



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département De Mathématiques



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Pour l'obtention du Diplôme de
MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Solutions positives maximale et minimale d'une classe
de problèmes aux limites avec des conditions nonlocales**

**Présenté par : ASSIA MAIZA et
SARA BELLA BACI**

**Soutenu publiquement le 06/06/2023
devant le jury composé de:**

Ben Ali brahim	MCA.	Président	Univ. El Oued
GUEDDA Lamine	MCA.	Rapporteur	Univ. El Oued
Belhadi hfoda	MC.	Examineur	Univ. El Oued

Promotion : 2022/2023

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail:

A nos chers parents.

A nos chers frères et sœurs.

A toute la famille.

ET

A tous les amis.

Remerciements

En premier lieu, nous remercions **Allah** qui nous avoir donné le courage et la volonté afin d'accomplir ce modeste travail.

Nos plus vifs remerciements vont aussi à l'encadreur en ce travail **Dr. Guedda Lamine** pour son aide continue, ses précieux conseils et être patient avec nous.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Nous remercions à tous les enseignants du département mathématique pour toute l'aide apportée à nous durant notre trajet scolaire

Nous remercions les parents généreux pour leur soutien et leur encouragement à atteindre les plus hauts rangs

Et nous remercions nos chers frères et sœurs.

Nous remercions les amis et les collègues.

Enfin, nous adressons nos remerciements à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Quelques éléments de la topologie	3
1.1.1 Espace métrique	3
1.1.2 Suites dans les espaces métriques	3
1.1.3 Espaces vectoriel normé	4
1.1.4 Espace de Banach	5
1.1.5 Boules, adhérence	5
1.1.6 Parties compactes - Parties convexes	5
1.2 Outils d'analyse fonctionnelle	6
1.2.1 Parties équicontinues -Parties uniformément bornées	6
1.2.2 Théorème d'Arzela-Ascoli	7
1.2.3 Théorème du point fixe de Schauder	7
1.3 Intégrale et dérivée fractionnaire	7
1.3.1 La fonction Gamma	7
1.3.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	9
1.3.3 Dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville	11
1.4 Autres définitions	12
1.4.1 Cône d'un espace de Banach	12
1.4.2 Fonction $\mathbf{L}^1$ - Carathéodory	13
1.4.3 Solution maximale - Solution minimale	13
1.4.4 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue	13
2 Résultats d'existence pour...	14
2.1 Reformulation du problème	14
2.2 Cadre fonctionnel	16
2.3 Solutions maximale et minimale	20
3 Autre resultat d'existence	22
3.1 Reformulation du problème	22
3.2 Cadre fonctionnel	24
3.3 Nonlocal integral condition	25
Conclusions et perspectives	26

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail:

ensembles

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positif.
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels positif non nuls
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels.
(a, b)	c'est-à-dire la domaine $[a, b]$ ou $]a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b[$.
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes.
$C^n([a, b])$	l'espace des fonctions f continues et ayant des dérivées jusqu'à l'ordre n continues sur $[a, b]$.
$L_{loc}^p([a, b])$	L'espace des fonctions $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $ f ^p$ localement intégrables.
$L^p([a, b])$	L'espace des fonctions $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $ f ^p$ intégrables.
$AC^n([a, b])$	l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ continues sur $[a, b]$. et la dérivée d'ordre n appartient $L^1([a, b])$.
$\ \cdot\ _{L^p([a, b])}$	La norme sur l'espace $L^p([a, b])$, $\ f\ _{L^p([a, b])} = \left(\int_a^b f(t) ^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$.
$\ \cdot\ _\infty$	La norme sur l'espace des fonctions continues $\ f\ _\infty = \sup_{x \in [a, b]} f(x) $.
Fonctions	
$\Gamma(\cdot)$	La fonction Gamma d'Euler.

Dérivée et intégrale

$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$	dérivée d'ordre entier n .
D^n	La dérivation d'ordre entier.

${}^R D_a^\alpha$	La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α
${}^C D_a^\alpha$	La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α
I_a^α	L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α
Raccourcis	
$R - L$	Riemann-Liouville
<i>i.e</i>	c'est-à-dire
<i>p.p</i>	presque partout

Introduction

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par la même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration est l'opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre -1 . On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle, à l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{df^n}{dt^n}$ pour désigner la $n^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu: Que signifie $\frac{df^n}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. De nombreuses tentatives pour la résolution des équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{ème} siècle, inclut: P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Amor (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de 30 ans, elle a été objet de quelques conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une

collaboration commune, commencé en 1968.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'étude de dérivée et intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

La dérivation fractionnaire fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations différentielles et intégrales. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matériaux qui conservent la mémoire des transformations passées [1]. D'où l'intérêt particulier porté sur les équations différentielles fractionnaires pendant ces dernières décennies.

Alors que l'étude des problèmes aux limites associés à des équations différentielles fractionnaires linéaires joue un rôle de premier plan dans la théorie de l'arithmétique fractionnaire est dans l'étude des phénomènes physiques par l'interprétation physique des conditions aux limites.

Les problèmes liés aux conditions es ont été largement étudiés par plusieurs auteurs au cours des deux dernières décennies. Dans ce mémoire, nous étudions l'existence d'au moins une solution positive pour le problème aux limites avec conditions non locales associé à l'équation différentielle ordinaire.

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, t \in (0, 1) \quad (1)$$

avec les conditions non locales

$$u(0) = 0, u(1) + D_{0+}^{\alpha} u(t)|_{t=1} = 0 \quad (2)$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une L^1 -Carathéodory et D_{0+}^{α} dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0, 1)$.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante:

Premier chapitre: Contient plusieurs définitions et propriétés concernant des notions topologiques comme: les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach et quelques, définitions et propriétés concernant des notions sur les cônes. Ainsi que quelques notions d'analyse fonctionnelle: comme (Parties équi continues, uniformément borné, opérateur compact) et quelque théorèmes comme le théorème d'Ascoli- Arzela et le théorème de point fixe de Schauder, une grande autre partie de ce chapitre est consacrée au intégrales et dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville et d'autres définitions comme la fonction L^1 - Carathéodory et définition générale des solutions maximale et minimale.

Deuxième chapitre: Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence de solutions pour le problème aux limites 1 -2 en suivant quelques étapes (reformulation l'équation différentielle à une équation intégrale (problème de point fixe) ensuite fournir des conditions sur la non linéarité f et appliquer le théorème du point fixe de Schauder et finalement montrer l'existence d'une solution maximale et une solution minimale).

Troisième chapitre: l'étude d'existence de solutions pour un deuxième problème aux limites avec des étapes similaires à ce qui est utilisé précédemment.

Préliminaires

1.1 Quelques éléments de la topologie

1.1.1 Espace métrique

Définition 1.1. (Distance)

Soit E un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur E est une application: $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaisant les propriétés suivantes:

1. $\forall u, v \in E, \quad d(u, v) \geq 0 \quad \text{et} \quad d(u, v) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad u = v, \text{ (séparation).}$
2. $d(u, v) = d(v, u), \text{ (symétrique).}$
3. $\forall u, v, w \in E, d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w), \text{ (inégalité triangulaire).}$

Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble non vide et d une distance sur E .

1.1.2 Suites dans les espaces métriques

Définition 1.2. (La convergence)

Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge vers un point $l \in E$, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que:

$$d(x_n, l) < \epsilon, \quad \text{pour tout } n \geq N_\epsilon.$$

On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ ou, $x_n \rightarrow l$.

Propriétés 1.1.

Toute suite convergente est bornée.

Preuve:

Supposons que la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe alors, $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N_0 \implies |U_n - l| \leq 1,$$

alors, $\forall n \geq N_0$ on a

$$\begin{aligned} |U_n| &= |U_n - l + l| \leq |U_n - l| + |l| \\ &\leq 1 + |l|, \end{aligned}$$

on a donc, $|U_n| \leq 1 + |l|$. Si on pose $M = \max(|U_0|, |U_1|, \dots, |U_{N_0-1}|, 1 + |l|)$, il vient, $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq M$. Par conséquent, la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Définition 1.3. (Suite de Cauchy)

On dit que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (E, d) est de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon > 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}; \quad m \geq n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

on écrit alors $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$, quand $n, m \rightarrow +\infty$.

Proposition 1.1.

Toute suite convergente d'un espace métrique (E, d) est de Cauchy.

Preuve:

Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite converge vers l , cela veut dire que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_\varepsilon : d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\forall n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}, d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(l, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Par conséquent, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Définition 1.4. (Continuité)

Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques $f : E \rightarrow F$ une application et $a \in E$, on dit que f est continue au point a si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E, \quad d_E(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.5. (Continuite uniforme)

On dit que f est uniformément continue sur E si:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, x' \in E, \quad d_E(x, x') < \alpha \Rightarrow d_F(f(x), f(x')) < \varepsilon,$$

$\alpha(\varepsilon)$ ne dépend pas de x, x' .

1.1.3 Espaces vectoriel normé

C'est une classe importante d'espaces métriques, dont les espaces euclidiens sont le modèle de base. En générale, un espace vectoriel normé est un espace vectoriel sur lequel il existe une métrique compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Définition 1.6. (Espace vectoriel normé)

Soit E un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E toute application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie:

- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation).

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) où $|\lambda|$ désigne respectivement la valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (l'inégalité triangulaire).

E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est dit espace vectoriel normé et est noté par $(E, \|\cdot\|)$.

Remarques:

- L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur E qui s'appelle la distance associée à la norme. Par conséquent, tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrique.

- Toute application vérifie les 3 conditions précédentes sauf la première implication de la condition de séparation est appelée semi norme.

1.1.4 Espace de Banach

Dans cette partie, nous étudierons quelques propriétés de l'espace de Banach.

Définition 1.7. (Espaces de Banach)

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé **complet** pour la distance associée à sa norme. c'est-à-dire que dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente.

1.1.5 Boules, adhérence

Définition 1.8. (Boule)

Soit (E, d) un espace métrique, a un point de E et $r > 0$, on définit la boule (ouverte) de centre a et rayon r par:

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}.$$

Définition 1.9. (Adhérence d'un sous ensemble)

Soit A un sous-ensemble de l'espace métrique E . On définit l'adhérence de A par:

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Propriétés 1.2.

1. A est fermé $\Leftrightarrow \overline{A} = A$.
2. $\overline{A} = \{x \in E \mid \exists \text{ une suite } (x_n)_n \subset A \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x\}$.

1.1.6 Parties compactes - Parties convexes

Définition 1.10. (Espace métrique compact)

On dit que (E, d) est un espace métrique compact si toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E admet une suite extraite convergente vers un point de E .

Définition 1.11. (Parties relativement compactes)

Une partie S d'un espace métrique (E, d) est dite relativement compacte si l'adhérence de S est une partie compacte de E .

Définition 1.12. (Ensembles convexes)

Un sous-ensemble C de E est dit convexe si pour tout $x, y \in C$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

1.2 Outils d'analyse fonctionnelle

Soient E, F deux espaces de Banach.

1.2.1 Parties équicontinues -Parties uniformément bornées

Définition 1.13. (Parties équicontinues)

Soit M un sous ensemble de l'espace $C(E, F)$.

1. On dit que M est équicontinue en $x \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que:

$$\|f(x) - f(v)\|_F < \epsilon.$$

et ceci pour tout $f \in M$ et pour tout $u, v \in E$ vérifiant:

$$\|u - v\|_E < \eta.$$

2. **Cas particulier:**

On dit que M est équicontinue sur E , si M est équicontinue en tout $u \in E$. Si $E = [a, b]$ et $F = \mathbb{R}$. On dit qu'une partie M de $C(E, F)$ est équicontinue en $x \in E$ si et seulement si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in M, \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Définition 1.14. (uniformément borné)

Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$. On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que:

$$\|f\| \leq C \quad \forall f \in M$$

Définition 1.15. (opérateur compact)

Soit $A : E \longrightarrow F$ On dit que A est compact s'il est continu et l'image de tout borné de E est relativement compact (c'est-à-dire son adhérence est compact) dans F .

Cas particulier:

Si $A \in L(E, F)$ on dit que A est une application compact si et seulement si une des trois propositions équivalentes suivantes est vérifiée:

- L'image de tout borné de E est relativement compact dans F .
- $A(B_E(0, 1))$ est relativement compact dans F .
- De toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous suite telle que $(Ax_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, converge dans F quand $k \rightarrow \infty$.

L'ensemble de toute les applications compactes est note par $K(E, F)$.

1.2.2 Théorème d'Arzela-Ascoli

Théorème 1.1.

Soient (E, d_E) un espace métrique compact et (F, d_F) un espace métrique complet. On désigne par $C(E, F)$ l'espace de toutes les fonctions $f : E \rightarrow F$ continues. Une partie M de $C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si:

1. M est équicontinue.
2. Pour tout $x \in E$, la partie $M(x)$ défini par:

$$M(x) = \{f(x); f \in M\}$$

est relativement compact dans F .

Cas particuliers:

1. Si F est un espace de Banach de dimension fini, la deuxième condition du théorème d'Ascoli-Arzela est équivalente à M est uniformément borné c'est-à-dire il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in F$

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in E} \|x(t)\| \leq C.$$

En particulier; pour $F = \mathbb{R}$ (puisque dans ce cas, pour tout $x \in E$, $\overline{M(t)}$ est une partie fermée bornée d'un espace de dimension fini $F = \mathbb{R}$).

2. Si F est espace métrique compact, alors le théorème d'Ascoli-Arzela can peut être exprimé comme suit: la famille $M \subset C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si M est équicontinue.

1.2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.2. (théorème du point fixe de Schauder)[7]

Soit (E, d) un espace métrique, soit U un sous-ensemble convexe fermé de E , et soit $A : U \rightarrow U$ un application tel que l'ensemble $\{Au : u \in U\}$ est relativement compact dans E . Alors A a au moins un point fixe.

1.3 Intégrale et dérivée fractionnaire

1.3.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge la factorielle définie pour les entiers naturelles aux valeur réelles.

Définition 1.16.

La fonction Gamma est définie par l'intégrale:

$$\Gamma : \alpha \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (1.1)$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Propriétés 1.3.

La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \alpha > 0$$

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Preuve:

$$1. \quad \Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha+1-1} dt.$$

Si $0 < a < b$, alors en intégrant par parties nous avons que:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-t} t^{\alpha+1-1} dt &= \int_a^b e^{-t} t^{\alpha} dt \\ &= [-t^{\alpha} e^{-t}]_a^b + \alpha \int_a^b e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{a^{\alpha}}{e^a} - \frac{b^{\alpha}}{e^b} + \alpha \int_a^b e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

Quand $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow +\infty$, on trouve:

$$\Gamma(\alpha + 1) = 0 - 0 + \alpha\Gamma(\alpha),$$

done:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

2. Montrons par recurrence

Si $n = 0$, alors:

$$\Gamma(0 + 1) = \Gamma(1) = 1 = 0!.$$

Supposons la formule vérifiée pour $n - 1$, i.e

$$\Gamma((n - 1) + 1) = \Gamma(n) = (n - 1)!.$$

Montrons que la formule est vérifiée pour n , d'après l'équation (1.2), on trouve:

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!$$

3.

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1 \end{aligned}$$

4.

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(1/2)-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt.$$

Maintenant si $0 < a < b$, nous avons après un changement de variables

$$\int_a^b e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-x^2} 2dx,$$

où

$$\begin{cases} x = t^{1/2} \\ dx = (1/2)t^{-1/2} dt \end{cases},$$

si $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow +\infty$, alors nous obtenons:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Posons $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Alors:

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)^2} dx dy.$$

Nous pouvons maintenant utiliser les coordonnées polaires et nous obtenons après ce changement,

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r \, d\theta \, dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4},$$

donc $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ car $I > 0$ et ceci est vrai tout simplement parce que $e^{-(x)^2} > 0$ pour tout x . Donc ;

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

1.3.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ on considère l'intégrale

$$\begin{aligned} I_{a+}^1 &= \int_a^t f(x) dx. \\ I_{a+}^2 &= \int_a^t dx \int_a^x f(u) du, \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini, on a:

$$I_{a+}^2 f(x) = \int_a^t (t-x) f(x) dx.$$

En repetant n fois on obtient:

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx.$$

Pour tout entier n , cette formule est appelée formule de cauchy et en utilisant la fonction Gamma: $(n-1)! = \Gamma(n)$. Nous obtenons donc la définition plus générale suivante:

Définition 1.17. [1, 2]

L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in L^1[a, b]$ est donnée par:

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad x > a$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma donnée par (1.2)

Propriétés 1.4. [1, 2]

Soit $f \in C([a, b])$. Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a:

$$(i) \quad I_{a+}^\alpha I_a^\beta f(t) = I_{a+}^\alpha f(t).$$

$$(ii) \quad I_{a+}^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^\beta I_{a+}^\alpha f(t).$$

Remarque 1.1. Intégrales fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles

1. Soit $f(t) = (t-a)^\beta$ avec $\beta > -1$:

$$I_{a+}^\alpha f(t) = I_{a+}^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}$$

Pour $a = 0$, on a:

$$I_{a+}^\alpha f(t) = I_{a+}^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}$$

2. La fonction constante $f(t) = C$

$$I_{a+}^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha$$

Théorème 1.3. [6]

Si $f \in L^1([a, b])$, alors $I_{a+}^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a, b]$ et de plus $I_{a+}^\alpha f \in L^1([a, b])$

Preuve:

En introduisant la définition 1.14 puis en utilisant le théorème de Fubini, on trouve:

$$\begin{aligned} \int_a^b |(I_{a+}^\alpha f)(x)| dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| (b-t)^\alpha dt \\ &\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([a, b])$, la dernière quantité est finie, ce qui établit le résultat désiré.

Théorème 1.4.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $\alpha > 0$, alors:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (I_{a^+}^\alpha f)(x) = 0$$

Preuve:

On a:

$$\begin{aligned} |(I_{a^+}^\alpha f)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha \end{aligned}$$

En faisant tendre x vers a , on obtient le résultat.

1.3.3 Dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville**Définition 1.18.** [1, 2]

La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction continue f définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est donnée par

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \end{aligned}$$

où $n = [\alpha] + 1$ et $t > a$. En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$(D_{a^+}^0 f)(t) = I_{a^+}^0 f(t) = f(t).$$

Si $\alpha = p \in \mathbb{N}$, alors

$$(D_{a^+}^p f)(t) = f^{(p)}(t).$$

Remarque 1.2.

1. Soit $f(t) = (t-a)^\beta$, $\beta > -1$. Alors:

$$D_{a^+}^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$$

Dans le cas où $a = 0$ on a:

$$D_{0^+}^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}$$

2. Nous avons toujours $D^\alpha t^\beta = 0$, pour tout $\beta = \alpha - i$ avec $i = 1, 2, 3, \dots, n$ où $n = [\alpha] + 1$
3. Le fonction constante $f(t) = C$

$$D_{a^+}^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$$

Lemme 1.1. [8]

Soit $0 < s < 1$. Si on suppose que $u \in C^0(\mathbb{R}^+) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$, alors l'équation différentielle fractionnaire

$$D_{0+}^s u = 0$$

admet $u(t) = ct^{s-1}$, $c \in \mathbb{R}$ comme solutions.

Propriétés 1.5.

Supposons que f est dans $C^0(\mathbb{R}^+) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ avec une dérivée fractionnaire d'ordre $0 < s < 1$ qui appartient à $C^0(\mathbb{R}^+) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$, alors

- (1) $D_{0+}^s I_{0+}^s f = f$
- (2) $I_{0+}^s D_{0+}^s f(t) = f(t) + ct^{s-1}$

pour certains $c \in \mathbb{R}$. Lorsque la fonction $f \in C^0(\mathbb{R}^+)$, alors $c = 0$.

1.4 Autres définitions

1.4.1 Cône d'un espace de Banach

Définition 1.19. [9]

Soit $\mathcal{K}$ une partie non vide, non triviale, fermée et convexe de l'espace de Banach E . On dit que $\mathcal{K}$ est un cône s'il vérifie les deux conditions suivantes:

- Pour tout $x \in \mathcal{K}$ et tout $a > 0$ alors $ax \in \mathcal{K}$ (i.e. $a.\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$)
- $\forall x \in E; x \in \mathcal{K} \text{ et } -x \in \mathcal{K} \implies x = 0_E$ (i.e. $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0_E\}$).

Dans $\mathbb{R}^3$, la définition d'un cône correspond exactement à notre intuition géométrique, avec la stipulation que le sommet doit coïncider avec l'origine. Dans $\mathbb{R}$, les nombres non négatifs forment un cône. Dans $\mathbb{R}^2$, toute partie du plan qui s'étend à l'infini à partir de l'origine est un cône. On peut aussi trouver des exemples plus abstraits. Dans tout espace L^p , l'ensemble $\mathcal{K} = \{f; f \geq 0\}$ est un cône.

Quelques propriétés

1. La réunion d'une famille de cônes est un cône.
2. La somme de deux cônes est un cône.
3. Le complémentaire d'un cône est un cône.
3. L'intersection d'une famille non vide de cônes est un cône.

L'ordre partielle dans un espace de Banach

Soit $\mathcal{K}$ un cône de l'espace de Banach E . La relation binaire dans E définie par

$$\forall x, y \in E; x \preceq y \iff y - x \in \mathcal{K}$$

est une relation d'ordre partielle dans E . En particulier, $0_E \preceq y \iff y \in \mathcal{K}$

Convention $x \prec y \iff x \preceq y$ et $x \neq y$.

Propriétés de L'ordre

Il est facile de remarquer que cet ordre partiel satisfait également plusieurs autres propriétés, qui découlent immédiatement de la définition d'un cône.

1. La multiplication par un scalaire non négatif préserve l'ordre. C'est à dire que pour tout $x, y \in E$, $a > 0$; $x \preceq y \implies ax \preceq ay$.
2. L'ajout d'un vecteur fixe préserve l'ordre (i.e L'inégalité $x \preceq y$ implique que $x + z \preceq y + z$. Pour tout vecteur $z \in E$).
3. L'ordre conserve des limites. Si $y_n \rightarrow l$ et chaque $y_n \preceq y$, alors $l \preceq y$.

Quelque types des cônes

Cône normal

Le cône $\mathcal{K}$ est dit normal si pour tout $x, y \in E$, il existe $\eta > 0$ tel que $0_E \prec x \preceq y \implies \|x\| \leq \eta \|y\|$ η est dite constante de normalité de $\mathcal{K}$.

Cône solide

On dit que $\mathcal{K}$ est un cône solide si son intérieur est non vide c'est à dire que: $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

1.4.2 Fonction L^1 – Carathéodory

Définition 1.20. (L^1 – Carathéodory)[3]

On dit que la fonction $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est L^1 – Carathéodory si:

1. $t \rightarrow f(t, x)$ est mesurable pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
2. $x \rightarrow f(t, x)$ est continue pour presque tout $t \in [0, 1]$.
3. $\forall r > 0, \exists m_r \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ de telle sorte que $|f(t, x)| \leq m_r$ p.p $t \in [0, 1], |x| \leq r$.

1.4.3 Solution maximale - Solution minimale

Définition 1.21. (solution maximale)[3]

Soit n une solution d'une équation intégrale, alors n est dite une solution maximale de cette équation si, pour toute solution u de cette équation, on a l'inégalité $u(t) \leq n(t)$, $t \in [0, 1]$.

Définition 1.22. (solution minimale)[3]

Soit n une solution d'une équation intégrale, alors n est dite une solution minimale de cette équation si, pour toute solution u de cette équation, on a l'inégalité $u(t) \geq n(t)$, $t \in [0, 1]$.

1.4.4 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 1.5. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles mesurables, définies sur un espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$, convergente p.p vers une fonction f . S'il existe une fonction g intégrable telle que $|f_n| \leq g$ (p.p), alors:

(1) f est intégrable.

(2) $\forall A \in \mathcal{T} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

Résultats d'existence pour un problème aux limites avec condition non locale

Dans ce chapitre (voir [3]) nous examinons l'existence d'au moins une solution positive pour le problème aux limites associée à l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, t \in (0, 1) \quad (2.1)$$

avec les conditions non locales

$$u(0) = 0, \quad u(1) + D_{0+}^{\alpha} u(t)|_{t=1} = 0 \quad (2.2)$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction L^1 -Carathéodory et D_{0+}^{α} dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0, 1)$.

2.1 Reformulation du problème

Lemme 2.1.

Toute solution u du problème 2.1 - 2.2 peut être représentée par l'équation intégrale

$$u(t) = at \left\{ \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \right\} - \int_0^t (t-s)f(s, u(s))ds \quad (2.3)$$

où $a = \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1+\Gamma(2-\alpha)} \right)$. En intégrant les deux côtés de l'équation 2.1 deux fois, on a

$$\begin{aligned} u'(t) &= K_1 - \int_0^t f(s, u(s))ds \\ u(t) &= \int_0^t K_1 ds - \int_0^t \left(\int_0^s f(t, u(t))dt \right) ds + K_2 \end{aligned}$$

alors nous obtenons

$$u(t) = K_2 + tK_1 - \int_0^t (t-s)f(s, u(s))ds.$$

De la condition $u(0) = 0$, nous avons

$$u(0) = K_2 = 0.$$

Ce qui donne

$$u(t) = tK_1 - \int_0^t (t-s)f(s, u(s))ds.$$

Appliquons maintenant $I_{0+}^{1-\alpha}$ sur les deux côtés de cette dernière relation, nous obtenons par les propriétés 1.4, 1.3 et remarque 1.1 respectivement, on trouve alors:

$$I_{0+}^{1-\alpha}u(t) = K_1 \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - I_{0+}^{3-\alpha}f(t, u(t)).$$

En différenciant la dernière relation, on obtient

$$\begin{aligned} D_{0+}^\alpha u(t) &= \frac{d}{dt} I_{0+}^{1-\alpha}u(t) = \frac{K_1}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{d}{dt}(t^{2-\alpha}) - \frac{d}{dt}(I_{0+}^{3-\alpha}f(t, u(t))) \\ D_{0+}^\alpha u(t) &= \frac{K_1}{\Gamma(2-\alpha)(2-\alpha)} (2-\alpha)t^{1-\alpha} - I_{0+}^{2-\alpha}f(t, u(t)) \\ D_{0+}^\alpha u(t) &= K_1 \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - I_{0+}^{2-\alpha}f(t, u(t)) \end{aligned}$$

Aussi de l'hypothèse $u(1) + D_{0+}^\alpha u(t)|_{t=1} = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} K_1 - \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + \frac{K_1}{\Gamma(2-\alpha)} - \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds &= 0 \\ K_1 \left(1 + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\right) &= \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \end{aligned}$$

alors

$$K_1 = \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1 + \Gamma(2-\alpha)} \right) \left\{ \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \right\}$$

et parconséquent

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\frac{t\Gamma(2-\alpha)}{1 + \Gamma(2-\alpha)} \right) \left\{ \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \right\} \\ &\quad - \int_0^t (t-s)f(s, u(s))ds \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$u(t) = at \left\{ \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \right\} - \int_0^t (t-s)f(s, u(s))ds,$$

où $a = \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1 + \Gamma(2-\alpha)} \right)$. Ce qui nous permet d'écrire cette dernière équation par

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, u(s))ds \tag{2.4}$$

où la fonction noyau $G(t, s)$ est définie par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{-(1+\Gamma(2-\alpha))(t-s)+t\Gamma(2-\alpha)(1-s)+t(1-s)^{1-\alpha}}{1+\Gamma(2-\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{t\Gamma(2-\alpha)(1-s)+t(1-s)^{1-\alpha}}{1+\Gamma(2-\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Ce qui montre que le problème aux limites 2.1 - 2.2 est équivalent à l'équation intégrale

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) f(t, u(s)) ds. \quad (2.5)$$

Lemme 2.2.

La fonction $G(t, s)$ satisfait $0 \leq G(t, s) \leq 2$ pour $t, s \in [0, 1]$.

Preuve:

Pour $0 \leq s \leq t \leq 1$, on pose

$$g(t, s) = -(1 + \Gamma(2 - \alpha))(t - s) + t\Gamma(2 - \alpha)(1 - s) + t(1 - s)^{1-\alpha}.$$

Alors, on remarque que

$$\begin{aligned} t\Gamma(2 - \alpha)(1 - s) + t(1 - s)^{1-\alpha} &\geq t\Gamma(2 - \alpha)(1 - s) + t(1 - s) \\ &= (1 + \Gamma(2 - \alpha))(t - ts) > (1 + \Gamma(2 - \alpha))(t - s) \end{aligned}$$

donc $g(t, s) \geq 0$ et par suite $G(t, s) \geq 0$. Tandis que pour $0 \leq t \leq s \leq 1$, il est clair que; $G(t, s) \geq 0$ puisque les termes intervenants dans l'expression de $G(t, s)$ sont tous positifs.

D'une autre part, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{-(1+\Gamma(2-\alpha))(t-s)+t\Gamma(2-\alpha)(1-s)+t(1-s)^{1-\alpha}}{1+\Gamma(2-\alpha)} \right| &\leq \frac{(1+\Gamma(2-\alpha))(t-s)+t\Gamma(2-\alpha)(1-s)+t(1-s)^{1-\alpha}}{1+\Gamma(2-\alpha)} \\ &\leq \frac{(1+\Gamma(2-\alpha))+\Gamma(2-\alpha)+1}{1+\Gamma(2-\alpha)} = 2, \end{aligned}$$

et

$$\left| \frac{t\Gamma(2-\alpha)(1-s)+t(1-s)^{1-\alpha}}{1+\Gamma(2-\alpha)} \right| \leq \frac{\Gamma(2-\alpha)+1}{1+\Gamma(2-\alpha)} = 1 \leq 2, \text{ alors } 0 \leq G(t, s) \leq 2.$$

Définition 2.1.

Toute fonction $u \in C[0, 1]$ qui vérifie 2.4 s'appelle une solution de l'équation intégrale 2.4.

Théorème 2.1.

Supposons que la fonction $f : [0, 1] \times R^+ \rightarrow R^+$ est L^1 -Carathéodory. Alors, le problème aux limites non locale 2.1 - 2.2 admet au moins une solution continue positive $u \in C[0, 1]$.

2.2 Cadre fonctionnel

Soit un réel $\rho > 0$ donné. Comme la fonction f est L^1 -Carathéodory, il existe $m_\rho \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ telle que $|f(t, x)| \leq m_\rho$ p.p $t \in [0, 1]$, et tout $x \in \mathbb{R}; |x| \leq \rho$. Soit le cône $Q_+ = \{u \in C[0, 1]; u(t) \geq 0, t \in [0, 1]\}$. On pose $\mathfrak{S}_r = Q_+ \cap \overline{B}(0, r)$ où $r = 2 \|m_\rho\|_{L^1}$ et $\overline{B}(0, r) = \{u \in C[0, 1]; \|u\| \leq r\}$. On remarque que l'ensemble $\mathfrak{S}_r$ est non vide, fermé

convexe et borné.

Définir l'opérateur $T : \mathfrak{S}_r \rightarrow \mathfrak{S}_r$ par:

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds.$$

On remarque que cet opérateur est bien défini car pour tout $u \in \mathfrak{S}_r$ on a $0 \leq \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds \leq 2 \|m_\rho\|_{L^1} = r$ alors, $Tu \in \mathfrak{S}_r$ i.e. $T(\mathfrak{S}_r) \subset \mathfrak{S}_r$. Dans ce qui suit, nous montrons dans une série de lemmes que T est un opérateur complètement continu.

Lemme 2.3.

L'opérateur T est continue.

Preuve:

Pour $u \in \mathfrak{S}_r$ donné, soit $\{u_n\}$ est une suite dans $\mathfrak{S}_r$ converge simplement vers u , i.e $u_n(t) \rightarrow u(t), \forall t \in [0, 1]$ alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n(t) &= at \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-s) f(s, u_n(s)) ds - at \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u_n(s)) ds \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (t-s) f(s, u_n(s)) ds \end{aligned}$$

Comme f est L^1 -Carathéodory et $0 \leq u_n(t) \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et p.p $t \in [0, 1]$, donc $|f(t, u_n(t))| \leq m_\rho$ et par suite $|G(t, s) f(t, u_n(t))| \leq 2m_\rho$. D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (Tu_n)(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 G(t, s) f(s, u_n(s)) ds \\ &= \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds = (Tu)(t). \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'opérateur T est continue.

Lemme 2.4.

$T(\mathfrak{S}_r)$ est uniformément borné dans $\mathfrak{S}_r$.

Preuve :

Maintenant, soit $u \in \mathfrak{S}_r$, alors

$$\begin{aligned} (Tu)(t) &\leq at \int_0^1 (1-s) f(s, u(s)) ds + at \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s) f(s, u(s)) ds \\ &\leq a \int_0^1 (1-s) f(s, u(s)) ds + a \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s)) ds \\ &\quad + \int_0^1 (1-s) f(s, u(s)) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(a + \frac{a}{\Gamma(2-\alpha)} + 1 \right) \int_0^1 (1-s)^{1-\alpha} f(s, u(s)) ds \\
&\leq \frac{a\Gamma(2-\alpha) + a + \Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{1-\alpha} m(s) ds \\
&\leq \frac{\Gamma(2-\alpha) + \Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^1 m(s) ds \\
&\leq 2 \|m\|_{L^1} = r
\end{aligned}$$

alors $T(\mathfrak{S}_r)$ est uniformément borné.

Lemme 2.5.

La famille de fonctions $T(\mathfrak{S}_r)$ est équicontinue.

Preuve:

Pour $t_1, t_2 \in (0, 1)$, $t_1 < t_2$ tel que $|t_2 - t_1| < \delta$, nous avons

$$\begin{aligned}
|Tu(t_2) - Tu(t_1)| &= \left| at_2 \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + at_2 \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \right. \\
&\quad - \int_0^{t_2} (t_2-s)f(s, u(s))ds \\
&\quad - at_1 \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds - at_1 \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \\
&\quad \left. + \int_0^{t_1} (t_1-s)f(s, u(s))ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^{t_2} ((t_2-s)f(s, u(s)))ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)f(s, u(s))ds \right| \\
&\quad + a|t_2 - t_1| \int_0^1 (1-s)|f(s, u(s))|ds \\
&\quad + a|t_2 - t_1| \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} |f(s, u(s))|ds \\
&\leq \left| \int_0^{t_1} ((t_2-t_1))f(s, u(s))ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} ((t_2-s)f(s, u(s)))ds \right| \\
&\quad + a|t_2 - t_1| \int_0^1 (1-s)|f(s, u(s))|ds \\
&\quad + a|t_2 - t_1| \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} |f(s, u(s))|ds.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\{T(\mathfrak{S}_r)\}$ est équicontinue.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli $\{T(\mathfrak{S}_r)\}$ est relativement compact. Puisque toutes les conditions du théorème de Schauder sont vérifiées, alors T admet au moins un point fixe dans $\mathfrak{S}_r$.

Par conséquent, l'équation intégrale 2.5 a au moins une solution continue positive

$u \in C(0, 1)$.

Vérification des conditions aux bords et non locales:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(t) &= a \lim_{t \rightarrow 0} t \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + a \lim_{t \rightarrow 0} t \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \\ &\quad - \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t (t-s)f(s, u(s))ds = u(0) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} u(t) &= a \lim_{t \rightarrow 1} t \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + a \lim_{t \rightarrow 1} t \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \\ &\quad - \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t (t-s)f(s, u(s))ds = u(1). \end{aligned}$$

Alors l'équation intégrale 2.5 à au moins une solution positive continu $u \in C[0, 1]$.

Pour compléter la preuve, en différenciant les deux membres de l'équation 2.5 deux fois, nous obtenons l'équation différentielle 2.1. Puis, on applique $I_{0+}^{1-\alpha}$ sur les deux côtés de l'équation 2.5, on a

$$\begin{aligned} I_{0+}^{1-\alpha} u(t) &= \frac{at^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + \frac{at^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \\ &\quad - \int_0^t \frac{(t-s)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} f(s, u(s))ds \end{aligned}$$

En différenciant la dernière relation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} D_{0+}^\alpha u(t) &= \frac{d}{dt} I_{0+}^{1-\alpha} u(t) = \frac{at^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + \frac{at^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \\ &\quad - \int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \end{aligned}$$

Supposons que $t = 1$ dans l'équation 2.5 et dans l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} u(1) + D_{0+}^\alpha u(t)|_{t=1} &= a \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + a \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \\ &\quad - \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds + \frac{a}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds \\ &\quad + \frac{a}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds - \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \\ &= \left(a \left(1 + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \right) - 1 \right) \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds \\ &\quad + \left(a \left(1 + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \right) - 1 \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \\ &= \left(a \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)+1}{\Gamma(2-\alpha)} \right) - 1 \right) \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds \\ &\quad + \left(a \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)+1}{\Gamma(2-\alpha)} \right) - 1 \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds \\ &= \left(\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1+\Gamma(2-\alpha)} \right) \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)+1}{\Gamma(2-\alpha)} \right) - 1 \right) \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds \\ &\quad + \left(\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1+\Gamma(2-\alpha)} \right) \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)+1}{\Gamma(2-\alpha)} \right) - 1 \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(s, u(s))ds = 0 \end{aligned}$$

2.3 Solutions maximale et minimale

Dans cette section, nous démontrons l'existence d'une solution maximale et d'une solution minimale pour l'équation intégrale 2.5.

Théorème 2.2.

Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 sont satisfaites. De plus, la fonction $f(t, u)$ est croissante en u . Alors l'équation intégrale 2.5 admet une solution maximale et une solution minimale.

Preuve:

Considérons pour tout $\epsilon > 0$, l'équation intégrale suivante:

$$u_\epsilon(t) = \epsilon + \int_0^1 G(t, s) f(s, u_\epsilon(s)) ds. \quad (2.6)$$

En effectuant le changement de variable suivant $\begin{cases} v_\epsilon(t) + \epsilon = u_\epsilon(t) \\ g(t, v_\epsilon(t)) = f(t, v_\epsilon(t) + \epsilon) \end{cases}$, l'équation

2.6 devient $v_\epsilon(t) = \int_0^1 G(t, s) g(s, v_\epsilon(s)) ds$. Il est clair que si la fonction f est L^1 -Caratheodory, la fonction g l'est aussi. Alors d'après le théorème 2.1, cette dernière équation admet au moins une solution positive $v_\epsilon(t) \in C[0, 1]$, ce qui montre que l'équation 2.6 a au moins une solution positive $u_\epsilon(t) = v_\epsilon(t) + \epsilon \in C[0, 1]$. Soient ϵ_1 et ϵ_2 tels que $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1 \leq \epsilon$. Nous avons $u_{\epsilon_2}(0) = \epsilon_2 < \epsilon_1 = u_{\epsilon_1}(0)$ car $G(0, s) = 0$. Pour généraliser ce resultat, on va prouver que

$$u_{\epsilon_2}(t) < u_{\epsilon_1}(t) \text{ pour tout } t \in [0, 1]. \quad (2.7)$$

Pour prouver le resultat 2.7, on suppose qu'elle est fausse, alors il existe $a \in [0, 1]$ tel que $u_{\epsilon_2}(a) \geq u_{\epsilon_1}(a)$. Comme la fonction $t \mapsto u_{\epsilon_2}(t) - u_{\epsilon_1}(t)$ est continue sur l'intervalle $[0, a]$ et vérifie $u_{\epsilon_2}(0) - u_{\epsilon_1}(0) < 0$, $u_{\epsilon_2}(a) - u_{\epsilon_1}(a) \geq 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_1 \in]0, a] \subset [0, 1]$ tel que

$$u_{\epsilon_1}(t_1) = u_{\epsilon_2}(t_1) \text{ et } u_{\epsilon_2}(t) < u_{\epsilon_1}(t) \text{ pour tout } t \in [0, t_1].$$

Comme f est croissante en u , il s'ensuit que $f(t, u_{\epsilon_2}(t)) \leq f(t, u_{\epsilon_1}(t))$. Par conséquent, en utilisant l'équation 2.6, nous obtenons

$$\begin{aligned} u_{\epsilon_2}(t_1) &= \epsilon_2 + \int_0^1 G(t_1, s) f(s, u_{\epsilon_2}(s)) ds \\ &< \epsilon_1 + \int_0^1 G(t_1, s) f(s, u_{\epsilon_1}(s)) ds \\ &= u_{\epsilon_1}(t_1). \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que

$$u_{\epsilon_2}(t_1) = u_{\epsilon_1}(t_1),$$

donc l'inégalité 2.7 est vraie.

Par hypothèse, il s'ensuit comme dans la preuve du théorème 2.1 que la famille de fonctions $\{u_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ définies et continues sur $[0, 1]$ est relativement compacte, donc on peut extraire sous-suite de fonctions u_{ϵ_p} $p \in \mathbb{N}$ uniformément convergente c'est-à-dire qu'il existe une suite

décroissante (ϵ_p) telle que $\epsilon_p \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow \infty$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} u_{\epsilon_p}(t)$ existe uniformément dans $[0, 1]$, on note sa fonction limite par $n(t)$. Évidemment, de la continuité uniforme de f et en passant à limite quand $p \rightarrow \infty$ dans les deux cotés de l'équation

$$u_{\epsilon_p}(t) = \epsilon_p + \int_0^1 G(t, s) f(s, u_{\epsilon_p}(s)) ds$$

On déduit que n est une solution de l'équation 2.5. Enfin, nous montrons que la solution n est maximale. Pour atteindre cet objectif, soit u une solution quelconque de 2.5 définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors

$$u(t) < \epsilon + \int_0^1 G(t, s) f(s, u_\epsilon(s)) ds = u_\epsilon(t), t \in [0, 1]$$

Puisque la solution maximale est unique, il est clair que $u_\epsilon(t)$ tend vers $n(t)$ uniformément sur $[0, 1]$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Ce qui prouve l'existence d'une solution maximale à l'équation intégrale 2.5. Avec un argument similaire on démontre l'existence de la solution minimale.

Exemple 2.1.

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$f(t, x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) + t\sqrt{x}$$

nous remarquons que:

- 1) $t \rightarrow f(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$
car elle est continue par rapport à t .
- 2) $x \rightarrow f(t, x)$ est continue pour presque tout $t \in [0, 1]$.
- 3) pour tout $p > 0$, si $|x| < p$ on a

$$\begin{aligned} f(t, x) &\leq \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) + t\sqrt{p} = \varphi_p(t) \\ \int_0^1 \varphi_p(t) dt &= \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt + \sqrt{p} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) dt + \sqrt{p} \\ &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)_0^1 + \sqrt{p} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \sqrt{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + \sqrt{p} \end{aligned}$$

alors $\varphi_p \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$.

Ce qui montre que la fonction f est $\mathbf{L}^1$ -Carathéodory.

D'autre par, f est croissante par rapport à x .

Donc f vérifie les conditions du théorème 2.1, 2.2 ce qui prouve que le problème admet une solution maximale et une solution solution minimale.

Autre resultat d'existence

Dans ce chapitre (voir [5]), nous étudions l'existence de solutions positives pour l'équation différentielle suivante:

$$D^\beta u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad t \in (0, 1), \quad (3.1)$$

avec les conditions non locales

$$I^\gamma u(t)|_{t=0} = 0, \quad u(1) = \sum_{j=1}^p b_j u(\eta_j), \quad (3.2)$$

où $\beta \in (1, 2)$, $\gamma \in (0, 1]$, $\eta_j \in (a, b) \subset (0, 1)$ avec $(j = 1, 2, \dots, p)$ et f est une fonction L^1 -Carathéodory.

3.1 Reformulation du problème

Lemme 3.1.

Si $0 < \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1} < 1$ le problème 3.1 - 3.2 peut être représenté par l'équation intégrale suivante:

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds + A \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right. \\ & \left. - A \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} (\eta_j - s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right\} - \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $A = \left(1 - \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1}\right)^{-1}$.

Preuve:

Nous écrirons l'équation (1) sous la forme

$$\frac{d^2}{dt^2} I^{2-\beta} u(t) = -f(t, u(t))$$

En intégrant les deux membres de l'équation (1), on obtient:

$$I^{2-\beta} u(t) = C_2 + tC_1 - I^2 f(t, u(t)).$$

En applique par I^β , on obtient:

$$I^2 u(t) = C_2 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + C_1 \frac{t^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)} - I^{2+\beta} f(t, u(t)).$$

En différenciant deux fois la dernière relation, on obtient:

$$u(t) = C_1 \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + C_2 \frac{t^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} - I^\beta f(t, u(t))$$

En applique des deux côtés de l'équation ci-dessus par I^γ , on obtient:

$$I^\gamma u(t) = C_1 \frac{t^{\gamma+\beta-1}}{\Gamma(\gamma+\beta)} + C_2 \frac{t^{\gamma+\beta-2}}{\Gamma(\gamma+\beta-1)} - I^{\gamma+\beta} f(t, u(t))$$

d'où l'on déduit que $C_2 = 0$ et

$$u(t) = C_1 \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - I^\beta f(t, u(t))$$

Aussi de la relation $u(1) = \sum_{j=1}^p b_j u(\eta_j)$, nous avons

$$C_1 \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds = C_1 \sum_{j=1}^p b_j \frac{\eta_j^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds$$

$$C_1 \left(\frac{1 - \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds - \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds$$

alors

$$C_1 = \left(\frac{\Gamma(\beta)}{1 - \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1}} \right) \left\{ \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds - \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds \right\}$$

et

$$u(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds + A \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right. \\ \left. - A \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} (\eta_j-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right\} - \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds.$$

Maintenant, nous pouvons écrire l'équation (4) dans la formule

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) f(t, u(s)) ds, \quad (3.4)$$

telle que $G(t, s) = G_1(t, s) + G_2(t, s)$,

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$G_2(t, s) = \begin{cases} \frac{A}{\Gamma(\beta)} \left[\sum_{0 \leq s \leq \eta_j} \left(b_j \eta_j^{\beta-1} t^{\beta-1} (1-s)^{\beta-1} - b_j t^{\beta-1} (\eta_j-s)^{\beta-1} \right) \right], & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{A}{\Gamma(\beta)} \left[\sum_{\eta_j \leq s \leq 1} b_j \eta_j^{\beta-1} t^{\beta-1} (1-s)^{\beta-1} \right], & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Lemme 3.2.

Pour tout $t, s \in (0, 1)$; $G(t, s) > 0$.

Preuve:

Pour $0 \leq s \leq t \leq 1$, nous avons

$$t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1} = (t-ts)^{\beta-1} > (t-s)^{\beta-1},$$

ainsi, $G_1(t, s) > 0$ pour tout $t, s \in (0, 1)$. De plus, nous avons

$$b_j \eta_j^{\beta-1} t^{\beta-1} (1-s)^{\beta-1} = b_j t^{\beta-1} (\eta_j - \eta_j s)^{\beta-2} > b_j t^{\beta-1} (\eta_j - s)^{\beta-2}.$$

Alors, $G_2(t, s) \geq 0$ pour tout $t, s \in [0, 1]$. Ce qui montre que $G(t, s) > 0$.

3.2 Cadre fonctionnel

Soit un réel $\rho > 0$ donné. Comme la fonction f est L^1 -Carathéodory, il existe $n_\rho \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ de telle sorte que $|f(t, x)| \leq n_\rho$ p.p $t \in [0, 1], |x| \leq \rho$. Soit le cône $Q_+ = \{u \in C[0, 1]; u(t) \geq 0, t \in [0, 1]\}$.

On pose $\Omega_r = Q_+ \cap \overline{B}(0, r)$ où $r = \frac{(1+A+A\sum_{j=1}^p b_j)\|n_p\|_{L^1}}{\Gamma(\beta)}$ et $\overline{B}(0, r) = \{u \in C[0, 1]; \|u\| \leq r\}$. On remarque que l'ensemble Ω_r est un sos ensemble non vide, fermé convexe et borné.

Définir l'opérateur $T : \Omega_r \rightarrow \Omega_r$ par:

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, u(s))ds.$$

On remarque que cet opérateur est bien défini car pour tout $u \in \Omega_r$ on a $0 \leq \int_0^1 G(t, s)f(s, u(s))ds \leq r$ alors, $Tu \in \Omega_r$ i.e. $T(\Omega_r) \subset \Omega_r$.

Nous démontrons en suivant la même méthode utilisée dans le premier problème que: l'opérateur T est continue, $T(\Omega_r)$ est uniformément borné dans $C[0, 1]$ et équicontinue.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli $T\Omega_r$ est relativement compact. Puisque toutes les conditions du théorème de Schauder sont satisfaites, alors T a un point fixe dans Ω_r .

Par conséquent, l'équation intégrale 3.3 a au moins une solution continue positive $u \in C(0, 1)$.

Vérification des conditions aux bords et non locales:

Nous pouvons facilement vérifier que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = u(0) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 1} u(t) = u(1)$$

Alors l'équation intégrale 3.4 a au moins une solution continue positive $u \in C[0, 1]$. Pour compléter la preuve, appliquons $I_{0+}^{2-\beta}$ sur les deux membres de l'équation 3.3, on obtient

$$I_{0+}^{2-\beta} u(t) = At \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, u(s))ds - \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} (\eta_j - s)^{\beta-1} f(s, u(s))ds \right\} - I_{0+}^2 f(t, u(t))$$

En différenciant deux fois la relation ci-dessus, nous obtenons l'équation différentielle 3.1.

Aussi de 3.3 nous avons $I_{0+}^{\gamma} u(t)|_{t=0} = 0, \gamma \in (0, 1]$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^p b_j u(\eta_j) &= \frac{A \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds - \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} (\eta_j - s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right\} \\
&\quad - \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left\{ \left(-A \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1} - 1 \right) \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} (\eta_j - s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1}}{1 - \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1}} \right) \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left\{ -A \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} (\eta_j - s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \left(-1 + \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^p b_j \eta_j^{\beta-1}} \right) \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right\} \\
&= \frac{A}{\Gamma(\beta)} \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds - \sum_{j=1}^p b_j \int_0^{\eta_j} (\eta_j - s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right\} \\
&\quad - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s, u(s)) ds = u(1)
\end{aligned}$$

3.3 Nonlocal integral condition

Soit $u \in C[0, 1]$ une solution du problème non local 3.1-3.2. Soit $b_j = t_j - t_{j-1}$, $\eta_j \in (t_{j-1}, t_j)$, $a = t_0 < t_1 < t_2, \dots < t_p = b$, alors la condition nonlocale $u(1) = \sum_{j=1}^p b_j u(\eta_j)$ devient

$$u(1) = \sum_{j=1}^p (t_j - t_{j-1}) u(\eta_j).$$

De la continuité de la solution u du problème non local 3.1-3.2, nous obtenons

$$u(1) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p (t_j - t_{j-1}) u(\eta_j).$$

Et d'après la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue la condition nonlocale 3.2 se transforme au condition integrale suivante:

$$I^{\gamma} u(t)|_{t=0} = 0, \gamma \in (0, 1], u(1) = \int_a^b u(s) ds \quad (3.5)$$

Maintenant, nous citons le théorème suivant

Théorème 3.1.

Supposons que toutes les conditions du théorème 2.1 sont satisfaites. Alors, le problème non local 3.1 - 3.5 admet au moins une solution $u \in AC[0, 1]$.

Remarque 3.1.

En suivant la même méthode utilisée dans le problème précédent, nous prouvons l'existence et l'unité de la solution maximale et de la solution minimale pour ce problème.

Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons prouvé l'existence d'au moins une solution positive à un problème aux limites avec des conditions non locales, ainsi que l'existence de la solution maximale et la solution minimale où on a rencontré quelques difficultés concernant notamment la reformulation du problème et la compacité de l'opérateur (théorème d'Ascoli-Arzelà) pour fournir les conditions du théorème de point fixe de Schauder. On peut dire que notre étude est intéressante, mais ce n'est pas suffisante car elle ne traitait pas l'unicité de solution positive.

Bibliography

- [1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed: Jan van Mill, Amsterdam, (2006).
- [2] A.A.Kilbas, S.G.Samko, and O.I. Marichev, Fractional integrals and derivatives: theory and applications, Gordon and Breach, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data,Amsterdam, (1993).
- [3] BIN-Taher, E.O, Maximal and minimal positive solutions for boundary value problems with nonlocal conditions, J.of Fractional Calculus and Applications, Vol. 4(1) Jan. 2013, pp. 73- 81.
- [4] BIN-Taher, E.O, Maximal and minimal positive solutions for boundary value problems with nonlocal conditions,. Journal of Math. Analysis, Vol. 6, 2012, no. 29, 1431 - 1441.
- [5] BIN-Taher, E.O, Maximal and minimal positive solutions for boundary value problems with nonlocal conditions,. Journal of Math. Analysis, Vol. 6, 2012, no. 29, 1431 - 1441.
- [6] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential, Lecture Notes in Mathematics V. 2004, Springer-Verlag, Berlin (2010).
- [7] K.Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equation, An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Ed Springer, 2004.
- [8] Luigi Rodino, Existence and Uniqueness for a Nonlinear Fractional Differential Equation, J. of Mathematical Analysis and Applications, 204, 609-625 (1996), ARTICLE NO. 0456.
- [9] P.bébek, J, Milota, Methods of Nonlinear Analysis Application to Differntial Equations.

Résumé

Après avoir introduit des préliminaires concernant spécialement le calcul fractionnaire et quelques éléments de l'analyse fonctionnelle, nous avons présenté deux exemple de problèmes aux limites avec condition non locale. La méthode utilisée est le théorème d'Arzela-Ascolis et le théorème du point fixe de Schauder, jointes de toutes les preuves.

Mots clés : Solution positive, théorème de point fixe de Shauder, condition non locale, problème aux limites d'ordre fractionnaire.

ملخص

بعد تقديم المقدمات على وجه التحديد فيما يتعلق بحساب التفاضل والتكامل ذو رتبة كسرية وبعض عناصر التحليل الكسري، قدمنا مثالين عن المسائل الحدية بشروط غير محلية، المنهجية المستخدمة هي نظرية أرزولا أسكولي ونظرية النقطة الثابتة لشودر، مصحوبة بجميع البراهين. كلمات مفتاحية: الحل الموجب، نظرية النقطة الصامدة لشودر، شروط غير محلية مسألة القيمة الحدية برتبة كسرية.

Abstract

After introducing preliminaries specifically concerning the fractional calculus and some elements of functional analysis, we presented two examples of boundary problems with non-local condition. The method used is Arzela-Ascolis theorem and Schauder fixed point theorem, accompanied by all the proofs.

Key-words : Positive solution, Schauder fixed point theorem, non local condition, boundary value problem of fractional order.