alpha} f](x) \right\}$.

La dérivée de Caputo

Commençons par un exemple de calcul.

Example 1.3.3 *Pour la dérivée d'une puissance, on a*

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.19} $$

En effet, d'abord

$$ (\frac{d}{dx})^{n}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n}, \tag{1.20} $$

et

$$ I_a^{n-\alpha}(x-a)^{\beta-n} = \frac{\Gamma(\beta+1-n)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}. $$

Le résultat en découle immédiatement.

On remarque que les formules (1.16) et (1.19) sont identiques. Mais ceci n'est qu'une apparence car si β est un entier inférieur à m la formule (1.20) donne zéro et par suite (1.19) est nulle à son tour, alors que (1.16) n'est pas nulle. En fait elles sont identiques pour β non entier.

Une relation importante entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville est la suivante

$$ ({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(x) = ({}^{C}D_a^{\alpha}f)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a). \tag{1.21} $$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}f = {}^{RL}D_a^{\alpha}[f - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j}}{j!} f^{(j)}(a)], $$

qui signifie en gros que la dérivation de Caputo est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f. La relation (1.21) permet d'obtenir aisément les résultats suivants :

Proposition 1.3.3 *(voir [1]) On a*

1. ${}^{C}D_a^{\alpha}[I_a^{\alpha}f] = f$.
2. *Si* ${}^{C}D_a^{\alpha}f = 0$ *alors* $f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j$.
3. $I_a^{\alpha}[{}^{C}D_a^{\alpha}f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$.

La dernière relation de la proposition précédente nous permettra par la suite d'étudier des équations différentielles fractionnaires (au sens de Caputo) avec des conditions initiales classiques, c'est-à-dire des dérivées entières au point a, chose qui n'est pas possible de faire avec la dérivation au sens de Riemann-Liouville.

Un des " défauts " de la dérivée de Caputo est qu'elle ne constitue pas une bonne interpolation entre les dérivée entières comme ce fut le cas pour Riemann-Liouville. En effet on a

$$\lim_{\substack{\alpha \to m \\ >}} ({}^{c}D_a^{\alpha} f)(x) = f^{(m)}(x),$$

mais par contre

$$\lim_{\substack{\alpha \to m \\ >}} ({}^{c}D_a^{\alpha} f)(x) \neq f^{(m-1)}(x),$$

Voici un lemme utile.

Lemme 1.3.2 *(voir [1]) Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $\alpha > 0$, alors*

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} (I_a^{\alpha} f)(x) = 0$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \mid (I_a^{\alpha} f)(x) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) \mid dt \\ &\leq \frac{\parallel f \parallel_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\parallel f \parallel_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} (x-t)^{\alpha}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

d'où le résultat. ■ Comme conséquence regardons comment devient la propriété 5 de la propositiuon (1.3.2) si $0 < \alpha < 1$ et f continue :

$$\begin{aligned} [(I_a^{\alpha} \circ^{RL} D_a^{\alpha}) f](x) &= f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \lim_{\substack{x \to a \\ >}} [I_a^{1-\alpha} f](x) \right\} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Corollaire 1.3.1 *Si $0 < \alpha < 1$ et f de classe C^1 alors*

$$(I_a^{\alpha} \circ^{RL} D_a^{\alpha}) f = f,$$

et

$${}^{C}D_a^{\alpha} \circ (I_a^{\alpha}) f = f.$$

C'est-à-dire que les dérivations au sens de Riemann-Liouville et de Caputo respectivement constituent l'inverse à droite et à gauche de l'opérateur de Riemann-Liouville (au moins sur les fonctions de classe C^1). En voici un autre corollaire *intéressant.*

Corollaire 1.3.2 *Si $0 < \alpha, \beta \leq 1$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ et f de classe C^1 alors*

$$({}^C D_a^{\alpha} \circ {}^C D_a^{\beta})f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f = ({}^C D_a^{\beta} \circ {}^C D_a^{\alpha})f.$$

Preuve. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
({}^C D_a^{\alpha} \circ {}^C D_a^{\beta})f &= (I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx})f \qquad (1.23)\\
&= (I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{I_a^{\beta} \circ \frac{d}{dx}}_{{}^C D_a^{1-\beta}} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx})f\\
&= (I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{{}^C D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta}}_{id} \circ \frac{d}{dx})f\\
&= (I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \frac{d}{dx})f\\
&= {}^C D_a^{\alpha+\beta} f.
\end{aligned}$$

La commutativité résulte de celle de l'addition des réels. ■

Chapitre 2

Théorie des équations différentielles fonctionnelles fractionnaires

Ce chapitre, est consacré à l'introduction de quelques notions élémentaires concernant les équations différentielles fractionnaires avec ou sans retard. On y présentera aussi quelques résultats connus dans la littérature mathématique concernant ce domaine. On reproduira quelques théorèmes avec leurs démonstrations, parus dans [4, 6, 7] et en particulier dans [5].

2.1 Équivalence du problème de Cauchy et de l'équation intégrale de type Volterra

Théorème 2.1.1 *La fonction u est une solution de l'équation différentielle fractionnaire (problème de Cauchy)*

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0$$

si et seulement si

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Pour la démonstration, on peut voir [3], et la proposition 1.3.3.

2.2 Équations différentielles fractionnaires sans retard

Dans les études des équations différentielles en général on s'intéresse au comportement des solutions, en particulier la positivité et la comparaison de ces solutions.

L'un des outils les plus importants utilisés dans ce contexte est basé sur les inégalités différentielles.

2.2.1 Inégalités différentielles fractionnaires

Considérons le problème à valeur initiale (IVP) pour une équation différentielle fractionnaire de la forme

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

oú T est un réel positif, $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ${}^{C}D^{\alpha}u$ est la dérivée fractionnaire de u et α est telle que $0 < \alpha < 1$. Puisque f est supposée continue, le (IVP) (2.1) est équivalent à l'équation intégrale fractionnaire de type Volterra suivante

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

C'est-á-dire que chaque solution de (2.2) est aussi une solution de (2.1) et vice versa. Ici et ailleurs Γ désigne la fonction Gamma.

Examinons d'abord un résultat fondamental sur les inégalités intégrales de type fractionnaires.

Théorème 2.2.1 *[5] Soient $v, w \in C([0, T], \mathbb{R}), f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et*

$$\begin{cases} (i) \quad v(t) \leq v(0) + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, v(s)) ds. \\ (ii) \quad w(t) \geq w(0) + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, w(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

L'une des inégalités précédentes étant stricte. Supposons en outre que $f(t, u)$ soit non décroissante en u pour chaque t et

$$v(0) < w(0). \tag{2.3}$$

Alors on a

$$v(t) < w(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.4}$$

Ici et dans la suite de ce paragraphe, nous reproduisons les démonstrations données dans [5].

Preuve. Raisonnons par l'absurde, et supposons que la conclusion (2.4) ne soit pas vraie. En raison de la continuité des fonctions impliquées et l'inégalité (2.3), il existe $t_1 \in]0,\ T]$ tel que

$$v(t_1) = w(t_1), \quad v(t) < w(t), \quad 0 < t \leq t_1. \tag{2.5}$$

Supposons que l'inégalité (ii) est stricte. D'après (2.5), f étant non décroissante, nous obtenons

$$\begin{aligned} w(t_1) &> w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, w(s)) ds \qquad (2.6) \\ &\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, v(s)) ds \\ &\geq v(t_1). \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction en vue de (2.5). La conclusion (2.4) est donc valide et la preuve est complète. ■ Le résultat suivant est pour les inégalités non strictes, ce qui nécessite une condition de type Lipschitz unilatérale.

Théorème 2.2.2 *[5] Supposons que les conditions du Théorème 2.2.1 sont satisfaites avec des inégalités (i) et (ii) non strictes. Supposons de plus que pour une certaine constante $L > 0$ on a*

$$f(t, u) - f(t, v) \leq \frac{L}{1 + t^\alpha}(u - v), \qquad (2.7)$$

chaque fois que $u \geq v$. Alors, $v(0) \leq w(0)$ et $\mathrm{L} < \Gamma(\alpha + 1)$ implique que

$$v(t) \leq w(t), \quad \forall t \in [0, T]. \qquad (2.8)$$

Preuve. Posons $w_\epsilon(t) = w(t) + \epsilon(1 + t^\alpha)$, pour un nombre réel $\epsilon > 0$, de sorte que

$$w_\epsilon(0) = w(0) + \epsilon > w(0) \quad \text{et} \quad w_\epsilon(t) > w(t), \quad 0 \leq t \leq T. \qquad (2.9)$$

Donc, à partir de l'inégalité (ii) on a

$$w_\epsilon(t) \geq w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, w(s)) ds + \epsilon(1 + t^\alpha).$$

Ainsi, d'après (2.9), en utilisant la condition de Lipschitz unilatérale (2.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} w_\epsilon(t) &\geq w_\epsilon(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} [f(s, w_\epsilon(s)) - \epsilon \frac{L(1 - s^\alpha)}{1 - s^\alpha}] ds + \epsilon t^\alpha \qquad (2.10) \\ &= w_\epsilon(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, w_\epsilon(s)) ds - \frac{\epsilon L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} ds + \epsilon t^\alpha. \end{aligned}$$

Maintenant, sachant que

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = t^\alpha \int_0^1 (1-\sigma)^{\alpha-1} d\sigma = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha,$$

en tenant compte de la condition $L < \Gamma(\alpha+1)$, nous arrivons à

$$w_\epsilon(t) > w_\epsilon(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, w_\epsilon(s)) ds. \tag{2.11}$$

Vue la première inégalité dans (2.9), en appliquant le théorème 2.2.1 aux inégalités (i) et (2.11), on obtient

$$v(t) < w_\epsilon(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, nous concluons que l'inégalité (2.8) est vraie, et ainsi le théorème est démontré. ■

Remarque 2.2.1 *Si la condition (2.7) est remplacé par la condition de Lipschitz unilatérale habituelle*

$$f(t,u) - f(t,v) \leq L(u-v), u \geq v, L > 0, \tag{2.12}$$

alors le théorème 2.2.2 reste vrai, pourvu que nous supposons au lieu de $\Gamma(\alpha+1) > L$, la condition

$$\Gamma(\alpha+1) > \mathrm{L}\mathrm{T}^\alpha.$$

Dans ce cas, nous devons poser $w_\epsilon(t) = w(t) + 2\epsilon$.

2.2.2 Existence locale et conditions extrémales

Dans ce paragraphe, nous considérerons l'existence locale et l'existence de solutions extrémales pour l'IVP (2.1). Commençons d'abord par un résultat d'existence de type Peano.

Théorème 2.2.3 *[5] Soient $f \in \mathcal{C}(R_0; \mathbb{R})$, avec*

$$R_0 := \{(t,u) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq t \leq a, \quad et \quad | u - u_0 | \leq b\},$$

et une constante réelle $M > 0$ telle que $| f(t,u) | \leq M$, sur R_0. Alors, le problème IVP pour l'équation différentielle fractionnaire (2.1) possède au moins une solution $u(t)$ sur $0 \leq t \leq T^*$, où $T^* = min(a, (\frac{b}{M}\Gamma(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha}})$, $0 < \alpha < 1$.

Preuve. Soit $u_0(t)$ une fonction continue sur $[-\delta, 0]$, $\delta > 0$ telle que

$$u_0(0) = u_0, \ \ | u_0(t) - u_0 | \leq b.$$

Pour $\epsilon \in]0,\, \delta]$, on définit une fonction $u_\epsilon(t) = u_0(t)$ sur $[-\delta, 0]$ et

$$u_\epsilon(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u_\epsilon(s-\epsilon))ds \tag{2.13}$$

sur $[0, T_1^*]$, où $T_1^* = \min(T^*, \epsilon)$. Avec T_1^* ainsi choisi on a

$$\begin{aligned} \mid u_\epsilon(t) - u_0 \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid f(s, u_\epsilon(s-\epsilon)) \mid ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{MT^{*\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq b. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Si $T_1^* < T^*$, on peut prolonger u_ϵ définie par (2.13) en une fonction continue sur $[-\delta, T_2^*]$, avec $T_2^* = min(T^*, 2\epsilon)$ et tel que $\mid u_\epsilon(t) - u_0 \mid \leq b$ soit encore vérifié. En continuant ce processus, nous pouvons définir $u_\epsilon(t)$ sur $[-\delta, T^*]$ de sorte que $\mid u_\epsilon(t) - u_0 \mid \leq b$ soit satisfait sur $[-\delta, T^*]$. En outre, étant donné $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T^*$, on a

$$\begin{aligned} \mid u_\epsilon(t_1) - u_\epsilon(t_2) \mid &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mid \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, u_\epsilon(s))ds \\ &- \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, u_\epsilon(s))ds \mid \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \mid \int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}]ds \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} ds \mid \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [t_1^\alpha - t_2^\alpha + 2(t_2-t_1)^\alpha] \\ &\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha < \epsilon, \end{aligned} \tag{2.15}$$

pourvu que $\mid t_2 - t_1 \mid < \delta_0 = [\frac{\epsilon\Gamma(\alpha+1)}{2M}]^{\frac{1}{\alpha}}$.

Ainsi, à partir de (2.14) et (2.15), on déduit que la famille $\{u_\epsilon(t)\}$ constitue un ensemble de fonctions équicontinues et uniformément bornées. L'application du théorème d'Ascoli-Arzela montre l'existence d'une suite $\{\epsilon_n\}$ telle que

$$\epsilon_1 > \epsilon_2 > \ldots > \epsilon_n \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \; n \longrightarrow \infty,$$

et la limite

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_{\epsilon_n}(t)$$

existe uniformément sur $[-\delta, T^*]$.

Puisque f est uniformément continue, alors $f(t, u_{\epsilon_n}(t - \epsilon_n))$ tend uniformément vers $f(t, u(t))$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ et par conséquent, l'intégration de (2.13) terme par terme, avec $\epsilon = \epsilon_n$ et $T_1^* = T^*$ conduit à

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f(s, u(s)) ds.$$

Cela prouve que $u(t)$ est une solution de l'IVP (2.1), ce qui achève la preuve du théorème. ■ En utilisant les théorèmes (2.2.1) et (2.2.3), nous pouvons maintenant prouver l'existence de solutions extèrmales pour le problème IVP (2.1).

Théorème 2.2.4 *([5]) Sous les hypothèses du théorème (2.2.3), il existe des solutions extrèmales pour le problème IVP (2.1) sur l'intervalle* $0 \leq t \leq T_0$, *où* $T_0 = min(a, (\frac{b\Gamma(\alpha+1)}{2M+b})^{\frac{1}{\alpha}})$, *pourvu que* $f(t, u)$ *soit non décroissante en* u *pour chaque* t.

Preuve. Nous allons montrer l'existence d'une solution maximale seulement, car le cas d'une solution minimale est très similaire. Soit

$$0 < \epsilon \leq \frac{b}{2},$$

et considérons l'équation différentielle fractionnaire avec une condition initiale

$$^{C}D^{\alpha} u = f(t, u) + \epsilon, \quad u(0) = u_0 + \epsilon. \tag{2.16}$$

Il est clair que $f_\epsilon(t, u) = f(t, u) + \epsilon$ est définie et continue sur

$$R_\epsilon = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq t \leq a, \quad \text{et} \quad \mid u - (u_0 + \epsilon) \mid \leq \frac{b}{2}\},$$

$R_\epsilon \subset R_0$ et $\mid f_\epsilon(t, u) \mid \leq M + \frac{b}{2}$ sur R_ϵ.

Nous en déduisons ensuite du théorème 2.2.3 que le problème IVP (2.16) admet une solution $u(t, \epsilon)$ sur l'intervalle $0 \leq t \leq T_0$.
Maintenant pour $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1 \leq \epsilon$, nous avons

$$u(0, \epsilon_2) < u(0, \epsilon_1)$$

$$u(t, \epsilon_2) \leq u(0, \epsilon_2) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f_{\epsilon_2}(s, u(s, \epsilon_2)) ds$$

$$u(t, \epsilon_1) > u(0, \epsilon_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} [f(s, u(s, \epsilon_1)) + \epsilon_2] ds.$$

On applique le théorème 2.2.1 pour obtenir

$$u(t,\epsilon_2) < u(t,\epsilon_1), \quad 0 \le t \le T_0.$$

Considérons la famille de fonctions $u(t,\epsilon)$ sur l'intervalle $0 \le t \le \Gamma_0$. On a alors

$$\begin{aligned} \mid u(t,\epsilon) - u(0,\epsilon) \mid &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid f_\epsilon(s,u(s,\epsilon) \mid ds \\ &\le \frac{2M+b}{2} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\le \frac{(2M+b)}{2} \frac{T_0^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\le \frac{b}{2} \\ &\le b. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille de fonctions $u(t,\epsilon)$ est uniformément bornée. On a également, si

$$0 \le t_1 \le t_2 \le T_0,$$

alors, en suivant un calcul similaire à (2.15), avec des changements appropriés, on obtient

$$\mid u(t_2,\epsilon) - u(t_1,\epsilon) \mid \le \frac{(2M+b)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha.$$

Ce qui prouve que la famille $\{u(t,\epsilon)\}$ est équicontinue. Par conséquent, il existe une suite $\{\epsilon_n\}$ avec $\epsilon_n \longrightarrow \infty$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ et la limite uniforme

$$\eta(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u(t,\epsilon_n), \tag{2.17}$$

existe sur $[0,T_0]$. Il est clair que $\eta(0) = u_0$. La continuité uniforme de f, justifie comme précédemment (comme dans le théorème 2.2.3), le fait que $\eta(t)$ est une solution du problème IVP (2.1).

Maintenant, nous montrons que $\eta(t)$ est la solution maximale requise de (2.1), sur $0 \le t \le T_0$. Soit $u(t)$ une solution de (2.1) sur $0 \le t \le T_0$. Alors, on a

$$u_0 < u_0 + \epsilon = u(0,\epsilon),$$

$$u(t) < u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s,u(s)) + \epsilon] ds,$$

$$u(t,\epsilon) \ge u_0 + \epsilon + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s,u(s,\epsilon)) + \epsilon] ds.$$

Du théorème 2.2.1, on obtient $u(t) < u(t,\epsilon)$ sur $[0,T_0]$ pour tout $\epsilon > 0$.

L'unicité de la solution maximale montre que $u(t,\epsilon)$ tend uniformément vers $\eta(t)$

sur $[0, T_0]$ lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$. La preuve est ainsi complète. ■

2.2.3 Existence globale

Nous avons besoin du résultat de comparaison suivant avant de poursuivre.

Théorème 2.2.5 *([5]) Supposons que $m \in C([0,\mathrm{T}], \mathbb{R}^+), g \in C([0,\mathrm{T}], \mathbb{R}^+), g(t,u)$ est non décroissante en u pour tout t et*

$$m(t) \leq m(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)} g(s, m(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq \mathrm{T} \tag{2.18}$$

Soit $\eta(t)$ la solution maximale de

$$^{C}D^{\alpha} u = g(t,u), \quad u(0) = u_0 > 0, \tag{2.19}$$

qui existe sur $[0, T[$ tel que $m(0) \leq u(0)$. Alors on a

$$m(t) \leq \eta(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.20}$$

Preuve. Compte tenu de la définition de la solution maximale $\eta(t)$, pour obtenir (2.20), il suffit de montrer que

$$m(t) < u(t, \epsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.21}$$

où $u(t, \epsilon)$ est une solution de

$$^{C}D^{\alpha} u = g(t,u) + \epsilon, u(0) = u_0 + \epsilon, \epsilon > 0. \tag{2.22}$$

Maintenant, il résulte de (2.22) que

$$u(t, \epsilon) > u_0 + \epsilon + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)} g(s, u(s, \epsilon)) ds.$$

Ensuite, en appliquant le théorème 2.2.1, on obtient immédiatement (2.21) et puisque $\lim\limits_{\epsilon \to 0} u(t, \epsilon) = \eta(t)$ uniformément sur chaque $0 \leq t \leq T_0 < T$, la preuve est achevée. ■

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat de l'existence globale.

Théorème 2.2.6 *([5]) Supposons que $f \in C([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R}), g \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+), g(t,u)$ est non décroissante en u pour tout t et*

$$\mid f(t,u) \mid \leq g(t, \mid u \mid). \tag{2.23}$$

Supposons en outre qu'on a l'existence locale de solutions $u(t,u_0)$ de

$${}^C D^\alpha u = f(t,u), u(0) = u_0, \tag{2.24}$$

et la solution maximale $\eta(t)$ de

$${}^C D^\alpha \eta = g(t,\eta), \eta(0) = \eta_0 \geq 0,$$

existe sur $[0,\infty[$. Alors, la plus large intervalle d'existence de toute solution $u(t,u_0)$ de (2.24) tel que $\mid u_0 \mid \leq \eta_0$ est $[0,\infty[$.

Preuve. Soit $u(t,u_0)$ une solution de (2.24) telle que $\mid u_0 \mid \leq \eta_0$, qui existe sur $[0,\beta[$ pour $0 < \beta < \infty$ où la valeur de β est la plus grande possible. Posons $m(t) = |u(t,u_0)|$ pour $0 \leq t < \beta$. Ainsi, en utilisant l'hypothèse (2.23), on obtient

$$m(t) \leq \mid u_0 \mid + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)} g(s, m(s)) ds.$$

En appliquant le théorème de comparaison (2.2.1), nous obtenons

$$m(t) = \mid u(t,u_0) \mid \leq \eta(t), \quad 0 \leq t < \beta.$$

Puisque $\eta(t)$ est supposée existante sur $[0,\infty)$, il s'ensuit que

$$\mid g(t,\eta(t)) \mid \leq M, \quad 0 \leq t \leq \beta.$$

Maintenant, soit $0 \leq t_1 \leq t_2 < \beta$. Alors, en employant des arguments semblables à l'estimation (2.15) et en utilisant (2.23) et la borne M de g, on arrive à

$$\mid u(t_1,u_0) - u(t_2,u_0) \mid \leq \frac{2M}{\alpha-1}(t_2-t_1)^\alpha.$$

En passant aux limites $t_1, t_2 \longrightarrow \beta^-$ et en utilisant le critère de Cauchy, il s'ensuit que $\lim\limits_{t\to\beta^-} u(t,u_0)$ existe. On définit $u(\beta,u_0) = \lim\limits_{t\to\beta^-} u(t,u_0)$ et on considère le nouveau problème IVP

$$D^\alpha u = f(t,u), \qquad u(\beta) = u(\beta,u_0).$$

D'après l'hypothse d'existence locale supposée, on voit bien que $u(t, u_0)$ peut être prolongée au-delà de β, ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent toute solution $u(t, u_0)$ de (2.24) existe sur $[0, \infty[$, ce qui achève la démonstration. ■

2.3 Équations différentielles fractionnaires à retard

Nous passons maintenant aux équations différentielles fonctionnelles d'ordre fractionnaire, qui fournissent des modèles mathématiques pour des problèmes du monde réel dans lesquels le taux de variation fractionnaire dépend de l'influence de leurs effets héréditaires. Parmi ces équations différentielles fonctionnelles, il y a les équations différentielles fractionnaires à retard. C'est ce type d'équations, qui nous intéresse dans le chapitre suivant, et qui constitue le principal objet de notre étude. Les plus simples de ces équations prennent la forme

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t - \tau)),$$

où $\tau > 0$ est une constante. De toute évidence, pour $\tau = 0$, cela se réduit à une équation différentielle fractionnaire. Néanmoins, dans cette partie de ce chapitre basée sur l'article de V. Lakshmikantham [4], nous rappelons quelques résultats concernant des systèmes d'équations plus généraux, comparables aux équations différentielles fonctionnelles d'ordre entier, voir [7, Vol.II]. On peut trouver plus de détails sur ces résultats dans [4].

2.3.1 Inégalités différentielles fonctionnelles fractionnaires

Pour tout $\tau > 0$, désignons par $\mathcal{C} = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[-\tau, 0]$. Pour tout élément $\phi \in \mathcal{C}$ définissons la norme

$$\mid \phi \mid_0 = \max_{-\tau \leq s \leq 0} \mid \phi(s) \mid .$$

Supposons que $u \in C([t_0 - \tau, \infty), \mathbb{R}), t_0 \geq 0$. Pour tout $t \geq t_0$, notons par u_t la translation de la restriction de u à l'intervalle $[t - \tau, t]$. Plus précisément u_t est un élément de $\mathcal{C}$ défini par

$$u_t(s) = u(t + s), \ -\tau \leq s \leq 0.$$

En d'autres termes, le graphe de u_t est le graphe de u sur $[t - \tau, t]$ décalé à l'intervalle $[-\tau, 0]$. Soit $\rho > 0$ une constante donnée, posons

$$C_\rho = [\phi \in \mathcal{C} : \mid \phi \mid_0 < \rho].$$

Avec cette notation, on peut écrire le problème de la valeur initiale (VIP) pour l'équation différentielle fonctionnelle fractionnaire comme suit

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t, u_t), \quad u_{t_0} = \phi_0 \in \mathcal{C}, \tag{2.25}$$

où $f \in C([t_0, T] \times \mathcal{C}, \mathbb{R}),^{C} D^{\alpha}u$ est la dérivée fractionnaire de u d'ordre α, $0 < \alpha < 1$. Puisque f est supposée continue, le VIP (2.25) est équivalent à l'équation intégrale fractionnaire de volterra avec mémoire suivante

$$u_{t_0} = \phi_0, \quad u(t) = \phi_0(t_0) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} f(s, u_s) ds, \quad t_0 \leq t \leq T. \tag{2.26}$$

C'est- à-dire que chaque solution de (2.26) est aussi une solution de (2.25) et vice versa. Ici et dans ce qui suit Γ désigne la fonction Gamma.

Les lemmes suivants (voir [6]) sont nécessaires pour la suite du travail de [4], que nous reproduisons dans cette partie de ce chapitre. On attire l'attention ici, sur le fait que tous les théorèmes présentés dans cette partie du chapitre, ainsi que leurs preuves, sont reproduites intégralement de l'article de V. Lakshmikantham [4].

Lemme 2.3.1 *Soit $m : [t_0 - \tau, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Hölderienne telle que pour tout $t_1 \in (t_0, T]$, on a*

$$m(t_1) = 0, \quad m(t) \leq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1, et \quad m_{t_1} \leq 0. \tag{2.27}$$

Alors, on a

$$^{C}D^{\alpha}m(t_1) \geq 0. \tag{2.28}$$

Lemme 2.3.2 *Soit $\{u_\epsilon(t)\}$ une famille de fonctions continues définies sur $[t_0 - \tau, T]$ avec $u_{t_0,\epsilon} = \phi_0$, où $^{C}D^{\alpha}u_\epsilon(t) = f(t, u_{\epsilon,t})$ et $|f(t, u_{\epsilon,t})| \leq M$ pour $t \in [t_0, T]$. Alors, la famille $\{u_\epsilon(t)\}$ est équicontinue sur $t_0 \leq t \leq T$.*

Maintenant, voici dans le théorème suivant, un résultat fondamental relatif aux inégalités différentielles fonctionnelles fractionnaires strictes.

Théorème 2.3.1 *([4]) Soient $v, w : [t_0 - \tau, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions Hölderiennes sur $[t_0, T]$, $f \in C([t_0, T] \times \mathcal{C}, \mathbb{R})$, $f(t, \phi)$ non décroissante par rapport à ϕ pour tout t et*

(i)$D^{\alpha}v(t) \leq f(t, v_t)$,

(ii)$D^{\alpha}w(t) \geq f(t, w_t), t_0 \leq t \leq T$.

Une des inégalités (i), (ii) étant stricte. Alors

$$v_{t_0} < w_{t_0}, \tag{2.29}$$

implique

$$v(t) < w(t), \qquad t_0 \leq t \leq T. \tag{2.30}$$

Nous donnons ici, une preuve du théorème telle qu'elle proposée dans [4].
Preuve. Supposons que (2.30) n'est pas vraie, et supposons que l'inégalité (ii) est stricte.

D'après (2.29) et de la continuité des fonctions impliquées, il existe t_1 tel que $t_0 \leq t_1 \leq T$ et

$$v(t_1) = w(t_1), \qquad v(t) < w(t), \qquad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{2.31}$$

Des relations (2.29) et (2.31), on en déduit que

$$v_{t_1} \leq w_{t_1}. \tag{2.32}$$

En posant $m(t) = v(t) - w(t)$ et en notant que $m(t_1) = 0$ et $m(t) \leq 0$, $t_0 \leq t \leq t_1$, nous obtenons du Lemme (2.3.1) que ${}^C D^\alpha m(t_1) \geq 0$, ce qui implique que ${}^C D^\alpha v(t_1) \geq^C D^\alpha w(t_1)$. Ainsi, en utilisant les relations (i), (ii), (2.32) et le caractère monotone de $f(t,\phi)$ en ϕ, nous arrivons à

$$f(t_1, v_1) \geq^C D^\alpha v(t_1) \geq^C D^\alpha w(t_1) > f(t_1, w_{t_1}) \geq f(t_1, v_{t_1}).$$

Cette contradiction prouve (2.30), et achève la démonstration. ■ Le résultat suivant est pour les inégalités (i), (ii) non strictes, qui nécessite une condition de type Lipshitz unilatérale.

Théorème 2.3.2 *([4]) Supposons que les conditions du Théorème 2.3.1 sont satisfaites avec les inégalités (i) et (ii) non strictes. Supposons de plus que*

$$f(t,\Phi) - f(t,\Psi) \leq \frac{L}{1+t^\alpha} \max_{-\tau \leq s \leq 0} (\Phi(s) - \Psi(s)), \tag{2.33}$$

partout où $\Phi(s) \geq \Psi(s)$ et $L > 0$. Alors $v_{t_0} \leq w_{t_0}$ implique

$$v(t) \leq w(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{2.34}$$

pourvu que $LT^\alpha \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$.

Preuve. On définit $w_\epsilon(t) = w(t) + \epsilon(1+t^\alpha), \epsilon > 0$ afin que nous ayons

$$w_{\epsilon,t} = w_t + \epsilon[1 + (t+s)^\alpha] \qquad et w_{\epsilon,t} \geq w_t, \;\; t_0 \leq t \leq T. \tag{2.35}$$

On a aussi

$$^{c}D^{\alpha}w_{\epsilon,t} =^{c} D^{\alpha}w(t) + \epsilon D^{\alpha}(1+t^{\alpha}) \geq f(t,w_t) + \epsilon[\frac{1}{t^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} + \Gamma(1+\alpha)]$$

$$\geq f(t,w_{\epsilon,t}) - \frac{L\epsilon}{1+t^{\alpha}} \max_{-\tau\leq s\leq 0}(w_{\epsilon,t} - w_t) + \epsilon[\frac{1}{t^{\alpha}(\Gamma(1-\alpha))} + \Gamma(1+\alpha)]$$

$$> f(t,w_{\epsilon,t}) - L\epsilon + \frac{\epsilon}{t^{\alpha}(\Gamma(1-\alpha))} \geq f(t,w_{\epsilon,t}).$$

Ici, nous avons utilisé les relations (2.34), (2.35) et la condition $LT^{\alpha} < \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$. Nous pouvons maintenant appliquer le Théorème (2.3.1) à v et w_{ϵ} pour voir $v(t) < w_{\epsilon}(t), \quad t_0 \leq t \leq T$. Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, nous concluons que (2.34) est vrai, ce qui achève la démonstration. ■

2.4 Existence globale et principe de comparaison

Le principe de comparaison suivant est fondamental dans l'étude des propriétés des solutions de IVP (2.25).

Théorème 2.4.1 *([4]) Soit $m \in C([t_0-\tau,\infty),\mathbb{R})$ qui satisfait l'inégalité*

$$^{C}D^{\alpha}m(t) \leq g(t, \mid m_t \mid_0), \quad t > t_0, \tag{2.36}$$

où $g \in C([t_0,\infty)\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$. Supposons que $\eta(t) = \eta(t,t_0,u_0)$ la solution maximale de l'IVP

$$^{C}D^{\alpha} = g(t,u), u(t_0) = u_0 > 0, \tag{2.37}$$

existe sur $[t_0,\infty)$. Alors, si $\mid m_{t_0} \mid_0 < 0$, nous avons

$$m(t) \leq \eta(t), \qquad t \in [t_0,\infty). \tag{2.38}$$

Preuve. Pour obtenir (2.38), il suffit de prouver que

$$m(t) < u(t,t_0,u_0,\epsilon), \qquad t \in [t_0,\infty), \tag{2.39}$$

où $u(t,t_0,u_0,\epsilon)$ est une solution de

$$^{C}D^{\alpha}u = g(t,u) + \epsilon, \qquad u(t_0) = u_0 + \epsilon,$$

$\epsilon > 0$ étant une quantité arbitrairement petite, puisque

$$\lim_{\epsilon\to 0} u(t,t_0,u_0,\epsilon) = \eta(t,t_0,u_0).$$

Si (2.39) n'est pas vrai, alors il existe un $t_1 > t_0$, puisque $\mid m_{t_0} \mid_0 < u_0 + \epsilon = u(t_1, t_0, u_0, \epsilon)$, tel que

$$m(t_1) = u(t_1, t_0, u_0, \epsilon), \quad m(t) < u(t, t_0, u_0, \epsilon), \;\; t_0 \leq t < t_1.$$

Maintenant, à partir du lemme 2.2.1, nous obtenons

$$^{C}D^{\alpha}m(t_1) \geq^{C} D^{\alpha}u(t_1, t_0, u_0, \epsilon) = g(t_1, u(t_1, t_0, u_0, \epsilon)) + \epsilon. \tag{2.40}$$

Étant donné que $g(t, u) \geq 0, u(t, t_0, u_0, \epsilon)$ est non décroissante en t, ce qui implique, à partir des considérations précédentes, que

$$\mid m_{t_1} \mid_0 = u(t_1, t_0, u_0, \epsilon) = m(t_1).$$

Ainsi, nous sommes amenés à l'inégalité

$$^{C}D^{\alpha}m(t_1) \leq g(t_1, \mid m_{t_1} \mid_0) = g(t_1, u(t_1, t_0, u_0, \epsilon_0)) + \epsilon.$$

Qui est incompatible avec (2.40). Par conséquent on a (2.38), ce qui achève la preuve. ■ Nous sommes maintenant prêts à prouver le résultat de l'existence globale pour l'IVP (2.25).

Théorème 2.4.2 *([4]) Soit $f \in C([t_0, \infty[\times \mathcal{C}), \mathbb{R})$ telle que pour $(t, \phi) \in [t_0, \infty) \times \mathcal{C}$,*

$$|f(t, \phi)| \leq g(t, |\phi|_0), \tag{2.41}$$

où $g \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et non décoisante en u pour tout t. Supposons que la solution maximale
$\eta(t) = \eta(t, t_0, u_0)$, du problème VIP (2.37) existe pour $t \geq t_0$. Alors, le plus large intervalle d'existence de toute solution $u(t_0, \phi_0)(t)$ de VIP (2.25) est $[t_0 - \tau, \infty[$.

Preuve. Soit $u(t_0, \phi_0)(t)$ une solution de l'VPI (2.25) qui existe sur un certain intervalle $[t_0 - \tau, \beta)$ où $t_0 < \beta < \infty$. Supposons que la valeur de β ne peut pas être augmentée. Définissons pour $t \in [t_0 - \tau, \beta)$,

$$m(t) = \mid u(t_0, \phi_0)(t) \mid$$

de telle sorte que

$$m_t = \mid u_t(t_0, \phi_0) \mid.$$

En utilisant l'hypothèse (2.41), il est facile d'obtenir pour $t \in [t_0, \beta)$, l'inégalité

$$^{C}D^{\alpha}m(t) \leq g(t, \mid m_t \mid_0).$$

En posant $\mid m_{t_0} \mid_0 = \mid \phi_0 \mid_0 \leq u_0$, nous obtenons, par le théorème 2.4.1,

$$\mid u(t_0, \phi_0)(t) \mid \leq \eta(t, t_0, u_0) \quad t_0 \leq t < \beta. \tag{2.42}$$

Puisque $g(t, u) \geq 0$, $\eta(t, t_0, u_0)$ est non décroissante, et par conséquent il en découle de (2.42) que

$$\mid u_t(t_0, \phi_0) \mid_0 \leq \eta(t, t_0, u_0), \quad t_0 \leq \beta, \tag{2.43}$$

et donc $|^c D^\alpha u(t_0, \phi_0)(t) \mid \leq g(t, \mid m_t \mid_0) \leq g(t, \eta(t, t_0, u_0)) \leq M$ pour $t_0 \leq t \leq \beta$, puisque on a supposé l'existance de $\eta(t, t_0, u_0)$ sur $[t_0, \infty[$. Maintenant pour $t_0 \leq t_1 \leq t_2 < \beta$, à partir du Lemme 2.2.2 on obtient

$$\mid u(t_0, \phi_0)(t_1) - u(t_0, \phi_0)(t_2) \mid \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2 - t_1)^\alpha.$$

En passant aux limites $t_1, t_2 \longrightarrow \beta^-$ et en utilisant le critère de Cauchy, il s'ensuit que la limite $\lim\limits_{t \to \beta^-} u(t_0, \phi_0)(t)$ existe.

Définissons $u(t_0, \phi_0)(\beta) = \lim\limits_{t \to \beta^-} u(t_0, \ \phi_0)(t)$ et considérons le nouveau problème VIP

$$^C D^\alpha u = f(t, u), \qquad u_\beta = u_\beta(t_0, \phi_0).$$

Vue l'existence locale, nous constatons que $u(t_0, \phi_0)(t)$ peut être prolongée au-delà de β, ceci est en contradiction avec notre hypothèse. Par conséquent, chaque solution $u(t_0, \phi_0)$ de l'VIP (2.25) existe sur $[t_0 - \tau, \infty)$ et ainsi la preuve est achevée. ■

Chapitre 3

Théorème de comparaison

Dans ce chapitre, qui constitue la partie principale de notre travail, nous étions motivés et inspirés par l'étude du cas ordinaire dans l'article ([8]). Nous nous intéressons aux comparaisons des solutions d'équations différentielles fractionnaires à retard, ainsi qu'aux inégalités différentielles à retard de type fractionnaire.

3.1 Théorème de comparaison : cas linéaire

Dans ce paragraphe, nous considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire à retards variables suivante

$$ {}^{C}D^{\alpha}u(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)u(t-\tau_i(t)), \quad t \geq 0, \tag{3.1} $$

où, n est un nombre entier positif, q_i et τ_i sont des fonctions continues telles que

$$ q_i(t) > 0,\ \tau_i(t) > 0, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad t \geq 0. \tag{3.2} $$

Étant donné un ensemble de fonctions retard $\tau_i(t)$, nous définissons

$$ T_t = \min_i \inf_{s \geq t}(s - \tau_i(s)), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{3.3} $$

Pour toute fonction (retard) initiale continue

$$ u(t) = \phi(t), \quad t \in [T_0, 0], \tag{3.4} $$

il existe une solution unique de (3.1) satisfaisant (3.4) (voir chapitre 2, Théorèmes 2.2.3, 2.4.2 et 2.2.6).

Étant donné une fonction continue $\phi(t)$ définie sur $[T_0, 0]$, soit $u(t)$ la solution unique de (3.1) qui satisfait (3.4). Supposons qu'il existe une autre fonction $v(t)$ telle que

$$^{C}D^{\alpha}v(t) \geq \sum_{i=1}^{n} q_i(t)v(t-\tau_i(t)), \quad t \geq 0. \tag{3.5}$$

Nous avons le théorème de comparaison suivant.

Théorème 3.1.1 *Si $u(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T[$, $T > 0$ (cela signifie que nous supposons $u(0) = \phi(0) > 0$), et $v(t)$ une fonction qui satisfait (3.5) telle que*

$$v(t) \geq \phi(t),\ t \in [T_0, 0] \text{ et } v(0) = \phi(0). \tag{3.6}$$

Alors $v(t) \geq u(t)$ pour tout $t \in [0, T[$, $T > 0$ (où l'intervalle peut être fermé si T est fini).

Preuve. Soit $a \in]0, T[$. Il suffit de montrer que $v(a) \geq u(a)$. Pour $1 \leq i \leq n$, définissons

$$F_a = \min\{\tau_i(t), t \in [0, a], 1 \leq i \leq n\}. \tag{3.7}$$

Puisque chaque fonction τ_i est continue et positive par hypothèse, alors $F_a > 0$.

Supposons d'abord que $F_a \geq a$. Ainsi, pour tout $s \in [0, a]$ et tout $1 \leq i \leq n$, on a $\tau_i(s) \geq a$. Par conséquent

$$s - \tau_i(s) \leq 0, \quad \forall s \in [0, a].$$

Pour tout $t \in [0, a]$, la fonction u solution de (3.1), et la fonction v qui satisfait (3.5) vérifient

$$\begin{aligned}
v(t) &\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s-\tau_i(s)) ds \\
&\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) \phi(s-\tau_i(s)) ds \\
&\geq \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) \phi(s-\tau_i(s)) ds \\
&= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s-\tau_i(s)) ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, $v(a) \geq u(a)$, et puisque a est quelconque dans l'intervalle $]0, T[$, on a bien

$$v(t) \geq u(t),\ \forall t \in]0, T[.$$

Supposons maintenant que $a > F_a$.

Partitionnons l'intervalle $[0, a]$ en m intervalles emboités : $[0, F_a], [0, 2F_a], \ldots, [0, mF_a]$, où $m = [a/F_a]$, si (a/F_a) est un nombre entier, sinon en $(m+1)$ intervalles : $[0, F_a], [0, 2F_a], \ldots, [0, mF_a]$ et $[0, a]$. Remarquons d'abord que pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\text{si , } s \in [kF_a, (k+1)F_a], \text{ alors } \quad s - \tau_i(s) \leq kF_a, \quad 0 \leq k \leq m-1. \tag{3.8}$$

En effet, en supposant le contraire de 3.8, il existe un $s_0 \in [kF_a, (k+1)F_a]$ tel que $s_0 - \tau_i(s_0) > kF_a$, de sorte que $s_0 > \tau_i(s_0) + kF_a \geq F_a + kF_a = (k+1)F_a$, ce qui est en contradiction avec le fait que $s_0 \leq (k+1)F_a$. D'une manière similaire (dans le cas où (a/F_a) n'est pas un nombre entier).

$$s - \tau_i(s) \leq mF_a \text{ pour, } s \in [mF_a, a]. \tag{3.9}$$

Ici, on reproduit le raisonnement précédent successivement sur les intervalles $[0, F_a], [0, 2F_a], \ldots, [0, mF_a]$ (et $[0, a]$).

Commençons par l'intervalle $[0, F_a]$. Pour tout $t \in [0,\ F_a]$, la fonction u solution de (3.1), et la fonction v qui satisfait (3.5) vérifient

$$\begin{aligned}
v(t) &\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s - \tau_i(s)) ds \\
&\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) \phi(s - \tau_i(s)) ds \\
&\geq \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) \phi(s - \tau_i(s)) ds \\
&= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s - \tau_i(s)) ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$v(t) \geq u(t),\ \forall t \in [0,\ F_a].$$

Passons maintenant à l'intervalle $[0, 2F_a]$. D'aprés l'étape précédente il suffit de montrer l'inégalité pour $t \in]F_a,\ 2F_a]$. Ainsi, en prenant $t \in]F_a,\ 2F_a]$ la fonction u solution de (3.1), et la fonction v qui satisfait (3.5) vérifient

$$\begin{aligned}
v(t) \geq v(0) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{F_a} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s - \tau_i(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s - \tau_i(s)) ds.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Puisque

$$s - \tau_i(s) \leq F_a \text{ pour tout } s \in]F_a,\, 2F_a], \tag{3.11}$$

alors

$$\forall s \in]F_a,\, 2F_a], \quad v(s - \tau_i(s)) \geq u(s - \tau_i(s)),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
v(t) &\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{F_a} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s - \tau_i(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s - \tau_i(s)) ds \\
&\geq u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{F_a} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s - \tau_i(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s - \tau_i(s)) ds \\
&= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s - \tau_i(s)) ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$v(t) \geq u(t), \quad \text{pour tout } t \in [0,\, 2F_a],$$

On poursuit un raisonnement analogue, succssivement sur les intervalles $[0,\ 3F_a], dots, [0,\ mF_a]$. Donc, pour avoir l'inégalité sur l'intervalle $[0,\, mF_a]$, il suffit de montrer que pour tout $t \in](m-1)F_a,\, mF_a]$, on a $v(t) \geq u(t)$.

Sachant que $s - \tau_i(s) \leq (m-1)F_a$ lorsque $s \in](m-1)F_a,\, mF_a]$, on a

$$v(s - \tau_i(s)) \geq u(s - \tau_i(s)).$$

Ainsi, la fonction u solution de (3.1), et la fonction v qui satisfait (3.5) vérifient

$$\begin{aligned}
v(t) &\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{(m-1)F_a} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s-\tau_i(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{(m-1)F_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s-\tau_i(s)) ds. \\
&\geq u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{(m-1)F_a} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s-\tau_i(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{(m-1)F_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s-\tau_i(s)) ds \\
&= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s-\tau_i(s)) ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$v(t) \geq u(t), \quad \text{pour tout } t \in [0,\, mF_a].$$

Par conséquent, si $\dfrac{a}{F_a}$ est un nombre entier, alors $a = mF_a$ et l'inégalité est satisfait sur l'intervalle $[0, a]$. Sinon, en s'appuyant sur les mêmes arguments précédents, on peut la démontrer sur l'intervalle $]mF_a, a]$. En effet, puisque $s \in]mF_a, a]$ implique $s - \tau_i(s) \leq mF_a$, si $t \in [mF_a,\, a]$ on obtient

$$\begin{aligned}
v(t) &\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{mF_a} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s-\tau_i(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{mF_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) v(s-\tau_i(s)) ds. \\
&\geq u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{mF_a} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s-\tau_i(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{mF_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s-\tau_i(s)) ds \\
&= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} q_i(s) u(s-\tau_i(s)) ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$v(t) \geq u(t), \quad \text{pour tout } t \in [0,\, a].$$

Ceci complète la preuve de théorème, puisque a est quelconque dans l'intervalle

$]0, T[$. ■

3.2 Théorème de comparaison : cas non linéaire

Dans le paragraphe précédent, on a présenté résultat sur la comparaison des solutions d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire à retards variables linéaire. Ce paragraphe est consacré au cas non linéaire.

Considérons l'équation suivante

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t,\, u(t-\tau_1(t)), u(t-\tau_2(t)), \ldots, u(t-\tau_n(t))), \qquad t \geq 0, \qquad (3.12)$$

où, $f : \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive, et monotone croissante par rapport aux derniéres n variables : pour tout $t \in \mathbb{R}^{+}$, u_i et v_i dans $\mathbb{R}$ avec $i = 1, \ldots, n$

$$u_1 \geq v_1, \ldots, u_n \geq v_n \Longrightarrow f(t,\, u_1, \ldots, u_n) \geq f(t,\, v_1, \ldots, v_n), \qquad (3.13)$$

et τ_i sont des fonctions continues telles que

$$\tau_i(t) > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \geq 0. \qquad (3.14)$$

Etant donné un ensemble de fonctions retard $\tau_i(t)$, nous définissons

$$T_t = \min_{i} \inf_{s \geq t} (s - \tau_i(s)), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (3.15)$$

Pour toute fonction (retard) initiale continue

$$u(t) = \phi(t), \quad t \in [T_0, 0], \qquad (3.16)$$

il existe une solution unique de (3.12) satisfaisant (3.16) (voir chapitre 2, Théorèmes 2.2.3, 2.4.2 et 2.2.6).

Étant donné une fonction continue $\phi(t)$ définie sur $[T_0, 0]$, soit $u(t)$ la solution unique de (3.12) qui satisfait (3.16). Supposons qu'il existe une autre fonction $v(t)$ telle que

$$^{C}D^{\alpha}v(t) \geq f(t,\, v(t-\tau_1(t)), v(t-\tau_2(t)), \ldots, v(t-\tau_n(t))), \qquad t \geq 0. \qquad (3.17)$$

Enonçons maintenant le théorème de comparaison concernant le cas non linéaire.

Théorème 3.2.1 *Si $u(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T[$, $T > 0$ (donc $u(0) = \phi(0) > 0$),* *et $v(t)$ une fonction qui satisfait (3.17) telle que*

$$v(t) \geq \phi(t), \quad t \in [T_0, 0] \quad et \quad v(0) = \phi(0). \tag{3.18}$$

Alors $v(t) \geq u(t)$ pour tout $t \in [0, T[$, $T > 0$ (où l'intervalle peut être fermé si T est fini).

Pour démontrer ce théorème, on suivra les mêmes étapes que celles du théorème précédent. **Preuve.** Soit $a \in]0, T[$. Il suffit de montrer que $v(a) \geq u(a)$. Pour $1 \leq i \leq n$, définissons

$$F_a = \min\{\tau_i(t), t \in [0, a], 1 \leq i \leq n\}. \tag{3.19}$$

Chaque fonction τ_i étant continue et positive par hypothèse, on a $F_a > 0$.

Supposons d'abord que $F_a \geq a$. Ainsi, pour tout $s \in [0, a]$ et tout $1 \leq i \leq n$, on a $\tau_i(s) \geq a$. Par conséquent

$$s - \tau_i(s) \leq 0, \quad \forall s \in [0, a].$$

Pour tout $t \in [0, a]$, la fonction u solution de (3.12), et la fonction v qui satisfait (3.17) vérifient

$$\begin{aligned}
v(t) &\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, v(s - \tau_1(s)), v(s - \tau_2(s)), ..., v(s - \tau_n(s)))ds \\
&\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, \phi(s - \tau_1(s)), \phi(s - \tau_2(s)), ..., \phi(s - \tau_n(s)))ds \\
&\geq \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, \phi(s - \tau_1(s)), \phi(s - \tau_2(s)), ..., \phi(s - \tau_n(s)))ds \\
&= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s - \tau_1(s)), u(s - \tau_2(s)), ..., u(s - \tau_n(s)))ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Donc, $v(a) \geq u(a)$, tenant compte du fait que a est arbitraire dans l'intervalle $]0, T[$, on a bien

$$v(t) \geq u(t), \, \forall t \in]0, T[.$$

Supposons maintenant que $a > F_a$.

Partitionnons l'intervalle $[0, a]$ en m intervalles emboités : $[0, F_a], [0, 2F_a], \ldots, [0, mF_a]$, où $m = [a/F_a]$, si (a/F_a) est un nombre entier ; sinon en $(m + 1)$ intervalles : $[0, F_a], [0, 2F_a], \ldots, [0, mF_a]$ et $[0, a]$. Remarquons d'abord que pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\text{si , } s \in [kF_a, (k+1)F_a], \text{ alors } s - \tau_i(s) \leq kF_a, \quad 0 \leq k \leq m - 1. \tag{3.20}$$

En effet, en supposant le contraire de (3.20), il existe un $s_0 \in [kF_a, (k+1)F_a]$ tel que $s_0 - \tau_i(s_0) > kF_a$, de sorte que $s_0 > \tau_i(s_0) + kF_a \geq F_a + kF_a = (k+1)F_a$, ce qui est en contradiction avec le fait que $s_0 \leq (k+1)F_a$. D'une manière similaire (dans le cas où (a/F_a) n'est pas un nombre entier).

$$s - \tau_i(s) \leq mF_a \text{ pour, } s \in [mF_a, a]. \tag{3.21}$$

Ici, on reproduit le raisonnement précédent successivement sur les intervalles $[0, F_a], [0, 2F_a], \ldots, [0, mF_a]$ (et $[0, a]$).

Commençons par l'intervalle $[0, F_a]$. Tenant compte de (3.13), pour tout $t \in [0,\ F_a]$ la fonction u solution de (3.12), et la fonction v qui satisfait (3.17) vérifient

$$\begin{aligned}
v(t) &\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ v(s-\tau_1(s)), v(s-\tau_2(s)), ..., v(s-\tau_n(s)))ds \\
&\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ \phi(s-\tau_1(s)), \phi(s-\tau_2(s)), ..., \phi(s-\tau_n(s)))ds \\
&\geq \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ \phi(s-\tau_1(s)), \phi(s-\tau_2(s)), ..., \phi(s-\tau_n(s)))ds \\
&= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$v(t) \geq u(t),\ \forall t \in [0,\ F_a].$$

Passons maintenant à l'intervalle $[0, 2F_a]$. D'aprés l'étape précédente il suffit de montrer l'inégalité pour $t \in]F_a,\ 2F_a]$. Ainsi, en prenant $t \in]F_a,\ 2F_a]$ la fonction u solution de (3.12), et la fonction v qui satisfait (3.17) vérifient

$$\begin{aligned}
v(t) \geq v(0) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{F_a} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ v(s-\tau_1(s)), v(s-\tau_2(s)), ..., v(s-\tau_n(s)))ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{F_a}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ v(s-\tau_1(s)), v(s-\tau_2(s)), ..., v(s-\tau_n(s)))ds.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Puisque

$$s - \tau_i(s) \leq F_a \text{ pour tout } s \in]F_a,\ 2F_a], \tag{3.23}$$

alors

$$\forall s \in]F_a,\ 2F_a], \quad v(s-\tau_i(s)) \geq u(s-\tau_i(s)),$$

tenant compte de (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}
v(t) \geq v(0) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{F_a} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, v(s-\tau_1(s)), v(s-\tau_2(s)), ..., v(s-\tau_n(s)))ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{F_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, v(s-\tau_1(s)), v(s-\tau_2(s)), ..., v(s-\tau_n(s)))ds \\
\geq v(0) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{F_a} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{F_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
= u(0) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$v(t) \geq u(t), \quad \text{pour tout } t \in [0,\, 2F_a],$$

On poursuit un raisonnement analogue, succssivement sur les intervalles $[0,\ 3F_a], \ldots, [0,\ mF_a]$. Donc, pour avoir l'inégalité sur l'intervalle $[0, mF_a]$, il suffit de montrer que pour tout $t \in](m-1)F_a,\, mF_a]$, on a $v(t) \geq u(t)$.

Sachant que $s - \tau_i(s) \leq (m-1)F_a$ lorsque $s \in](m-1)F_a,\, mF_a]$, on a

$$v(s-\tau_i(s)) \geq u(s-\tau_i(s)).$$

Ainsi, la fonction u solution de (3.12), et la fonction v qui satisfait (3.17) vérifient

$$\begin{aligned}
v(t) \geq v(0) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(m-1)F_a} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, v(s-\tau_1(s)), v(s-\tau_2(s)), ..., v(s-\tau_n(s)))ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{(m-1)F_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, v(s-\tau_1(s)), v(s-\tau_2(s)), ..., v(s-\tau_n(s)))ds \\
\geq u(0) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(m-1)F_a} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{(m-1)F_a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
= u(0) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$v(t) \geq u(t), \quad \text{pour tout } t \in [0,\, mF_a].$$

Par conséquent, si $\dfrac{a}{F_a}$ est un nombre entier, alors $a = mF_a$ et l'inégalité est satisfait sur l'intervalle $[0, a]$. Sinon, en s'appuyant sur les mêmes arguments précédents, on peut la démontrer sur l'intervalle $]mF_a, a]$. En effet, puisque $s \in]mF_a, a]$ implique $s - \tau_i(s) \leq mF_a$, si $t \in [mF_a,\, a]$ on obtient

$$\begin{aligned}
v(t) \geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{mF_a} & (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, v(s-\tau_1(s)), v(s-\tau_2(s)), ..., v(s-\tau_n(s)))ds \\
+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{mF_a}^{t} & (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, v(s-\tau_1(s)), v(s-\tau_2(s)), ..., v(s-\tau_n(s)))ds \\
\geq u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{mF_a} & (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{mF_a}^{t} & (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} & (t-s)^{\alpha-1} f(s,\, u(s-\tau_1(s)), u(s-\tau_2(s)), ..., u(s-\tau_n(s)))ds \\
= u(t). &
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$v(t) \geq u(t), \quad \text{pour tout } t \in [0,\, a].$$

Ceci complète la preuve de théorème, puisque a est quelconque dans l'intervalle $]0, T[$. ■

3.3 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$f(t, x_1, x_2) = \sin^2(t)e^{x_1} + \cos^2(2t)e^{2x_2},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

On voit bien que la fonction f vérefie (3.13), puisqu'elle est positive, et monotone croissante par rapport aux deux derniéres variables, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Définissions les deux fonctions suivantes

$$\tau_1(t) = sin^2(t) + 1; \quad \forall t \geq 0,$$

et

$$\tau_2(t) = cos^2(2t) + 1; \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi, la condition (3.14) est satisfaite.
Considérons maintenant l'équation

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = \sin^2(t)e^{u(t-\tau_1(t))} + \cos^2(2t)e^{u(t-\tau_2(t))}. \tag{3.24}$$

D'après les définissions de τ_1, et τ_2, T_0 est bien défini par (3.15).

Étant donné une fonction continue $\phi(t)$ définie sur $[T_0, 0]$, soit $u(t)$ la solution unique de (3.24) qui satisfait (3.16). S'il existe une autre fonction $v(t)$ telle que

$$^{C}D^{\alpha}v(t) \geq \sin^2(t)e^{v(t-\tau_1(t))} + \cos^2(2t)e^{v(t-\tau_2(t))}, \qquad t \geq 0, \tag{3.25}$$

qui vérifie (3.18), alors d'aprés le théorème 3.2.1 on a,
nécessairement l'inégalité suivante

$$v(t) \geq u(t). \qquad t \geq 0.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié une comparaison entre les solutions d'équations différentielles fractionnaires à retard au sens de Caputo, en utilisant des inégalités intégrales de type fractionnaires à retard, par une approche étape par étape.

Premièrement, nous avons introduit quelques outils de base nécessaires au travail présenté dans ce mémoire : les définitions des dérivés de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que les outils principaux du calcul fractionnaire. D'autre part, nous avons présenté quelques résultats et théorèmes de comparaison sur les équations différentielles fractionnaires, qui existent déjà dans la littérature.

Ensuite, on a étudié certaines équations et inéquations différentielles fractionnaires à retard, pour lesquelles on a déterminé des conditions qui permettent la comparaison de leurs solutions. Nous avons considéré deux cas d'équations différentielles fractionnaires à retard : le cas linéaire et le cas non-linéaire.

Pour terminer, nous avons donné un exemple d'équation différentielle fractionnaire à retard, pour illustrer les résultats que nous avons présenté.

Bibliographie

[1] Dib, H. *Equations Différentielles Fractionnaires, EDA-EDO (4ème Ecole) - Tlemcen 23-27 mai 2009, (2009).*

[2] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential, Lecture Notes in Mathematics* **V. 2004**, *Springer-Verlag, Berlin (2010).*

[3] Kilbas, A. A. A. Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. *Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006). Equations, Springer. (2004).*

[4] Lakshmikantham, V. *Theory of fractional functional differential equations*, Nonlinear Analysis **69** (2008) 3337-3343.

[5] Lakshmikantham, V. Vatsala, A. S. *Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Analysis* ***69*** *(2008) 2677-2682.*

[6] Lakshmikantham, V. Vatsala, A.S. *Theory of fractional differential inequalities and applications, Commun. Appl. Anal. 11 (2007) 395-402.*

[7] Lakshmikantham, V. Leela, S. *Differential and Integral Inequalities, vol. I and II, Academic Press, New York, 1969*

[8] Man Kam Kwong, A. and William T. Patula, *Theorems for First Order Linear Delay Equations*, Journal of Differential Equations **70**, 275-292 (1987).

[9] Miller, K. S. and Ross, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons Inc, New York, (1993).*

[10] Oldham, K. B. and Spanier, J. *The Fractional Calculus, Academic Press, New York, London, (1974).*

[11] Samko, S. G. Kilbas, A. A. and Marchev, O. I. *Fractional Integrals and Derivatives ; Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, (1993).*