



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique



Université de Chahid Hamma Lakhdar -EL OUED

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Thèse en vue de l'obtention du diplôme de doctorat **LMD**
en mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Sujet de la thèse:

**Sur la théorie du point fixe multivoque dans des
espaces métriques et applications.**

Présenté par: Heddi Kaddouri

Soutenue le: 28/ 12/2020

Devant le jury composé de:

Lamine Guedda	M.C.A	Univ. El-Oued	Président.
Said Beloul	M.C.A	Univ. El-Oued	Rapporteur.
Adel Aissaoui	M.C.A	Univ. El-Oued	Co-Rapporteur.
Taieb Hamaizia	M.C.A	Univ. Oum El Bouaghi	Examineur.
Elmehdi Zaouche	M.C.A	Univ. El-Oued	Examineur.
Yahia Djabrane	Professeur	Univ. Biskra	Examineur.

Année universitaire: 2020 – 2021.

Résumé

Dans cette thèse, nous établissons quelques théorèmes de point fixe pour des contractions multivoques dans des espaces métriques. La technique utilisée est basée sur une combinaison entre certains nouveaux types de contractions, tel que contraction de type Wardowski, contraction de Geraghty et contraction de type Hardy-Rogers avec le concept de α -admissibilité. En outre, nous présentons d'autres résultats d'existence de point fixe multivoque dans des espaces b-métriques. Dans la dernière partie, nous appliquons les résultats obtenus pour étudier le problème d'existence de la solution pour des inclusions intégrales de type Fredholm.

Mots clés : Applications multivoques, F -contractions, α -admissibles, espaces métriques, espaces b-métriques, inclusions intégrales.

مُلخَص

في هذه الأطروحة ندرس وجود النقطة الصامدة لبعض التقلّصات متعددة القيم في فضاءاتٍ مترية. التقنية المستخدمة تعتمد أساساً على المزاوجة بين عدة أنواع جديدة من التقلّصات مثل تقلّص ووردوسكي، تقلّص جيراتي، تقلّص هاردي-روجرز مع مفهوم α مقبول. إضافةً إلى ذلك تطرّفنا لنتائج أخرى حول وجود النقطة الصامدة متعددة القيم في فضاءات مترية من نوع (b).

وفي الأخير طبقنا النتائج المتحصّل عليها لدراسة مسألة وجود الحل بالنسبة إلى احتواءات تكاملية من نوع فريدهولم.

كلمات مفتاحية: تطبيقات متعددة القيم، تقلّصات ووردوسكي، α مقبول، فضاءات مترية، فضاءات مترية من نوع (b)، احتواءات تكاملية.

Abstract

In this thesis we establish some multivalued fixed point theorems for multivalued contractions in metric spaces. The technique used is based on a combination of some new contractions, such as Wardowski type contraction, Geraghty contraction and Hardy-Rogers type contraction with the concept of α -admissibility. In addition, we present other results of existence of multivalued fixed point in b-metric spaces. In the last part, we apply the obtained results to study the existence problem of the solution for Fredholm integral inclusions type.

Key words : Multivalued mappings, F -contractions, α -admissible, metric spaces, b-metric spaces, integral inclusions.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes très chers parents :
Laroussi et Salma pour leur amour,
sacrifice et encouragement.

A mes chers sœurs :
Souad, Zina, Aicha
et Chorouk.

A mes chers frères :
Athmane, Zoubir, Mohammed,
Bachir et Ali.

A toutes mes chers amies surtout :
Manal, Khaoula et Souad.

A ma cousine Wahiba et toutes mes élèves
surtout Ferdaousse.

A tous ceux qui m'ont aide, conseille et a tous ceux que j'aime et m'aime et que je porte
dans mon cœur.

Remerciements

On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Ces trois années de formation nous ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail.

En premier lieu, je remercie « **Allah** » qui m'a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste thèse.

De plus, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur **Said Beloul**, Docteur à l'université de El-Oued, pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour ses qualités scientifiques et humaines et notamment sa patience dans la direction de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'exprime mes vifs remerciements au Docteur **Lamine Guedda** de l'université de El-Oued pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Je remercie aussi Monsieur **Adel Aissaoui**, maître de conférence à l'université de El-Oued, **Taieb Hamaizia** maître de conférence à l'université de Oum El-Bouaghi, **El Mehdi Zaouche** maître de conférence à l'université de El-Oued et Monsieur **Yahia Djabrane** Professeur à l'université de Biskra pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je ne peux pas oublier ici Professeur **Mohammed Tayeb Meftah** de l'université de Ouargla, Docteur **Azeddine Elfassi** de l'université de Maroc, Docteur **Khaoula Zaiz** de l'université de EL-Oued, Docteur **Oussama Akmoum** et Docteur **Naima Belouahem** pour ses conseils.

Un grand remerciement va également à tous mes amis qui ont toujours cru en moi et ont toujours cherché à me pousser vers la réussite.

Enfin, merci à ma famille et à mes parents en particulier, qui m'ont toujours inconditionnellement encouragé et soutenu et qui ont toujours cru en ma volonté de réussir.

Merci infiniment à tous.

Table des matières

Notations	ix
Introduction	1
1 Notions préliminaires	3
1.1 La distance de Pompeiu-Hausdorff	3
1.2 Généralités sur les applications multivoques	8
1.2.1 Applications multivoques	8
1.2.2 Quelques propriétés des applications multivoques	9
1.2.3 Continuité des applications multivoques	10
1.2.4 Applications α -continues	12
1.2.5 Applications α -admissibles	14
1.3 Point fixe multivoque	16
2 Contractions de type Wardowski	18
2.1 F -contraction	18
2.2 F -contraction de type Geraghty	25
2.3 F -contraction généralisé	26
2.4 F -contraction de type Berinde	27
2.5 F -contraction de type Hardy-Rogers	30
2.6 F -contraction de type Suzuki	32
3 Théorèmes de point fixe pour de nouveau type de contractions	34
3.1 Théorèmes de point fixe pour $(\alpha-F)$ -Geraghty contraction de type Hardy-Rogers	34
3.2 Théorème de point fixe dans des espaces métriques partiellement ordonnés	46
3.3 Théorème de point fixe dans des espaces métriques muni d'un graphe	49

4	Théorème de point fixe multivoque dans des espaces b-métriques	52
4.1	Les espaces b-métriques	52
4.2	Théorèmes de point fixe dans des espace b-métriques	55
4.2.1	Principe de contraction de Banach généralisé	55
4.2.2	Théorème de point fixe de type Wardowski	56
4.2.3	(F, α) -contractions de type Hardy-Rogers	57
4.2.4	Théorème de point fixe pour $(\alpha-F-\psi)$ contractions généralisés	59
5	Application aux inclusions intégrales	68
5.1	Généralités sur les inclusions intégrales	68
5.1.1	Intégrale des applications multivoques	68
5.1.2	Inclusions intégrales	68
5.1.3	Linéarité	69
5.1.4	Types des inclusions intégrales	69
5.1.5	Espèce des inclusions intégrales	70
5.2	Sélection d'applications multivoques	70
5.3	Existence de solution pour une inclusion intégrale de type Fredholm	71
	Conclusion générale et perspective	77
	Bibliographie	78

Notations

\mathbb{N}	: L'ensemble des entiers naturels.
\mathbb{R}	: L'ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}_+	: L'ensemble des nombres réels positifs.
\mathbb{Z}	: L'ensemble des nombres relatifs.
$d(x, A)$: La distance entre un point x et un ensemble A .
$e(A, B)$: Désigne l'excès d'un ensemble A à un ensemble B .
$H(A, B)$: Désigne la distance de Hausdorff entre A et B .
$T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$: désigne une application multivoque de X dans Y .
$\text{Graph}(T)$: Désigne le graphe de T .
$\text{Dom}(T)$: Désigne le domaine de T .
$\text{Im}(T)$: Désigne l'image de T .
$\mathcal{P}(Y)$: L'ensemble des parties de Y .
$CB(X)$: L'ensemble des sous-ensembles fermés et bornés dans X .
$CL(X)$: L'ensemble des sous-ensembles fermés dans X .
$K(X)$: L'ensemble des sous-ensembles compact dans X .
\preceq	: Désigne une relation d'ordre partiel.
(X, d, \preceq)	: Désigne un espace métrique partiellement ordonné.
$V(G)$: Désigne l'ensemble des sommets de graphe.
$E(G)$: Désigne l'ensemble des arrêtes de graphe.
(X, d, s)	: Désigne un espace b-métrique.

Introduction

L'analyse multivoque joue un rôle très important en mathématiques qui a connu de grandes progressions dans toutes les directions au cours des dernières années. Il étudie les propriétés des applications T d'un ensemble X dans un ensemble Y appelées applications multivoques, qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous-ensemble éventuellement vide de Y .

Le besoin de ce type d'applications s'est ainsi fait sentir pour la résolution de nombreux problèmes émergents dans divers domaines comme la théorie du contrôle, l'économie, la gestion, la biologie, les sciences des systèmes et l'intelligence artificielle...etc. Les applications multivoques servent aussi en combinatoire, théorie des graphes, théorie des jeux...etc.

La théorie de point fixe pour les applications multivoques a été largement motivée par la théorie des jeux lorsque Neumann [66] a opté pour l'extension du théorème du point fixe de Brouwer à de telles applications.

Consécutivement, à cause de ses applications intenses aux inclusions intégrales ou différentielles, problèmes de minimisation, l'économie...etc, Nadler [45] a commencé le développement de la théorie du point fixe pour les applications multivoques contractantes en utilisant la distance de Pompeiu-Hausdorff [32, 53] qui est définie sur $CB(X)$. De plus, Nadler [45] a prouvé l'existence du point fixe multivoque dans des espaces métriques complets, on peut dire alors qu'il a étendu le principe de contraction de Banach des applications univoques aux applications multivoques.

Après les travaux de Nadler, il y a eu de plusieurs travaux concernant l'existence d'un point fixe pour les applications multivoques ont été publiés, par exemple contraction de type Berinde [15] et contraction de type Hardy-Rogers [31]...ect.

Geraghty [30] a présenté un type de conditions contractives, il a changé la constante de la contraction de Banach par une fonction qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1[$.

En outre, il y a aussi beaucoup de différents types de théorème de point fixe non mentionnés ci-dessus prolongeant le résultat de Banach. Pour savoir plus, nous invitons les lecteurs à consulter [3, 17, 18, 40, 63].

En suite, dans [59] Samet et al. ont introduit un nouveau concept appelé α -admissibilité,

ils ont obtenu quelques résultats de point fixe pour α - ψ -contraction, plus tard de nombreux auteurs ont investi ce concept pour établir certains résultats, voir [7, 44].

Récemment, il y a eu nombreux essais pour améliorer et généraliser le problème d'existence et d'unicité l'un de ces travaux fut celui de Wardowski [67], où il a introduit un nouveau type de contractions appelé F -contraction. De cette façon, Wardowski a généralisé le principe de contraction de Banach d'une manière différente d'autres résultats bien connus de la littérature. Ce résultat de Wardowski a été étendu dans de nombreuses directions des applications univoques et multivoques.

Pour la réalisation de notre thèse, on a étudié plusieurs articles sur le point fixe univoque et multivoque. On a essayé d'établir quelques théorèmes de point fixe multivoque avec des conditions plus faibles. On a pu aboutir à quelques résultats et remarques qu'on a résumé dans cette thèse. Qui est composée d'une introduction, cinq chapitres ainsi qu'une liste de références bibliographies.

Comme d'habitude, dans le premier chapitre nous rappelons certaines notions préliminaires nécessaires à la compréhension du reste de notre travail. Plus particulièrement, nous détaillons les définitions de base des applications multivoques ainsi que leurs propriétés avec des exemples illustratifs. Le chapitre est clôturé par donner une définition des applications multivoques contractantes.

Le deuxième chapitre est réservé pour présenter quelques classes des applications F -contractantes univoques et multivoques combinées avec d'autres contractions, tel que la contraction de Geraghty, contraction généralisé, contraction de type Berinde, contraction de type Hardy-Rogers et contraction de Suzuki. Ensuite, nous donnons quelques relations entre ces types de contractions.

Dans le troisième chapitre, après avoir présenté quelques classes d'applications multivoques F -contractantes, nous avons détaillé nos résultats publiés dans [35], nous introduisons d'abord un nouveau type des contractions multivoques en combinant des contractions de type Geraghty, Hardy-Rogers et Wardowski avec le concept de α -admissibilité, puis nous prouvons l'existence d'un point fixe dans des espaces métriques pour ces type de contractions sous des conditions faibles. Enfin, nous clôturons ce chapitre avec nos conséquences concernant un théorème de point fixe dans des espaces métriques partiellement ordonnés et dans des espaces métriques muni d'un graphe.

Nous commençons le quatrième chapitre par la présentation de certaines propriétés liées aux espaces b -métriques, aussi nous établissons un théorème de point fixe multivoque pour des applications $(\alpha$ - F - ψ) contractantes généralisées dans ce type des espaces.

Le dernier chapitre est dédié à une application sur les résultats obtenus dans le troisième chapitre pour étudier le problème d'existence de la solution pour des inclusions intégrales de type Fredholm.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce premier chapitre nous énonçons des notions, des propriétés élémentaires et nous collectons plusieurs outils dont nous aurons besoin ultérieurement. Les principales références sur lesquelles nous nous sommes basés sont [15], [26], [32], [45], [53].

1.1 La distance de Pompeiu-Hausdorff

L'objectif de cette section est de présenter la notion de la distance de Pompeiu-Hausdorff et quelques propriétés. Pour cela, introduisons tout d'abord la distance d'un point à un ensemble.

Définition 1.1.1. [2] Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et A un sous-ensemble de X .

La distance de point x à A notée $d(x, A)$ est définie par :

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Par convention, $d(x, \emptyset) = +\infty$. Si au contraire, A est non vide, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément $y \in A$ tel que $d(x, y) \leq d(x, A) + \epsilon$.

Lemme 1.1.1. [22] Soit (X, d) un espace métrique. Pour $A \in CL(X)$ et $x \in X$, $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.

Théorème 1.1.1. Soient $x \in X$ et $A \in K(X)$, alors il existe $x_0 \in A$ tel que

$$d(x, A) = d(x, x_0).$$

Preuve. Pour tout $y \in A$, la fonction $y \mapsto d(x, y)$ est continue à valeurs réelles. Elle atteint sa borne inférieure sur tout compact. □

Comme nous travaillons dans le cadre de l'analyse multivoque, nous avons donc besoin d'une notion de "distance" entre deux ensembles. Une notion de ce type appelée excès, a été proposée par Pompeiu [53]. Dans cette thèse, nous allons également utiliser la distance de Hausdorff [32] construite à partir de l'excès.

Définition 1.1.2. [53] Soient (X, d) un espace métrique et $A, B \in CB(X)$. On définit l'excès de A à B comme suit :

$$e(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Remarque 1.1.1. Évidemment, l'excès n'est pas symétrique, donc il n'est pas une métrique.

Rappelons dans la proposition suivante quelques propriétés de l'excès.

Proposition 1.1.1. [2] Soient (X, d) un espace métrique et $A, B, C \in CB(X)$. Alors, nous avons :

- (1) $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$.
- (2) $B \subset C \Rightarrow e(A, C) \leq e(A, B)$.
- (3) $e(A \cup B, C) = \max\{e(A, C), e(B, C)\}$.
- (4) $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$.

Preuve.

(1) D'après la définition 1.1.2, on a

$$\begin{aligned} e(A, B) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{a \in A} d(a, B) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(a, B) = 0, \text{ pour tout } a \in A. \end{aligned}$$

Puisque B est fermé dans X , on en déduit que

$$d(a, B) = 0 \Leftrightarrow a \in B.$$

Donc,

$$e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B.$$

(2) On a

$$B \subset C \Rightarrow d(a, C) \leq d(a, B), \text{ pour tout } a \in X.$$

En prenant alors la borne supérieure sur les a dans A , il vient

$$B \subset C \Rightarrow \sup_{a \in A} d(a, C) \leq \sup_{a \in A} d(a, B).$$

Donc,

$$B \subset C \Rightarrow e(A, C) \leq e(A, B).$$

(3) On a :

$$e(A \cup B, C) = \sup_{a \in A \cup B} d(a, C) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, C), \sup_{a \in B} d(a, C)\}.$$

Donc,

$$e(A \cup B, C) = \max\{e(A, C), e(B, C)\}.$$

(4) Montrons tout d'abord l'inégalité suivante :

$$d(a, B) \leq d(a, c) + d(c, B), \quad \text{pour tout } a, c \in X. \quad (1.1)$$

En effet, soient $a, c \in X$, d'après l'inégalité triangulaire, il vient que

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b), \quad \text{pour tout } b \in B \\ &\leq d(a, c) + \inf_{b \in B} d(c, b). \end{aligned}$$

Alors, l'inégalité (1.1) est vérifiée, donc pour tout $a \in A$ et $c \in C$, on a

$$d(a, B) \leq d(a, c) + d(c, B) \leq d(a, c) + e(C, B).$$

Ce implique

$$d(a, B) \leq d(a, c) + e(C, B).$$

En prenant alors la borne inférieure sur les c dans C , il vient (pour a quelconque)

$$d(a, B) \leq d(a, C) + e(C, B).$$

D'où (4) le résultat en prenant la borne supérieure sur les a dans A . □

L'autre notion de distance dont nous aurons besoin est celle de Hausdorff. La distance de Hausdorff entre deux ensembles A et B correspond au maximum entre $e(A, B)$ et $e(B, A)$.

Définition 1.1.3. [32] Soit (X, d) un espace métrique. La distance de Pompeiu-Hausdorff entre deux ensembles $A, B \in CB(X)$ est définie par :

$$H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\} = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}.$$

Remarque 1.1.2. [45] Soient $A, B \in CB(X)$ et $a \in A$. Alors, comme une conséquence de la définition ci-dessus, on conclut que pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $b \in B$ tel que

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \epsilon.$$

Exemple 1.1.1. Soient $X = \mathbb{R}$, $A = [1, 2]$ et $B = [2, 3]$ avec la distance usuelle. Alors,

$$e(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\} = 1 \text{ et } e(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\} = 1.$$

Par conséquent, $H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\} = 1$.

Remarque 1.1.3. Si $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$, alors $H(A, B) = d(a, b)$.

Proposition 1.1.2. [2] Soit (X, d) un espace métrique, alors H est une métrique sur $CB(X)$.

Preuve.

(1) Par la définition de H , nous avons $H(A, B) \geq 0$.

Remarquons,

$$\begin{aligned} H(A, B) = 0 &\Leftrightarrow \max\{e(A, B), e(B, A)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow e(A, B) = 0 \text{ et } e(B, A) = 0 \\ &\Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A \\ &\Leftrightarrow A = B. \end{aligned}$$

(2) Il est clair que $\max\{e(A, B), e(B, A)\} = \max\{e(B, A), e(A, B)\}$.

Donc,

$$H(A, B) = H(B, A).$$

(3) En utilisant la proposition 1.1.1, on obtient

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \max\{e(A, B), e(B, A)\} \\ &\leq \max\{e(A, C) + e(C, B), e(B, C) + e(C, A)\} \\ &\leq \max\{e(A, C), (C, A)\} + \max\{e(B, C), e(C, B)\} \\ &= H(A, C) + H(C, B). \end{aligned}$$

□

On va donner maintenant des définitions concernant les suites dans $(CB(X), H)$.

Définition 1.1.4. [62] Soit $(CB(X), H)$ un espace métrique.

1. On dit qu'une suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $CB(X)$ convergente vers $A \in CB(X)$, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$H(A_n, A) < \epsilon, \quad \text{pour tout } n \geq N_\epsilon.$$

On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$.

2. Une suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $CB(X)$ est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \geq N_\epsilon \Rightarrow H(A_n, A_m) < \epsilon,$$

et on écrit

$$H(A_n, A_m) \longrightarrow 0, \\ n, m \rightarrow +\infty$$

Théorème 1.1.2. [62] Si (X, d) est un espace métrique complet, alors $(CB(X), H)$ et $(K(X), H)$ sont aussi.

Nos prochaines résultats sont basées sur le lemme suivant :

Lemme 1.1.2. [15] Soient (X, d) un espace métrique et $A, B \in CB(X)$. Alors, pour chaque $h > 1$ et pour tout $a \in A$, il existe $b(a) \in B$, tel que

$$d(a, b) \leq hH(A, B). \quad (1.2)$$

Preuve.

Remarquons que si $H(A, B) = 0$, alors $A = B$ et $a \in B$, on conclut que l'inégalité (1.2) est réalisée pour $b = a$.

D'autre part, si $H(A, B) > 0$ posons

$$\epsilon = (h - 1)H(A, B) > 0. \quad (1.3)$$

En utilisant la définition de $d(a, B)$ et $H(A, B)$, il devient que pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $b(a) \in B$ tel que

$$d(a, b) \leq d(a, B) + \epsilon \leq H(A, B) + \epsilon. \quad (1.4)$$

Alors, il suffit de remplacer (1.3) dans (1.4) pour obtenir l'inégalité (1.2). \square

1.2 Généralités sur les applications multivoques

Comme nous l'avons dit précédemment, nous nous intéressons dans cette thèse aux applications dites multivoques. Ce sont des applications dont les images ne sont pas nécessairement des points comme en analyse classique, mais des ensembles. Dans cette section nous allons présenter quelques définitions et propriétés relatives à ces applications qui sont aussi appelées multi-applications, ou multifonctions.

1.2.1 Applications multivoques

On se propose dans cette partie, de donner une définition d'application multivoque. Des divers exemples seront mis en évidence.

Définition 1.2.1. [8] Soient X et Y deux ensembles non vides. Une application multivoque T de X vers Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble Tx de Y . On désigne une application multivoque en général par la notation $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ pour faire la référence avec la notation usuelle des applications univoques. On dit alors que Tx est l'image de T à x .

Exemple 1.2.1. Nous donnons ici quelques exemples d'applications multivoques.

1. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Alors, pour tout $y \in Y$, l'ensemble

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\},$$

est un sous-ensemble de X . On peut donc définir une application multivoque $T : Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$ comme suit :

$$Ty = f^{-1}(y), \quad \forall y \in Y.$$

Il est facile de voir que si f n'est pas surjective, alors

$$\exists y \in Y, \quad Ty = \emptyset.$$

Si f est bijective, alors T est une application univoque.

2. L'application $T : \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R})$ définie par $Tx = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, est une application multivoque constante.
3. L'application $T : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ définie par $Tn = \{m \in \mathbb{Z} : m \in n\mathbb{Z}\}$ est une application multivoque qui pourrait nous donner une autre vision de la divisibilité :

$$m \in \mathbb{Z} \text{ est divisible par } n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \in Tn.$$

1.2.2 Quelques propriétés des applications multivoques

Afin de bien travailler dans le cadre de l'analyse multivoque, énonçons maintenant quelques définitions et caractéristiques propres aux applications multivoques. Les notions de cette partie proviennent de [8].

Soient X et Y deux ensembles non vides et $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque.

Le domaine de T est le sous-ensemble des éléments $x \in X$ tel que Tx est non vide. Autrement dit,

$$\text{Dom}(T) = \{x \in X : Tx \neq \emptyset\}.$$

Lorsque $\text{Dom}(T) \neq \emptyset$ (resp. $\text{Dom}(T) = X$), l'application multivoque T est dite propre (resp. stricte).

Remarque 1.2.1. Soient A un sous-ensemble non vide de X et $T : A \subset X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque telle que pour tout $x \in A$, $Tx \neq \emptyset$. On peut prolonger T sur tout l'ensemble X par l'application multivoque T_A définie par :

$$T_A x = \begin{cases} Tx & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Il est très pratique de caractériser une application multivoque par son graphe.

On appelle graphe de T le sous-ensemble de l'espace produit $X \times Y$ défini par :

$$\text{Graph}(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in Tx\}.$$

On définit l'image de T par :

$$\text{Im}(T) = \bigcup_{x \in X} Tx.$$

De même, on définit l'image d'un sous-ensemble A de X par :

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx.$$

L'inverse de T est une application multivoque $T^{-1} : Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$ telle que

$$x \in T^{-1}y \Leftrightarrow y \in Tx \Leftrightarrow (x, y) \in \text{Graph}(T).$$

C'est-à-dire,

$$T^{-1}(y) = \{x \in X : y \in Tx\}.$$

L'image réciproque d'un sous-ensemble A de Y est le sous-ensemble de X noté par $T^{-1}(A)$ est définie comme suit :

$$T^{-1}(A) = \{x \in X : Tx \cap A \neq \emptyset\}.$$

Donnons maintenant quelques exemples qui illustrent les concepts précédents.

Exemple 1.2.2. Considérons l'application multivoque $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par :

$$Tx = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x > 0, \\ \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Il est évident que T est propre et non stricte car $\text{Dom}(T) = \mathbb{R}_-$.

Ici,

$$\text{Im } T = \bigcup_{x \in \mathbb{R}_-} \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\} = \mathbb{R},$$

et

$$\text{Graph}(T) = \{(x, \sqrt{-x}) : x \leq 0\} \cup \{(x, -\sqrt{-x}) : x \leq 0\}.$$

De plus, l'application multivoque inverse $T^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$T^{-1}x = \{-x^2\}.$$

Exemple 1.2.3. Soit l'application multivoque $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tel que $Tx = [x^2, x^2 + 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors

$$T(\{0, 1\}) = \bigcup_{x \in \{0, 1\}} Tx = [0, 2], \quad T(\mathbb{R}_+) = T(\mathbb{R}_-) = T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.2.2. [8] Une application multivoque $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite :

1. fermé si $\text{Graph}(T)$ est fermé dans $X \times Y$. Autrement dit, lorsque X et Y sont des espaces métriques, T est fermée si pour toute suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers (x, y) telle que $y_n \in Tx_n$ on a $y \in Tx$.
2. bornée si l'ensemble $T(A)$ est borné dans Y pour chaque un sous-ensemble A borné.

1.2.3 Continuité des applications multivoques

On s'intéresse, dans ce paragraphe à la notion de continuité au sens de Hausdorff. Plus particulièrement, la semi-continuité inférieure (resp. supérieure). Notons qu'on trouve diverse notions de continuité des applications multivoques dans la littérature, on pourra

consulter [8] pour plus de détails.

Dans tout ce qui suit, on désignera par X et Y deux espaces métriques.

Définition 1.2.3. [26] Une application multivoque $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite semi-continue supérieurement (**s.c.s** en abrégé) en x_0 si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(T(x_n), T(x_0)) = 0,$$

pour chaque suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente vers x_0 .

Définition 1.2.4. [26] Une application multivoque $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite semi-continue inférieurement (**s.c.i** en abrégé) en x_0 si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(T(x_0), T(x_n)) = 0,$$

pour chaque suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente vers x_0 .

Exemple 1.2.4. Soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une application multivoque définie par :

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \neq 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cleraiment, T est **s.c.s** en 0 mais n'est pas **s.c.i** en 0.

Exemple 1.2.5. Un exemple d'application multivoque **s.c.i** en 0 est l'application $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par :

$$Tx = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } x \neq 0, \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que cette application multivoque n'es pas **s.c.s** en 0.

Lemme 1.2.1. [2] Une application multivoque $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite semi-continue supérieurement (semi-continue inférieurement) si pour tout fermé (ouvert) $V \subset Y$, l'ensemble $T^{-1}(V)$ est fermé (ouvert) dans X .

Maintenant on va définir la continuité au sens de Hausdorff :

Définition 1.2.5. [26] Une application multivoque $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite continue en x_0 au sens de Hausdorff ou H-continue si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement. Cette définition est équivalente à ce qui suit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(T(x_n), T(x_0)) = 0,$$

pour chaque suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente vers x_0 .

1.2.4 Applications α -continues

Cette partie est concernée sur la relation entre les applications α -continues et les applications continues.

Tout d'abord, on va donner le concept de α -continuité pour les applications multivoques.

Définition 1.2.6. [39] Soient (X, d) un espace métrique, $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $T : X \rightarrow CL(X)$ deux applications. On dit que T une application multivoque α -continue sur $(CL(X), H)$, si pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $x_n \rightarrow x \in X$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $Tx_n \rightarrow Tx$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On peut traduire cette définition par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0 \text{ et } \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} H(Tx_n, Tx) = 0.$$

Remarque 1.2.2. On voit facilement que toute application multivoque continue est aussi α -continue. En général, la réciproque n'est pas vraie (voir l'exemple 1.2.6).

Exemple 1.2.6. Soient $X = \mathbb{R}_+$, $\lambda \in [10, 20]$ et $d(x, y) = |x - y|$ pour tout $x, y \in X$. On définit $T : X \rightarrow CL(X)$ et $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$Tx = \begin{cases} \{\lambda x^2\} & \text{si } x \in [0, 1], \\ \{x\} & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

et

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \cosh(x^2 + y^2) & \text{si } x, y \in [0, 1], \\ \tanh(x + y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $x, x_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $Tx_n = \{\lambda x_n^2\} \rightarrow \{\lambda x^2\} = Tx$. Cela montre que T est une application α -continue sur $(CL(X), H)$.

Il est clair que T n'est pas continue sur $(CL(X), H)$. En effet, on prend $\{x_n\} = \{1 + \frac{1}{n}\}$ dans X , on voit que $x_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$, mais

$$Tx_n = \{1 + \frac{1}{n}\} \rightarrow \{1\} \neq \{\lambda\} = T_1.$$

Maintenant, nous allons donner le concept d'application multivoque α -semi-continue supérieurement et inférieurement.

Définition 1.2.7. [33] Soient $T : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une application multivoque sur un espace métrique (X, d) et $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application. T est dite :

1. α -semi-continue supérieurement sur X , si pour $x \in X$ et une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0 \text{ et } \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup d(x_n, Tx_n) \leq d(x, Tx).$$

2. α -semi-continue inférieurement sur X , si pour $x \in X$ et une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0 \text{ et } \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf d(x_n, Tx_n) \geq d(x, Tx).$$

Exemple 1.2.7. Soit $X = \mathbb{R}$ avec la métrique usuelle d . Alors, (X, d) est un espace métrique.

On définit $T: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$Tx = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } x \neq 0, \\ \{0\} & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x, y \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

T est une application multivoque α -semi-continue supérieurement. En effet, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour une suite $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, x_n convergente vers $x = 0$. Par conséquent, si $x_n \rightarrow 0$, alors $Tx_n = \{0\}$ et $Tx = \{0\}$.

Cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup d(x_n, Tx_n) = 0 = d(x, Tx).$$

Exemple 1.2.8. Soit $X = \mathbb{R}$ avec la métrique usuelle d . Alors, (X, d) est un espace métrique.

On définit $T: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \neq 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

T est une application multivoque α -semi-continue inférieurement. En effet, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour une suite $\{x_n\}$ de nombres réels non nuls. Considérons les deux cas suivants :

Cas 1. $x_n \rightarrow x = 0$.

Si $x_n \rightarrow 0$, alors $Tx_n = \{0\}$ et $Tx = [-1, 1]$ tel que $d(x_n, Tx_n) = d(x_n, \{0\}) = x_n$ et $d(x, Tx) = d(0, [-1, 1]) = 0$.

Cela implique que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, Tx_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = x = 0 = d(x, Tx).$$

Cas 2. $x_n \rightarrow x \neq 0$.

Si $x_n \rightarrow x$, alors $Tx_n = \{0\}$ et $Tx = \{0\}$ tel que $d(x_n, Tx_n) = d(x_n, \{0\}) = x_n$ et $d(x, Tx) = x$.

Cela implique que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, Tx_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = x = d(x, Tx).$$

Lemme 1.2.2. [33] Soient $T: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une application multivoque sur un espace métrique (X, d) et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application. Alors, T est α -continue si et seulement si elle est α -semi-continue supérieurement et α -semi-continue inférieurement.

1.2.5 Applications α -admissibles

L'objectif de ce paragraphe est de présenter deux cas, où on peut définir les applications α -admissibles.

Définition 1.2.8. [59] Soient (X, d) un espace métrique, $T: X \rightarrow X$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux applications. On dit que T est α -admissible si :

$$\text{pour tout } x, y \in X, \quad \alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1.$$

Exemple 1.2.9. Soit $X = \mathbb{R}_+^*$. On définit $T: X \rightarrow X$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $Tx = \ln x$, pour tout $x \in X$ et

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y, \\ 0 & \text{si } x < y. \end{cases}$$

Alors, T est α -admissible.

En adaptant le concept de α -admissibilité aux applications multivoques, on peut donner maintenant la définition d'application α_* -admissible qui est introduit dans [7].

Définition 1.2.9. [7] Soient (X, d) un espace métrique, $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $T: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ deux applications. On dit que T est α_* -admissible si :

$$\text{pour tout } x, y \in X, \quad \alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha_*(Tx, Ty) \geq 1,$$

où

$$\alpha_*(Tx, Ty) = \inf \{ \alpha(a, b) : a \in Tx, b \in Ty \}.$$

Exemple 1.2.10. Soient $X = \mathbb{R}_+$ et $\delta \in]0, 1[$ un nombre fixe. On définit $T: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ par $Tx = [0, \delta x]$ pour tout $x \in X$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \text{ ou } y \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Nous allons montrer que T est une α_* -admissible.

Si $\alpha(x, y) \geq 1$, alors $x, y \in [0, 1]$ et donc Tx et Ty sont des sous-ensembles de $[0, 1]$.

Ce donne, $a, b \in [0, 1]$ pour tout $a \in Tx$ et $b \in Ty$, c'est-à-dire $\alpha(a, b) = 1$ pour tout $a \in Tx$ et $b \in Ty$, ce qui implique

$$\alpha_*(Tx, Ty) = \inf \{ \alpha(a, b) : a \in Tx, b \in Ty \} = 1.$$

Alors, T est α_* -admissible.

la généralisation d'application multivoque α_* -admissible est donnée dans la définition suivante :

Définition 1.2.10. [44] Soient (X, d) un espace métrique, $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application donnée et $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. On dit que T est α -admissible si pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $\alpha(x, y) \geq 1$, on a $\alpha(y, z) \geq 1$ pour tout $z \in Ty$.

Remarque 1.2.3. On voit bien que toute application α_* -admissible est aussi α -admissible, mais la réciproque n'est pas vraie en général. Comme il est indiqué dans l'exemple suivant :

Exemple 1.2.11. Soit $X = [-1, 1]$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\alpha(x, x) = 0$ et $\alpha(x, y) = 1$ pour $x \neq y$. On définit $T: X \rightarrow CB(X)$ par :

$$Tx = \begin{cases} \{-x\} & \text{si } x \notin \{-1, 0\}, \\ \{0, 1\} & \text{si } x = -1, \\ \{1\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soit $x = -1$ et $y = 0 \in Tx = \{0, 1\}$, alors $\alpha(x, y) \geq 1$, mais $\alpha_*(Tx, Ty) = \alpha_*(\{0, 1\}, \{1\}) = 0$. Cela affirme que T n'est pas α_* -admissible.

Montrons maintenant que T est α -admissible, pour cela considérons les cas suivants :

Cas 1. Si $x = 0$, alors $y = 1$ et $\alpha(x, y) \geq 1$. Aussi, $\alpha(y, z) \geq 1$ puisque $z = -1 \in Ty = \{-1\}$.

Cas 2. Si $x = -1$, alors $y \in \{0, 1\}$ et $\alpha(x, y) \geq 1$. Aussi, $\alpha(y, z) \geq 1$ pour tout $z \in Ty$.

Cas 3. Si $x \notin \{-1, 0\}$, alors $y = -x$ et $\alpha(x, y) \geq 1$. Aussi, $\alpha(y, z) \geq 1$ puisque $z = x \in Ty = \{x\}$.

1.3 Point fixe multivoque

Dans cette section on va présenter une classe d'applications multivoques, en même temps nous donnons le théorème de point fixe pour cette classe.

D'abord, on rappelle la définition de point fixe multivoque.

Définition 1.3.1. Soit $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque, un point $z \in X$ est dit point fixe multivoque de T si $z \in Tz$.

Remarquons que si T est une application univoque, c'est-à-dire $Tx = \{f(x)\}$ avec $f : X \rightarrow X$, on obtient la définition classique de point fixe.

Définition 1.3.2. [45] Soient X, Y deux espaces métriques. On dit que $T : X \rightarrow CB(Y)$ est Lipschitzienne, s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$H(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

Une application multivoque Lipschitzienne T est dite contractante si $\lambda < 1$.

Théorème 1.3.1. (Théorème de point fixe de Nadler)

Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque contractante, alors T a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $z \in X$ tel que $z \in Tz$.

Preuve. Voir [45] □

Exemple 1.3.1. Soient $X = [0, 1]$ avec la métrique usuelle et $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{-1}{2}x + 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

On définit $T : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ par $Tx = \{0\} \cup \{f(x)\}$ pour tout $x \in X$.

Alors, T est une application multivoque contractante tel que les points fixes de T est $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$.

Remarque 1.3.1. Il convient de noter que le point fixe d'une application multivoque contractante n'est pas nécessairement unique. Comme indiqué dans l'exemple ci-dessus.

Chapitre 2

Contractions de type Wardowski

Dans ce chapitre, on va donner des définitions et des notions basiques concernant quelques classes des applications F -contractantes (appelées aussi contractions de type Wardowski) dans les deux cas : univoque et multivoque. De plus, le théorème de point fixe pour chaque type.

2.1 F -contraction

Cas univoque

En 2012, Wardowski [67] a introduit un nouveau type de contractions appelé F -contraction.

Définition 2.1.1. [67] Soit \mathcal{F} l'ensemble de toutes les fonctions $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(F1) : F est strictement croissante, c'est-à-dire pour tout $t_1, t_2 \in]0, +\infty[$ tel que $t_1 < t_2$,
 $F(t_1) < F(t_2)$.

(F2) : Pour toute suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = -\infty$.

(F3) : Il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^k F(t) = 0$.

Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \rightarrow X$ est dite F -contraction ou application F -contractante si $F \in \mathcal{F}$ et il existe $\tau > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, \quad [d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))]. \quad (2.1)$$

Si on remplace la condition contractive de Wardowski dans (2.1) par différentes exemples des fonctions F , on obtient divers types de contractivité, dont certains types connus ont été trouvés dans la littérature. On peut donner maintenant quelques exemples :

Exemple 2.1.1. Soit $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $F(t) = \ln t$. Il est clair que $F \in \mathcal{F}$. Alors, toute application $T : X \rightarrow X$ satisfaisant (2.1) est F -contraction tel que

$$d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y), \quad \text{pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty.$$

Il est évident que pour tout $x, y \in X$ tel que $Tx = Ty$ l'inégalité $d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y)$ est aussi vérifiée. C'est-à-dire, T est contraction de Banach [10] avec une constante contractive $\lambda = e^{-\tau}$.

Inversement, si T est contraction de Banach avec une constante contractive λ , alors T est une application F -contractante pour $F(t) = \ln t$ et $\tau = -\ln \lambda$. Cependant, toute application F -contractante n'est pas une contraction de Banach (voir l'exemple 2.1.4).

Exemple 2.1.2. Si $F(t) = \ln t + t$, alors $F \in \mathcal{F}$ et la condition (2.1) est de la forme :

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{d(Tx, Ty) - d(x, y)} \leq e^{-\tau}, \quad \text{pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty. \quad (2.2)$$

Exemple 2.1.3. On considère $F(t) = \frac{-1}{\sqrt{t}}$, $F \in \mathcal{F}$. Dans ce cas, on peut dire que toute application F -contractante satisfaisant

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{\left(1 + \tau \sqrt{d(x, y)}\right)^2} d(x, y), \quad \text{pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty.$$

Alors, on obtient un cas particulier de contraction de type Rakotch. Pour plus d'informations voir [17, 54].

Remarque 2.1.1. D'après (F1) et (2.1), on obtient

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \quad \text{pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty,$$

c'est-à-dire toute application F -contractante est contractive.

De plus, il est bien connu que si T est contractive, alors elle est non expansive, donc Lipschitzienne, et alors elle est continue. Par conséquent, toute application F -contractante est continue.

Le théorème suivant, qui a été donné par Wardowski, est une généralisation du principe de contraction de Banach d'une manière différente du principe bien connu dans la littérature.

Théorème 2.1.1. [67] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une F -contraction. Alors, T a un point fixe unique $z \in X$. En outre, pour tout $x_0 \in X$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n x_0 = z$.

Exemple 2.1.4. Considérons la suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = 1 + 2,$$

...

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

...

Soient $X = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in X$. Alors, (X, d) est un espace métrique complet. On définit l'application $T : X \rightarrow X$ par :

$$T(S_n) = S_{n-1} \quad \text{pour } n > 1,$$

$$T(S_1) = S_1.$$

Maintenant, on prend $F(t) = \ln t + t$, alors T est une application F -contractante avec $\tau = 1$. Pour montrer cela, considérons les calculs suivants :

Tout d'abord, remarquons que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad [T(S_m) \neq T(S_n) \Leftrightarrow ((m > 2 \text{ et } n = 1) \text{ ou } (m > n > 1))].$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{d(T(S_m), T(S_1))}{d(S_m, S_1)} e^{d(T(S_m), T(S_1)) - d(S_m, S_1)} &= \frac{S_{m-1} - 1}{S_m - 1} e^{S_{m-1} - S_m} \\ &= \frac{m^2 - m - 2}{m^2 + m - 2} e^{-m} < e^{-m} < e^{-1}. \end{aligned}$$

Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > 1$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{d(T(S_m), T(S_n))}{d(S_m, S_n)} e^{d(T(S_m), T(S_n)) - d(S_m, S_n)} &= \frac{S_{m-1} - S_{n-1}}{S_m - S_n} e^{S_n - S_{n-1} + S_{m-1} - S_m} \\ &= \frac{m + n - 1}{m + n + 1} e^{n-m} < e^{n-m} \leq e^{-1}. \end{aligned}$$

Clairement S_1 est un point fixe de T .

D'autre par, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(T(S_n), T(S_1))}{d(S_n, S_1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n-1} - 1}{S_n - 1} = 1,$$

alors T n'est pas satisfaisant

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \quad \text{pour } 0 < \lambda < 1.$$

En d'autres termes, l'application T n'est pas une contraction de Banach.

Dans la suite, nous allons donner une autre version de la théorème de Wardowski.

On aura d'abord besoin le lemme suivant. Pour la preuve on renvoie à [60].

Lemme 2.1.1. Soient $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Alors, les affirmations suivantes sont satisfaites :

- (a) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.
- (b) Si $\inf F = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = -\infty$.

Remarque 2.1.2. D'après le lemme précédent, Secelean a montré dans [60] que la condition (F2) dans la définition 2.1.1 peut être remplacé par une condition équivalente et très simple comme suit :

$$(F2') : \inf F = -\infty.$$

Par ailleurs, Piri et Kumam [52] ont utilisé la condition suivante au lieu de (F3) :

$$(F3') : F \text{ est continue sur }]0, \infty[.$$

En désignant par \mathfrak{F} l'ensemble de toutes les fonctions F satisfaisant les conditions (F1), (F2') et (F3').

Exemple 2.1.5. Soit $F_1(t) = \frac{-1}{t}$, $F_2(t) = \frac{1}{1 - e^t}$, alors on voit facilement que $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$.

Théorème 2.1.2. [52] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $F \in \mathfrak{F}$ et $\tau > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, \quad [d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))].$$

Alors, T admet un point fixe unique $z \in X$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n x_0 = z$.

Cas multivoque

Dans cette partie, on va voir la définition des applications F -contractantes dans le cas multivoque. Ce type est considéré comme une combinaison entre les idées de Wardowski [67] et de Nadler [45].

Définition 2.1.2. [5] Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque F -contractante si $F \in \mathcal{F}$ et il existe $\tau > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, [H(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))]. \quad (2.3)$$

Remarque 2.1.3. Si on prend $F(t) = \ln t$, on peut dire alors que toute application multivoque contractante [45] est aussi F -contractante, mais la réciproque n'est pas toujours vraie (voir l'exemple 2.1.6).

Théorème 2.1.3. [5] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow K(X)$ une application multivoque F -contractante. Alors, T a un point fixe dans X .

Remarque 2.1.4. Dans le théorème 2.1.3, on remarque que Tx est compact pour tout $x \in X$. Cela nous permettons de présenter le problème suivant :

Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque F -contractante. Est-ce que T a un point fixe ?

En ajoutant une condition (F4) sur la fonction F , Altun et al. [5] ont résolu le problème précédent comme suit :

Théorème 2.1.4. [5] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque F -contractante. On suppose que F satisfaisant aussi :

$$(F4) : F(\inf A) = \inf F(A), \text{ pour tout } A \subset]0, \infty[\text{ avec } \inf A > 0.$$

Alors, T a un point fixe.

On désigne par \mathfrak{F}_* l'ensemble de toute les fonctions satisfaisant (F1), (F2), (F3) et (F4).

Lemme 2.1.2. Si F satisfaisant la condition (F1), alors elle satisfaisant (F4) si et seulement si elle est continue à droite.

Preuve.

Supposons que (F4) est vérifiée, alors

$$\inf F(A) = F(\inf A), \text{ pour tout } A \subset]0, \infty[\text{ avec } \inf A > 0.$$

Soit $\epsilon > 0$, alors on a

$$\inf F(]a, a + \epsilon[) = F(\inf]a, a + \epsilon[) = F(a).$$

Par la définition de $\inf F(]a, a + \epsilon[) = F(a)$, il existe $t_0 \in]a, a + \epsilon[$ tel que

$$F(a) \leq F(t_0) < F(a) + \epsilon,$$

cela implique que

$$0 \leq F(t_0) - F(a) < \epsilon. \quad (2.4)$$

Soit $t \in]a, t_0[$, alors d'après (F1) on obtient

$$F(t) < F(t_0), \quad (2.5)$$

De (2.4) et (2.5), on en déduit que $-\epsilon < F(t) - F(a) < \epsilon$.

Par conséquent,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, t \in]a, a + \delta[\Rightarrow |F(t) - F(a)| < \epsilon,$$

où $\delta = t_0 - a$. Alors, F est continue à droite.

Maintenant, on prouve l'inverse.

Soit $A \subset]0, +\infty[$ et $m = \inf A$ avec $m > 0$, donc pour tout $t \in A : m \leq t$.

En utilisant (F1) on obtient $F(m) \leq F(t)$. Donc, pour tout $t \in A$ on a $F(m) \leq F(t)$,

ce implique

$$F(m) \leq \inf F(A). \quad (2.6)$$

D'autre part, puisque F est continue à droite en m , alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in [m, m + \delta] \Rightarrow |F(t) - F(m)| \leq \epsilon,$$

et comme F est supposée être strictement croissante, donc $F(m) \leq F(t)$.

ce qui donne

$$\exists \delta > 0, \forall t \in [m, m + \delta] : F(t) \leq F(m) + \epsilon.$$

Par ailleurs, parce que $m = \inf(A)$ alors il existe $t_0 \in A$ tel que $m \leq t_0 < m + \delta$, qui à conduit $F(t_0) \leq F(m) + \epsilon$.

Mais, $F(t_0) \in F(A)$ c'est-à-dire $F(t_0) \geq \inf F(A)$, alors

$$\forall \epsilon > 0, \inf F(A) \leq F(m) + \epsilon.$$

Par conséquent,

$$\inf F(A) \leq F(m). \quad (2.7)$$

D'après (2.6) et (2.7), on obtient

$$F(m) = \inf F(A).$$

□

En se basant sur l'exemple 2.1.4, on peut donner l'exemple ci-dessous. Cet exemple montre que une application multivoque F -contractante est une généralisation d'application multivoque contractante.

Exemple 2.1.6. Soient $X = \left\{ x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ et $d(x, y) = |x - y|, x, y \in X$. Alors, (X, d) est un espace métrique complet. On définit l'application $T : X \rightarrow K(X)$ par :

$$Tx = \begin{cases} \{x_1\} & \text{si } x = x_1, \\ \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} & \text{si } x = x_n. \end{cases}$$

On distingue les cas suivants pour nous assurons que T est une application multivoque F -contractante avec $F(t) = \ln t + t$ et $\tau = 1$.

Remarquons,

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, [H(Tx_m, Tx_n) > 0 \Leftrightarrow ((m > 2 \text{ et } n = 1) \text{ ou } (m > n > 1))].$$

Cas 1 : Pour $m > 2$ et $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{H(Tx_m, Tx_1)}{d(x_m, x_1)} e^{H(Tx_m, Tx_1) - d(x_m, x_1)} &= \frac{x_{m-1} - x_1}{x_m - x_1} e^{x_{m-1} - x_m} \\ &= \frac{m^2 - m - 2}{m^2 + m - 2} e^{-m} < e^{-m} < e^{-1}. \end{aligned}$$

Cas 2 : Pour $m > n > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{H(Tx_m, Tx_n)}{d(x_m, x_n)} e^{H(Tx_m, Tx_n) - d(x_m, x_n)} &= \frac{x_{m-1} - x_{n-1}}{x_m - x_n} e^{x_{m-1} - x_{n-1} - x_m + x_n} \\ &= \frac{m + n - 1}{m + n + 1} e^{n-m} < e^{n-m} \leq e^{-1}. \end{aligned}$$

Cela illustre que T est une application multivoque F -contractante (voir (2.2)). Par conséquent, toutes les conditions du théorème 2.1.3 (ou théorème 2.1.4) sont satisfaites. Alors, T a un point fixe dans X .

D'autre part, puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H(Tx_n, Tx_1)}{d(x_n, x_1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} = 1.$$

On en déduit que T n'est pas une application multivoque contractante.

2.2 F -contraction de type Geraghty

Cas univoque

D'abord, rappelons la définition des contractions de type Geraghty et son théorème de point fixe.

Définition 2.2.1. [30] Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \rightarrow X$ est dite contraction de type Geraghty si et seulement s'il existe une fonction $\beta \in \Omega$ et pour tout $x, y \in X$, on a

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y))d(x, y),$$

où

$$\Omega = \{\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(t_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0\}.$$

Exemple 2.2.1. Soit $\beta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1[, i \in \{1, 2\}$ donnée par ce qui suit :

1. $\beta_1(t) = \frac{t}{1+t}$.
2. $\beta_2(t) = \frac{\ln(t+1)}{t}$.

Alors, $\beta_i \in \Omega$ pour tout $i \in \{1, 2\}$.

En même référence, Geraghty a généralisé le principe de contraction de Banach selon le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. [30] Toute contraction de type Geraghty d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique dans X .

Définition 2.2.2. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que l'application $T : X \rightarrow X$ une F -contraction de type Geraghty si et seulement s'il existe une fonction $\beta \in \Omega$, $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, \quad [d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(\beta(d(x, y))d(x, y))].$$

Théorème 2.2.2. Toute application F -contractante de type Geraghty d'un espace métrique complet dans lui même a un point fixe unique dans X .

Cas multivoque

Définition 2.2.3. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $T : X \rightarrow CL(X)$ une application multivoque F -contractante de type Geraghty si et seulement s'il existe une fonction $\beta \in \Omega$, $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, \quad [H(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(d(x, y))d(x, y))].$$

2.3 F -contraction généralisé

Cas univoque

En se basant sur les idées de Wardowski [67] et Ćirić [20], Minak et al. [42] ont introduit les applications F -contractantes généralisées comme une généralisation des applications contractantes généralisées.

Définition 2.3.1. [42] Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow X$ une application. Alors, T est dite F -contraction généralisé si $F \in \mathcal{F}$ et il existe $\tau > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, \quad [d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y))],$$

où

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}.$$

Remarque 2.3.1. Tout simplement, on voit que toute application contractante généralisée [20] est aussi F -contractante généralisée, il suffit de prendre $F(t) = \ln t$.

Théorème 2.3.1. [42] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application F -contractante généralisée. Si T ou F est continue, alors T a un point fixe unique dans X .

Cas multivoque

Tout d'abord, on va donner la définition des applications multivoques généralisées.

Définition 2.3.2. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $T : X \rightarrow CB(X)$ une application contractante généralisée s'il existe $0 < \lambda < 1$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad [H(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow H(Tx, Ty) \leq \lambda M(x, y)],$$

où

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}.$$

L'objectif principal de cette partie est d'établir une version du théorème 2.3.1 dans cas multivoque.

Définition 2.3.3. [1] Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application. T est dite F -contraction généralisée si $F \in \mathcal{F}$ et il existe $\tau > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, \quad [H(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y))],$$

où

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}.$$

Théorème 2.3.2. [1] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow K(X)$ une application multivoque F -contractante généralisée. Si T ou F est continue, alors T a un point fixe dans X .

2.4 F -contraction de type Berinde

Cas univoque

Pour cette type d'application, nous aurons besoin de rappeler le concept de contraction de type Berinde sur l'espace métrique (voir [13, 16, 14] pour des informations détaillées).

Définition 2.4.1. Une application $T : X \rightarrow X$ d'un espace métrique (X, d) est dite une contraction de type Berinde s'il existe une constante $\delta \in]0, 1[$ et $L \geq 0$ tels que

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx), \quad \text{pour tout } x, y \in X. \quad (2.8)$$

Puisque toute distance est symétrique, alors la condition contractive de type Berinde peut être écrite sous la forme suivante :

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, Ty), \quad \text{pour tout } x, y \in X. \quad (2.9)$$

Par conséquent, pour vérifier la contractivité de type Berinde de T , il est nécessaire de vérifier (2.8) et (2.9).

Remarque 2.4.1. Évidemment, toute contraction de Banach avec $\delta = \lambda$ et $L = 0$ est une contraction de type Berinde.

Dans l'année 2014, Minak et al. ont également introduit les F -contractions de type Berinde en combinant cette fois-ci les idées de Wardowski et de Berinde.

Définition 2.4.2. [42] Une application $T : X \rightarrow X$ d'un espace métrique (X, d) est dite F -contraction de type Berinde si $F \in \mathcal{F}$ et il existe $\tau > 0$ et $L \geq 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, \quad [d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y) + Ld(y, Tx))]. \quad (2.10)$$

Pour vérifier F -contractivité de type Berinde de T , il est nécessaire de vérifier (2.10) et

$$\forall x, y \in X, \quad [d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y) + Ld(x, Ty))]. \quad (2.11)$$

En utilisant le concept de F -contraction de type Berinde, on peut donner le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. [42] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application F -contractante de type Berinde, alors T a un point fixe dans X .

Remarque 2.4.2. Toute application F -contractante est aussi F -contractante de type Berinde, mais la réciproque n'est pas toujours vérifiée (Voir l'exemple 2.9 dans [42]).

Cas multivoque

Nous allons commencer cette partie en donnant la prochaine définition qui est introduit par Berinde et Berinde [15]

Définition 2.4.3. [15] Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. On dit que T une application multivoque de Picard faible (MWP) si pour tout $x \in X$ et tout $y \in Tx$, il existe une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X tel que

- (i) $x_0 = x, x_1 = y$.
- (ii) $x_{n+1} \in Tx_n$.
- (iii) la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est un point fixe de T .

Alors, Berinde et Berinde [15] montrent que le type de contractions multivoques sur des espaces métriques complets considéré par Nadler [45], Mizoguchi et Takahashi [43], Reich [57], Rus [58] et Petrus [50], sont des applications multivoques de Picard faibles.

Dans le même article, Berinde et Berinde [15] ont introduit le concept d'application multivoque contractante de type Berinde.

Définition 2.4.4. [15] Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. On dit que T contraction de type Berinde s'il existe deux constantes $\delta \in]0, 1[$ et $L \geq 0$ tels que

$$H(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx), \tag{2.12}$$

pour tout $x, y \in X$.

Pour vérifier que T est une application multivoque F -contractante de type Berinde, il est nécessaire de vérifier (2.12) et

$$H(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, Ty), \tag{2.13}$$

pour tout $x, y \in X$.

Théorème 2.4.2. [15] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$ est une application multivoque contractante de type Berinde. Alors, T est une application multivoque de Picard faible.

Maintenant, on va donner la définition d'application multivoque F -contractante de type Berinde qui est basée sur les idées dans [67] et [15].

Définition 2.4.5. [6] Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. On dit que T une F -contractante de type Berinde si $F \in \mathcal{F}$, et il existe deux constantes $\tau > 0$ et $c \geq 0$ tels que pour tout $x, y \in X$ avec $H(Tx, Ty) > 0$,

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y) + cd(y, Tx)). \quad (2.14)$$

Si nous considérons $F(t) = \ln t$, on peut dire que toute application multivoque contractante de type Berinde [15] est aussi F -contraction de type Berinde.

Théorème 2.4.3. [6] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque F -contractante de type Berinde avec $F \in \mathfrak{F}_*$. Alors, T est une application multivoque de Picard faible.

Remarque 2.4.3.

S'il existe $\delta \in]0, 1[$ et $L \geq 0$ satisfait (2.12), alors (2.14) est vérifié avec $F(t) = \ln t$, $\tau = -\ln \delta$ et $c = \frac{L}{\delta}$. Par conséquent, le théorème 2.4.2 est un cas particulier du théorème 2.4.3.

Remarque 2.4.4.

S'il existe $\tau > 0$ et $F \in \mathfrak{F}_*$ satisfait (2.3), alors (2.14) est vérifié avec $c = 0$. Par conséquent, le théorème 2.1.4 est un cas particulier du théorème 2.4.3.

Maintenant, nous donnons un exemple pour montrer que le théorème 2.4.3 est une généralisation du théorème 2.1.4.

Exemple 2.4.1. Soient $X = [0, 1] \cup \{2, 3\}$ et $d(x, y) = |x - y|$, alors (X, d) est un espace métrique complet. On définit $T : X \rightarrow CB(X)$ par

$$Tx = \begin{cases} \left[\frac{1-x}{3}, \frac{1-x}{2} \right] & \text{si } x \in [0, 1], \\ \{x\} & \text{si } x \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Puisque,

$$H(T2, T3) = 1 = d(2, 3),$$

alors pour tout $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$, on obtient

$$\tau + F(H(T2, T3)) > F(d(2, 3)).$$

Par conséquent, T n'est pas F -contractante, donc le théorème 2.1.4 ne peut pas être appliqué à cet exemple.

Considérons l'application F définie par $F(t) = \ln t$. Alors, T est une application multivoque F -contractante de type Berinde avec $\tau = \ln 2$ et $c = 10$.

2.5 F -contraction de type Hardy-Rogers

Cas univoque

Dans cette partie, nous allons présenter une autre type des applications F -contractantes dont nous aurons besoin pour le reste de notre travail.

On sait que le principe de Banach a été généralisé par plusieurs auteurs. Par exemple, Hardy et Rogers [31] où ils ont utilisé la condition contractive comme suit :

$$d(Tx, Ty) \leq a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx), \quad (2.15)$$

pour tout $x, y \in X$, où a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sont nombres réels positifs tels que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 1$.

Définition 2.5.1. [21] Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \rightarrow X$ est appelée F -contractante de type Hardy-Rogers s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx)), \quad (2.16)$$

pour tout $x, y \in X$ avec $d(Tx, Ty) > 0$, où $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1$, $a_3 \neq 1$ et $a_5 \geq 0$.

Remarque 2.5.1.

De (F1) et (2.16), on en déduit que toute application F -contractante de type Hardy-Rogers satisfaisant la condition suivante :

$$d(Tx, Ty) < a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx),$$

pour tout $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$ où $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1$, $a_3 \neq 1$ et $a_5 \geq 0$.

Théorème 2.5.1. [21] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application F -contractante de type Hardy-Rogers. Alors, T a un point fixe.

De plus, si en ajoutant la condition $a_1 + a_4 + a_5 \leq 1$, on trouve que le point fixe de T est unique.

Comme premier corollaire du théorème 2.5.1, on prend $a_1 = 1$ et $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, on obtient le théorème 2.1.1 de Wardowski [67].

D'autre part, en mettant $a_1 = a_4 = a_5 = 0$ et $a_2 + a_3 = 1$ et $a_2 \neq 0$, on trouve la version suivante de résultat de Kannan [37].

Corollaire 2.5.1. Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty)),$$

pour tout $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$ où $a_2 + a_3 = 1$, $a_3 \neq 1$. Alors, T a un point fixe unique dans X .

Une version du théorème de point fixe de Chatterjea [19] est obtenue du théorème 2.5.1 en prenant $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et $a_4 = \frac{1}{2}$.

Corollaire 2.5.2. Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F\left(\frac{1}{2}d(x, Ty) + a_5d(y, Tx)\right),$$

pour tout $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$. Alors, T a un point fixe dans X .

Au plus, si $a_5 \leq \frac{1}{2}$, alors le point fixe de T est unique.

Enfin, si nous choisissons $a_4 = a_5 = 0$, nous obtenons un théorème de type Reich [56].

Corollaire 2.5.3. Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty)),$$

pour tout $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$, où $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $a_3 \neq 1$.

Alors, T possède un point fixe unique dans X .

Cas multivoque

En 2013, Sgroi et Vetro [61] ont prouvé l'existence d'un point fixe pour des applications multivoques F -contractantes de type Hardy-Rogers comme une généralisation du théorème

de Wardowski [67] dans le cas multivoque.

D'abord, on désigne par \mathcal{F}_* l'ensemble de toutes les fonctions F satisfaisant les conditions (F1), (F2), (F3) et

(F4) : F est continue à droite.

Théorème 2.5.2. [61] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$. Supposons qu'il existe $F \in \mathcal{F}_*$ et $\tau > 0$ tels que

$$2\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx)),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $H(Tx, Ty) > 0$, où $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$ et $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1$, $a_3 \neq 1$.

Alors, T a un point fixe dans X .

Remarque 2.5.2.

Si on prend $a_1 = 1$ et $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, on obtient le théorème de Nadler [45].

Si nous choisissons $a_4 = a_5 = 0$, on obtient le théorème de type Reich [57] dans le cas multivoque.

2.6 F -contraction de type Suzuki

Cas univoque

Dans l'année 1962, Edelstein a prouvé la version suivante du principe de contraction de Banach

Théorème 2.6.1. [29] Soient (X, d) un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application. Supposons que $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ est satisfaite pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$. Alors, T a un point fixe unique dans X .

Suzuki [64] a prouvé des versions généralisées des résultats d'Edelstein dans un espace métrique compact comme suit :

Théorème 2.6.2. [64] Soient (X, d) un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application. Supposons que pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$, on a

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq d(x, y).$$

Alors, T a un point fixe unique dans X .

En 2014, Piri et Kumam [52] ont introduit un nouvelle application en combinant les idées de Wardowski [67] et Suzuki [64] appelée F -contraction de type Suzuki.

Définition 2.6.1. [52] Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \rightarrow X$ est dite F -contraction de type Suzuki s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$, on a

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)).$$

Théorème 2.6.3. [52] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une F -contraction de type Suzuki. Alors, T a un point fixe unique dans X .

Cas multivoque

Définition 2.6.2. Soit (X, d) un espace métrique. $T : X \rightarrow CL(X)$ est dite application multivoque F -contractante de type Suzuki s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$ avec $H(Tx, Ty) > 0$, on a

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow \tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)).$$

Théorème 2.6.4. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque F -contractante de type Suzuki. Alors, T possède un point fixe dans X .

Chapitre 3

Théorèmes de point fixe pour de nouveau type de contractions

Dans ce chapitre, on va présenter nos résultats publiés dans [35] qui concernent quelques théorèmes de point fixe en combinant des contractions de type Geraghty, Hardy-Rogers et Wardowski avec le concept de α -admissibilité dans le cadre des applications multivoques. De plus, on va établir de nouveaux résultats de points fixes sur des espaces métriques partiellement ordonné et dans des espaces métriques muni d'un graphe.

3.1 Théorèmes de point fixe pour $(\alpha-F)$ -Geraghty contraction de type Hardy-Rogers

On commence cette section par une rappelle rapide.

Soit \mathcal{F} l'ensemble de toutes les fonctions $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(F1) : F est strictement croissante.

(F2) : Pour toute suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = -\infty$.

(F3) : Il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^k F(t) = 0$.

\mathcal{F}_* désigne l'ensemble de toutes les fonctions F satisfaisant les conditions (F1), (F2), (F3) et (F4) tel que

(F4) : F est continue à droite.

Ω désigne l'ensemble des fonctions $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1[$ satisfaisant la condition suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(t_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0.$$

Maintenant, on va introduire un nouveau type des contractions, s'appelle $(\alpha-F)$ -Geraghty contraction de type Hardy-Rogers, la quelle considérée comme une généralisation aux applications multivoques de type Geraghty.

Définition 3.1.1. Soient (X, d) un espace métrique et $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Une application $T : X \rightarrow CL(X)$ est dite $(\alpha-F)$ -Geraghty contraction de type Hardy-Rogers, s'il existe $F \in \mathcal{F}$, $\beta \in \Omega$, $\tau > 0$ et des nombres réels positifs a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 avec $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1$ et $a_3 \neq 1$ tels que

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(N(x, y))N(x, y)), \quad (3.1)$$

pour tout $x, y \in X$ avec $\alpha(x, y) \geq 1$ et $H(Tx, Ty) > 0$ où

$$N(x, y) = a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx).$$

Remarque 3.1.1.

1. Si on prend $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ et $\alpha(x, y) = 1$, alors (3.1) devient :

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(d(x, y))d(x, y)),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $H(Tx, Ty) > 0$.

Ce qui donne la définition d'une application multivoque F -contractante de type Geraghty.

2. Si on prend $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0, \alpha(x, y) = 1$ et $F(t) = \ln t$, alors en écrivant (3.1) comme suit :

$$\begin{aligned} \tau + \ln(H(Tx, Ty)) &\leq \ln(\beta(d(x, y))d(x, y)) \\ &= \ln(\beta(d(x, y))) + \ln(d(x, y)), \end{aligned}$$

pour tout $x, y \in X$ avec $H(Tx, Ty) > 0$.

Ce qui implique

$$H(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} \beta(d(x, y))d(x, y),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $H(Tx, Ty) > 0$.

Posons $\gamma(d(x, y)) = e^{-\tau} \beta(d(x, y))$, on obtient

$$H(Tx, Ty) \leq \gamma(d(x, y))d(x, y). \quad (3.2)$$

Remarquons que la fonction γ vérifie la condition contractive de Geraghty. On conclut que (3.2) définit une application contractante de type Geraghty.

Grâce à la définition 3.1.1, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow K(X)$ une application $(\alpha-F)$ -Geraghty contractante de type Hardy-Rogers. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) T est α -admissible.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.
- (3) T est α -semi-continue inférieurement, ou X est α -régulier, c'est-à-dire, pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $x_n \rightarrow x \in X$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\alpha(x_n, x) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, T admet un point fixe.

Preuve.

Par l'hypothèse (2), il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.

Si $x_0 = x_1$ ou $x_1 \in Tx_1$, alors x_1 est un point fixe de T et donc la preuve est complétée.

Supposons que $x_0 \neq x_1$ et $x_1 \notin Tx_1$, alors $d(x_1, Tx_1) > 0$, par conséquent $H(Tx_0, Tx_1) > 0$.

Puisque Tx_1 est compact, il existe $x_2 \in Tx_1$ tel que $d(x_1, x_2) = d(x_1, Tx_1)$.

Selon (3.1), on a

$$\begin{aligned} F(d(x_1, x_2)) &= F(d(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq F(\beta(N(x_0, x_1))N(x_0, x_1)) - \tau. \end{aligned}$$

Puisque F est strictement croissante et $\beta(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} F(d(x_1, x_2)) &< F(N(x_0, x_1)) - \tau \\ &= F(a_1d(x_0, x_1) + a_2d(x_0, Tx_0) + a_3d(x_1, Tx_1) + a_4d(x_0, Tx_1) + a_5d(x_1, Tx_0)) - \tau \\ &\leq F(a_1d(x_0, x_1) + a_2d(x_0, x_1) + a_3d(x_1, x_2) + a_4d(x_0, x_2)) - \tau \\ &\leq F((a_1 + a_2 + a_4)d(x_0, x_1) + (a_3 + a_4)d(x_1, x_2)) - \tau. \end{aligned}$$

Puisque F est strictement croissante, on trouve

$$d(x_1, x_2) < (a_1 + a_2 + a_4)d(x_0, x_1) + (a_3 + a_4)d(x_1, x_2),$$

qui à mène

$$(1 - a_3 - a_4)d(x_1, x_2) < (a_1 + a_2 + a_4)d(x_0, x_1).$$

Puisque

$$a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1 \text{ et } a_3 \neq 1,$$

ce qui donne

$$1 - a_3 - a_4 > 0,$$

ainsi

$$d(x_1, x_2) < \frac{a_1 + a_2 + a_4}{1 - a_3 - a_4} d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1).$$

Par conséquent, on trouve que

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(d(x_0, x_1)) - \tau.$$

Suivant les procédures précédentes, supposons que $x_1 \neq x_2$ et $x_2 \notin Tx_2$, alors $d(x_2, Tx_2) > 0$ et donc $H(Tx_1, Tx_2) > 0$.

Puisque $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ et T est α -admissible, alors

$$\alpha(x_1, x_2) \geq 1, \quad \text{pour } x_2 \in Tx_1.$$

Aussi, puisque Tx_2 est compact, il existe $x_3 \in Tx_2$ tel que $d(x_2, x_3) = d(x_2, Tx_2)$.

En utilisant (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} F(d(x_2, x_3)) &= F(d(x_2, Tx_2)) \leq F(H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq F(\beta(N(x_1, x_2))N(x_1, x_2)) - \tau \\ &< F(N(x_1, x_2)) - \tau \\ &= F(a_1d(x_1, x_2) + a_2d(x_1, Tx_1) + a_3d(x_2, Tx_2) + a_4d(x_1, Tx_2) + a_5d(x_2, Tx_1)) - \tau \\ &\leq F(a_1d(x_1, x_2) + a_2d(x_1, x_2) + a_3d(x_2, x_3) + a_4d(x_1, x_3)) - \tau \\ &\leq F((a_1 + a_2 + a_4)d(x_1, x_2) + (a_3 + a_4)d(x_2, x_3)) - \tau. \end{aligned}$$

Par des calculs similaires comme ci-dessus, on en déduit

$$F(d(x_2, x_3)) \leq F(d(x_1, x_2)) - \tau.$$

En continuant de cette manière, on peut construire une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que

$$x_n \neq x_{n+1} \in Tx_n, \quad \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1,$$

et

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_{n-1}, x_n)) - \tau, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Soit $b_n = d(x_n, x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après (3.3), on a

$$F(b_n) \leq F(b_{n-1}) - \tau \leq \dots \leq F(b_0) - n\tau, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

qui implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(b_n) = -\infty.$$

Par conséquent, (F2) nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0. \quad (3.5)$$

On va maintenant prouver que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Considérons pour cela la condition (F3), il existe donc $k \in]0, 1[$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^k F(b_n) = 0. \quad (3.6)$$

De (3.4), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve que

$$b_n^k F(b_n) - b_n^k F(b_0) \leq -b_n^k n\tau \leq 0. \quad (3.7)$$

Passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (3.7) et en utilisant (3.6), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nb_n^k = 0.$$

Par la définition de la limite, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $nb_n^k \leq 1$ pour tout $n \geq n_1$.

Par conséquent,

$$b_n \leq \frac{1}{n^{1/k}}, \quad \text{pour tout } n \geq n_1. \quad (3.8)$$

Soit $m > n \geq n_1$. Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire et (3.8), on trouve que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \\ &= \sum_{j=n}^{m-1} b_j \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j^{1/k}} \\ &\leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^{1/k}} < \infty. \end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'une somme partielle d'une série convergente, on obtient

$$d(x_n, x_m) \rightarrow 0, \quad \text{pour } n, m \rightarrow +\infty.$$

Alors, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

D'autre part, (X, d) est un espace métrique complet, donc $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $z \in X$.

Maintenant, on va voir que $z \in Tz$ (c'est-à-dire z est un point fixe de T).

Si T est α -semi-continue inférieurement, on a

$$d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x_{n+1}), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

selon (3.5) on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

La propriété de α -semi-continuité inférieur de T donne

$$0 \leq d(z, Tz) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf d(x_n, Tx_n) = 0.$$

Par conséquent, $d(z, Tz) = 0$ donc $z \in Tz$.

Si X est α -régulier, alors $\alpha(x_n, z) \geq 1$.

Supposons que $d(z, Tz) > 0$, alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_n, Tz) > 0, \quad \text{pour tout } n \geq n_2,$$

qui implique $H(Tx_n, Tz) > 0$.

Donc, l'inégalité (3.1) nous donne :

$$\begin{aligned}
 F(d(x_{n+1}, Tz)) &\leq F(H(Tx_n, Tz)) \\
 &\leq F(\beta(N(x_n, z))N(x_n, z)) - \tau \\
 &< F(N(x_n, z)) - \tau \\
 &= F(a_1d(x_n, z) + a_2d(x_n, Tx_n) + a_3d(z, Tz) + a_4d(x_n, Tz) + a_5d(z, Tx_n)) - \tau \\
 &\leq F(a_1d(x_n, z) + a_2d(x_n, x_{n+1}) + a_3d(z, Tz) + a_4d(x_n, Tz) + a_5d(z, x_{n+1})) - \tau.
 \end{aligned}$$

Puisque F est strictement croissante, on obtient

$$d(x_{n+1}, Tz) < a_1d(x_n, z) + a_2d(x_n, x_{n+1}) + a_3d(z, Tz) + a_4d(x_n, Tz) + a_5d(z, x_{n+1}),$$

pour tout $n \geq n_2$.

Laissant $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$d(z, Tz) \leq (a_3 + a_4)d(z, Tz) < d(z, Tz),$$

par suite $d(z, Tz) = 0$, donc z est un point fixe de T . □

Dans le théorème suivant, on remplace $K(X)$ par $CB(X)$ où $F \in \mathcal{F}_*$.

Théorème 3.1.2. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application $(\alpha-F)$ -Geraghty contractante de type Hardy-Rogers avec $F \in \mathcal{F}_*$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) T est α -admissible.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.
- (3) T est α -semi-continue inférieurement, ou X est α -régulier.

Alors, T a un point fixe.

Preuve.

Comme dans la preuve du théorème 3.1.1, il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ avec $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$. Si $x_1 \in Tx_1$, alors x_1 est un point fixe de T . Supposons le contraire, donc

$$H(Tx_0, Tx_1) \geq d(x_1, Tx_1) > 0.$$

En utilisant (3.1), on obtient

$$F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(\beta(N(x_0, x_1))N(x_0, x_1)) - \tau < F(N(x_0, x_1)) - \tau.$$

Puisque F est continue à droite, il existe un nombre réel $h_1 > 1$ tel que

$$F(h_1 H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(N(x_0, x_1)) - \tau. \quad (3.9)$$

De $d(x_1, Tx_1) < h_1 H(Tx_0, Tx_1)$ et le lemme 1.1.2, il existe $x_2 \in Tx_1$ tel que

$$d(x_1, x_2) \leq h_1 H(Tx_0, Tx_1).$$

Alors, en utilisant (F1) et (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} F(d(x_1, x_2)) &\leq F(h_1 H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq F(N(x_0, x_1)) - \tau \\ &= F(a_1 d(x_0, x_1) + a_2 d(x_0, Tx_0) + a_3 d(x_1, Tx_1) + a_4 d(x_0, Tx_1) + a_5 d(x_1, Tx_0)) - \tau \\ &\leq F(a_1 d(x_0, x_1) + a_2 d(x_0, x_1) + a_3 d(x_1, x_2) + a_4 d(x_0, x_2)) - \tau \\ &\leq F((a_1 + a_2 + a_4) d(x_0, x_1) + (a_3 + a_4) d(x_1, x_2)) - \tau, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(d(x_0, x_1)) - \tau.$$

Puisque T est α -admissible et $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$, on obtient $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ pour $x_2 \in Tx_1$. Supposons que $x_2 \notin Tx_2$, puisque F est continue à droite, il existe $h_2 > 1$ tel que

$$F(h_2 H(Tx_1, Tx_2)) \leq F(N(x_1, x_2)) - \tau. \quad (3.10)$$

D'après $d(x_2, Tx_2) < h_2 H(Tx_1, Tx_2)$ et le lemme 1.1.2, il existe $x_3 \in Tx_2$ tel que

$$d(x_2, x_3) \leq h_2 H(Tx_1, Tx_2).$$

Alors, en utilisant (F1) et (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} F(d(x_2, x_3)) &\leq F(h_2 H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq F(N(x_1, x_2)) - \tau \\ &= F(a_1 d(x_1, x_2) + a_2 d(x_1, Tx_1) + a_3 d(x_2, Tx_2) + a_4 d(x_1, Tx_2) + a_5 d(x_2, Tx_1)) - \tau \\ &\leq F(a_1 d(x_1, x_2) + a_2 d(x_1, x_2) + a_3 d(x_2, x_3) + a_4 d(x_1, x_3)) - \tau \\ &\leq F((a_1 + a_2 + a_4) d(x_1, x_2) + (a_3 + a_4) d(x_2, x_3)) - \tau, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$F(d(x_2, x_3)) \leq F(d(x_1, x_2)) - \tau.$$

En continuant de cette manière, on construit deux suites $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ et $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset]1, +\infty[$ telles que $x_n \neq x_{n+1} \in Tx_n$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ et

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(h_n H(Tx_{n-1}, Tx_n)) \leq F(d(x_{n-1}, x_n)) - \tau, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent,

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_0, x_1)) - n\tau, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

ce que implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(d(x_n, x_{n+1})) = -\infty.$$

De (F2), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Le reste de la preuve est similaire à la preuve du théorème 3.1.1. □

Maintenant, on va donner un exemple illustre nos résultats.

Exemple 3.1.1. Soient $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $d(x, y) = |x - y|$. On définit $T: X \rightarrow CB(X)$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$Tx = \begin{cases} \{2\} & x \in \{1, 2\}, \\ \{1\} & x = 3, \\ \{3\} & x = 4, \end{cases}$$

et

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \{(2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Premièrement, nous nous assurons que T est $(\alpha-F)$ -Geraghty contraction de type Hardy-Rogers. Pour cela, on prend $F(x) = \ln x$, $\beta(t) = \frac{t}{1+t}$, $\tau = \frac{1}{4}$, $a_1 = 1$ et $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Alors, il suffit de montrer que

$$H(Tx, Ty) \leq e^{-\frac{1}{4}} \beta(N(x, y)) N(x, y),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $H(Tx, Ty) > 0$ et $\alpha(x, y) \geq 1$.

Observer que $H(Tx, Ty) > 0$ et $\alpha(x, y) \geq 1$ si et seulement si :

$$(x, y) \notin \{(x, x): x \in X\} \cup \{(2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (1, 2), (2, 1)\}.$$

Alors, on peut directement obtenir les cas suivants :

Cas 1. Pour $x = 1$ et $y = 3$, on trouve que

$$H(T1, T3) = 1, \quad N(1, 3) = a_1 d(1, 3) = 2 \quad \text{et} \quad \beta(N(1, 3)) = \frac{2}{3},$$

ce qui implique

$$H(T1, T3) \leq e^{-\frac{1}{4}} \beta(N(1, 3)) N(1, 3).$$

Cas 2. Pour $x = 1$ et $y = 4$, on trouve que

$$H(T1, T4) = 1, \quad N(1, 4) = a_1 d(1, 4) = 3 \quad \text{et} \quad \beta(N(1, 4)) = \frac{3}{4},$$

ce qui implique

$$H(T1, T4) \leq e^{-\frac{1}{4}} \beta(N(1, 4)) N(1, 4).$$

Cas 3. Pour $x = 2$ et $y = 4$, on trouve que

$$H(T2, T4) = 1, \quad N(2, 4) = a_1 d(2, 4) = 2 \quad \text{et} \quad \beta(N(2, 4)) = \frac{2}{3},$$

ce qui implique

$$H(T2, T4) \leq e^{-\frac{1}{4}} \beta(N(2, 4)) N(2, 4).$$

On conclut, T est $(\alpha-F)$ -Geraghty contraction de type Hardy-Rogers.

On va vérifier maintenant que les conditions du théorème 3.1.2 (resp. théorème 3.1.1) sont satisfaites :

(1) T est α -admissible . En effet, nous allons discuter quatre cas

1^{er} cas : Si $x = 1$, alors $y = 2$ et $\alpha(x, y) \geq 1$ vérifié. Aussi, $\alpha(y, z) \geq 1$ puisque $z = 2 \in Ty = \{2\}$.

2^{eme} cas : Si $x = 2$, alors $y = 2$ et $\alpha(x, y) \geq 1$ vérifié. Aussi, $\alpha(y, z) \geq 1$ puisque $z = 2 \in Ty = \{2\}$.

3^{eme} cas : Si $x = 3$, alors $y = 1$ et $\alpha(x, y) \geq 1$ vérifié. Aussi, $\alpha(y, z) \geq 1$ puisque $z = 2 \in Ty = \{2\}$.

4^{eme} cas : Si $x = 4$, alors $y = 3$ et $\alpha(x, y) \geq 1$ n'est pas vérifié (puisque $\alpha(x, y) = 0$).

(2) Il existe $x_0 = 3 \in X$ et $x_1 = 1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.

(3) On voit bien que T est α -semi-continue inférieurement, puisque si $x_n = 1$, alors $x_n \rightarrow 1$, $Tx_n = \{2\}$ et $Tx = \{2\}$ tels que $d(x_n, Tx_n) = d(1, \{2\}) = 1$ et $d(x, Tx) = 1$.

Cela implique que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, Tx_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 = d(x, Tx).$$

On peut facilement de s'assurer T est α -semi-continue inférieurement pour les autres éléments de X .

D'autre part, X n'est pas α -régulier. En effet, considérons la suite $x_n = \{4, 2, 1, 3, 3, \dots, 3, \dots\}$ dans X .

Alors,

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et $x_n \rightarrow 3$.

Ensuite, $\alpha(x_1, 3) = \alpha(4, 3) = 0$. Ce qui montre que X n'est pas α -régulier.

Par conséquent, toutes les conditions du théorème 3.1.2 (resp. théorème 3.1.1) sont satisfaites. Alors, T a un point fixe qui est 2.

Remarque 3.1.2. Notez que le théorème 2.5.2 ne peut pas s'appliquer ici. En effet, Pour $x = 3$ et $y = 4$, on a

$$H(T3, T4) = 2, \quad \text{et} \quad N(3, 4) = a_1 d(3, 4) = 1,$$

alors

$$2\tau + F(H(T3, T4)) > F(N(3, 4)).$$

Cela montre l'importance de nos résultats.

Puisque toute application α_* -admissible est aussi α -admissible, on peut déduite immédiatement le corollaire ci-dessous :

Corollaire 3.1.1. Soient (X, d) un espace métrique complet, $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application et $T: X \rightarrow CB(X)$ (resp. $K(X)$) une application multivoque. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) T est α_* -admissible.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.
- (3) T est α -semi-continue inférieurement, ou X est α -régulier.
- (4) Il existe $F \in \mathcal{F}_*$, $\beta \in \Omega$ et $\tau > 0$ et des nombres réels positifs a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 avec $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1$ et $a_3 \neq 1$ tels que

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(N(x, y))N(x, y)),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $\alpha_*(Tx, Ty) \geq 1$ et $H(Tx, Ty) > 0$ où

$$N(x, y) = a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx).$$

Alors, T a un point fixe.

Corollaire 3.1.2. Soient (X, d) un espace métrique complet, $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application et $T: X \rightarrow CB(X)$ (resp. $K(X)$) une application multivoque α -admissible. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tel que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.
- (2) T est α -semi-continue inférieurement, ou X est α -régulier.
- (3) Il existe $F \in \mathcal{F}_*$, $\beta \in \Omega$ et $\tau > 0$ des nombres réels positifs a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 avec $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1$ et $a_3 \neq 1$ tels que

$$\forall x, y \in X, H(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(\alpha(x, y)H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(N(x, y))N(x, y)), \quad (3.11)$$

où

$$N(x, y) = a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx).$$

Alors, T a un point fixe.

Preuve.

Soit $x, y \in X$ tel que $\alpha(x, y) \geq 1$ et $H(Tx, Ty) > 0$. En utilisant (F1) et (3.11), on obtient

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq \tau + F(\alpha(x, y)H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(N(x, y))N(x, y)),$$

qui nous à mène

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(N(x, y))N(x, y)),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $\alpha(x, y) \geq 1$ et $H(Tx, Ty) > 0$.

Cela implique que l'inégalité (3.1) est réalisé.

Ainsi, le reste de la preuve découle du théorème 3.1.2 (resp. théorème 3.1.1). □

Si on prend $\alpha(x, y) = 1$ dans le corollaire 3.1.2, on obtient une extension du théorème 2.5.2 comme suit :

Corollaire 3.1.3. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow CB(X)$ (resp. $K(X)$) une application multivoque satisfaisant

$$\forall x, y \in X, \quad H(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(N(x, y))N(x, y)),$$

où $F \in \mathcal{F}_*$, $\beta \in \Omega$ et $\tau > 0$ et des nombres réels positifs a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 avec $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1$ et $a_3 \neq 1$ où

$$N(x, y) = a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx).$$

Alors, T a un point fixe.

3.2 Théorème de point fixe dans des espaces métriques partiellement ordonnés

Dans cette section, on va donner un nouveaux résultat du point fixe sur un espace métrique partiellement ordonné, en utilisant les résultats fournis dans la section précédente. Avant de présenter notre résultat, nous collectons des concepts pertinents qui seront nécessaire dans cette partie.

Définition 3.2.1. Une relation d'ordre \preceq sur un ensemble X est une relation d'ordre total si on peut toujours comparer deux éléments quelconques de X , ce qui se traduit par :

$$\forall x, y \in X, \quad x \preceq y \text{ ou } y \preceq x,$$

partiel dans le cas contraire. Autrement dit, si on peut trouver au moins deux éléments de X , qu'on ne peut pas comparer avec \preceq , ce qui se traduit par :

$$\exists x, y \in X, \quad \text{non } (x \preceq y) \text{ et non } (y \preceq x).$$

On parle alors d'ensemble (X, \preceq) totalement ou partiellement ordonné.

Exemple 3.2.1. Soit $X = [0, 1]$. On définit la relation \preceq dans X par :

$$x \preceq y \text{ si } x, y \in]0, 1] \text{ et } x \leq y, \text{ ou } x = 0 \text{ et } y \in \{0, 1\}.$$

Il est facile de s'assurer \preceq est une relation d'ordre partiel.

Définition 3.2.2. Soit X un ensemble non vide. Alors, (X, d, \preceq) est appelé espace métrique partiellement ordonné si les conditions suivantes sont remplies :

1. (X, d) est un espace métrique.
2. (X, \preceq) est un ensemble partiellement ordonné.

Récemment, plusieurs résultats ont été donné comme des extensions au contraction de Banach dans des espaces métriques partiellement ordonnés [46, 47, 48, 49, 51, 55]. Le premier résultat de point fixe dans des espaces métriques partiellement ordonnés a été établir par Knaster et Tarski [38, 65]. En 2004, Ran et Reurings [55] ont prouvé l'existence de point fixe le quel considéré comme une combinaison entre le principe de contraction de Banach et la résultat de Knaster-Tarski.

Théorème 3.2.1. [55] Soit (X, d, \preceq) un espace métrique partiellement ordonné tel que pour tout paire $(x, y) \in X \times X$ est borné, c'est-à-dire admet une borne supérieur et borne inférieur. De plus, soit $T : X \rightarrow X$ une application continue et monotone telle que

$$\exists \lambda \in]0, 1[\quad \forall x, y \in X \quad ((x \preceq y \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)).$$

S'il existe $x_0 \in X$ avec $x_0 \preceq Tx_0$ ou $Tx_0 \preceq x_0$, alors T admet un point fixe unique z . Aussi, pour tout $x \in X$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n x = z.$$

Plus tard, le résultat de Ran et Reurings a été généraliser par Nieto et Rodríguez-López [46], ils ont remplacé la continuité de l'application par une condition sur l'espace, c'est-à-dire pour toute suite monotone $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $x_n \rightarrow x$, alors $x_n \preceq x$ (ou $x \preceq x_n$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Plus d'améliorations sur les résultats ci-dessus peuvent être trouver dans [48, 51]. L'idée de ces travaux est basée sur la faite que la condition de contractivité est assumée seulement vérifiée pour éléments ordrés par rapport l'ordre partiel et leur technique est basée sur une combinaison entre les idées de méthodes d'itération et autres de monotonie.

Le théorème suivant est une conséquence directe de nos résultats.

Théorème 3.2.2. Soient (X, \preceq, d) un espace métrique complet partiellement ordonné et $T : X \rightarrow CB(X)$ (resp. $K(X)$) une application multivoque. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $x \preceq y$, nous avons $y \preceq z$ pour tout $z \in Ty$.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $x_0 \preceq x_1$.
- (3) T est \preceq -semi-continue inférieurement, c'est-à-dire, pour $x \in X$ et une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0$ et $x_n \preceq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf d(x_n, Tx_n) \geq d(x, Tx)$$

ou, pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ et $x_n \preceq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_n \preceq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (4) Il existe $F \in \mathcal{F}_*$, $\beta \in \Omega$, $\tau > 0$ et des nombres réels positifs a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 avec $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1$ et $a_3 \neq 1$ tels que

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(N(x, y))N(x, y)),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $x \preceq y$ et $H(Tx, Ty) > 0$ où

$$N(x, y) = a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx).$$

Alors, T a un point fixe.

Preuve.

Définissons une application $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preceq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De (4), on a $x \preceq y$, alors $\alpha(x, y) = 1 \geq 1$ pour tout $x, y \in X$.

Ce qui implique que T est α - F -Geraghty contraction de type Hardy-Rogers.

Selon la condition (1), pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$, tels que $x \preceq y$ (i.e., $\alpha(x, y) = 1 \geq 1$) on a $y \preceq z$ (i.e., $\alpha(y, z) = 1 \geq 1$, pour tout $z \in Ty$). Donc, T est α -admissible.

D'après (2), il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $x_0 \preceq x_1$, ce qui donne $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.

De (3), on a pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ croissante (par rapport la relation \preceq), c'est-à-dire $\alpha(x_n, x_{n+1}) = 1$, tel que $x_n \rightarrow x$, alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, Tx_n) \geq d(x, Tx).$$

Donc, T est α -semi-continue inférieurement.

D'autre part, si pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ croissante i.e., $\alpha(x_n, x_{n+1}) = 1$ tel que $x_n \rightarrow x$, alors $x_n \preceq x$ (i.e., $\alpha(x_n, x) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc, X est α -régulier.

Par conséquent, T a un point fixe. □

Remarque 3.2.1.

la condition de α -régularité de X est toujours vérifiée dans les espaces métriques partiellement ordonné due à Nieto et Rodríguez-López [46]. Donc, les hypothèses du théorème 3.2.2 peuvent se limiter aux les hypothèses (1), (2) et (4).

3.3 Théorème de point fixe dans des espaces métriques muni d'un graphe

Dans cette section, on va présenter un résultat direct du théorème 3.1.1 et théorème 3.1.2 concerne l'existence d'un point fixe pour des applications multivoques définies sur des espaces métriques X muni d'un graphe.

Concepts et notations sur le graphe

Définition 3.3.1. [69] Soient (X, d) un espace métrique et Δ le diagonale du produit cartésien $X \times X$. Considérons un graphe orienté G tel que $V(G)$ l'ensemble des ses sommets coïncidant avec X , et $E(G)$ l'ensemble de ses arrêtes contient toutes les boucles, i.e., $\Delta \subset E(G)$, où $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Supposons, G n'a pas des arrêtes parallèles, i.e., si (x, y) et (y, x) appartient à $E(G)$, donc $x = y$. Alors, on peut identifie G avec le paire $(V(G), E(G))$.

Exemple 3.3.1. Soit \preceq une relation d'ordre partiel sur X . Définissons le graphe G par :

$$E(G) = \{(x, y) \in X \times X : x \preceq y\}.$$

En 2008, Jachymski [34] a présente une bonne extension pour les résultats de Nieto et Rodríguez-López [46], par l'introduction d'une nouvelle notion dite G -contraction, qui est définie sur un espace métrique complet, il a remplacé l'ordre partiel par le concept de graphe.

Définition 3.3.2. [34] Soient (X, d) un espace métrique muni d'un graphe et $T : X \rightarrow X$ une application. Alors, T est dite G -contraction si :

$$\forall x, y \in X, ((x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)),$$

et

$$\exists \lambda \in]0, 1[\quad \forall x, y \in X, ((x, y) \in E(G) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)).$$

Exemple 3.3.2. Toute application constante $T : X \rightarrow X$ est une G -contraction.

Exemple 3.3.3. Toute contraction de Banach est une G -contraction, où le graphe G est définit par $E(G) = X \times X$.

En 2013, Dinevari et Frigon [27] ont généralisé les résultats de Jachymski aux applications multivoques, par l'introduire la notion d'application multivoque G -contractante.

Définition 3.3.3. [27] Soit $T : X \rightarrow CL(X)$ une application multivoque avec des valeurs non vides. On dit que T une G -contraction s'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que

pour tout $(x, y) \in E(G)$ et tout $u \in Tx$, il existe $v \in Ty$ tel que $(u, v) \in E(G)$

et

$$d(u, v) \leq \lambda d(x, y).$$

Remarque 3.3.1. Toute application multivoque contractante est G -contractante (avec $E(G) = X \times X$), mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 3.3.4. Soit $X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Considérons le graphe orienté G tel que $V(G) = X$ et

$$E(G) = \left\{ \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}} \right), \left(\frac{1}{2^n}, 0 \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \Delta.$$

Soit $T : X \rightarrow X$ définie par :

$$Tx = \begin{cases} \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\} & \text{si } x = 0, \\ \left\{ \frac{1}{2^{n+1}}, 1 \right\} & \text{si } x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, \\ \left\{ \frac{1}{2} \right\} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Alors, T est une multivoque G -contraction avec une constante $\lambda = \frac{1}{2}$. Toutefois, T n'est pas une multivoque contractante. En effet,

$$H \left(T \left(\frac{1}{2^n} \right), T(0) \right) > d \left(0, \frac{1}{2^n} \right) \quad \forall n \geq 2.$$

Pour plus de détails, voir [27].

Le théorème suivant est une conséquence directe de nos résultats :

Théorème 3.3.1. Soient (X, d) un espace métrique complet muni d'un graphe G et $T : X \rightarrow CB(X)$ (resp. $K(X)$) une application multivoque. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $(x, y) \in E(G)$, nous avons $(y, z) \in E(G)$ pour tout $z \in Ty$.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $(x_0, x_1) \in E(G)$.

- (3) T est G -semi-continue inférieurement, c'est-à-dire pour $x \in X$ et une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0$ et $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf d(x_n, Tx_n) \geq d(x, Tx),$$

ou pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ et $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $(x_n, x) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (4) Il existe $F \in \mathcal{F}_*$, $\beta \in \Omega$ et $\tau > 0$ et des nombres réels positifs a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 avec $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1$ et $a_3 \neq 1$ tels que

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(\beta(N(x, y))N(x, y)), \quad (3.12)$$

pour tout $x, y \in X$ avec $(x, y) \in E(G)$ et $H(Tx, Ty) > 0$ où

$$N(x, y) = a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx).$$

Alors, T a un point fixe.

Preuve. C'est un résultats immédiate du théorème 3.1.1 en prenant :

$$\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in E(G), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Chapitre 4

Théorème de point fixe multivoque dans des espaces b-métriques

Le but de ce chapitre est de donner des résultats qui concernent le théorème de point fixe en combinant quelque types des contractions avec le concept de α_s -admissibilité dans des espaces b-métriques (appelés aussi espaces métriques de type (b)). Certaines conséquences sont établies sur des espaces b-métriques partiellement ordonnés et des espaces b-métriques muni d'un graphe.

Ces travaux sont issus d'une collaboration avec le directeur de ma thèse, et ont conduit à un papier qui a été accepté à la publication [36].

4.1 Les espaces b-métriques

Il est bien connu que dans certains espaces fonctionnels, la « norme » naturelle ne peut pas satisfaire l'inégalité triangulaire par exemple, sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque $p \in]0, 1[$.

Au vu de cette observation, Bakhtin [9] a proposé une généralisation des espaces métriques appelée espaces b-métriques d'une manière qui permet l'extension de la théorie de point fixe pour couvrir ces espaces des fonctions.

Par suite, Czerwik [23] a utilisé la notion de b-métrique pour généralisé le principe de contraction de Banach. Plus tard, plusieurs résultats ont été publié pour diverses classes d'applications univoques et multivoques dans ce type des espaces.

Dans cette section, on va voir quelques définitions et propriétés préliminaires sur les espaces b-métriques, la plupart des notions de cette section proviennent de [9, 23, 24].

Définition 4.1.1. [9] Soient X un ensemble non vide et $s \geq 1$ une constante. Une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite b-métrique sur X , si pour tout $x, y, z \in X$ les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq s [d(x, y) + d(y, z)]$.

Le triplet (X, d, s) est appelé un espace b-métrique.

Remarque 4.1.1.

Il convient de noter que tout espace métrique est un b-métrique avec $s = 1$ mais la réciproque n'est pas vrai en général.

Exemple 4.1.1. Soient $X = [0, 1]$ et $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $d(x, y) = |x - y|^2$ pour tout $x, y \in X$. Clairement, $(X, d, 2)$ est un espace b-métrique, mais n'est pas métrique.

Maintenant, on va donner deux exemples très célèbres d'espaces b-métriques qui ne sont pas métriques.

Exemple 4.1.2. [9] L'espace $l^p(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ (avec $p \in]0, 1[$) tel que la fonction $d : l^p(\mathbb{R}) \times l^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $\{x_n\}, \{y_n\} \in l^p(\mathbb{R})$ est un espace b-métrique.

En effet, par un calcul élémentaire on obtient

$$d(x, z) \leq 2^{\frac{1}{p}} [d(x, y) + d(y, z)].$$

Par conséquent, $s = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ dans ce cas.

Exemple 4.1.3. [9] L'espace $L^p([0, 1])$ (avec $p \in]0, 1[$) des fonctions réelles $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty$, est un espace b-métrique si on prend :

$$d(f, g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $f, g \in L^p([0, 1])$ avec $s = 2^{\frac{1}{p}} > 1$.

Définition 4.1.2. [22] Soit (X, d, s) un espace b-métrique. Les notions suivantes sont des déductions naturelles des versions métriques correspondantes :

1. Une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X est convergente vers un point $x \in X$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.

2. Une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X est de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ tel que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \text{pour tout } n, m \geq N_\epsilon.$$

3. On dit que (X, d, s) un espace b-métrique complet si toute suite de Cauchy est convergente dans X .

Dans ce qui suit, nous donnons un bref aperçu sur des applications multivoques définis dans un espace b-métrique (X, d, s) .

Définition 4.1.3. Soit (X, d, s) un espace b-métrique. Les sous-ensembles bornés et fermés dans X sont définis de la même manière pour des espaces métriques. Alors, pour $A, B \in CB(X)$, on définit la fonction $H : CB(X) \times CB(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\},$$

où

$$e(A, B) = \sup\{d(a, B), a \in A\}, \quad e(B, A) = \sup\{d(b, A), b \in B\}$$

avec

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}.$$

H est appelée b-métrique de Hausdorff [24].

Citons dans le lemme suivant quelques propriétés concernant des espace b-métriques.

Lemme 4.1.1. [24] Soit (X, d, s) un espace b-métrique. Pour $A, B, C \in CB(X)$ et tout $x, y \in X$, on a

1. $d(x, B) \leq d(x, b)$ pour tout $b \in B$.
2. $d(x, B) \leq H(A, B)$ pour tout $x \in A$.
3. $H(A, A) = 0$.
4. $H(A, B) = H(B, A)$.
5. $H(A, C) \leq s [H(A, B) + H(B, C)]$.
6. $d(x, A) \leq s [d(x, y) + d(y, A)]$.

On termine cette section par le lemme auxiliaire suivant :

Lemme 4.1.2. [24] Soient (X, d, s) un espace b-métrique et $A, B \in CB(X)$. Alors, pour tout $a \in A$, il existe $b(a) \in B$ tel que

$$d(a, b) \leq sH(A, B).$$

4.2 Théorèmes de point fixe dans des espace b-métriques

Dans cette section, on va classer les étapes principales de développement de le théorème du point fixe dans des espace b-métriques. De plus, nous allons présenter nos résultats.

4.2.1 Principe de contraction de Banach généralisé

Rappelons d'abord, la définition d'une fonction de comparaison.

Définition 4.2.1. [12] Une application $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée une fonction de comparaison si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) ψ est croissante.
- (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

On désigne par Φ l'ensemble de toute les fonctions satisfaisant (1) et (2).

Exemple 4.2.1. L'application $\psi(t) = at$, où $0 \leq a < 1$ est une fonction de comparaison.

Lemme 4.2.1. [21] Pour chaque fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, on a

Si ψ est croissante, alors pour tout $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n(t) = 0$ implique $\psi(t) < t$.

Preuve.

Supposons que ψ est croissante, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n(t) = 0$ et il existe $t_0 > 0$ tel que $\psi(t_0) \geq t_0$.

Puisque ψ est croissante, alors

$$\psi^2(t_0) \geq \psi(t_0) \geq t_0.$$

En continue par induction, on conclut $\psi^n(t_0) \geq t_0$ et donc $\psi^n(t_0) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

C'est une contradiction. □

Dans [23], Czerwik a présenter une généralisation de contraction de Banach dans des espaces b-métriques selon le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. [23] Soit (X, d, s) un espace b-métrique complet. Supposons que $T : X \rightarrow X$ une applicaton satisfaisant :

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)), \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

Alors, T a un point fixe unique z dans X et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n x = z$ pour tout $x \in X$.

4.2.2 Théorème de point fixe de type Wardowski

En 2015, Cosentino a prouvé l'existence d'un point fixe pour des applications multivoques en adaptant les idées de Wardowski [67] à l'espaces b-métriques. Il a introduit l'ensemble \mathcal{F}_s Comme suit :

Définition 4.2.2. [22] Soit $s \geq 1$ une constante. On désigne par \mathcal{F}_s l'ensemble de toute les fonctions $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(F1) : F est strictement croissante.

(F2) : Pour toute suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset]0, +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = -\infty$.

(F3) : Pour toute suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset]0, +\infty[$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$, il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n)^k F(t_n) = 0$.

(F4) : Pour toute suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset]0, +\infty[$ tel que $\tau + F(st_n) \leq F(t_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\tau > 0$, alors

$$\tau + F(s^n t_n) \leq F(s^{n-1} t_{n-1}), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 4.2.2. Soit $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $F(t) = t + \ln t$. Clairement, $F \in \mathcal{F}_s$. Ici, nous montrons seulement la condition (F4).

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\tau > 0$, on a

$$\tau + st_n + \ln(st_n) \leq t_{n-1} + \ln t_{n-1}.$$

Puisque la fonction $t + \ln t$ est croissante, alors $st_n < t_{n-1}$.

Ce donne

$$(s^{n-1} - 1)st_n + \ln s^{n-1} \leq (s^{n-1} - 1)t_{n-1} + \ln s^{n-1}.$$

Ce qui implique,

$$\begin{aligned} \tau + F(s^n t_n) &= \tau + s^n t_n + \ln s^n t_n = \tau + st_n + (s^{n-1} - 1)st_n + \ln s^{n-1} + \ln st_n \\ &\leq t_{n-1} + (s^{n-1} - 1)t_{n-1} + \ln s^{n-1} + \ln t_{n-1} \\ &= s^{n-1} t_{n-1} + \ln(s^{n-1} t_{n-1}) \\ &= F(s^{n-1} t_{n-1}). \end{aligned}$$

Par conséquence, (F4) est satisfaite.

Définition 4.2.3. [22] Soit (X, d, s) un espace b-métrique. Une application multivoque $T : X \rightarrow CB(X)$ est dite F -contraction de type Nadler s'il existe $F \in \mathcal{F}_s$ et $\tau > 0$ tels que

$$2\tau + F(sH(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$.

Théorème 4.2.2. [22] Soient (X, d, s) un espace b-métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$. Supposons qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{F}_s$ continue à droite et $\tau > 0$ tels que

$$2\tau + F(sH(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$.

Alors, T admet un point fixe.

On peut alors appliquer le théorème 4.2.2, pour obtenir la preuve suivante de théorème du point fixe de Nadler dans des espaces b-métriques [24].

Théorème 4.2.3. Soient (X, d, s) un espace b-métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$. Supposons qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que

$$sH(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \tag{4.1}$$

pour tout $x, y \in X$. Alors, T a un point fixe.

Preuve.

Soit $\tau > 0$ tel que $\lambda = e^{-2\tau}$. D'après (4.1), pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$, on obtient

$$F(sH(Tx, Ty)) \leq -2\tau + F(d(x, y)).$$

C'est-à-dire,

$$2\tau + F(sH(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)),$$

où $F(t) = \ln t$.

Alors, selon le théorème 4.2.2 on conclut que T a un point fixe. □

4.2.3 (F, α) -contractions de type Hardy-Rogers

D'abord, on va donner la notion d'application α_s -admissible qui a été introduit dans [4] pour généraliser le résultat de Cosentino [22].

Définition 4.2.4. [4] Soient (X, d, s) un espace b -métrique et $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application.

1. Une application $T : X \rightarrow CL(X)$ est dite α_s -admissible si pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ tels que $\alpha(x, y) \geq s^2$, nous avons $\alpha(y, z) \geq s^2$ pour tout $z \in Ty$.
2. Une application $T : X \rightarrow CL(X)$ est dite α_s^* -admissible si pour tout $x, y \in X$ avec $\alpha(x, y) \geq s^2$, nous avons $\alpha^*(Tx, Ty) \geq s^2$, où

$$\alpha^*(Tx, Ty) = \inf \{ \alpha(a, b) : a \in Tx, b \in Ty \}.$$

Remarque 4.2.1.

1. Si $s = 1$, la définition ci-dessus se réduit à la définition d'application α -admissible et α^* -admissible respectivement.
2. Il est évident que toute application α_s^* -admissible est aussi α_s -admissible, mais la réciproque n'est pas vrai en général (voir l'exemple 3 dans [4]).

Définition 4.2.5. [4] Soient (X, d, s) un espace b -métrique et $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application. On dit que $T : X \rightarrow CL(X)$ une application (F, α) -contractante de type Hardy-Rogers s'il existe $F \in \mathcal{F}_s$ et $\tau > 0$ tels que

$$\tau + F(\alpha(x, y)H(Tx, Ty)) \leq F(N(x, y)), \quad \text{pour tout } x, y \in X,$$

avec $\min\{\alpha(x, y)H(Tx, Ty), N(x, y)\} > 0$, où

$$N(x, y) = a_1d(x, y) + a_2d(x, Tx) + a_3d(y, Ty) + a_4d(x, Ty) + a_5d(y, Tx),$$

et $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$ avec $a_1 + a_2 + a_3 + 2sa_4 = 1$ et $a_3 \neq 1$.

Théorème 4.2.4. [4] Soient (X, d, s) un espace b -métrique complet avec $s \geq 1$ et $T : X \rightarrow CL(X)$ une (F, α) -contraction de type Hardy-Rogers tels que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) T est α_s -admissible.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq s^2$.
- (3) Pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X convergente vers x et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq s^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\alpha(x_n, x) \geq s^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, T a un point fixe.

4.2.4 Théorème de point fixe pour $(\alpha-F-\psi)$ contractions généralisés

Cette partie est réservée au résultat d'existence de point fixe multivoque pour d'application $(\alpha-F-\psi)$ contractante généralisée dans des espaces b-métriques. Il concerne d'une combinaison entre certains types de contractions avec des conditions convenables.

Définition 4.2.6. Soient (X, d, s) un espace b-métrique, $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $T : X \rightarrow CL(X)$ deux applications On dit que T est $(\alpha-F-\psi)$ contraction généralisée s'il existe $F \in \mathcal{F}_s$, $\tau > 0$ et $\psi \in \Phi$ tels que

$$\tau + F(s^3 H(Tx, Ty)) \leq F(\psi(M_s(x, y))), \quad \text{pour tout } x, y \in X, \tag{4.2}$$

avec $\alpha(x, y) \geq s^2$ et $H(Tx, Ty) > 0$, où

$$M_s(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2s} \right\}.$$

Avant de prouver notre principe résultat, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.2. Soit (X, d, s) un espace b-métrique et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X . S'il existe $\tau > 0$ et $F \in \mathcal{F}_s$ tels que

$$\tau + F(sd(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_{n-1}, x_n)), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Preuve.

On donne,

$$\tau + F(sd(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_{n-1}, x_n)), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Soit $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, d'après (4.3) et la condition (F4), on obtient

$$\tau + F(s^n d_n) \leq F(s^{n-1} d_{n-1}), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Alors, par (4.4) on en déduit que

$$F(s^n d_n) \leq F(s^{n-1} d_{n-1}) - \tau \leq \dots \leq F(d_0) - n\tau, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{4.5}$$

Passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (4.5), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(s^n d_n) = -\infty.$$

D'après (F2), on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s^n d_n = 0. \quad (4.6)$$

Selon (F3), il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s^n d_n)^k F(s^n d_n) = 0. \quad (4.7)$$

De (4.5), on obtient

$$\begin{aligned} (s^n d_n)^k F(s^n d_n) - (s^n d_n)^k F(d_0) &\leq (s^n d_n)^k F(d_0) - n\tau(s^n d_n)^k - (s^n d_n)^k F(d_0) \\ &= (s^n d_n)^k (F(d_0) - n\tau) - (s^n d_n)^k F(d_0) \\ &= -n\tau(s^n d_n)^k \leq 0. \end{aligned}$$

Laissant $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus et en utilisation (4.7), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(s^n d_n)^k = 0.$$

Ce qui implique qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n(s^n d_n)^k \leq 1, \quad \text{pour tout } n \geq n_1.$$

Donc, on obtient

$$s^n d_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}, \quad \text{pour tout } n \geq n_1. \quad (4.8)$$

Pour prouver que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, on considère $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m > n \geq n_1$, alors en utilisant l'inégalité triangulaire et (4.8), on trouve

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} s^j d(x_j, x_{j+1}) \\ &= \sum_{j=n}^{m-1} s^j d_j \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j^{\frac{1}{k}}} \\ &\leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{1}{k}}} < \infty. \end{aligned}$$

Enfin, ceci montre que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy parce que $\sum_{j=n}^{\infty} j^{-\frac{1}{k}}$ est convergente. \square

Théorème 4.2.5. Soient (X, d, s) un espace b-métrique complet, $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application et $T : X \rightarrow CB(X)$ une $(\alpha-F-\psi)$ contraction généralisée, c'est-à-dire

$$\tau + F(s^3 H(Tx, Ty)) \leq F(\psi(M_s(x, y))), \quad \text{pour tout } x, y \in X, \quad (4.9)$$

avec $\alpha(x, y) \geq s^2$ et $H(Tx, Ty) > 0$, où $F \in \mathcal{F}_s$, $\tau > 0$, $\psi \in \Phi$ et

$$M_s(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2s} \right\}.$$

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) T est α_s -admissible.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq s^2$.
- (3) Pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq s^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\alpha(x_n, x) \geq s^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, T a un point fixe.

Preuve. Par l'hypothèse (2), il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq s^2$. Si $x_1 \in Tx_1$, alors x_1 est un point fixe de T et donc la preuve est complétée. Suppose que $x_1 \notin Tx_1$, donc $H(Tx_0, Tx_1) > 0$.

D'après le lemme 4.1.2, il existe $x_2 \in Tx_1$ tel que

$$d(x_1, x_2) \leq s^2 H(Tx_0, Tx_1),$$

qui implique

$$sd(x_1, x_2) \leq s^3 H(Tx_0, Tx_1).$$

Puisque F est strictement croissante, on obtient

$$F(sd(x_1, x_2)) \leq F(s^3 H(Tx_0, Tx_1)).$$

De (4.2) et $\psi(t) < t$ pour tout $t \geq 0$, on trouve que

$$\begin{aligned} \tau + F(sd(x_1, x_2)) &\leq \tau + F(s^3 H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq F(\psi(M_s(x_0, x_1))) \\ &< F(M_s(x_0, x_1)). \end{aligned}$$

Cela donne,

$$\tau + F(sd(x_1, x_2)) < F(M_s(x_0, x_1)), \quad (4.10)$$

où

$$\begin{aligned} M_s(x_0, x_1) &= \max \left\{ d(x_0, x_1), d(x_0, Tx_0), d(x_1, Tx_1), \frac{d(x_0, Tx_1) + d(x_1, Tx_0)}{2s} \right\} \\ &\leq \max \left\{ d(x_0, x_1), d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1), \frac{d(x_0, Tx_1) + d(x_1, x_1)}{2s} \right\} \\ &\leq \max \left\{ d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1), \frac{d(x_0, Tx_1)}{2s} \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d(x_0, Tx_1)}{2s} &\leq \frac{s [d(x_0, x_1) + d(x_1, Tx_1)]}{2s} \\ &= \frac{[d(x_0, x_1) + d(x_1, Tx_1)]}{2} \\ &\leq \max \{d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1)\}, \end{aligned}$$

alors

$$M_s(x_0, x_1) \leq \max \{d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1)\}.$$

Si $\max \{d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1)\} = d(x_1, Tx_1)$, on trouve

$$\begin{aligned} F(d(x_1, Tx_1)) &\leq F(s^3 H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq F(\psi(d(x_1, Tx_1))) - \tau \\ &< F(d(x_1, Tx_1)) - \tau \\ &< F(d(x_1, Tx_1)). \end{aligned}$$

Cela donne, $F(d(x_1, Tx_1)) < F(d(x_1, Tx_1))$.

Ensuite, puisque F est strictement croissante on conclut

$$d(x_1, Tx_1) < d(x_1, Tx_1).$$

C'est une contradiction, par conséquent on a

$$F(sd(x_1, x_2)) < F(d(x_0, x_1)) - \tau. \quad (4.11)$$

Supposons que $x_1 \neq x_2$ et $x_2 \notin Tx_2$, alors $d(x_2, Tx_2) > 0$ et $H(Tx_1, Tx_2) > 0$.

Puisque $\alpha(x_0, x_1) \geq s^2$ et T est α_s -admissible, on obtient

$$\alpha(x_1, x_2) \geq s^2 \text{ pour } x_2 \in Tx_1.$$

D'après le lemme 4.1.2, il existe $x_3 \in Tx_2$ tel que

$$d(x_2, x_3) \leq s^2 H(Tx_1, Tx_2),$$

qui équivaut à

$$sd(x_2, x_3) \leq s^3 H(Tx_1, Tx_2).$$

Puisque F est strictement croissante et $\psi(t) < t$ pour tout $t \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} F(sd(x_2, x_3)) &\leq F(s^3 H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq F(\psi(M_s(x_1, x_2))) - \tau \\ &< F(M_s(x_1, x_2)) - \tau, \end{aligned}$$

cela donne

$$F(sd(x_2, x_3)) < F(M_s(x_1, x_2)) - \tau, \tag{4.12}$$

où

$$\begin{aligned} M_s(x_1, x_2) &= \max \left\{ d(x_1, x_2), d(x_1, Tx_1), d(x_2, Tx_2), \frac{d(x_1, Tx_2) + d(x_2, Tx_1)}{2s} \right\} \\ &\leq \max \left\{ d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2), \frac{d(x_1, Tx_2)}{2s} \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.1.1, on obtient

$$\frac{d(x_1, Tx_2)}{2s} \leq \max \{d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2)\},$$

alors

$$M_s(x_1, x_2) \leq \max \{d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2)\}.$$

Si $\max \{d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2)\} = d(x_2, Tx_2)$, on trouve

$$\begin{aligned} F(d(x_2, Tx_2)) &\leq F(s^3 H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq F(\psi(d(x_2, Tx_2))) - \tau \\ &< F(d(x_2, Tx_2)) - \tau \\ &< F(d(x_2, Tx_2)), \end{aligned}$$

on en déduit que

$$F(d(x_2, Tx_2)) < F(d(x_2, Tx_2)).$$

De (F1), on obtient

$$d(x_2, Tx_2) < d(x_2, Tx_2),$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent,

$$F(sd(x_2, x_3)) < F(d(x_1, x_2)) - \tau. \quad (4.13)$$

En continuant de cette manière, on construit une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que

$$x_n \in Tx_{n-1}, \quad x_{n-1} \neq x_n \quad \text{et} \quad \alpha(x_{n-1}, x_n) \geq s^2, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En outre,

$$F(sd(x_n, x_{n+1})) < F(d(x_{n-1}, x_n)) - \tau, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (4.14)$$

D'après le lemme 4.2.2, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors $\{x_n\}$ est convergente vers $z \in X$.

Maintenant, on va voir que $z \in Tz$, i.e., $d(z, Tz) = 0$.

Supposons la contraire, si $d(z, Tz) > 0$, alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_n, Tz) > 0, \quad \text{pour tout } n \geq n_2,$$

qui implique $H(Tx_n, Tz) > 0$.

En utilisant l'hypothèse (3), on trouve

$$\alpha(x_n, z) \geq s^2.$$

Donc, l'inégalité (4.2) nous donne :

$$\begin{aligned} F(d(x_{n+1}, Tz)) &\leq F(H(Tx_n, Tz)) \\ &\leq F(s^3 H(Tx_n, Tz)) \\ &\leq F(\psi(M_s(x_n, z)) - \tau). \end{aligned}$$

Puisque F est strictement croissante et $\psi(t) < t$ pour $t \geq 0$, on obtient

$$d(x_{n+1}, Tz) < M_s(x_n, z), \quad (4.15)$$

où

$$\begin{aligned} M_s(x_n, z) &= \max \left\{ d(x_n, z), d(x_n, Tx_n), d(z, Tz), \frac{d(x_n, Tz) + d(z, Tx_n)}{2s} \right\} \\ &\leq \max \left\{ d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), d(z, Tz), \frac{d(x_n, Tz) + d(z, x_{n+1})}{2s} \right\}. \end{aligned}$$

pour tout $n \geq n_2$.

Passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité (4.15), on obtient

$$d(z, Tz) < d(z, Tz).$$

C'est une contradiction, alors $d(z, Tz) = 0$, c'est-à-dire $z \in Tz$. □

Puisque toute application α_s^* -admissible est aussi α_s -admissible, on obtient le corollaire suivante :

Corollaire 4.2.1. Soient (X, d, s) un espace b-métrique complet, $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application et $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) T est α_s^* -admissible.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq s^2$.
- (3) Pour toute suite $\{x_n\} \subset X$ convergente vers x dans X et $\alpha^*(x_n, x_{n+1}) \geq s^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. nous avons $\alpha^*(x_n, x) \geq s^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (4) Il existe $F \in \mathcal{F}$, $\psi \in \Phi$ et $\tau > 0$ tels que

$$\tau + F(s^3 H(Tx, Ty)) \leq F(\psi(M_s(x, y))),$$

avec $\alpha(x, y) \geq s^2$ et $H(Tx, Ty) > 0$, où

$$M_s(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2s} \right\}.$$

Alors, T admet un point fixe.

Théorème du point fixe dans des espaces b-métriques partiellement ordonnés

On définit une application $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} s^2 & \text{si } x \preceq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, le théorème suivant est une conséquence directe de notre résultat.

Théorème 4.2.1. Soient (X, \preceq, d) un espace b-métrique complet partiellement ordonné et $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $x \preceq y$, nous avons $y \preceq z$ pour tout $z \in Ty$.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $x_0 \preceq x_1$.
- (3) Pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ et $x_n \preceq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_n \preceq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (4) Il existe $F \in \mathcal{F}_s$, $\psi \in \Phi$ et $\tau > 0$ tels que

$$\tau + F(s^3 H(Tx, Ty)) \leq F(\psi(M_s(x, y))),$$

avec $\alpha(x, y) \geq s^2$ et $H(Tx, Ty) > 0$, où

$$M_s(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2s} \right\}.$$

Alors, T possède un point fixe.

Théorème du point fixe dans un espace b-métrique muni d'un graphe

On définit une application $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} s^2 & \text{si } (x, y) \in E(G), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, le théorème suivant est une conséquence directe de nos résultat.

Théorème 4.2.6. Soient (X, d) un espace b-métrique complet muni d'un graphe G et $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $(x, y) \in E(G)$, nous avons $(y, z) \in E(G)$ pour tout $z \in Ty$.
- (2) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $(x_0, x_1) \in E(G)$.
- (3) Pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ et $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $(x_n, x) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (4) Il existe $F \in \mathcal{F}_s$, $\psi \in \Phi$ et $\tau > 0$ tels que

$$\tau + F(s^3 H(Tx, Ty)) \leq F(\psi(M_s(x, y))), \quad (4.16)$$

avec $\alpha(x, y) \geq s^2$ et $H(Tx, Ty) > 0$, où

$$M_s(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2s} \right\}.$$

Alors, T a un point fixe.

Chapitre 5

Application aux inclusions intégrales

Dans ce chapitre, on va appliquer le théorème 3.3.1 pour étudier le problème d'existence de la solution pour des inclusions intégrales de type Fredholm.

5.1 Généralités sur les inclusions intégrales

Dans cette section nous rappelons quelques notions et propriétés concernant les inclusions intégrales. Les principales références sur les quelles nous nous sommes basés sont [8, 26]. D'abord, on donne la notion d'intégrale d'une application multivoque.

5.1.1 Intégrale des applications multivoques

Soit $F \subset X$, on note par ω l'ensemble des fonctions intégrables de $K : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$.

Définition 5.1.1. [26] L'intégrale de l'application multivoque K sur F est l'ensemble des intégrales des fonction intégrables de K , c'est-à-dire :

$$\int_F K ds = \left\{ \int_F k ds : k \in \omega \right\}.$$

5.1.2 Inclusions intégrales

Définition 5.1.2. [26] Soit E est un ensemble fermé, borné d'un espace vectoriel et X un espace de fonctions définies de E dans \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), supposé être un espace de Banach.

Une inclusion intégrale est un problème fonctionnel de la forme suivante :

$$\text{Trouver } x \in X, \forall t \in E, g(t)x(t) \in f(t) + \int_F K(t, s, x(s)) ds, \quad (5.1)$$

où f une fonction dans X , $g : E \rightarrow \mathbb{K}$ qui n'est pas nécessairement dans X et K une fonction tel que $K : E^2 \times \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{K})$.

5.1.3 Linéarité

Selon la forme de fonction K , l'intégrale peut être linéaire ou non linéaire. Dans le cas particulier où la fonction K s'écrit sous la forme :

$$K(t, s, x) = k(t, s)x,$$

où $k : E^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{K})$, alors notre inclusion devient linéaire.

Dans le cas où on ne peut pas séparer la troisième variable, notre inclusion est dite non linéaire.

Entre linéarité et non linéarité les études analytiques et numériques de notre inclusion sont totalement différentes.

Dans le cas linéaire, l'étude analytique est basée sur la théorie des opérateurs bornés, surtout l'étude du spectre et les notions de convergence des suites d'opérateurs, cette dernière est utilisée dans les études numériques et les techniques de projections.

Par contre, pour le cas non linéaire, alors on applique les théorèmes de points fixes.

5.1.4 Types des inclusions intégrales

Dans la littérature mathématiques et physique, on trouve deux grandes classes d'inclusions intégrales.

inclusions intégrales de type Fredholm

La première classe concerne les inclusions intégrales de Fredholm, ces inclusions sont caractérisées par la condition $E = F$. Elles s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\forall t \in E, g(t)x(t) \in f(t) + \int_E K(t, s, x(s))ds.$$

inclusions intégrales de type Volterra

La deuxième classe définit les inclusions intégrales de Volterra, elle se caractérise par le fait que $F \subset E$, ou le domaine d'intégration dépend de la variable t , donc on a la forme suivante :

$$\forall t \in E, g(t)x(t) \in f(t) + \int_{F(t)} K(t, s, x(s))ds.$$

Remarque 5.1.1.

Si on prend $E = [a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} , les inclusions de Fredholm sont données sous la forme :

$$\forall t \in [a, b], g(t)x(t) \in f(t) + \int_a^b K(t, s, x(s))ds,$$

et celles de Volterra s'écrivent :

$$\forall t \in [a, b], g(t)x(t) \in f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s))ds.$$

5.1.5 Espèce des inclusions intégrales

La fonction $g(t)$ permet de préciser l'espèce d'inclusion intégrale, on distingue alors trois espèces d'intégrale.

1. Si $g = 0$, l'inclusion intégrale est dite de première espèce. Le cas le plus étudié est l'inclusion intégrale linéaire de Fredholm.
2. Pour le cas non linéaire les études n'étaient pas exhaustives si $g(t) = \lambda$, (ou λ est une constante), l'inclusion est dite de seconde espèce.
Ce genre d'inclusion est le plus traité, on trouve un nombre important d'études qui traitent les types de Fredholm et de Volterra dans les cas linéaire ou non linéaire.
3. Si $g(t)$ est une fonction quelconque, on parle de la troisième espèce.
Ce genre d'inclusion est récent, mais il est très intéressant des points de vue mathématiques et physique.

5.2 Sélection d'applications multivoques

On commence cette section par donner la définition de sélection des applications multivoques.

Définition 5.2.1. [8] On appelle sélection d'une application multivoque $K : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, toute fonction $k : X \rightarrow Y$ vérifiant :

$$k(x) \in Kx, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Un théorème de sélection a assuré l'existence d'une fonction (sélection) univoque appartenant à une application multivoque donnée. Il existe divers théorèmes de sélection, et ils sont importants dans la théorie des inclusions différentielles et économie. Parmi ces théorèmes, le théorème de sélection de Michael qui a été démontré en 1956 par Ernest Michael.

Dans ce qui suit, on considère X, Y deux espaces de Banach, alors le théorème de sélection de Michael s'énonce comme suit :

Théorème 5.2.1. [41]

Soit $K : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque semi-continue inférieurement et à valeurs convexes fermées non vides. Alors, K possède une sélection continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $k : X \rightarrow Y$ telle que pour tout $x \in X$, $k(x)$ appartienne à Kx .

Exemple 5.2.1. Soit $K : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application multivoque définie par :

$$K(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si } x \in [0, 0.5[, \\ [0, 1] & \text{si } x = 0.5, \\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in]0.5, 1]. \end{cases}$$

Clairement, K une application multivoque à valeurs convexes fermées non vides, mais elle n'est pas semi-continue inférieurement en 0.5.

Alors, on ne peut pas appliqué le théorème de Michael dans ce cas, c'est-à-dire K n'admet pas une sélection continue.

5.3 Existence de solution pour une inclusion intégrale de type Fredholm

Cette section est consacré à l'inclusion intégrale non linéaire de type Fredholm de seconde espèce. Nous allons étudier ce genre d'inclusion en profondeur, en exhibant le côté analytique par la démonstration de l'existence de la solution, sous des hypothèses assez applicables en pratique.

Proposition 5.3.1. Soit $X = C([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace de toutes les fonctions continues sur $[a, b]$ avec $d(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$, pour tout $x, y \in X$. Alors, (X, d) est un espace métrique complet.

Maintenant, nous discutons l'application de la technique de point fixe à l'existence de solution pour une inclusion intégrale de type Fredholm suivante :

$$x(t) \in f(t) + \int_a^b K(t, s, x(s))ds, \quad t \in J = [a, b], \quad (5.2)$$

où $f \in X$ et $K : J \times J \times \mathbb{R} \rightarrow CB(\mathbb{R})$.

Soit $X = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions continues sur $[a, b]$. D'après la proposition 5.3.1, X muni de la métrique $d(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$, pour tout $x, y \in X$ est un espace métrique complet.

Position de problème

Soit $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque définie par :

$$Tx(t) = \left\{ y \in X : y \in f(t) + \int_a^b K(t, s, x(s)) ds \quad t \in J \right\}.$$

On dit que x est une solution de l'inclusion intégrale (5.2) si et seulement si T a un point fixe dans X .

En effet, si $x \in Tx$, alors

$$x \in f(t) + \int_a^b K(t, s, x(s)) ds,$$

ce qui implique x est une solution de l'inclusion intégrale (5.2).

Réciproquement, si x est une solution de (5.2), alors

$$x \in f(t) + \int_a^b K(t, s, x(s)) ds,$$

c'est-à-dire $x \in Tx$.

Théorème 5.3.1. Soit $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque définie par :

$$Tx(t) = \left\{ y \in X : y \in f(t) + \int_a^b K(t, s, x(s)) ds \quad t \in J \right\}.$$

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (A) Pour tout $x \in X$, l'application multivoque $K_x(t, s) := K(t, s, x(s))$, $(t, s) \in J \times J$ est semi-continu inférieurement.
- (B) Il existe une application continue $\rho : J \times J \rightarrow [0, +\infty[$ tel que

$$|K(t, s, u(s)) - K(t, s, v(s))| \leq \rho(t, s) \cdot \ln(|u(s) - v(s)| + 1),$$

pour tout $u, v \in X$ avec $(u, v) \in E(G)$ et $u \neq v$ et pour tout $(t, s) \in J \times J$.

- (C) Il existe $\tau > 0$ tel que

$$\sup_{t \in J} \int_a^b \rho(t, s) ds \leq e^{-\tau}$$

- (D) Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tel que $(x_0, x_1) \in E(G)$.
- (E) Pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $(x, y) \in E(G)$, on a $(y, z) \in E(G)$ pour tout $z \in Ty$.
- (F) Pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ et $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(x_n, x) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, l'inclusion intégrale (5.2) admet une solution dans X .

Preuve.

De la condition (A), l'application multivoque $K_x(t, s) : J \times J \rightarrow CB(\mathbb{R})$ est semi-continue inférieurement et à valeurs convexes fermées non vides.

Alors, d'après le théorème de sélection de Michael pour tout $x \in X$, il existe une sélection continue $k_x : J \times J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$k_x(t, s) \in K_x(t, s),$$

pour tout $(t, s) \in J \times J$.

D'abord, on va montrer que l'application T est bien définie.

En effet, on a

$$f(t) + \int_a^b k_x(t, s) ds \in Tx.$$

Alors, Tx n'est pas vide pour tout $x \in X$.

Dans ce qui suit, on va affirmer que Tx est borné et fermé.

Premièrement, la semi continuité inférieure de l'application Kx sur $[a, b] \times [a, b]$ implique l'existence d'une fonction continue $kx : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ceci d'après le théorème de sélection de Michael.

Comme l'image d'un intervalle fermé dans \mathbb{R} par une fonction continue est un intervalle fermé et borné. Soit $y \in Tx$, alors il existe k_x tel que

$$y(t, s) = f(t) + \int_a^b k_x(t, s) ds.$$

Puisque f et k_x sont continue sur $[a, b]$ et $[a, b] \times [a, b]$ respectivement, alors y est une fonction continue sur $[a, b] \times [a, b]$.

Donc, l'image de y est un intervalle fermé et borné.

Par conséquent, Tx est fermé et borné, c'est-à-dire,

$$T : X \rightarrow CB(X).$$

Maintenant, on va vérifier que T est $(\alpha-F)$ -Geraghty contraction de type Hardy-Rogers.

Soit $x_1, x_2 \in X$ avec $(x_1, x_2) \in E(G)$, $x_1 \neq x_2$ et $v_1 \in Tx_1$.

Alors,

$$v_1(t) \in f(t) + \int_a^b K(t, s, x_1(s)) ds \quad t \in J.$$

Ce qui implique qu'il existe

$$k_{x_1}(t, s) \in K_{x_1}(t, s),$$

tel que

$$v_1(t) = f(t) + \int_a^b k_{x_1}(t, s) ds \quad (t, s) \in J \times J.$$

De (B), on a

$$|K(t, s, x_1(s)) - K(t, s, x_2(s))| \leq \rho(t, s) \cdot \ln(|x_1(s) - x_2(s)| + 1),$$

pour tout $(t, s) \in J \times J$.

Cela donne

$$\begin{aligned} |K(t, s, x_1(s)) - K(t, s, x_2(s))| &= \sup\{|k_{x_1} - k_{x_2}|, \quad k_{x_1} \in K_{x_1}, k_{x_2} \in K_{x_2}\} \\ &\leq \rho(t, s) \cdot \ln(|x_1(s) - x_2(s)| + 1). \end{aligned}$$

Donc, il existe

$$w(t, s) \in K_{x_2}(t, s),$$

tel que

$$|k_{x_1}(t, s) - w(t, s)| \leq \rho(t, s) \cdot \ln(|x_1(s) - x_2(s)| + 1),$$

pour tout $(t, s) \in J \times J$.

Considérons maintenant l'application multivoque L qui définie par :

$$L(t, s) = \{w(t, s) \in K_{x_2}(t, s) : |k_{x_1}(t, s) - w(t, s)| \leq \rho(t, s) \cdot \ln(|x_1(s) - x_2(s)| + 1)\},$$

pour tout $(t, s) \in J \times J$.

D'après la condition A , on trouve que l'application multivoque L est semi-continu inférieurement, alors il existe une fonction continue

$$k_{x_2}(t, s) \in L(t, s)$$

pour $(t, s) \in J$.

Donc, on a

$$v_2(t) = f(t) + \int_a^b k_{x_2}(t, s) ds \in f(t) + \int_a^b K(t, s, x_2(s)) ds \quad t \in J$$

et

$$\begin{aligned} |v_1(t, s) - v_2(t, s)| &\leq \int_a^b |k_{x_1}(t, s) - k_{x_2}(t, s)| ds \\ &\leq \int_a^b \rho(t, s) \cdot \ln(|x_1(s) - x_2(s)| + 1) ds \\ &\leq \ln(d(x_1, x_2) + 1) \int_a^b \rho(t, s) ds \\ &\leq e^{-\tau} \cdot \ln(d(x_1, x_2) + 1) \\ &= e^{-\tau} \cdot \frac{\ln(d(x_1, x_2) + 1)}{d(x_1, x_2)} \cdot d(x_1, x_2), \end{aligned}$$

pour tout $t \in J$.

Par conséquent, on obtient

$$d(v_1, v_2) \leq e^{-\tau} \cdot \frac{\ln(d(x_1, x_2) + 1)}{d(x_1, x_2)} \cdot d(x_1, x_2).$$

En échangeant le rôle de x_1 et x_2 , nous déduisons

$$H(Tx_1, Tx_2) \leq e^{-\tau} \cdot \frac{\ln(d(x_1, x_2) + 1)}{d(x_1, x_2)} \cdot d(x_1, x_2).$$

En prenant le logarithme de deux côtés dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\tau + \ln(H(Tx_1, Tx_2)) \leq \ln \left(\frac{\ln(d(x_1, x_2) + 1)}{d(x_1, x_2)} \cdot d(x_1, x_2) \right),$$

pour tout $x_1, x_2 \in X$ avec $(x_1, x_2) \in E(G)$ et $x_1 \neq x_2$.

Donc, on observe que l'application T satisfaisant la condition (3.12) avec

$$F(t) = \ln t,$$

$$\beta(t) = \frac{\ln(t + 1)}{t},$$

$$a_1 = 1 \text{ et } a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0.$$

Par conséquent, toutes les conditions de théorème 3.3.1 sont satisfaites.

Alors, T a un point fixe, c'est-à-dire l'inclusion intégrale de type Fredholm (5.2) admet une solution dans X . \square

Remarque 5.3.1. On peut appliquer les résultats obtenus pour étudier le problème d'existence de la solution d'inclusions différentiels.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion

Cette thèse est consacré à l'étude d'existence de point fixe multivoque pour un nouveau type de contractions dans des espaces métriques.

Nous avons obtenu des résultats pour $(\alpha-F)$ -Geraghty contractions de type Hardy-Rogers dans des espaces métriques, ainsi que certaines conséquences qui concernent l'existence d'un point fixe dans des espaces métriques partiellement ordonnés et dans des espaces métriques muni d'un graphe.

Comme un application, nous avons étudié l'existence de la solution d'une inclusion intégrale de type Fredholm.

De plus, des résultats ont été établis pour $(\alpha-F-\psi)$ contractions généralisés dans des espaces b-métriques.

Perspectives

A l'avenir, nous allons examiner à titre d'exemples les problèmes suivants :

1. On va essayer d'appliquer les résultats obtenus pour étudier le problème d'existence de la solution d'inclusions différentiels.
2. On va chercher d'autres combinaisons des diverses contractions pour améliorer nos résultats.

Bibliographie

- [1] Ö. Acar, G. Durmaz, G. Minak, Generalized multivalued F-contractions on complete metric spaces, *Bull. Iranian Math. Soc.*, 40(2014), No. 6, 1469-1478.
- [2] R. P. Agarwal, D. O'Regan, D. R. Sahu, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Topological Fixed Point Theory and Its Applications, Springer, New York, 6(2009).
- [3] Ya. I. Alber and S. Guerre-Delabriere, Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces, in : *New Results in Operator Theory and its Applications*, Oper. Theory Adv. Appl, 98(1977), Birkhauser, Basel, 7-22.
- [4] M. U. Ali, T. Kamran, M. Postolache, Solution of Volterra integral inclusion in b-metric spaces via new fixed point theorem. *Nonlinear Analysis. Modelling and Control*, 22(2017), No. 1, 17-30.
- [5] I. Altun, G. Minak, H. Dag, Multivalued F-contractions on complete metric spaces, *Demonstr. Math*, 47(2014).
- [6] I. Altun, G. Durmaz, G. Minak, S. Romaguera, Multivalued Almost F-contractions on Complete Metric Spaces, *Filomat*, 30(2016), 441-448.
- [7] J.H. Asl, S. Rezapour, N Shahzad, On fixed points of α - ψ -contractive multifunctions, *Fixed Point Theory Appl*, 2012(2012), Art, No. 212.
- [8] J-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Topological, Université de Paris-Dauphine and CNRS, (1990).
- [9] I.A. Bakhtin, The contraction mapping principle in quasi metric spaces, *Funct. Anal. Ulianowsk Gos. Ped. Inst*, 30(1989), 26-37.
- [10] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fundamenta Mathematicae*, 3(1922), 133-181.
- [11] S. Beloul and H. Kaddouri, Fixed point theorems for subsequentially multivalued for δ -contractions in metric spaces, *Ser. Math. Inform*, 35(2020), No. 2, 379-392.
- [12] Y. Berinde, Generalized contractions in quasimetric spaces, *Seminar on Fixed Point Theory*, (1993), No. 3, 3-9.

- [13] V. Berinde, On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, *Carpathian J. Math.*, 19(2003), No. 1, 7-22.
- [14] V. Berinde, Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration, *Nonlinear Analysis Forum*, (2004).
- [15] M. Berinde, V. Berinde, On a general class of multivalued weakly Picard mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 326(2007), 772-782.
- [16] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2007), 43–53.
- [17] D. W. Boyd, Wong, J. S. W. Wong, On nonlinear contractions. *Proc. Am Math. Soc.*, 20(1969), 458-464.
- [18] A. Branciari, A fixed point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 29(2002), No. 9, 531-536.
- [19] S.K. Chatterjea, Fixed-point theorems, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, 25(1972), 727–730.
- [20] Lj. B. Ćirić, *Fixed Point Theory, Contraction Mapping Principle*, Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Beograd, (2003).
- [21] M. Cosentino, P. Vetro, Fixed Point Results for F-contractive Mappings of Hardy-Rogers-Type, *Filomat*, 28(2014), No. 4, 715-722.
- [22] M. Cosentino, M. Jleli, B. Samet, C. Vetro, Solvability of integrodifferential problems via fixed point theory in b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Appl.*, 70(2015).
- [23] S. Czerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis* (1993), No. 5, 5-11.
- [24] S. Czerwik, Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 46(1998), 263-276.
- [25] S. Czerwik, Dlutek K, Singh S.L, Round-off stability of iteration procedures for set-valued operators in b-metric spaces, *J. Natur.Phys. Sci.*, (2007), No. 11, 87-94.
- [26] K. Deimling, *Multivalued differential equations*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, (1992).
- [27] T. Dinevari, M. Frigon, Fixed point results for multivalued contractions on a metric space with a graph, *J. Math. Anal. Appl.*, 405(2013), 507-517.
- [28] M. Edelstein, An extension of Banach's contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12(1961), 7-10.
- [29] M. Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings, *J. London Math. Soc.*, 37(1962), 74–79.

- [30] M. A. Geraghty, On contractive mappings , Proc. Amer. Math. Soc, 40(1973), No. 2, 604-608.
- [31] G. E. Hardy and T. D. Rogers, A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canadian Mathematical Bulletin, 16(1973), 201–206.
- [32] F. Hausdorff. Beweis eines Satzes von Arzelà. Math. Z, 26(1927), 135-137.
- [33] I. Iqbal, N. Hussain, Fixed point theorems for generalized multivalued nonlinear F -contractions, J. Nonlinear Sci. Appl, 9(2016), 5870-5893.
- [34] J. Jachymski, The contraction principle for mappings on a metric space with a graph, Proc. Amer. Math. Soc, 136(2008), 1359-1373.
- [35] H. Kaddouri, H. Isik, S. Beloul, On new extensions of F -contraction with an application to integral inclusions, U.P.B. Sci. Bull, Series A, 81(2019), 31-42.
- [36] H. Kaddouri and S. Beloul, Fixed point theorems for multivalued Wardowski type contractions in b -metric spaces avec an application to integral inclusions. TWMS J. App. Eng. Math.
- [37] R. Kannan, Some results on fixed points, Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 60(1968), 71–76.
- [38] B. Knaster, Un théorème sur les fonctions d'ensembles, Ann. Soc. Polon. Math, 6(1928), 133-134.
- [39] MA. Kutbi, W. Sintunavarat, On new fixed point results for (α, ψ, ξ) -contractive multivalued mappings on α -complete metric spaces and their consequences, Fixed Point Theory and Appl, (2015).
- [40] A. Meir and E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl, 28(1969), 326-329.
- [41] E. Michael, Continuous selections. I, Ann. of Math, 63(1956), No. 2, 361-382.
- [42] G. Minak, A. Helvacı, I. Altun, Ćirić Type Generalized F -contraction On complete Metric Spaces and Fixed Point Results, Filomat, 28(2014), No. 6, 1143-1151.
- [43] N. Mizoguchi, W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl, 141(1989), 177–188.
- [44] B. Mohammadi, S. Rezapour, N. Shahzad, Some results on fixed points of α - ψ -Ćirić generalized multifunctions, Fixed Point Theory and Appl, 2013(2013), Art, No. 24.
- [45] S.B. Nadler, Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math, 30(1969), No. 2, 475-488.
- [46] J. J. Nieto and R. Rodríguez-López, Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, 22(2005), 223-239.

- [47] J. J. Nieto, R. L. Pouso and R. Rodríguez-López, Fixed point theorems in ordered abstract spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(2007), 2505-2517.
- [48] J. J. Nieto and R. Rodríguez-López, Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, *Acta Math. Sin.*, 23(2007), 2205-2212.
- [49] D. O'Regan and A. Petruşel, Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 341(2008), 1241-1252.
- [50] A. Petruşel, On Frigon-Granas-type multifunctions, *Nonlinear Anal.*, 7(2002), 113–121.
- [51] A. Petruşel and I. Rus, Fixed point theorems in ordered L-spaces endowed with a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(2006), 411-418.
- [52] H. Piri, P. Kumam, Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces, *Fixed Point Theory and Appl.*, 2014(2014), Art. No. 210.
- [53] D. Pompeiu. Sur la continuité des fonctions de variables complexes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, (1905), No. 3, 265-315.
- [54] E. Rakotch, A note on contractive mappings. *Proc. Am. Math. Soc.*, 13(1962), 459-465.
- [55] A. C. M. Ran and M. C. B. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(2004), No. 5, 1435-1443.
- [56] S. Reich, Some remarks concerning contraction mappings, *Canadian Mathematical Bulletin*, 14(1971), 121–124.
- [57] S. Reich, Fixed points of contractive functions, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 4(1972), No. 5, 26–42.
- [58] I. A. Rus, Basic problems of the metric fixed point theory revisited (II), *Stud. Univ. Babeş,-Bolyai Math.*, 36(1991), 81–99.
- [59] B. Samet, C. Vetro, P. Vetro, Fixed point theorems for α - ψ -contractive type mappings, *Nonlinear Anal.*, 75(2012), No. 4, 2154-2165.
- [60] N-A. Secelean, Iterated function systems consisting of F-contractions. *Fixed Point Theory and Appl.*, (2013).
- [61] M. Sgroi, C. Vetro, Multivalued F-contractions and the solution of certain mappings and integral equations, *Filomat.*, 27(2013), No. 7, 1259-1268.
- [62] Hu. Shouchuan, Nikolas S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, (1997).
- [63] T. Suzuki, A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(2008), No. 5, 1861-1869.

- [64] T. Suzuki, A new type of fixed point theorem in metric spaces, *Nonlinear Anal*, 71(2009), 5313-5317.
- [65] A. Tarski, A lattice-theoretical fixed point theorem and its applications, *Pac. J. Math*, 5(1955), 285-309.
- [66] J. Von Neuman, uber ein okonomsiches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Browserschen Fixpunktsatzes, *Ergebn. Math. Kolloq*, 8(1937), 73-83.
- [67] D. Wardowski, Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, *Fixed Point Theory and Appl*, (2012), Art, No. 94.
- [68] D. Wardowski, N. Van Dung, Fixed points of F-weak contractions on complete metric spaces, *Demonstr. Math.*, (2014), No. 1, 146-155.
- [69] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Essex CM20 2JE, England and Associated Companies throughout the world, (1972).