



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar Eloued



Faculté de Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Thèse en vue de l'obtention du diplôme de doctorat LMD en
mathématiques

Spécialité: Analyse Mathématiques et applications

Intitulé :

Spectres étendus, images numériques des opérateurs
et transformations d'Aluthge et interactions

Présentée Par :

GUEMOULA Asma

Devant le jury composé de:

Adel Aissaoui	Prof.	Univ. Eloued	Président
Abdelouahab Mansour	Prof.	Univ. Eloued	Encadreur
Abderrazak Hechifa	MCA	Univ. Ouargla	Co- Encadreur
Smail Bouzenada	Prof.	Univ. Tebessa	Examineur
Kamel Akrouit	Prof.	Univ. Tebessa	Examineur
Messaoud Guesba	MCA	Univ. Eloued	Examineur

Année universitaire: 2022/2023

Abstract

This thesis joins in the field of operator theory where it is based on a relatively of numerical range, extended spectrum and Aluthge transformation of bounded linear operator on Hilbert space H .

We present some results on the possible relations between the extended spectrum of AB and BA in finite dimension, and its consequences in the form of several corollaries. Moreover, thanks to this relation we could find the extended spectrum of the Aluthge transformation.

Also we prove some equalities between the extended spectrum of the Aluthge transformation, the Duggal transformation and the operator T in infinite-dimensional .

On the other hand, we show that the norm (α, β) is equivalent to the numerical radius, and to the usual norm of the operator. We also study the equality conditions for said bounds. We then obtain upper and lower bounds for the (α, β) -norm of bounded linear operators, and apply the results to obtain bounds for the numerical radius of bounded linear operators.

In the last part, we give some examples where we can calculate the numerical range, numerical radius, Aluthge transformation and extended spectrum of some operators, also we apply some theorems of our results.

Key words : Numerical range, numerical radius, Aluthge transformation, (α, β) -norm , extended spectrum.

ملخص

هذه الأطروحة جزء من مجال نظرية المؤثرات وبشكل أكثر تحديداً حول مفاهيم حديثة إلى حد ما تسمى الصورة الرقمية والطيف الممتد وتحويل اليج للمؤثرات الخطية المحدودة في فضاء هيلبرت H .

نقدم بعض النتائج حول العلاقات المحتملة بين الطيف الممتد لـ AB و BA في البعد المحدود، ونتائجها في شكل عدة توطئات. بالإضافة إلى ذلك، من خلال هذه العلاقة، تمكنا من العثور على الطيف الممتد لتحويل اليج.

كما أثبتنا بعض التكافؤات بين الطيف الممتد لتحويل اليج وتحويل ديغال والمؤثر T في الأبعاد اللانهائية. من ناحية أخرى، نبين أن التنظيم (β, α) يعادل نصف القطر العددي والتنظيم المعتاد للمؤثر T . كما ندرس شروط المساواة لهذه الحدود. نحصل بعد ذلك على الحدود العلوية والسفلية للتنظيم (β, α) للمؤثرات الخطية المحدودة، ونطبق النتائج للحصول على حدود نصف القطر العددي للمؤثرات الخطية المحدودة. في الجزء الأخير، نقدم بعض الأمثلة حيث يمكننا حساب الصورة الرقمية، ونصف القطر العددي، وتحويل اليج والطيف الممتد لبعض المؤثرات، كما نطبق بعض نتائجنا.

الكلمات المفتاحية: الصورة الرقمية، نصف القطر العددي، تحويل اليج، تنظيم (β, α) ، الطيف الممتد.

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs et plus particulièrement autour de deux notions assez récentes appelées image numérique, spectre étendu et transformation d'Aluthge des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert H .

Nous présentons quelques résultats sur les relations possibles entre le spectre étendu de AB et BA en dimension finie, et ses conséquences sous la forme de plusieurs corollaires. De plus, grâce à cette relation, nous avons pu trouver le spectre étendu de la transformation d'Aluthge.

Aussi nous prouvons quelques égalités entre le spectre étendu de la transformation d'Aluthge et la transformation de Duggal d'un opérateur T en dimension infinie .

D'autre part, nous montrons que la norme (α, β) est équivalente au rayon numérique, et à la norme usuelle de l'opérateur. Nous étudions également les conditions d'égalité pour ces bornes. Nous obtenons ensuite des bornes supérieures et inférieures pour la norme (α, β) des opérateurs linéaires bornés, et nous appliquons les résultats pour obtenir des bornes pour le rayon numérique des opérateurs linéaires bornés.

Dans la dernière partie, nous donnons quelques exemples où nous calculons l'image numérique, le rayon numérique, la transformation d'Aluthge et le spectre étendu de quelques opérateurs, aussi nous appliquons quelques théorèmes de nos résultats.

Mots clés : Image numérique, rayon numérique, transformation d'Aluthge, (α, β) -norme , spectre étendu.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I Notions Préliminaires	5
I.1 Espace de Hilbert	5
I.2 Opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert	6
I.2.1 L'adjoint d'un opérateur	7
I.3 Puissance et racine carré d'un opérateur positif	8
I.3.1 Puissance d'un opérateur	8
I.3.2 Racine carré d'un opérateur positif	8
I.4 Quelques classes d'opérateurs	8
I.4.1 La décomposition cartésienne	10
I.4.2 La décomposition polaire	10
I.5 La transformation d'Aluthge	10
I.6 Spectre d'un opérateur	12
Chapitre II Image numérique des opérateurs	15
II.1 Définitions et propriétés générales	16
II.1.1 Image numérique	16
II.1.2 Rayon numérique	17
II.1.3 Relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur	19
II.1.4 Quelques propriétés des opérateurs auto-adjoints et normaux	20
II.1.5 Image et rayon numérique du produit	21
II.1.6 Image et rayon numérique de transformation d'Aluthge	22
II.2 Quelques inégalités en introduisant une nouvelle norme	23

Chapitre III	Spectre étendu des opérateurs	32
III.1	Définitions et propriétés générales	32
III.1.1	Relation avec le spectre ponctuel	33
III.1.2	Puissances d'opérateurs	34
III.1.3	Cas de dimension finie	34
III.2	Spectre étendu de quelques classe d' opérateurs	35
III.2.1	Produit des opérateurs autoadjoints	35
III.2.2	Spectre étendu des opérateurs normaux	37
III.2.3	Spectre étendu des opérateurs quasinormaux	37
III.3	Spectre étendu de la transformation d'Aluthge	38
III.3.1	Spectre étendu de la transformation d'Aluthge en dimension finie	38
III.3.2	Spectre étendu de la transformation Aluthge en dimension infinie	40
Chapitre IV	Applications et exemples	44
IV.1	Exemples et Applications en dimension finie	44
IV.1.1	Spectre étendu et rayon numérique de transformation d'Aluthge généralisée	44
IV.1.2	La relation entre le spectre étendu de l' opérateur T et sa transformation d'Aluthge	45
IV.1.3	Inégalités de rayon numérique de l' opérateur T utilisant la transformation d'Aluthge généralisée	46
IV.1.4	Spectre étendu et image numérique de l'opérateur T	46
IV.1.5	Spectre étendu et image numérique de la matrice de Jordan	48
IV.2	Exemple et Application en dimension infinie	49
	Conclusion générale et perspective	52
	Bibliographie	53

Remerciements

Je remercie « Allah » qui m'a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste thèse.

*En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, monsieur **MANSOUR Abdelouahab** professeur à l'université de El Oued, qui a encadré ce travail avec beaucoup de patience et de gentillesse. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je le remercie très sincèrement pour sa disponibilité.*

Je remercie mes collègues et amis de longue date du département de mathématiques de la faculté des sciences exactes qui se reconnaîtront ici.

Je remercie également ma famille qui m'ont soutenu moralement, sans les nommer explicitement, je le remercie pour leur encouragement.

Enfin, Je remercie également tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'accomplissement de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :

*A mes très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et sacrifié pour que je sois heureuse,
pour leurs conseils, leur affection et leurs encouragements.*

Je vous remercie pour tous vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

Et je le dédie :

A mes frères .(Khaoula, Bachir, Radja, Said siam et Fatima Elzahra)

A mes surs .

A tous les membres de ma famille,

A tous mes amis et mes collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

A tous les professeurs honorables pour leurs efforts avec nous tout au long de notre carrière universitaire.

Notations Générales

H	Espace de Hilbert.
$B(H)$	l'ensemble des opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert H .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Le produit scalaire .
$\ T\ $	la norme de l'opérateur T .
$\ T\ _{\alpha, \beta}$	(α, β) – norme de l'opérateur T .
$N(T)$	Le noyau de l'opérateur T .
$R(T)$	L'image de l'opérateur T .
$W(T)$	L'image numérique de T .
$r(T)$	Rayon spectral de T .
$w(T)$	Rayon numérique de T .
T^*	L'opérateur adjoint d'un opérateur T .
$T^{\frac{1}{2}}$	La racine carrée d'un opérateur positif T .
$ T $	Le module d'un opérateur T .
T^{-1}	L'inverse d'un opérateur T .
$\sigma(T)$	Le spectre de T .
$\rho(T)$	L'ensemble résolvante de T .
$\sigma_{ext}(T)$	Le spectre étendu de T .
$\tilde{T}$	La transformation d'Aluthge de T .
$\tilde{T}_\lambda$	La transformation de Aluthge généralisée de T .
$\hat{T}$	La transformation de Duggal de T .

INTRODUCTION

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'analyse fonctionnelle et plus précisément dans le domaine de la théorie des opérateurs sur les espaces de Hilbert. Dans toute notre étude, H signifiera un espace de Hilbert complexe et séparable. On notera aussi par $B(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis sur H .

L'étude des images numériques des opérateurs et leurs applications a joué un rôle très important dans de nombreux domaines des mathématiques et autres domaines de la physique et les sciences et de l'ingénierie.

L'image numérique d'un opérateur linéaire borné $T \in B(H)$ a été introduite en 1918 par Toeplitz dans [29] comme suit

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$$

Où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ sont respectivement le produit scalaire et la norme associés dans H , le rayon numérique de T est défini par

$$\omega(T) = \{ \sup |z| : z \in W(T) \}$$

En 1990 A. Aluthge a introduit dans [3] une transformation qui porte son nom, la transformation d'Aluthge, pour étendre quelques propriétés spectrales aux opérateurs p -hyponormaux (i.e. $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$, $p > 0$). Pour un opérateur $T \in B(H)$, on considère sa décomposition polaire $T = V|T|$. La transformation d'Aluthge de T est définie par

$$\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}} V |T|^{\frac{1}{2}}.$$

Dans [26], K. Okubo a introduit la transformation de Aluthge généralisée. Pour $\lambda \in [0, 1]$, on appelle la transformation λ -Aluthge, l'application $\Delta_\lambda : B(H) \longrightarrow B(H)$ définie par :

$$\Delta_\lambda(T) = |T|^\lambda V |T|^{1-\lambda}$$

En 2002. Takeaki Yamazaki a présenté dans [30] une étude sur l'image numérique de la transformation d' Aluthge, où il a présenté les résultats suivants

- $\omega(T) \geq \omega(\tilde{T})$.
- si T est une matrice $n \times n$, alors $W(T) \supset W(\tilde{T})$.
- si $N(T) \subset N(T^*)$, alors $\overline{W(T)} \supset \overline{W(\tilde{T})}$.

Et puis nombreux chercheurs ont travaillé sur l'image numérique de la transformation d' Aluthge.(voir par exemple [13], [22] et [31]).

Dans [27] les auteurs ont introduit une nouvelle norme nommée (α, β) -norme, sur $B(H)$. Pour $T \in B(H)$, la norme (α, β) de T , notée $\|T\|_{\alpha, \beta}$, est défini par suit

$$\|T\|_{\alpha, \beta} = \sup \left\{ \sqrt{\alpha |\langle Tx, x \rangle|^2 + \beta \|Tx\|^2} : x \in H, \|x\| = 1 \right\},$$

où α, β sont des constantes positives avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On remarque que si $\alpha = 1, \beta = 0$ alors $\|T\|_{\alpha, \beta} = w(T)$, et si $\alpha = 0, \beta = 1$ alors $\|T\|_{\alpha, \beta} = \|T\|$. De plus, si nous considérons $\alpha = \beta = 1$, alors nous avons le rayon Davis-Wielandt modifié de T , c'est-à-dire $\|T\|_{\alpha, \beta} = dw^*(T)$, (voir [5]). Ils ont étudié les propriétés de base de cette norme, y compris les limites supérieures et inférieures. En tant qu'application de la présente étude, ils ont également estimé les limites du rayon numérique des opérateurs linéaires limités. Avec des exemples, les résultats améliorent certaines des inégalités du rayon numérique existantes importantes.

À [6], les chercheurs ont pris $\alpha + \beta = 1$, c'est-à-dire $\beta = 1 - \alpha$ et ont exploré la α -norme de T définie comme suit

$$\|T\|_\alpha = \sup \left\{ \sqrt{\alpha |\langle Tx, x \rangle|^2 + (1 - \alpha) \|Tx\|^2} : x \in H, \|x\| = 1 \right\}.$$

Nous consacrerons une partie de la thèse à l'étude d'une notion spectrale assez récente, appelée le spectre étendu des opérateurs. Soit $T \in B(H)$, on dit qu'un nombre complexe λ est une valeur propre étendue de l'opérateur T , s'il existe un opérateur $X \in B(H) \setminus \{0\}$ tel que $TX = \lambda XT$. Dans ce cas, l'opérateur X est dit vecteur propre étendu associé à λ . On appelle spectre étendu de T l'ensemble de

toutes les valeurs propres étendues de T , et on le notera par $\sigma_{ext}(T)$.

Dans [7], A. Biswas, A. Lambert et S. Petrovic ont introduit cette notion en montrant que le spectre étendu d'un opérateur T à image dense, correspond au spectre ponctuel d'un autre opérateur (non-borné en général) construit à partir de T . En effet, Soient $T, X \in B(H)$ et supposons qu'il existe un opérateur $Y \in B(H)$ tel que

$$TX = YT. \quad (1)$$

Notons ensuite par Ω_T l'ensemble de tous les opérateurs $X \in B(H)$ pour lesquels il existe un opérateur $Y \in B(H)$ vérifiant (1). On vérifie facilement que ce dernier ensemble forme une algèbre. Si de plus T est à image dense, on peut définir l'application.

$$\phi_T : \Omega_T \longrightarrow B(H)$$

$$X \longmapsto Y.$$

qui est un homomorphisme d'algèbre fermé. Supposons maintenant que pour l'opérateur $X \neq 0$, il existe un nombre complexe λ tel que $Y = \lambda X$, on obtient alors l'équation $TX = \lambda XT$, ou l'égalité équivalente $\phi_T = \lambda X$. Par conséquent, un nombre complexe λ est une valeur propre étendue de l'opérateur T si et seulement si λ est une valeur propre de l'opérateur (non-borné) ϕ_T .

Cette thèse est composée d'une introduction, quatre chapitres en plus d'une liste de références bibliographiques.

Le premier chapitre est consacré aux préliminaires, il comprend six sections. Dans les quatre premières sections, nous présentons quelques propriétés fondamentales et importantes de l'espace de Hilbert, ainsi que des propriétés fondamentales des opérateurs linéaires bornés dans l'espace de Hilbert. Nous présentons quelques notions de base comme classes, puissance et racine carré, etc. Dans la section I.5, nous introduisons le concept de spectre avec quelques résultats, qui seront utiles dans le chapitre 3 de cette thèse.

Enfin, la section I.6 est consacrée à la transformée d'Aluthge, où on va donner quelques propriétés générales, ainsi que quelques résultats.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'image et le rayon numérique des opérateurs et la transformation d'Aluthge. Ce chapitre est divisé en deux grandes parties. Dans la première, on a étudié quelques propriétés d'image et de rayon numérique des opérateurs. Dans la deuxième partie, nous in-

introduisons une nouvelle norme sur l'espace des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert complexe, qui généralise la norme de rayon numérique. Nous étudions les propriétés de base de cette norme, nous montrons que la norme (α, β) est équivalente à la norme numérique du rayon et à la norme usuelle de l'opérateur. Nous étudions également les conditions d'égalité pour les bornes. Nous obtenons ensuite des bornes supérieures et inférieures pour la norme (α, β) des opérateurs linéaires bornés, et appliquons les résultats pour obtenir des bornes pour le rayon numérique des opérateurs linéaires bornés. Nous illustrons par des exemples que les résultats améliorent certaines des importantes inégalités de rayon numériques existantes.

Nous commençons le troisième chapitre par la présentation de quelques définitions et propriétés du spectre étendu. Ensuite, nous présentons une autre partie sur le spectre étendu de quelques classe d'opérateurs. Enfin, nous présentons quelques résultats sur les relations possibles entre le spectre étendu de AB et BA en dimension finie, et ses conséquences sous forme de plusieurs corollaires, aussi et nous prouvons quelques égalités entre le spectre étendu pour l'opérateur T , pour la transformation Aluthge et pour la transformation Duggal en dimension infinie.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté des exemples prédéfinis dans lesquels nous allons calculer l'image numérique, le rayon numérique, la transformation d' Aluthge et le spectre étendu des opérateurs, aussi nous allons appliquer les résultats obtenus dans les premiers chapitres.

CHAPITRE

I

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on va donner quelques éléments essentiels dans la théorie des opérateurs, qui sont nécessaires pour la suite de notre travail, comme espace de Hilbert, espace de Banach, opérateur linéaire borné, quelques classes d'opérateurs, spectre d'un opérateur et transformation d'Aluthge.

I.1 Espace de Hilbert

Définition I.1.1 [17] Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. S'il existe un nombre complexe $\langle x, y \rangle$ pour chaque paire de vecteurs $x, y \in X$ satisfaisant :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout x dans X et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ pour tous x et y dans X .
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ pour tous x, y et z dans X .
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ pour tous x et y dans X et pour tout nombre complexe λ .

Alors $\langle x, y \rangle$ est appelé produit scalaire de x et y .

Un espace vectoriel complexe X ayant le produit scalaire est dit espace muni d'un produit scalaire, ou un espace pre-hilbertien.

Définition I.1.2 [17] Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. S'il existe un nombre réel $\|x\|$ pour tout vecteur $x \in X$ satisfaisant :

1. $\|x\| \geq 0$ pour tout x dans X , et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous x et y dans X .
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout x dans X et pour tout nombre complexe λ .

Alors $\|x\|$ est dit norme de x .

Théorème I.1.1 [17] Un espace muni d'un produit scalaire est un espace normé.

Définition I.1.3 [17] Un espace complet muni d'un produit scalaire est dit **espace de Hilbert**.

Définition I.1.4 [17] Un espace normé et complet est dit **espace de Banach**.

I.2 Opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert

Définition I.2.1 [17] Une application T d'un espace de Hilbert H vers H est dit opérateur linéaire si T satisfait :

1. $T(x + y) = Tx + Ty$ pour tous $x, y \in H$.
2. $T(\alpha x) = \alpha Tx$ pour tout $x \in H$ et tout nombre complexe α .

L'opérateur identité I est défini par $Ix = x$ pour tout $x \in H$.

L'opérateur zero 0 est défini par $0x = 0$ pour tout $x \in H$.

Définition I.2.2 [17] Un opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert H est dit **borné**, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in H.$$

$\|T\|$ la norme d'opérateur T est définie par

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in H\},$$

Notation. On note par $B(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert H .

Théorème I.2.1 [17] Pour tout opérateur linéaire et borné T , on a :

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\};$$

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\};$$

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Théorème I.2.2 [17] Soient S et T deux opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert H , on a les propriétés suivantes :

$$(i) \quad \|\alpha T\| = |\alpha| \|T\| \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{C}.$$

$$(ii) \quad \|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|.$$

$$(iii) \quad \|ST\| \leq \|S\|\|T\|.$$

I.2.1 L'adjoint d'un opérateur

Définition I.2.3 [17] Soit T un opérateur dans $B(H)$, pour un y fixé dans H , on considère une fonction f définie par $f(x) = \langle Tx, y \rangle$ sur H , selon le théorème de représentation de Riesz, il existe $u \in H$ unique tel que $f(x) = \langle Tx, y \rangle = \langle x, u \rangle$ pour tout $x \in H$, par conséquent, nous pouvons définir T^* l'opérateur adjoint de T , par $\langle Tx, y \rangle = \langle x, u \rangle = \langle x, T^*y \rangle$, pour $x, y \in H$.

Théorème I.2.3 [17] Soit T un opérateur défini sur un espace de Hilbert H . On a T^* est aussi défini sur H , et les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$(i) \quad \|T^*\| = \|T\|.$$

$$(ii) \quad (T + S)^* = T^* + S^*.$$

$$(iii) \quad (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{C}.$$

$$(iv) \quad (T^*)^* = T.$$

$$(v) \quad (ST)^* = T^* S^*.$$

$$(vi) \quad (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}, \text{ si } T \text{ est inversible.}$$

Corollaire I.2.1 [17] Soit T un opérateur dans $B(H)$, on a

$$(i) \quad \|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2.$$

$$(ii) \quad T^*T = 0 \text{ si et seulement si } T = 0.$$

I.3 Puissance et racine carré d'un opérateur positif

I.3.1 Puissance d'un opérateur

Définition I.3.1 Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H , où

$$T^n x = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_n x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } T^0 = I \quad (\text{Opérateur identité}),$$

T^n est dit l'opérateur puissance de T .

Proposition I.3.1 Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H , alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

I.3.2 Racine carré d'un opérateur positif

Opérateur Positif (noté par $T \geq 0$) si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, pour tout $x \in H$.

Théorème I.3.1 [17] Pour tout opérateur positif A , il existe un opérateur positif S tel que $S^2 = A$.

Définition I.3.2 [17] L'opérateur S défini dans le théorème 1.3.1 est dit racine carré de A et est noté par $S = A^{\frac{1}{2}}$.

I.4 Quelques classes d'opérateurs

Définition I.4.1 [17] $R(T)$, l'image de T , est définie par :

$$R(T) = \{Tx; x \in H\},$$

et $N(T)$ le noyau de T , est défini par :

$$N(T) = \{x \in H; Tx = 0\}.$$

.

Définition I.4.2 [17] Soit T un opérateur dans $B(H)$, T est dit :

1. **Opérateur auto-adjoint** si $T^* = T$.

2. **Opérateur normal** si $T^*T = TT^*$.
3. **Opérateur quasinormal** si $T(T^*T) = (T^*T)T$.
4. **Projection** si $T^2 = T$.
5. **Projection orthogonale** si $T^2 = T = T^*$.
6. **Opérateur unitaire** si $T^*T = TT^* = I$.
7. **Opérateur isométrique** si $T^*T = I$.
8. **Opérateur hyponormal** si $T^*T \geq TT^*$.
9. **Opérateur isométrique Partiel** si $T = TT^*T$.
10. **Opérateur paranormal** si $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ pour tout vecteur unité $x \in H$.
11. **Opérateur sous-normal** si T a une extension normale.
12. **Opérateur anti-hermetien** si $T^* = -T$.
13. **Opérateur compact** si $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$, pour toute suite orthonormée $\{x_n\}$ de H .
14. **Opérateur k -quasihyponormal** si $T^*(T^*T)^kT \geq T^*(TT^*)^kT$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
15. **Opérateur p -hyponormal** si $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$.
16. **Opérateur de classe A** si $|T^2| \geq |T|^2$.
17. **Opérateur de classe A(k)** si $(T^*|T^{2k}|T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
18. **Opérateur absolument- k -paranormal** si $\||T|^kTx\| \geq \|Tx\|^{k+1}$ pour tout vecteur unité $x \in H$, $k \in \mathbb{N}$.
19. **Opérateur k -hyponormal** si $(T^*T)^k \geq (TT^*)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition I.4.3 [17] Pour deux opérateurs A et B . Soit $[A, B]$ le commutateur de A et B défini par, $[A, B] = AB - BA$.

Un opérateur T est dit **binormal** si $[T^*T, TT^*] = 0$.

Définition I.4.4 [17] Un opérateur U est dit **symétrique** si $U^*U = UU^* = U^2 = I$, ce qui est équivalent à $\{U^* = U \text{ et } U \text{ est unitaire}\}$.

Définition I.4.5 [17] Un opérateur T est dit **nilpotent** si $T^2 = 0$.

Théorème I.4.1 [17] Les relations d'inclusion suivantes sont valables :

$$\begin{aligned} \text{Auto-adjoint} &\subseteq \text{Normal} \subseteq \text{Quasinormal} \\ &\subseteq \text{Sous-normal} \subseteq \text{Hyponormal} \subseteq \text{Paranormal} . \end{aligned}$$

I.4.1 La décomposition cartésienne

Théorème I.4.2 [17](forme cartésienne)

Soit T un opérateur sur l'espace de Hilbert H , il existe deux opérateurs auto-adjoints A et B tels que $T = A + iB$ nécessairement $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ et $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$.

I.4.2 La décomposition polaire

Définition I.4.6 [17] Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H , alors il existe un opérateur isométrique partiel U tel que : $T = U |T|$.

où $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, avec $N(U) = N(|T|)$, $T = U |T|$ est dit **la décomposition polaire** de T , et si la condition $N(U) = N(|T|)$ n'est pas nécessairement satisfaite, $T = U |T|$ est dit seulement **une décomposition** de T .

Théorème I.4.3 [17] Soit $T = U |T|$ la décomposition polaire d'un opérateur T dans un espace de Hilbert H . Alors on a

- (i) $N(|T|) = N(T)$.
- (ii) $|T^*|^q = U |T^*|^q U^*$ pour tout entier positif q .

I.5 La transformation d'Aluthge

Définition I.5.1 [17] Pour un opérateur $T = U |T|$, on définit la transformation d'Aluthge de T par $\tilde{T}$ comme suit :

$$\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}}. \quad (I.1)$$

Définition I.5.2 [26](la transformation de Aluthge généralisée)

Pour $\lambda \in [0, 1]$, on appelle la transformation λ -Aluthge, l'application $T_\lambda : B(H) \longrightarrow B(H)$ définie par :

$$\tilde{T}_\lambda = |T|^\lambda U |T|^{1-\lambda}$$

Dans le cas $\lambda = 1$, on a $\tilde{T}_1 = |T|U$, qu'on appelle la transformation de Duggal. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on trouve la définition de la transformation de Aluthge définie dans (I.1). Et pour $\lambda = 0$ on a tout simplement $\tilde{T}_0 = U|T| = T$.

Théorème I.5.1 [3] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur p -hyponormal avec $p > 0$. Alors on a les assertions suivantes :

1. Si $\frac{1}{2} \leq p < 1$, alors $\tilde{T}$ est hyponormal.
2. Si $0 < p < \frac{1}{2}$, alors $\tilde{T}$ est $(p + \frac{1}{2})$ -hyponormal.

Lemme I.5.1 [23] Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0, 1]$, alors on a l'équivalence suivante :

$$T \text{ est quasi-normal} \iff \tilde{T}_\lambda = T.$$

Proposition I.5.1 [10] Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda, \mu \in [0, 1]$ tels que $\lambda \neq \mu$. Supposons que $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^*)$, alors on a :

$$\tilde{T}_\lambda = \tilde{T}_\mu \iff T \text{ est quasi-normal.}$$

Remarque I.5.1 [10] Sans la condition $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^*)$ la proposition précédente n'est plus vraie. Par exemple, si T est nilpotent d'ordre deux ; $T \neq 0$ et $T^2 = 0$, alors $\tilde{T}_\lambda = \tilde{T}_\mu = 0$ pour tous $\lambda, \mu \in]0, 1]$.

Lemme I.5.2 [10] Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose que $\tilde{T}_\lambda = \alpha T$, on a les cas suivants :

1. Si $\alpha = 1$, alors T est quasi-normal ($TT^*T = T^*TT$).
2. Si $\alpha = 0$, alors T est un nilpotent d'ordre 2, ($T^2 = 0$).
3. Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, alors $T = 0$.

Lemme I.5.3 [12] Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0, 1[$. On suppose que T et T^* sont injectifs. Alors,

$$(\tilde{T}^2)_\lambda = T \implies T^2 = T^*.$$

Lemme I.5.4 [12] Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0, 1[$. On suppose que T et T^* sont injectifs. Alors on a l'implication suivante :

$$\tilde{T}_\lambda = T^* \implies T = T^*.$$

Lemme I.5.5 [12] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0, 1[$. Si T est quasi-normal, alors :

$$(\tilde{T}^*)_\lambda = T \implies T = T^*.$$

Théorème I.5.2 [11] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(\tilde{T}S)_\lambda = (\tilde{S}T)_\lambda, \quad \forall S \in \mathcal{B}(H).$
2. $(\tilde{T}S)_\lambda = (\tilde{S}T)_\lambda$ pour tout opérateur $S = x \otimes x, \quad x \in H.$

3. $T = \alpha I$, pour un $\alpha \in \mathbb{C}$.

Théorème I.5.3 [17] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur inversible. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. T est positif.
2. pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\tilde{T}_\lambda$ est positif.
3. il existe un $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\tilde{T}_\lambda$ est positif.

En particulier, si $\tilde{T}_\lambda = cI$ pour une certaine constante non-nulle $c \in \mathbb{C}$, alors $T = cI$.

I.6 Spectre d'un opérateur

Définition I.6.1 [17] Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H , on dit que T est un **opérateur inversible** s'il existe un opérateur S tel que $ST = TS = I$, où I est l'opérateur identité. On écrit $S = T^{-1}$ et T^{-1} est l'**inverse** de T .

Théorème I.6.1 [17] Si T est un opérateur et c un nombre positif tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout vecteur $x \in H$, alors $R(T)$ l'image de T est fermée.

Corollaire I.6.1 [17] Si $T \geq cI$ pour $c > 0$, alors T est inversible.

Définition I.6.2 [17] $\sigma(T)$ le spectre de l'opérateur T est défini par :

(d₁) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$

L'ensemble $\rho(T)$ est défini par :

$$\rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T)$$

et $\rho(T)$ est dit **l'ensemble résolvante** de T .

(d₂) $\sigma_P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{il existe } x \neq 0 \text{ telle que } Tx = \lambda x\}$, σ_P est dit **spectre ponctuel** de T .

(d₃) $\sigma_C(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ est non borné et } \overline{R(T - \lambda I)} = H\}$, $\sigma_C(T)$ est dit **spectre continu** de T .

(d₄) $\sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ existe et } \overline{R(T - \lambda I)} \subsetneq H\}$, $\sigma_R(T)$ est dit **spectre résiduel** de T .

(d₅) $\sigma_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{il existe une suite des vecteurs unitaires } \{x_n\} \text{ telle que } \|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty\}$, $\sigma_A(T)$ est dit **spectre approximatif** de T .

Dans le diagramme en ordre suivant on clarifie la relation entre les différents types de spectres.

$$(a) \quad (T - \lambda)^{-1} \text{ n'existe pas} \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_P$$

$$(b) \quad (T - \lambda)^{-1} \text{ existe} \begin{cases} (b_1)(T - \lambda)^{-1} \text{ est borné} \begin{cases} (b_{11})\overline{R(T - \lambda)} = H \Leftrightarrow \lambda \in \rho(T) \\ (b_{12})\overline{R(T - \lambda)} \subsetneq H \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_R(T) \end{cases} \\ (b_2)(T - \lambda)^{-1} \text{ est non borné} \begin{cases} (b_{21})\overline{R(T - \lambda)} = H \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_C(T) \\ (b_{22})\overline{R(T - \lambda)} \subsetneq H \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_R(T) \end{cases} \end{cases}$$

Proposition I.6.1 [17] $\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_C(T) \cup \sigma_R(T)$ tel que $\sigma_P(T)$, $\sigma_C(T)$ et $\sigma_R(T)$ sont des parties disjointes de $\sigma(T)$.

Théorème I.6.2 [17] Pour les opérateurs A et B , on a $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$.

Théorème I.6.3 [17] Soit $\sigma(T)$ le spectre d'un opérateur T , et soit $P(t)$ un polynôme à coefficients complexes. Alors

$$P(\sigma(T)) = \sigma(P(T)).$$

Théorème I.6.4 [17] Soit $\sigma(T)$ le spectre d'un opérateur inversible T , alors

$$\sigma(T^{-1}) = \{\sigma(T)\}^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

Théorème I.6.5 [17] Soit $\sigma(T)$ le spectre d'un opérateur T , alors

$$\sigma(T^*) = \{\sigma(T)\}^* = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Théorème I.6.6 [23] Si $T \in \mathcal{B}(H)$, alors on a les égalités suivantes :

$$\sigma(T) = \sigma\left(\tilde{T}_\lambda\right) \text{ et } \sigma_p(T) = \sigma_p\left(\tilde{T}_\lambda\right).$$

Théorème I.6.7 [16] Si $T \in \mathcal{B}(H)$ et f une fonction holomorphe au voisinage de $\sigma(T)$, alors

$$\left\| f\left(\tilde{T}_\lambda\right) \right\| \leq \|f(T)\|.$$

En particulier,

$$\left\| \tilde{T}_\lambda \right\| \leq \|T\|.$$

Lemme I.6.1 [23] Soient A et B des opérateurs dans $B(H)$, tels que A soit auto-adjoint. Alors, AB est inversible si et seulement si BA l'est.

Lemme I.6.2 Pour les opérateurs A et B , tel que A est auto-adjoint, on a $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

Preuve. D'après le théorème I.6.2, nous avons pour tous les opérateurs A et B ,

$$\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}.$$

Si A est auto-adjoint; en utilisant le lemme I.6.1, on trouve :

si $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} 0 \in \sigma(AB) &\Leftrightarrow AB \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow BA \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow 0 \in \sigma(BA). \end{aligned}$$

si $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 \notin \sigma(AB) &\Leftrightarrow AB \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow BA \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(BA). \end{aligned}$$

Alors, $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ ■

CHAPITRE

II

IMAGE NUMÉRIQUE DES OPÉRATEURS

Dans ce chapitre, nous montrons que la norme (α, β) est équivalente à la rayon numérique et à la norme usuelle de l'opérateur. Nous étudions également les conditions d'égalité pour les bornes. Nous obtenons ensuite des bornes supérieures et inférieures pour la norme (α, β) des opérateurs linéaires bornés, et appliquons les résultats pour obtenir des bornes pour le rayon numérique des opérateurs linéaires bornés.

II.1 Définitions et propriétés générales

II.1.1 Image numérique

Définition II.1.1 [17] Soit T un opérateur dans $B(H)$, l'image numérique de T est l'ensemble $W(T)$ des nombres complexes défini par

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Proposition II.1.1 [19] Soient T et S deux opérateurs dans $B(H)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a les propriétés suivantes :

- (i) $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$.
- (ii) $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$.
- (iii) $W(T^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\}$, où T^* est l'adjoint de T .
- (iv) $W(U^*TU) = W(T)$, où U est un opérateur unitaire.

Exemple II.1.1 [19] Soit T le décalage unilatéral sur H , l'espace de Hilbert ℓ_2 des suites carrées sommables. Pour tout $f = (f_1, f_2, \dots) \in H$, $\|f\| = 1$, on a $Tf = (f_2, f_3, \dots)$ et donc considérer

$$\langle Tf, f \rangle = f_1 \bar{f}_2 + f_2 \bar{f}_3 + f_3 \bar{f}_4 + \dots$$

avec $|f_1|^2 + |f_2|^2 + \dots = 1$. Remarquez que

$$\begin{aligned} |\langle Tf, f \rangle| &\leq |f_1| |f_2| + |f_2| |f_3| + \dots \\ &\leq \frac{1}{2} [|f_1|^2 + 2|f_2|^2 + 2|f_3|^2 + \dots] \leq \frac{1}{2} [2 - |f_1|^2] \end{aligned}$$

Ainsi $|\langle Tf, f \rangle| < 1$ si $|f_1| \neq 0$. Pour $|f_1| = 0$ et f contenant un nombre fini d'entrées non nulles, on peut montrer de la même manière que $|\langle Tf, f \rangle| < 1$ par en considérant le nombre naturel minimum n pour lequel $f_n \neq 0$.

Ainsi $W(T)$ est contenu dans le disque unité ouvert $\{z : |z| < 1\}$. Montrons maintenant qu'il s'agit en fait du disque unité ouvert. Soit $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, un point quelconque de ce disque. Envisager

$$f = \left(\sqrt{1-r^2}, r\sqrt{1-r^2}e^{-i\theta}, r^2\sqrt{1-r^2}e^{-2i\theta}, \dots \right)$$

Observe ceci

$$\|f\|^2 = 1 - r^2 + r^2(1 - r^2) + r^4(1 - r^2) + \dots = 1$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\langle Tf, f \rangle &= r(1 - r^2)e^{i\theta} + r^3(1 - r^2)e^{i\theta} + \dots \\ &= re^{i\theta}\end{aligned}$$

L'exemple suivant montre le calcul de l'image numérique comme enveloppe d'une famille de cercles.

II.1.2 Rayon numérique

Définition II.1.2 [19] Soit T un opérateur défini sur H , $W(T)$ son image numérique. Le rayon numérique $w(T)$ de l'opérateur T est donné par :

$$w(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}.$$

Remarquez que, pour tout vecteur $x \in H$, on a

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq w(T)\|x\|^2$$

Exemple II.1.2 [19] Soit T l'opérateur de décalage (à droite) sur $\mathbb{C}^n$ défini par

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \dots \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $f \in \mathbb{C}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, on a $Tf = (0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ et

$$\langle Tf, f \rangle = f_1 \bar{f}_2 + f_2 \bar{f}_3 + \dots + f_{n-1} \bar{f}_n.$$

Ainsi $|\langle Tf, f \rangle| \leq |f_1| |f_2| + \dots + |f_{n-1}| |f_n|$. Nous devons donc calculer

$$\sup \{|f_1| |f_2| + \dots + |f_{n-1}| |f_n|\}$$

sous réserve de la condition $\sum_{i=1}^n |f_i|^2 = 1$. Soit $r_i = |f_i|$, et considérons la fonction de Lagrange

$$F(r_1, r_2, \dots, r_n, \lambda) = r_1 r_2 + \dots + r_{n-1} r_n - \lambda \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 - 1 \right) \quad (\text{II.1})$$

À partir de (II.1), nous pouvons définir

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial r_1} &= r_2 - 2\lambda r_1 = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial r_2} &= r_1 + r_3 - 2\lambda r_2 = 0 \\
 &\dots \\
 \frac{\partial F}{\partial r_{n-1}} &= r_{n-2} + r_n - 2\lambda r_{n-1} = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial r_n} &= r_{n-1} - 2\lambda r_n = 0
 \end{aligned} \tag{II.2}$$

En écrivant $x = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

on peut écrire les équations (II.2) sous la forme

$$Ax = 2\lambda x.$$

Notez que $A = 2B$, où B est la matrice hermitienne qui a $\frac{1}{2}$ dans la sous-diagonale et la super-diagonale et 0 ailleurs. Ainsi λ est une valeur propre de B .

$$\lambda = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Notez en outre qu'en multipliant (II.2) par $r_1, r_2, \dots, r_n$ dans l'ordre et en ajoutant, nous obtenons

$$2(r_1 r_2 + \cdots + r_{n-1} r_n) - 2\lambda(r_1^2 + \cdots + r_n^2) = 0.$$

Donc $\lambda = r_1 r_2 + \cdots + r_{n-1} r_n$ puisque $r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 = 1$. Puisque la valeur maximale de l'expression pour λ est $w(T)$, nous avons nécessairement que

$$w(T) = \sup \left\{ \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Ainsi

$$w(T) = \cos \frac{\pi}{n+1}$$

Notez que comme $n \rightarrow \infty$, $w(T) \rightarrow 1$. Nous montrons maintenant que $w(T)$ est une norme équivalente de T .

Définition II.1.3 [17] Le rayon spectral de T est défini par

$$r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Remarque II.1.1 Soit $T \in B(H)$, T^* l'opérateur adjoint de T , alors

$$1) \ r(T^*) = r(T).$$

$$2) \ r(T^n) = r(T)^n.$$

Définition II.1.4 [17] Un opérateur T est dit opérateur normaloïde si

$$\|T\| = r(T).$$

Un opérateur T est dit opérateur spectraloïde si

$$w(T) = r(T).$$

Théorème II.1.1 [19] Le rayon numérique et la norme d'opérateur sont deux normes équivalentes. Où

$$w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T).$$

Théorème II.1.2 [19] Si $w(T) = \|T\|$, alors $r(T) = \|T\|$.

II.1.3 Relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur

Théorème II.1.3 [19] On a toujours $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$, où $\overline{W(T)}$ dénote la fermeture de l'image numérique de l'opérateur T .

Exemple II.1.3 [19] Dans $\mathbb{C}^2$ soit T l'opérateur défini par la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

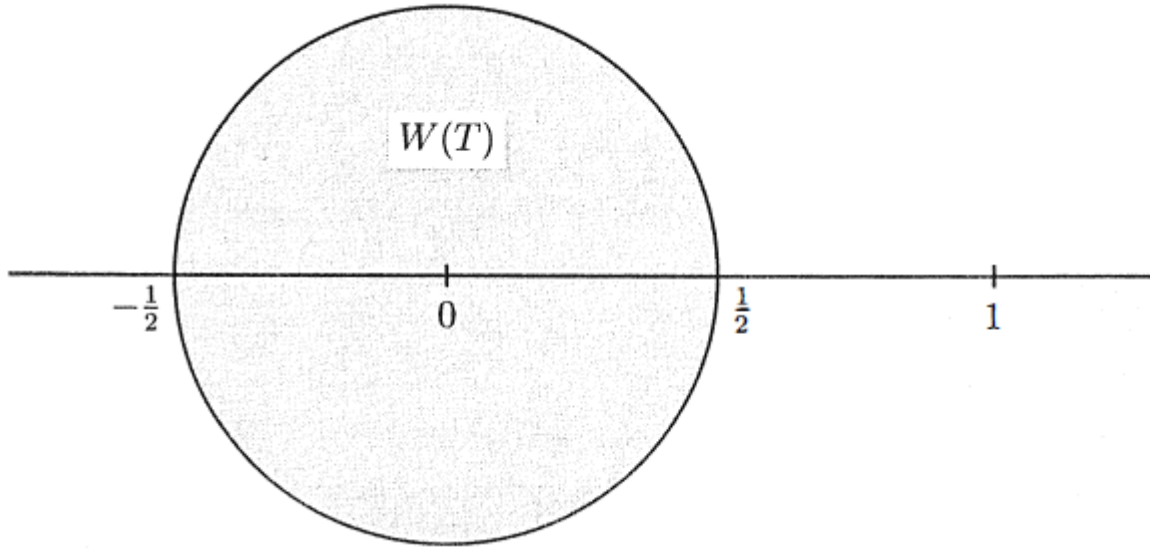
Si $x = (f, g)$, $\|x\|^2 = |f|^2 + |g|^2 = 1$, on a $Tx = (g, 0)$ et $\langle Tx, x \rangle = g\bar{f}$. Notez que $|\langle Tx, x \rangle| = |g||f| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2) \leq \frac{1}{2}$, et donc

$$W(T) \subset \left\{ z : |z| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Soit $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, si on choisit $x = (\cos \alpha, e^{i\theta} \sin \alpha)$, où $\sin 2\alpha = 2r \leq 1$ et $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, on voit que

$$\langle Tx, x \rangle = e^{i\theta} \sin \alpha \cos \alpha = re^{i\theta}.$$

Ainsi $W(T) = \{z : |z| \leq \frac{1}{2}\}$, le disque fermé de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.



Et on a

$$\det(T - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0.$$

Donc $\sigma(T) = \{0\}$.

Théorème II.1.4 [19] Soit $\overline{W(T)} = [m, M]$, alors $m, M \in \sigma(T)$.

Théorème II.1.5 [19] Soit T un opérateur et $w(T) \leq 1$. Alors $w(T^n) \leq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Théorème II.1.6 [17] Pour tout opérateur $T \in B(H)$ et un nombre naturel n on a

$$w(T^n) \leq w^n(T).$$

Théorème II.1.7 [15] Pour tout opérateur $T \in B(H)$ on a

$$w(T) \leq \frac{1}{2}(\|T\| + \|T^2\|^{\frac{1}{2}})$$

Théorème II.1.8 [15] Si $T \in B(H)$, alors

$$\frac{1}{4}\|T^*T + TT^*\| \leq (w(T))^2 \leq \frac{1}{2}\|T^*T + TT^*\|.$$

II.1.4 Quelques propriétés des opérateurs auto-adjoints et normaux

Théorème II.1.9 [19] T est un opérateur auto-adjoint si et seulement si $W(T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème II.1.10 [17] Soit $T \in B(H)$ avec T auto-adjoint alors $\|T\| = r(T) = w(T)$.

Théorème II.1.11 [17] Si T est un opérateur normal, alors $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n > 1$. De plus, $\|T\| = r(T) = w(T)$.

II.1.5 Image et rayon numérique du produit

Théorème II.1.12 [19] Soit T un opérateur non négatif autoadjoint qui commute avec un autre opérateur S . Alors $W(TS) \subset W(T)W(S)$.

Théorème II.1.13 [19] Si T, S sont deux opérateurs linéaires et bornés sur l'espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, alors

$$w(TS) \leq 4w(T)w(S).$$

et on a si T commute avec S

$$w(TS) \leq 2w(T)w(S).$$

Théorème II.1.14 [19] Si T est un opérateur isométrique qui commute avec autre opérateur S , alors

$$w(TS) \leq w(S).$$

On dit que T et S sont double commutes si $TS = ST$ et $TS^* = S^*T$.

Le résultat suivant est vérifié

Théorème II.1.15 [19] Si les opérateurs T et S sont double commutes, alors

$$w(TS) \leq w(T)\|S\|. \quad (\text{II.3})$$

Corollaire II.1.1 [19] Soit T un opérateur normal commute avec S , alors

$$w(TS) \leq w(T)w(S).$$

Un problème lié à l'inégalité (II.3) est de trouver la meilleure constante positive c pour laquelle l'inégalité $w(TS) \leq cw(T)\|S\|$ soit vérifiée pour les opérateurs T et S dans $B(H)$.

Théorème II.1.16 [15] Pour tout $T, S \in B(H)$ on a

$$w(TS + ST) \leq 2\sqrt{2}w(T)\|S\|.$$

Le résultat suivant est valable pour plusieurs opérateurs :

Théorème II.1.17 [15] Si $A, B, C, D, S, T \in B(H)$, alors

$$w(ATB + CSD) \leq \frac{1}{2} \|A|T^*|^{2(1-\alpha)}A^* + B^*|T|^{2\alpha}B + C|S^*|^{2(1-\alpha)}C^* + D^*|S|^{2\alpha}D\| \quad (\text{II.4})$$

pour tout α avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

Remarque II.1.2 [15] Soient $T = I$ (l'opérateur identité) et $S = 0$ dans le théorème II.1.17, nous obtenons l'inégalité

$$w(TS) \leq \frac{1}{2} \|TT^* + S^*S\|. \quad (\text{II.5})$$

De plus, on a l'inégalité associée

$$w(TS) \leq \frac{1}{2} \|T^*T + SS^*\|. \quad (\text{II.6})$$

Quand T ou S ne soit pas normal, les inégalités (II.5) et (II.6) ne sont pas équivalentes.

Remarque II.1.3 [15] Soient $T = S = I, C = B$, et $D = \pm A$ dans le théorème 3.2.5, on obtient l'inégalité

$$w(TS \pm ST) \leq \frac{1}{2} \|T^*T + TT^* + S^*S + SS^*\|,$$

qui fournit une estimation du rayon numérique de la commutateur $TS - ST$.

II.1.6 Image et rayon numérique de transformation d'Aluthge

Théorème II.1.18 [30] pour tout $T \in B(H)$, $W(\tilde{T}) \subset W(T)$.

Théorème II.1.19 [30] Soit $T = U |T|$ une décomposition polaire. si nous pouvons choisir U comme isométrie alors $\overline{W(\tilde{T})} \subset \overline{W(T)}$.

Théorème II.1.20 [15] Soit $T \in B(H)$, $\tilde{T}$ son transformation d'Aluthge. Alors

$$w(\tilde{T}) \leq w(T).$$

$$r(\tilde{T}) = w(T).$$

$$w(\tilde{T}) \leq \|T^2\|^{1/2} \quad (\leq \|T\|).$$

Théorème II.1.21 [31] Soit $T \in B(H)$. Alors

$$w(T) \leq \frac{1}{2} (\|T\| + w(\tilde{T})) \leq \frac{1}{2} (\|T\| + \|T^2\|^{1/2}) \quad (\text{II.7})$$

on remarque que si $\tilde{T} = 0$, alors évidemment $w(T) = \frac{1}{2}\|T\|$.

Théorème II.1.22 [4] Soit $T \in B(H)$ et $\tilde{T}_\lambda = |T|^\lambda U |T|^{1-\lambda}$ pour $\lambda \in [0; 1]$. Alors

$$w(T) \leq \min_{\lambda \in [0,1]} \left\{ \frac{1}{2} w(\tilde{T}_\lambda) + \frac{1}{4} (\|T\|^{2t} + \|T\|^{2-2t}) \right\}$$

Théorème II.1.23 [4] Soit $T \in B(H)$. Alors

$$w^2(T) \leq \frac{1}{2} \|T\| \left(\min_{\lambda \in [0,1]} \|\tilde{T}_\lambda\| \right) + \frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\|.$$

En particulier,

$$w^2(T) \leq \frac{1}{2} \|T\| \|\tilde{T}\| + \frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\|.$$

Théorème II.1.24 [4] Soit $T \in B(H)$. Alors

$$w^2(T) \leq \min_{\lambda \in [0,1]} \left(\frac{1}{4} w(\tilde{T}_\lambda^2) + \frac{1}{4} \|T\| \|\tilde{T}_\lambda\| \right) + \frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\|$$

En particulier,

$$w^2(T) \leq \frac{1}{4} w(\tilde{T}^2) + \frac{1}{4} \|T\| \|\tilde{T}\| + \frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\|$$

Théorème II.1.25 [4] Soit $T \in B(H)$. Alors

$$w^4(T) \leq \frac{1}{16} \min_{t \in [0,1]} \left(w(\tilde{T}_t^2) + \|T\| \|\tilde{T}_t\| \right)^2 + \frac{1}{8} w(T^2P + PT^2) + \frac{1}{16} \|P\|^2,$$

où $P = T^*T + TT^*$. En particulier,

$$w^4(T) \leq \frac{1}{16} \left(w(\tilde{T}^2) + \|T\| \|\tilde{T}\| \right)^2 + \frac{1}{8} w(T^2P + PT^2) + \frac{1}{16} \|P\|^2.$$

II.2 Quelques inégalités en introduisant une nouvelle norme

Dans [27] les auteurs ont introduit une nouvelle norme nommée (α, β) -norme, sur $B(H)$. Pour $T \in B(H)$, la norme (α, β) de T , notée $\|T\|_{\alpha, \beta}$, est défini comme :

$$\|T\|_{\alpha, \beta} = \sup \left\{ \sqrt{\alpha |\langle Tx, x \rangle|^2 + \beta \|Tx\|^2} : x \in H, \|x\| = 1 \right\},$$

où α, β sont des constantes positives avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On remarque que si $\alpha = 1, \beta = 0$ alors $\|T\|_{\alpha, \beta} = w(T)$, et si $\alpha = 0, \beta = 1$ alors $\|T\|_{\alpha, \beta} = \|T\|$. De plus, si nous considérons $\alpha = \beta = 1$, alors nous avons le rayon Davis-Wielandt modifié de T , c'est-à-dire $\|T\|_{\alpha, \beta} = dw^*(T)$, (voir [5]). À [6], les chercheurs ont pris $\alpha + \beta = 1$, c'est-à-dire $\beta = 1 - \alpha$ et ont exploré la α -norme de T définie comme suit :

$$\|T\|_\alpha = \sup \left\{ \sqrt{\alpha |\langle Tx, x \rangle|^2 + (1 - \alpha) \|Tx\|^2} : x \in H, \|x\| = 1 \right\}.$$

Théorème II.2.1 [27] $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ définit une norme sur $B(H)$ pour $\alpha, \beta \geq 0$, telle que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, et est équivalente à la norme de rayon numérique $w(\cdot)$ et à la norme d'opérateur usuelle $\|\cdot\|$, satisfaisant les inégalités suivantes :

$$\sqrt{(\alpha + \beta)}w(T) \leq \|T\|_{\alpha,\beta} \leq \sqrt{(\alpha + 4\beta)}w(T)$$

$$\max \left\{ \frac{\sqrt{\alpha + \beta}}{2}, \sqrt{\beta} \right\} \|T\| \leq \|T\|_{\alpha,\beta} \leq \sqrt{(\alpha + \beta)}\|T\|$$

Remarque II.2.1 [27] Les bornes inf et sup de rayon numériques classiques découlent facilement des inégalités ci-dessus en considérant $\alpha = 1, \beta = 0$ ou $\alpha = 0, \beta = 1$.

Théorème II.2.2 [27] Soit $T \in B(H)$ et soit $\alpha\beta \neq 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\|T\|_{\alpha,\beta} = \sqrt{\alpha w^2(T) + \beta \|T\|^2}$.
2. T est normaloïde, c'est-à-dire $w(T) = \|T\|$.
3. Il existe une suite de vecteurs unitaires $\{x_n\}$ dans H telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| = \|T\| \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle Tx_n, x_n \rangle| = w(T).$$

Théorème II.2.3 [27] Soit $T \in B(H)$ et soit $\alpha\beta \neq 0$. Alors $\|T\|_{\alpha,\beta} = \sqrt{(\alpha + 4\beta)}w(T)$ si et seulement si $T = 0$.

Proposition II.2.1 [27] La norme (α, β) sur $B(H)$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ n'est pas une norme d'algèbre, c'est-à-dire qu'il existe $A, B \in B(H)$ pour lesquelles

$$\|AB\|_{\alpha,\beta} \leq \|A\|_{\alpha,\beta} \|B\|_{\alpha,\beta}$$

ne tient pas.

2. $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ ne satisfait pas l'inégalité de puissance, c'est-à-dire qu'il existe des opérateurs $A, B \in B(H)$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tels que

$$\|A^n\|_{\alpha,\beta} < \|A\|_{\alpha,\beta}^n \text{ et } \|B^n\|_{\alpha,\beta} > \|B\|_{\alpha,\beta}^n.$$

3. Si $U \in B(H)$ est un opérateur unitaire. Alors :

$$\|U\|_{\alpha,\beta} \leq \|I\|_{\alpha,\beta}.$$

4. Si $\alpha + \beta = 1$ et A est normal alors $\|A^n\|_{\alpha,\beta} = \|A\|_{\alpha,\beta}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ est faiblement unitairement invariant, c'est-à-dire,

$$\|U^*TU\|_{\alpha,\beta} = \|T\|_{\alpha,\beta}, \quad \forall T \in \mathcal{B}(H),$$

où $U \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur unitaire.

6. $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ est conservé sous l'opération adjointe, c'est-à-dire,

$$\|T\|_{\alpha,\beta} = \|T^*\|_{\alpha,\beta}, \quad \forall T \in \mathcal{B}(H).$$

Théorème II.2.4 [27] Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que A qui commute avec autre opérateur B .

1. Si $\beta \neq 0$, on a

$$\|AB\|_{\alpha,\beta} \leq \sqrt{\left(\frac{4\alpha}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{1}{\beta}\right)} \|A\|_{\alpha,\beta} \|B\|_{\alpha,\beta}$$

2. Si A est une isométrie, on a

$$\|AB\|_{\alpha,\beta} \leq \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + 1\right)} \|B\|_{\alpha,\beta}$$

3. Si $AB^* = B^*A$ et $\beta \neq 0$, on a

$$\|AB\|_{\alpha,\beta} \leq \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + 1\right)} \min\left\{\frac{2}{\sqrt{\alpha+\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right\} \|A\|_{\alpha,\beta} \|B\|_{\alpha,\beta}.$$

Théorème II.2.5 [27] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors

1. $\|T\|_{\alpha,\beta}^2 \leq \left\| \frac{\alpha}{2} (T^*T + TT^*) + \beta T^*T \right\|$
2. $\|T\|_{\alpha,\beta}^2 \leq \frac{\alpha}{2} w(T^2) + \left\| \frac{\alpha}{4} (T^*T + TT^*) + \beta T^*T \right\|$
3. $\|T\|_{\alpha,\beta}^2 \leq \left\| \alpha(|\operatorname{Re}(T)| + |\operatorname{Im}(T)|)^2 + \beta T^*T \right\|$

Corollaire II.2.1 [27] En utilisant Le théorème II.2.1 à savoir, $w(T) \leq \frac{1}{\sqrt{(\alpha+\beta)}} \|T\|_{\alpha,\beta}$, et en passant à l'infimum. On obtient les inégalités suivantes :

1. $w^2(T) \leq \inf_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha+\beta} \left\| \frac{\alpha}{2} (T^*T + TT^*) + \beta T^*T \right\| \leq \frac{1}{2} \|T^*T + TT^*\|.$
2. $w^2(T) \leq \inf_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha+\beta} \left\{ \frac{\alpha}{2} w(T^2) + \left\| \frac{\alpha}{4} (T^*T + TT^*) + \beta T^*T \right\| \right\} \leq \frac{1}{2} w(T^2) + \frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\|$
3. $w^2(T) \leq \inf_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha+\beta} \left\| \alpha(|\operatorname{Re}(T)| + |\operatorname{Im}(T)|)^2 + \beta T^*T \right\|.$

Exemple II.2.1 [27] En particulier, si nous prenons $\alpha = 1, \beta = 0$ dans le corollaire II.2.1 (3), alors nous obtenons l'inégalité suivante

$$w(T) \leq \||\operatorname{Re}(T)| + |\operatorname{Im}(T)|\|.$$

La limite supérieure existante du rayon numérique en termes de $\operatorname{Re}(T)$ et $\operatorname{Im}(T)$ est

$$w^2(T) \leq \|\operatorname{Re}(T)\|^2 + \|\operatorname{Im}(T)\|^2.$$

Nous donnons un exemple pour montrer que la borne supérieure obtenue ici est meilleure que celle existante. En considérant la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, il est facile de voir que l'inégalité $w^2(T) \leq \|\operatorname{Re}(T)\|^2 + \|\operatorname{Im}(T)\|^2$ donne $w(T) \leq \sqrt{2}$, alors que notre inégalité donne $w(T) \leq 1$.

Lemme II.2.1 [8] Soit $a, b, e \in H$ avec $\|e\| = 1$. Alors

$$|\langle a, e \rangle \langle e, b \rangle| \leq \frac{1}{2}(\|a\| \|b\| + |\langle a, b \rangle|)$$

Lemme II.2.2 [20] Pour $a, b \geq 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors,

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b \leq [\alpha a^r + (1-\alpha)b^r]^{\frac{1}{r}} \text{ pour } r \geq 1.$$

Lemme II.2.3 [24](McCarty inequality) Soit $A \in B(H)$, $A \geq 0$ et soit $x \in H$ un vecteur unitaire quelconque. Alors

1. $\langle Ax, x \rangle^r \leq \langle A^r x, x \rangle$ pour $r \geq 1$
2. $\langle A^r x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle^r$ pour $0 < r \leq 1$.

Remarque II.2.2 Soit I un opérateur d'identité. Nous pouvons vérifier que :

$$\|I\|_{\alpha, \beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$$

où $\alpha, \beta \geq 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Et si $(\alpha + \beta = 1)$ On trouve $\|I\|_{\alpha, \beta} = 1 = \|I\|$.

Théorème II.2.6 Soit T un opérateur normal dans $B(H)$, T^* son adjoint. Alors,

$$\|T^*T\|_{\alpha, \beta} = \sqrt{\alpha + \beta} \|T\|^2.$$

où $\alpha, \beta \geq 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Preuve. Soit T un opérateur normal; en utilisant la définition de la norme (α, β) . Nous avons :

$$\begin{aligned}
\|T^*T\|_{\alpha,\beta}^2 &= \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha |\langle T^*Tx, x \rangle|^2 + \beta \|T^*Tx\|^2 \} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha \|T^*T\|^2 \|x\|^4 + \beta \|T^*T\|^2 \|x\|^2 \} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha \|T^*T\|^2 \|x\|^4 \} + \sup_{\|x\|=1} \{ \beta \|T^*T\|^2 \|x\|^2 \} \\
&= \alpha \|T\|^4 + \beta \|T\|^4 \\
&= (\alpha + \beta) \|T\|^4.
\end{aligned}$$

Alors, $\|T^*T\|_{\alpha,\beta} \leq \sqrt{\alpha + \beta} \|T\|^2$.

$$\begin{aligned}
\|T^*T\|_{\alpha,\beta}^2 &= \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha |\langle T^*Tx, x \rangle|^2 + \beta \|T^*Tx\|^2 \} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha \|Tx\|^4 + \beta \|T^2x\|^2 \} \\
&\geq \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha \|Tx\|^4 + \beta \|Tx\|^4 \} \quad (\text{D' après Lemme I.4.1}) \\
&= \sup_{\|x\|=1} \{ (\alpha + \beta) \|Tx\|^4 \} \\
&= (\alpha + \beta) \|T\|^4.
\end{aligned}$$

Alors, $\|T^*T\|_{\alpha,\beta} \geq \sqrt{\alpha + \beta} \|T\|^2$.

D' où $\|T^*T\|_{\alpha,\beta} = \sqrt{\alpha + \beta} \|T\|^2$. ■

Théorème II.2.7 Soit $T, S, R \in B(H)$, tel que T commute avec S et R . Alors,

$$\|TS \pm RT\|_{\alpha,\beta}^2 \leq \left(\frac{1}{2}\alpha + \beta\right) (\|TS\| + \|RT\|)^2 + \alpha [w(T^2S^2) + w(T^2R^2) + \|TS\| \|RT\|]. \quad (\text{II.8})$$

où $\alpha, \beta \geq 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Preuve. Soit $x \in H$, $\|x\| = 1$; en utilisant la définition de la norme (α, β) et le lemme II.2.1. On obtient :

$$\begin{aligned}
|\langle (TS \pm RT)x, x \rangle|^2 &\leq (|\langle TSx, x \rangle| + |\langle RTx, x \rangle|)^2 \\
&= |\langle TSx, x \rangle|^2 + |\langle RTx, x \rangle|^2 + 2|\langle TSx, x \rangle \langle RTx, x \rangle| \\
&= |\langle TSx, x \rangle \langle x, S^*T^*x \rangle| + |\langle RTx, x \rangle \langle x, T^*R^*x \rangle| + 2|\langle TSx, x \rangle \langle x, T^*R^*x \rangle| \\
&\leq \frac{1}{2} (\|TSx\| \|S^*T^*x\| + |\langle TSx, S^*T^*x \rangle|) + \frac{1}{2} (\|RTx\| \|T^*R^*x\| \\
&\quad + |\langle RTx, T^*R^*x \rangle|) + \|TSx\| \|T^*R^*x\| + |\langle TSx, T^*R^*x \rangle| \\
&= \frac{1}{2} (\|TSx\| \|S^*T^*x\| + |\langle T^2S^2x, x \rangle|) + \frac{1}{2} (\|RTx\| \|R^*T^*x\| \\
&\quad + |\langle T^2R^2x, x \rangle|) + \|TSx\| \|R^*T^*x\| + |\langle TSx, T^*R^*x \rangle| \\
&\leq \frac{1}{2} (\|TS\|^2 + |\langle T^2S^2x, x \rangle|) + \frac{1}{2} (\|RT\|^2 + |\langle T^2R^2x, x \rangle|) \\
&\quad + 2\|TS\| \|TR\| \\
&\leq \frac{1}{2} (\|TS\|^2 + w(T^2S^2) + \|RT\|^2 + w(T^2R^2) + 4\|TS\| \|TR\|) \\
&= \frac{1}{2} (\|TS\| + \|RT\|)^2 + \frac{1}{2} (w(T^2S^2) + w(T^2R^2)) + \|TS\| \|TR\|.
\end{aligned}$$

Alors,

$$|\langle (TS \pm RT)x, x \rangle|^2 \leq \frac{1}{2} (\|TS\| + \|RT\|)^2 + \frac{1}{2} (w(T^2S^2) + w(T^2R^2)) + \|TS\| \|TR\|. \quad (\text{II.9})$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\|(TS \pm RT)x\|^2 &= |\langle (TS \pm RT)x, (TS \pm RT)x \rangle| \\
&= |\langle (TS \pm RT)^*(TS \pm RT)x, x \rangle| \\
&= |\langle (TS)^*TSx, x \rangle| + |\langle (RT)^*RTx, x \rangle| \pm |\langle (TS)^*RTx, x \rangle| \pm |\langle (RT)^*TSx, x \rangle| \\
&\leq \|TSx\|^2 + \|RTx\|^2 + 2\|TS\| \|RT\| \\
&\leq \|TS\|^2 + \|RT\|^2 + 2\|TS\| \|RT\| \\
&= (\|TS\| + \|RT\|)^2.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\|(TS \pm RT)x\|^2 \leq (\|TS\| + \|RT\|)^2. \quad (\text{II.10})$$

En utilisant (II.9) et (II.10) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|TS \pm RT\|_{\alpha,\beta}^2 &= \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha |\langle (TS \pm RT)x, x \rangle|^2 + \beta \|(TS \pm RT)x\|^2 \} \\
&\leq \alpha \left(\frac{1}{2} (\|TS\| + \|RT\|)^2 + \frac{1}{2} (w(T^2 S^2) + w(T^2 R^2)) + \|TS\| \|RT\| \right) \\
&\quad + \beta (\|TS\| + \|RT\|)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} \alpha + \beta \right) (\|TS\| + \|RT\|)^2 + \alpha \left[\frac{1}{2} (w(T^2 S^2) + w(T^2 R^2)) + \|TS\| \|RT\| \right].
\end{aligned}$$

■

Corollaire II.2.2 En utilisant (II.8) et Lemme II.2.1 à savoir, $w(T) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}} \|T\|_{\alpha,\beta}$. On obtient l'inégalité suivante :

$$w(TS \pm RT)^2 \leq \frac{\alpha + 2\beta}{2(\alpha + \beta)} (\|TS\| + \|RT\|)^2 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left[\frac{1}{2} (w(T^2 S^2) + w(T^2 R^2)) + \|TS\| \|RT\| \right]$$

Théorème II.2.8 Soit $A, B, X \in B(H)$, tels que A, B soient positifs. Alors,

$$\|A^\lambda X B^{1-\lambda}\|_{\alpha,\beta}^2 \leq (\alpha + \beta) \|X\|^2 \|\lambda A^2 + (1 - \lambda) B^2\| \quad (\text{II.11})$$

où $0 \leq \lambda \leq 1$, avec $\alpha, \beta \geq 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Preuve. Soit $x \in H$ un vecteur unitaire ; en utilisant la définition de la norme (α, β) . Alors

$$\begin{aligned}
\|A^\lambda X B^{1-\lambda}\|_{\alpha,\beta}^2 &= \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha |\langle A^\lambda X B^{1-\lambda} x, x \rangle|^2 + \beta \|A^\lambda X B^{1-\lambda} x\|^2 \} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha |\langle X B^{1-\lambda} x, A^\lambda x \rangle|^2 + \beta \|A^\lambda X B^{1-\lambda} x\|^2 \} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \{ \alpha \|X\|^2 \|B^{1-\lambda} x\|^2 \|A^\lambda x\|^2 + \beta \|X\|^2 \|B^{1-\lambda} x\|^2 \|A^\lambda x\|^2 \} \\
&= (\alpha + \beta) \sup_{\|x\|=1} \{ \|X\|^2 \|B^{1-\lambda} x\|^2 \|A^\lambda x\|^2 \} \\
&= (\alpha + \beta) \sup_{\|x\|=1} \{ \|X\|^2 \langle B^{2(1-\lambda)} x, x \rangle \langle A^{2\lambda} x, x \rangle \} \\
&\leq (\alpha + \beta) \sup_{\|x\|=1} \{ \|X\|^2 \langle A^{2\lambda} x, x \rangle^\lambda \langle B^{2(1-\lambda)} x, x \rangle^{1-\lambda} \} \quad (\text{D'après Lemme II.2.3}) \\
&\leq (\alpha + \beta) \sup_{\|x\|=1} \{ \|X\|^2 \langle (\lambda A^2 + (1 - \lambda) B^2) x, x \rangle \} \quad (\text{D'après Lemme II.2.2}) \\
&= (\alpha + \beta) \|X\|^2 \|\lambda A^2 + (1 - \lambda) B^2\|
\end{aligned}$$

Alors, $\|A^\lambda X B^{1-\lambda}\|_{\alpha,\beta}^2 \leq (\alpha + \beta) \|X\|^2 \|\lambda A^2 + (1 - \lambda) B^2\|$ ■

Corollaire II.2.3 Soit $\tilde{T}_\lambda = |T|^\lambda U |T|^{1-\lambda}$ la transformation d'Aluthge généralisée de T telle que U est un opérateur unitaire avec la décomposition polaire de T . Alors

$$\|\tilde{T}_\lambda\|_{\alpha,\beta} \leq \sqrt{\alpha + \beta} \|T\|.$$

où $0 \leq \lambda \leq 1$, avec $\alpha, \beta \geq 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Preuve. Si nous prenons $A = B = |T|$ et $X = U$ dans le théorème II.2.8, alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_\lambda\|_{\alpha, \beta}^2 &= \| |T|^\lambda U |T|^{1-\lambda} \|_{\alpha, \beta}^2 \\ &\leq (\alpha + \beta) \|U\|^2 \|\lambda |T|^2 + (1 - \lambda) |T|^2\| \\ &\leq (\alpha + \beta) \| |T|^2 \| \\ &= (\alpha + \beta) \|T\|^2. \end{aligned}$$

Alors, $\|\tilde{T}_\lambda\|_{\alpha, \beta} \leq \sqrt{\alpha + \beta} \|T\|$. ■

Théorème II.2.9 Soit $A, B, X \in B(H)$, tels que A, B soient positifs. Alors,

$$\left\| \frac{A^\lambda X B^{1-\lambda} + A^{1-\lambda} X B^\lambda}{2} \right\|_{\alpha, \beta}^2 \leq (\alpha + \beta) \|X\|^2 \left\| \frac{A^2 + B^2}{2} \right\| \quad (\text{II.12})$$

où $0 \leq \lambda \leq 1$, avec $\alpha, \beta \geq 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Preuve. Soit $x \in H$ un vecteur unitaire ; en utilisant la définition de la norme (α, β) . Alors

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{A^\lambda X B^{1-\lambda} + A^{1-\lambda} X B^\lambda}{2} \right\|_{\alpha, \beta}^2 &= \sup_{\|x\|=1} \left\{ \alpha \left| \left\langle \frac{A^\lambda X B^{1-\lambda} + A^{1-\lambda} X B^\lambda}{2} x, x \right\rangle \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \beta \left\| \frac{A^\lambda X B^{1-\lambda} + A^{1-\lambda} X B^\lambda}{2} x \right\|^2 \right\} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \left\{ \alpha \left(\frac{|\langle A^\lambda X B^{1-\lambda} x, x \rangle| + |\langle A^{1-\lambda} X B^\lambda x, x \rangle|}{2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \beta \left(\frac{\|A^\lambda X B^{1-\lambda} x\| + \|A^{1-\lambda} X B^\lambda x\|}{2} \right)^2 \right\} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \left\{ \alpha \left(\frac{|\langle A^\lambda X B^{1-\lambda} x, x \rangle|^2 + |\langle A^{1-\lambda} X B^\lambda x, x \rangle|^2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \beta \left(\frac{\|A^\lambda X B^{1-\lambda} x\|^2 + \|A^{1-\lambda} X B^\lambda x\|^2}{2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} \left\{ (\alpha |\langle A^\lambda X B^{1-\lambda} x, x \rangle|^2 + \beta \|A^\lambda X B^{1-\lambda} x\|^2) \right. \\
&\quad \left. + (\alpha |\langle A^{1-\lambda} X B^\lambda x, x \rangle|^2 + \beta \|A^{1-\lambda} X B^\lambda x\|^2) \right\} \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} \left\{ (\alpha + \beta) \|X\|^2 \langle (\lambda A^2 + (1-\lambda) B^2) x, x \rangle \right. \\
&\quad \left. + (\alpha + \beta) \|X\|^2 \langle ((1-\lambda) A^2 + \lambda B^2) x, x \rangle \right\} \\
&= \frac{(\alpha + \beta)}{2} \|X\|^2 \\
&\quad \sup_{\|x\|=1} \left\{ \langle ((\lambda A^2 + (1-\lambda) B^2) + ((1-\lambda) A^2 + \lambda B^2)) x, x \rangle \right\} \\
&= \frac{(\alpha + \beta) \|X\|^2}{2} \sup_{\|x\|=1} \left\{ \langle (A^2 + B^2) x, x \rangle \right\} \\
&= (\alpha + \beta) \|X\|^2 \left\| \frac{A^2 + B^2}{2} \right\|
\end{aligned}$$

Alors, $\left\| \frac{A^\lambda X B^{1-\lambda} + A^{1-\lambda} X B^\lambda}{2} \right\|_{\alpha, \beta}^2 \leq (\alpha + \beta) \|X\|^2 \left\| \frac{A^2 + B^2}{2} \right\|$ ■

CHAPITRE

III

SPECTRE ÉTENDU DES OPÉRATEURS

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats sur les relations possibles entre le spectre étendu de AB et BA en dimension finie, et ses conséquences sous forme de plusieurs corollaires, aussi et nous prouvons quelques égalités entre le spectre étendu pour l'opérateur T , pour la transformation Aluthge et pour la transformation Duggal en dimension infinie.

III.1 Définitions et propriétés générales

Définition III.1.1 [2] On dit qu'un nombre complexe λ est une valeur propre étendue de l'opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, s'il existe un opérateur $X \in \mathcal{B}(H) \setminus \{0\}$ tel que $TX = \lambda XT$. Dans ce cas, l'opérateur X est dit vecteur propre étendu de T associé à λ . On note $\sigma_{ext}(T)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres étendues de T . L'ensemble de tous les vecteurs propres étendus correspondant à λ sera noté $\mathbb{E}_{ext}(\lambda)$.

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad X \in \mathcal{B}(H) \setminus \{0\} \text{ such that } TX = \lambda XT\} \quad (\text{III.1})$$

On remarque que 1 est toujours dans le spectre étendu pour tout $A \in \mathcal{B}(H)$, avec $X = I$ comme vecteur propre étendu associé.

Exemple III.1.1 [32]

1. Soit V est l'opérateur de volterra sur $L^2[0, 1]$ définit par : $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$, alors $\sigma_{ext}(V) =]0, \infty[$.
2. On considère opérateur shift $S : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ défini par : $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, donc $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$.

Proposition III.1.1 [32] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a,

1. $\sigma_{ext}(\lambda T) = \lambda \sigma_{ext}(T)$.
2. $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ si, et seulement si, $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ext}(T^*)$.
3. Si T est inversible, alors $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ si, et seulement si, $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ext}(T^{-1})$.

Remarque III.1.1 [32] Si $0 \in \rho(T)$, alors $0 \notin \sigma_{ext}(T)$. En effet, soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $0 \in \rho(T)$, supposons que $0 \in \sigma_{ext}(T)$, alors il existe un opérateur $X \in \mathcal{B}(H) \setminus \{0\}$ tel que $TX = 0$. Donc, $T = 0$ ce qui est une contradiction.

Théorème III.1.1 [2] Soient A et B deux opérateurs de $\mathcal{B}(H)$ tels que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Alors $X = 0$ est l'unique solution de l'équation opératorielle $AX - XB = 0$.

Proposition III.1.2 [2] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, alors

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

En particulier, si $\sigma(T) = \{\alpha\}$ avec $\alpha \neq 0$, alors $\sigma_{ext}(T) = \{1\}$. On peut déduire immédiatement le corollaire ci-dessous.

Corollaire III.1.1 [2] Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur quasinilpotent, alors

$$\sigma_{ext}(\alpha I + T) = \{1\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

III.1.1 Relation avec le spectre ponctuel

La proposition suivante donne une relation entre le spectre étendu d'un opérateur et son spectre ponctuel.

Proposition III.1.3 [2] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors, on a

$$\left\{ \frac{\alpha}{\beta}, \alpha \in \sigma_p(T), \beta \in \sigma_p(T^*) \right\} \subset \sigma_{\text{ext}}(T).$$

Remarque III.1.2 [2] 1. On remarque que si T est dans le spectre ponctuel de T^* , le spectre ponctuel de T est inclus dans son spectre étendu. Mais ce n'est pas vrai en général. En effet, si $T = \lambda I$, alors $\sigma_p(T) = \{\lambda\}$, tandis que $\sigma_{\text{ext}}(T) = \{1\}$.

2. Notons que si $0 \in \sigma_p(T) \cap \sigma_p(T^*)$, alors $\sigma_{\text{ext}}(T) = \mathbb{C}$. En effet, il existe dans ce cas deux vecteurs $x, y \in H \setminus \{0\}$ tels que $Tx = T^*y = 0$. Alors, l'opérateur $X = x \otimes y$ vérifie $TX = \lambda XT = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

III.1.2 Puissances d'opérateurs

Dans ce paragraphe on donne la relation entre le spectre étendu d'un opérateur et celui de ses puissances. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et supposons que $\lambda \in \sigma_{\text{ext}}(T)$ avec X est le vecteur propre étendu associé, c-à-dire,

$$TX = \lambda XT$$

Alors, pour tout entier naturel n ,

$$T^n X = \lambda^n XT^n$$

Par conséquent, $\lambda \in \sigma_{\text{ext}}(T)$ implique que $\lambda^n \in \sigma_{\text{ext}}(T^n)$.

Théorème III.1.2 [2] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda \in \sigma_{\text{ext}}(T^n)$ si, et seulement si il existe une racine n -ième de μ appartenant à $\sigma_{\text{ext}}(T)$.

III.1.3 Cas de dimension finie

Dans ce paragraphe on décrit complètement le spectre étendu d'un opérateur agissant sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie.

Théorème III.1.3 [1] Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H de dimension finie. Alors

$$\sigma_{\text{ext}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}$$

Corollaire III.1.2 [1] Soit T un opérateur linéaire agissant sur un espace de Hilbert H de dimension finie, alors :

1. $\sigma_{\text{ext}}(T) = \{1\}$ si, et seulement si, $\sigma(T) = \{\alpha\}$, avec $\alpha \neq 0$.

2. $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$ si, et seulement si, T n'est pas inversible.
3. Si T est inversible, alors $\sigma_{ext}(T) = \{\alpha/\beta : \alpha, \beta \in \sigma(T)\}$.

III.2 Spectre étendu de quelques classe d'opérateurs

Dans cette partie, on traite une classe d'opérateurs très importante, à savoir les opérateurs auto-adjoints, normaux et quasinormaux définis sur un espace de Hilbert H , et nous présentons des cas où on peut déterminer les valeurs propres étendues et les vecteurs propres étendus.

III.2.1 Produit des opérateurs autoadjoints

Théorème III.2.1 [9] Soient $A, B \in B(H)$, et soit $T = AB$ tel que $0 \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_p(T^*)$, alors

1. Si $A, B \geq 0$, alors $\sigma_{ext}(T) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2. Si $A \geq 0$ et $B = B^*$, alors $\sigma_{ext}(T) \subset \mathbb{R}^*$.

Théorème III.2.2 [9] Soient $A, B \in B(H)$ tels que $A \geq 0$ et $B^* = B$, et soit $T = AB$ tel que T et T^* sont injectifs. Considérons $R = \sqrt{A}B\sqrt{A}$ et $a > \|R\|$, et notons par E la mesure spectrale associée à R . Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*, X \in B(H) \setminus \{0\}$. Alors

1. Si $\lambda \in]0, 1[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$\sqrt{A}E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B, \quad \forall t \in]-\lambda a, \lambda a[$$

$$E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = 0, \quad \forall t \in [-a, -\lambda a] \text{ et}$$

$$\sqrt{A}BX = E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX, \quad \forall t \in [\lambda a, a].$$

2. Si $\lambda \in]-1, 0[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$\sqrt{A}E([t, a])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E([t/\lambda, a])\sqrt{A}B, \quad \forall t \in]\lambda a, -\lambda a[$$

$$E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = 0, \quad \forall t \in [-a, \lambda a] \text{ et}$$

$$TX = E([t, a])\sqrt{A}BX, \quad \forall t \in [-\lambda a, a]$$

3. Si $\lambda \in [1, +\infty[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$\sqrt{A}E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B, \quad \forall t \in]-a, a[$$

$$X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda]) = 0, \quad \forall t \in [-\lambda a, -a] \text{ et}$$

$$TX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B, \quad \forall t \in [a, \lambda a].$$

4. Si $\lambda \in]-\infty, -1]$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$\sqrt{A}E(]t, a])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B, \quad \forall t \in]-a, a[$$

$$X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda]) = 0, \quad \forall t \in [a, -\lambda a] \text{ et}$$

$$TX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B, \quad \forall t \in [\lambda a, -a].$$

Corollaire III.2.1 [9] Soit $T \in B(H)$ un opérateur autoadjoint injectif et soit $a > \|T\|$. Notons par E la mesure spectrale associée à T . Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X \in B(H) \setminus \{0\}$. Alors

1. Si $\lambda \in]0, 1[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$E(]-\infty, t])X = XE(]-\infty, t/\lambda]), \quad \forall t \in]-\lambda a, \lambda a[$$

$$E(]-\infty, t])X = 0, \quad \forall t \in [-a, -\lambda a] \text{ et}$$

$$E(]-\infty, t])X = X, \quad \forall t \in [\lambda a, a].$$

2. Si $\lambda \in]-1, 0[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$X = E(]-\infty, t])X - XE(]-\infty, t/\lambda]), \quad \forall t \in]\lambda a, -\lambda a[$$

$$E(]-\infty, t])X = 0, \quad \forall t \in [-a, \lambda a] \text{ et}$$

$$E(]-\infty, t])X = X, \quad \forall t \in [-\lambda a, a]$$

3. Si $\lambda \in [1, +\infty[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$E(]-\infty, t])X = XE(]-\infty, t/\lambda]), \quad \forall t \in]-a, a[$$

$$XE(]-\infty, t/\lambda]) = 0, \quad \forall t \in [-\lambda a, -a] \text{ et}$$

$$XE(]-\infty, t/\lambda]) = X, \quad \forall t \in [a, \lambda a]$$

4. Si $\lambda \in]-\infty, -1]$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$X = E(]-\infty, t])X - XE(]-\infty, t/\lambda]), \quad \forall t \in]-a, a[$$

$$XE(]-\infty, t/\lambda]) = 0, \quad \forall t \in [a, -\lambda a] \text{ et}$$

$$XE(]-\infty, t/\lambda]) = X, \quad \forall t \in [\lambda a, -a].$$

III.2.2 Spectre étendu des opérateurs normaux

Théorème III.2.3 [9] Soient $N, M \in B(H)$ deux opérateurs normaux et notons par E^N et E^M les mesures spectrales associées à N et M respectivement. Si $X \in B(H)$ alors $NX = XM$ si et seulement si

$$\begin{cases} E^N(\Delta)X = XE^M(\Delta) & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N) \cap \sigma(M)), \\ E^N(\Delta)X = 0 & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N)) \text{ tel que } \Delta \cap \sigma(M) = \emptyset, \\ XE^M(\Delta) = 0 & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(M)) \text{ tel que } \Delta \cap \sigma(N) = \emptyset, \end{cases}$$

où $\mathcal{B}or(\Omega)$ signifie l'ensemble de tous les boréliens dans l'ensemble compact Ω .

Corollaire III.2.2 [9] Soit N un opérateur normal avec E pour mesure spectrale associée. Alors $NX = \lambda XN$ si et seulement si

$$\begin{cases} E(\Delta)X = XE\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N) \cap \sigma(\lambda N)), \\ E(\Delta)X = 0 & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N)) \text{ tel que } \Delta \cap \sigma(\lambda N) = \emptyset \\ XE\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) = 0 & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(\lambda N)) \text{ tel que } \Delta \cap \sigma(N) = \emptyset \end{cases}$$

Alors, on obtient le théorème essentiel de ce paragraphe.

Théorème III.2.4 [9] Soit N un opérateur normal avec E pour mesure spectrale associée. Alors

$$\sigma_{ext}(N) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N) \cap \sigma(\lambda N)) \text{ tel que } E(\Delta) \neq 0\}.$$

III.2.3 Spectre étendu des opérateurs quasinormaux

Lemme III.2.1 [28] Soit $T \in B(H)$ un opérateur quasinormal tel que $0 \in \sigma_p(T)$; alors $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$.

Théorème III.2.5 [28] Si $T : H \rightarrow H$ est un opérateur quasinormal mais pas un opérateur normal et $0 \notin \sigma_p(T)$, alors

$$\left\{ \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \in \mathbb{C} : \lambda_i, \lambda_j \in \sigma_p(T) \right\} \cup \{0\} \subset \sigma_{ext}(T).$$

Théorème III.2.6 [28] Soit $T \in B(H)$ un opérateur auto-adjoint et le spectre essentiel $\sigma_{ess}(T) = \emptyset$, alors

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma_p(T) \cap \sigma_p(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

Corollaire III.2.3 [28] Soit $T \in B(H)$ un opérateur normal compact, alors

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma_p(T) \cap \sigma_p(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

Théorème III.2.7 [28] Soit $T \in B(H)$ un opérateur quasinormal mais non normal ; alors

$$\bar{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subset \sigma_{ext}(T)..$$

Théorème III.2.8 [28] Soit $T \in B(H)$ un opérateur quasinormal pur, alors

$$\sigma_{ext}(|T|) \subset \sigma_{ext}(T).$$

Corollaire III.2.4 [28] Si T est un opérateur quasinormal pur, alors

$$\{\lambda\mu : \lambda \in \sigma_{ext}(|T|), |\mu| \leq 1\} \subset \sigma_{ext}(T)..$$

III.3 Spectre étendu de la transformation d'Aluthge

III.3.1 Spectre étendu de la transformation d'Aluthge en dimension finie

Nos principaux résultats sont l'amas de relations entre le spectre étendu de AB et BA , et ses conséquences sous forme de plusieurs corollaires.

Théorème III.3.1 Soient A et B des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie H , tel que A soit auto-adjoint. Alors

$$\sigma_{ext}(AB) = \sigma_{ext}(BA)$$

Preuve. Pour tout opérateur linéaire borné A et B défini sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie, on a

$$\begin{aligned} \sigma_{ext}(AB) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(AB) \cap \sigma(\lambda AB) \neq \emptyset\} && \text{(par Le théorème III.1.3)} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(AB) \cap \lambda\sigma(AB) \neq \emptyset\} && \text{(par Le théorème I.6.3)} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(BA) \cap \lambda\sigma(BA) \neq \emptyset\} && \text{(par Le lemme I.6.2)} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(BA) \cap \sigma(\lambda BA) \neq \emptyset\} && \text{(par Le théorème I.6.3)} \\ &= \sigma_{ext}(BA). \end{aligned}$$

■ Si $A = |T|^{\frac{1}{2}}$ et $B = U|T|^{\frac{1}{2}}$, où U est l'opérateur unitaire de la décomposition polaire de T dans le théorème III.3.1, alors on obtient le corollaire suivant :

Corollaire III.3.1 Soit T un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie H , tel que $T = U|T|$ sa décomposition polaire, $\tilde{T}$ sa transformation d'Aluthge. Alors

$$\sigma_{\text{ext}}(\tilde{T}) = \sigma_{\text{ext}}(T).$$

Nous pouvons prouver le corollaire III.3.1 d'une autre manière

Preuve. Pour tout opérateur linéaire borné T défini sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie H , tel que $T = U|T|$ sa décomposition polaire, on a

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ext}}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} && \text{(par Le théorème III.1.3)} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(T) \cap \lambda \sigma(T) \neq \emptyset\} && \text{(par Le théorème I.6.3)} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(\tilde{T}) \cap \lambda \sigma(\tilde{T}) \neq \emptyset\} && \text{(par Le théorème I.6.6)} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(\tilde{T}) \cap \sigma(\lambda \tilde{T}) \neq \emptyset\} && \text{(par Le théorème I.6.3)} \\ &= \sigma_{\text{ext}}(\tilde{T}). \end{aligned}$$

■ Si $A = |T|$ et $B = U$, où U est l'opérateur unitaire de la décomposition polaire de T dans le théorème III.3.1, alors on obtient le corollaire suivant :

Corollaire III.3.2 Soit T un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie H , tel que $T = U|T|$ sa décomposition polaire, $\hat{T}$ sa transformation de Duggal. Alors

$$\sigma_{\text{ext}}(\hat{T}) = \sigma_{\text{ext}}(T).$$

Si $A = |T|^\lambda$ et $B = U|T|^{1-\lambda}$, où U est l'opérateur unitaire de la décomposition polaire de T dans le théorème III.3.1, alors on obtient le corollaire suivant :

Corollaire III.3.3 Soit T un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie H , tel que $T = U|T|$ sa décomposition polaire. Pour $\lambda \in [0, 1]$ then

$$\sigma_{\text{ext}}(\tilde{T}_\lambda) = \sigma_{\text{ext}}(T).$$

Si $A = |T|^{\frac{1}{2}}$ et $B = T^{n-1}U|T|^{\frac{1}{2}}$, où U est l'opérateur unitaire de la décomposition polaire de T dans le théorème III.3.1, alors on obtient le corollaire suivant :

Corollaire III.3.4 Soit T un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie H , tel que $T = U|T|$ sa décomposition polaire. Alors

$$\sigma_{\text{ext}}(\tilde{T}^n) = \sigma_{\text{ext}}(T^n).$$

Si $A = |T|$ et $B = (T)^{n-1}U$, où U est l'opérateur unitaire de la polaire décomposition de T dans le théorème III.3.1, alors on obtient le corollaire suivant :

Corollaire III.3.5 *Soit T un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie H , tel que $T = U|T|$ sa décomposition polaire. Alors*

$$\sigma_{ext}(\hat{T}^n) = \sigma_{ext}(T^n).$$

Exemple III.3.1 *Soit T une matrice 2×2 définie comme suit :*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 5i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{l'opérateur adjoint de } T \text{ est } T^* = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -5i & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^*T = |T|^2 = \begin{pmatrix} 5 & 7i \\ -7i & 26 \end{pmatrix}, \quad \text{aussi } |T| = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{so } |T|^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{donc } U = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{La transformée Aluthge de l'opérateur } T \text{ est } \tilde{T} = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & 4 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le corollaire III.1.2, nous calculons le spectre étendu pour l'opérateur T et la transformée d'Aluthge de l'opérateur T .

$$\sigma(T) = \{-1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10}\}, \quad \sigma(\tilde{T}) = \{-1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10}\}.$$

Donc, nous obtenons

$$\sigma_{ext}(T) = \{1, \frac{11+2\sqrt{10}}{-9}, \frac{11-2\sqrt{10}}{-9}\}, \quad \sigma_{ext}(\tilde{T}) = \{1, \frac{11+2\sqrt{10}}{-9}, \frac{11-2\sqrt{10}}{-9}\}.$$

$$\text{Ainsi } \sigma_{ext}(\tilde{T}) = \sigma_{ext}(T).$$

III.3.2 Spectre étendu de la transformation Aluthge en dimension infinie

Dans ce théorème, nous prouvons des égalités entre le spectre étendu pour l'opérateur T , pour la transformation d'Aluthge et pour la transformation de Duggal en dimension infinie.

Lemme III.3.1 *Soit T un opérateur dans $B(H)$. Alors $|T|^2$ est inversible si T est inversible.*

Preuve.

$$\begin{aligned} T \text{ est inversible} &\Rightarrow T^* \text{ est inversible} \\ &\Rightarrow T^*T = |T|^2 \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

■

Théorème III.3.2 Soit T un opérateur linéaire borné défini sur l'espace de Hilbert complexe séparable H , tel que $T = U|T|$ sa décomposition polaire. Si T est inversible et $|T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}$. Alors

- (i) $\sigma_{\text{ext}}(\tilde{T}) = \sigma_{\text{ext}}(T) = \sigma_{\text{ext}}(\hat{T})$.
- (ii) $\sigma_{\text{ext}}(\tilde{T}^n) = \sigma_{\text{ext}}(T^n) = \sigma_{\text{ext}}(\hat{T}^n)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) $\sigma_{\text{ext}}(T\tilde{T}) = \sigma_{\text{ext}}(\tilde{T}\hat{T})$.

On note que $\hat{T}$ est la transformation de Duggal, tel que $\hat{T} = |T|U$

Preuve. Pour tout opérateur linéaire borné T défini sur un espace de Hilbert complexe séparable, tel que $T = U|T|$ sa décomposition polaire. T est inversible et $|T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}$, on a

$$(i) \quad \sigma_{\text{ext}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists X \in B(H) \setminus \{0\} \text{ tel que } TX = \lambda XT\} \quad (\text{D'après (III.1.1)})$$

$$\begin{aligned} TX = \lambda XT &\Leftrightarrow U|T|X = \lambda XU|T| \\ &\Leftrightarrow U|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}X = \lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow U|T|^{\frac{1}{2}}X|T|^{\frac{1}{2}} = \lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D'après } |T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}) \\ &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}(U|T|^{\frac{1}{2}}X|T|^{\frac{1}{2}})|T|^{\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}(\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}})|T|^{\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}X|T|^2(|T|^2)^{-1} \quad (\text{D'après Lemme III.3.1}) \\ &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|^2(|T|^2)^{-1} \\ &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}X = \lambda|T|^{\frac{1}{2}}XU|T|^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}X = \lambda X|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D'après } |T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}) \\ &\Leftrightarrow \tilde{T}X = \lambda X\tilde{T}. \end{aligned}$$

Alors, $\sigma_{\text{ext}}(T) = \sigma_{\text{ext}}(\tilde{T})$.

$$\text{Aussi, } \sigma_{\text{ext}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists X \in B(H) \setminus \{0\} \text{ tel que } TX = \lambda XT\}.$$

$$\begin{aligned}
TX = \lambda XT &\Leftrightarrow U|T|X = \lambda XU|T| \\
&\Leftrightarrow UX|T| = \lambda XU|T| \quad (\text{D' après } |T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}) \\
&\Leftrightarrow |T|(UX|T|)|T| = |T|(\lambda XU|T|)|T| \\
&\Leftrightarrow |T|UX|T|^2(|T|^2)^{-1} = |T|\lambda XU|T|^2(|T|^2)^{-1} \quad (\text{D' après Lemme III.3.1}) \\
&\Leftrightarrow |T|UX = \lambda|T|XU \\
&\Leftrightarrow |T|UX = \lambda X|T|U \quad (\text{D' après } |T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}) \\
&\Leftrightarrow \widehat{T}X = \lambda X\widehat{T}.
\end{aligned}$$

Alors, $\sigma_{\text{ext}}(T) = \sigma_{\text{ext}}(\widehat{T})$.

$$(ii) \quad \sigma_{\text{ext}}(T^n) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists X \in B(H) \setminus \{0\} \text{ tel que } T^n X = \lambda X T^n\}.$$

$$\begin{aligned}
T^n X = \lambda X T^n &\Leftrightarrow (U|T|)^n X = \lambda X (U|T|)^n \\
&\Leftrightarrow (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}} X \\
&\Leftrightarrow \lambda X (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} X |T|^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D' après } |T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}) \\
&\Leftrightarrow \lambda X (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}} ((U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} X |T|^{\frac{1}{2}}) |T|^{\frac{3}{2}} \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}} (\lambda X (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}}) |T|^{\frac{3}{2}} \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}} (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} X |T|^2 (|T|^2)^{-1} \quad (\text{D' après Lemme III.3.1}) \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}} \lambda X (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} |T|^2 (|T|^2)^{-1} \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}} (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} X \\
&\Leftrightarrow \lambda |T|^{\frac{1}{2}} X (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}} (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} X \quad (\text{D' après } |T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}) \\
&\Leftrightarrow \lambda X |T|^{\frac{1}{2}} (U|T|)^{n-1} U|T|^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow (|T|^{\frac{1}{2}} U|T|^{\frac{1}{2}})^n X = \lambda X (|T|^{\frac{1}{2}} U|T|^{\frac{1}{2}})^n \\
&\Leftrightarrow \widetilde{T}^n X = \lambda X \widetilde{T}^n.
\end{aligned}$$

Alors, $\sigma_{\text{ext}}(T^n) = \sigma_{\text{ext}}(\tilde{T}^n)$.

Aussi, $\sigma_{\text{ext}}(T^n) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists X \in B(H) \setminus \{0\} \text{ tel que } T^n X = \lambda X T^n\}$.

$$\begin{aligned}
T^n X = \lambda X T^n &\Leftrightarrow (U|T|)^n X = \lambda X (U|T|)^n \\
&\Leftrightarrow (U|T|)^{n-1} U|T| X = \lambda X (U|T|)^{n-1} U|T| \\
&\Leftrightarrow (U|T|)^{n-1} U X |T| = \lambda X (U|T|)^{n-1} U|T| \quad (\text{D' après } |T|^{\frac{1}{2}} X = X |T|^{\frac{1}{2}}) \\
&\Leftrightarrow |T|((U|T|)^{n-1} U X |T|) |T| \\
&\Leftrightarrow |T|(\lambda X (U|T|)^{n-1} U|T|) |T| \\
&\Leftrightarrow |T|(U|T|)^{n-1} U X |T|^2 (|T|^2)^{-1} \quad (\text{D' après Lemme III.3.1}) \\
&\Leftrightarrow \lambda |T| X (U|T|)^{n-1} U |T|^2 (|T|^2)^{-1} \\
&\Leftrightarrow (|T|U)^n X = \lambda X |T|(U|T|)^{n-1} U \quad (\text{D' après } |T|^{\frac{1}{2}} X = X |T|^{\frac{1}{2}}) \\
&\Leftrightarrow (|T|U)^n X = \lambda X (|T|U)^n \\
&\Leftrightarrow \hat{T}^n X = \lambda X \hat{T}^n.
\end{aligned}$$

Alors, $\sigma_{\text{ext}}(T^n) = \sigma_{\text{ext}}(\hat{T}^n)$.

(iii) $\sigma_{\text{ext}}(T\tilde{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists X \in B(H) \setminus \{0\} \text{ tel que } T\tilde{T}X = \lambda X T\tilde{T}\}$.

$$\begin{aligned}
T\tilde{T}X = \lambda X T\tilde{T} &\Leftrightarrow U|T||T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}X = \lambda XU|T||T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX|T|^{\frac{1}{2}} = \lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|U|T|^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D' après } |T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}) \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}(U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX|T|^{\frac{1}{2}})|T|^{\frac{3}{2}} \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}(\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|U|T|^{\frac{1}{2}})|T|^{\frac{3}{2}} \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX|T|^2(|T|^2)^{-1} \quad (\text{D' après Lemme III.3.1}) \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|U|T|^2(|T|^2)^{-1} \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX = \lambda |T|^{\frac{1}{2}}XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|U \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX = \lambda X|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}|T|U \quad (\text{D' après } |T|^{\frac{1}{2}}X = X|T|^{\frac{1}{2}}) \\
&\Leftrightarrow \tilde{T}\hat{T}X = \lambda X \tilde{T}\hat{T}.
\end{aligned}$$

Alors, $\sigma_{\text{ext}}(T\tilde{T}) = \sigma_{\text{ext}}(\tilde{T}\hat{T})$. ■

CHAPITRE

IV

APPLICATIONS ET EXEMPLES

Dans cette partie, on va voir quelques exemples où on peut calculer l'image numérique, le rayon numérique, la transformation d'Aluthge et le spectre étendu des opérateurs.

IV.1 Exemples et Applications en dimension finie

IV.1.1 Spectre étendu et rayon numérique de transformation d'Aluthge généralisée

Soit T une matrice 3×3 définie comme suit : $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il est facile de voir que $\|T\| = 2$ et T ont la décomposition polaire $T = U|T|$, où $|T| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\tilde{T}_\lambda = |T|^\lambda U |T|^{1-\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tous $\lambda \in [0, 1]$, et donc $w(\tilde{T}_\lambda) = \|\tilde{T}_\lambda\| = 1$ pour tous $\lambda \in [0, 1]$. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} \|T\| \left(\min_{\lambda \in [0, 1]} \|\tilde{T}_\lambda\| \right) + \frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\| = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{4} \times 4 = 2.$$

Par conséquent, le théorème II.1.23 donne $w(T) \leq \sqrt{2}$.

D'autre part, nous calculons le spectre étendu de l'opérateur T et la transformation d'Aluthge généralisée $\tilde{T}_\lambda$. En utilisant le corollaire III.1.2, nous calculons le spectre étendu pour l'opérateur T et la transformée d'Aluthge généralisée de l'opérateur T .

$$\sigma(T) = \{0, 1\}, \sigma(\tilde{T}_\lambda) = \{0, 1\}.$$

$$\text{Ainsi } \sigma_{ext}(\tilde{T}_\lambda) = \sigma_{ext}(T).$$

IV.1.2 La relation entre le spectre étendu de l'opérateur T et sa transformation d'Aluthge

Soit T une matrice 3×3 définie comme suit : $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Et T ont la décomposition

$$\text{polaire } T = U|T|, \text{ où } |T| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } \tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{15}}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous calculons les polynômes pour les valeurs propres de la matrice T et $\tilde{T}$,

$$P_T(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \right) - \frac{5}{4} - \frac{5 \times 3}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \lambda = -\lambda^3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \lambda - 5,$$

$$P_{\tilde{T}}(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \right) - \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{15} \times \sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{5}\sqrt{15}}{2} \lambda = -\lambda^3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \lambda - 5 = P_T(\lambda).$$

$$\text{Donc } \sigma(T) = \sigma(\tilde{T}).$$

$$\text{Alors } \sigma_{ext}(\tilde{T}) = \sigma_{ext}(T).$$

IV.1.3 Inégalités de rayon numérique de l'opérateur T utilisant la transformation d'Aluthge généralisée

Nous considérons $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est alors facile de voir que $P = T^*T + TT^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $|T| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où U est l'isométrie partielle dans la décomposition polaire de T , c'est-à-dire $T = U|T|$. Alors,

$$\tilde{T}_\lambda = |T|^\lambda U |T|^{1-\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^\lambda 3^{1-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $w\left(\tilde{T}_\lambda\right) \cdot \frac{2^\lambda 3^{1-\lambda}}{2}, \left\|\tilde{T}_\lambda\right\| = 2^\lambda 3^{1-\lambda}, \|P\| = 13$ et $w\left(T^2 P + P T^2\right) = 39$. Ainsi, l'inégalité que nous avons obtenue dans le théorème II.1.25 donne $w(T) \leq 2.05076838$. Mais l'inégalité (II.7) obtenue par Yamazaki dans [31] donne $w(T) \leq 2.11237244$.

IV.1.4 Spectre étendu et image numérique de l'opérateur T

Proposition IV.1.1 [25] Soit $\{e_1, e_2\}$ une base orthonormale de H . Alors

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle : x = e_1 \cos \theta + ie_2 \sin \theta \exp(i\varphi), \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[, \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Proposition IV.1.2 [32] Le spectre étendu de T est

1. $\sigma_{\text{ext}}(T) = \left\{ \frac{\lambda_i}{\lambda_j} : \lambda_i, \lambda_j \in \sigma(T) \right\}$ si $\lambda_i \neq \lambda_j \neq 0$.
2. $\sigma_{\text{ext}}(T) = \{1\}$ si $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.
3. $\sigma_{\text{ext}}(T) = \mathbb{C}$ si $\lambda_i = 0, i = 1, 2$.

Exemple IV.1.1 Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

1. $W(T)$ est une ellipse de foyers $F = -1$ et $F = 1$ et axe manimum 1 et axe majeur 2.23.

2. $\sigma_{\text{ext}}(T) = \{-1\}$.

En effet,

1. On définit le vecteur x comme dans la proposition IV.1.1, alors $x = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \exp(i\varphi)$ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ensuite

$$\begin{aligned} \langle Tx, x \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \exp(i\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \exp(i\varphi) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -\cos \theta + \sin \theta \exp(i\varphi) \\ \sin \theta \exp(i\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \exp(-i\varphi) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta \exp(i\varphi) + \sin^2 \theta \\ &= -\cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \exp(i\varphi) + \sin^2 \theta = x + iy \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} x &= -\cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos \varphi \\ y &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Donc

$$(x + \cos 2\theta)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta.$$

C'est une famille de cercles et nous pouvons maintenant obtenir leur union. la dernière expression Si, on prend $\phi = 2\theta$, alors la dernière expression réécrit comme

$$(x + \cos \phi)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \phi \quad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

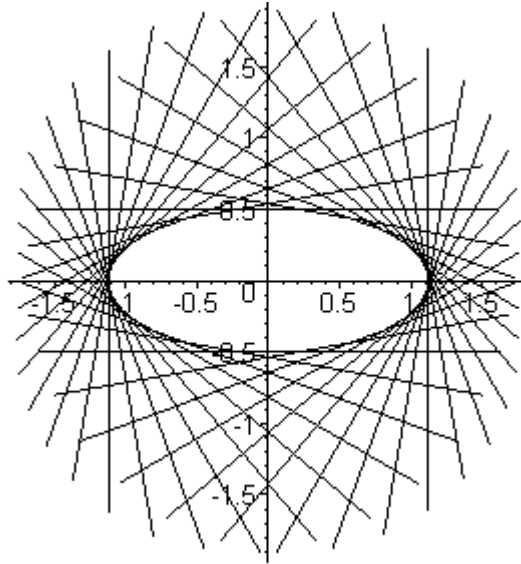
on dérive par rapport à ϕ , on obtient

$$(x + \cos \phi)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \cos \phi$$

En éliminant ϕ entre les deux dernières Equations, on obtient

$$\frac{x^2}{1 + (1/4)} + \frac{y^2}{1/4}.$$

Ceci est une ellipse dont le centre est égale à 0 et des axes égaux à 1 et $\sqrt{5} = 2.23$. Nous pouvons représenter l'image numérique de T comme suit



2. T est une matrice inversible, alors d'après la proposition IV.1.2, on a

$$\sigma_{\text{ext}}(T) = \left\{ \frac{\lambda_i}{\lambda_j} : \lambda_i, \lambda_j \in \sigma(T) \right\}$$

et car $\lambda_1 = -\lambda_2$, on a $\sigma_{\text{ext}}(T) = \{-1\}$.

IV.1.5 Spectre étendu et image numérique de la matrice de Jordan

Lemme IV.1.1 [14] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$, on pose $\lambda_\theta := \max \sigma(S_\theta)$ où $S_\theta := \frac{1}{2}(e^{i\theta}T + e_{i\theta}T^*) = S_\theta^*$.

Alors,

$$\overline{W(T)} = \bigcap_{\theta \in [-\pi, \pi]} H_\theta,$$

où le demi espace H_θ est défini par

$$H_\theta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(e^{i\theta}z) \leq \lambda_\theta\}.$$

Exemple IV.1.2 Soit J_n une matrice $n \times n$ de Jordan définie sous la forme

$$(J_n)_{r,s} := \begin{cases} 1 & \text{si } s = r + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. L'image numérique de J_n est

$$\{z : |z| \leq (n-1)/n\} \subseteq W(J_n) \subseteq \{z : |z| \leq 1\}.$$

2. Le spectre étendu de J_n coïncide avec l'ensemble des nombres complexes. En effet, pour déterminer la première inclusion, on va utiliser théorème 1.3.3. Alors, si $\theta \in \mathbb{R}$ et on définit $v_\theta \in \mathbb{C}^n$ par $v_{\theta,r} := n^{-1/2}e^{ir\theta}$,

alors

$$\begin{aligned}\langle J_n v_\theta, v_\theta \rangle &= \langle v_\theta, v_\theta \rangle \\ &= \frac{n-1}{n} e^{i\theta}\end{aligned}$$

En utilisant la convexité de $W(A)$ et le fait que $\|J_n\| = 1$, on obtient le résultat.

IV.2 Exemple et Application en dimension infinie

On définit l'opérateur de Hardy V_n sur un espace de Lebesgue $L_p[0, 1]$ sous la forme

$$(V_n f)(x) = x^n \int_0^x f(t) dt$$

où $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ est un nombre fixé. Il est clair que

$$V_n = M_{x^n} V = M_{x^{n+1}} H$$

où $M_{x^m}, M_{x^m} f(x) = x^m f(x)$ est l'opérateur de multiplication. $V f(x) = \int_0^x f(t) dt$ est l'opérateur classique de Volterra et $H, H f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ est l'opérateur classique de Hardy dans l'espace de Lebesgue $L_p[0, 1]$.

Pour un nombre entier fixé $n \geq 1$. On considère l'opérateur de Hardy V_n qui a défini dans l'espace de Lebesgue $L_p[0, 1]$. ($1 \leq p < \infty$) sous la forme

$$(V_n f)(x) = (x^n + 1) \int_0^x f(t) dt. \quad (\text{IV.1})$$

Premièrement, on va calculer la norme de V_n

Proposition IV.2.1 Pour un entier fixé $n \geq 1$, soit V_n l'opérateur de Hardy défini sur $L_p[0, 1]$ sous la forme (IV.1). Alors, on a

1. $\|V_n\| \leq \frac{2 \sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{(p+1)(n+1)}}.$
2. V_n est un opérateur de Volterra (c-à-dire compact et quasinilpotent) dans l'espace $L_p[0, 1]$; en particulier $V_n \rightarrow 0$ quand $(n \rightarrow \infty)$.

Preuve.

1. Pour toute $f \in L_p[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
 \|V_n f\|_p^p &= \left\| (x^n + 1) \int_0^x f(t) dt \right\|_p^p \\
 &= \int_0^1 \left| (x^n + 1) \int_0^x f(t) dt \right|^p dx \\
 &\leq \int_0^1 (x^n + 1)^p \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right)^p dx \\
 &\leq \int_0^1 (x^n + 1)^p dx \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right) \\
 &= \frac{2^{p+1}}{(n+1)(p+1)} \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 1^q dt \right)^{1/q} \\
 &= \frac{2^{p+1}}{(n+1)(p+1)} \int_0^1 |f(t)|^p dt \\
 &= \frac{2^{p+1}}{(n+1)(p+1)} \|f\|_p^p.
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \|V_n\| \leq \frac{2 \sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{(n+1)(p+1)}}$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, l'équation de valeur propre de V_n est équivalente à l'équation différentielle

$\lambda'(x) = (x^n + 1)g(x)$ avec condition initiale $g(0) = 0$ où $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ avec f est un vecteur propre. La solution de l'équation intégro différentielle est $g(x) = f(x) = 0$ qui implique que V_n n'admet aucun valeur propre non nul. Depuis que V_n est compact, cela implique que $\sigma(V_n) = \{0\}$ et cela montre que V_n est un opérateur de Volterra.

■

Corollaire IV.2.1 V_n est un opérateur de Volterra, alors $\sigma_{\text{ext}}(V_n) = (0, +\infty)$.

Exemple IV.2.1 On traite dans cet exemple une autre classe d'opérateurs auto-adjoints injectifs, plus précisément, on considère des opérateurs sans spectre ponctuel, et tels que le zéro appartient au spectre continu. Pour simplifier, on va traiter le cas où la multiplicité spectrale est égale à 1.

$$Tf(x) = xf(x), \forall f \in L^2[0, 1] \forall x \in [0, 1]$$

il est connu que T est un opérateur auto-adjoint et que $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0, 1]$. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction mesurable. L'opérateur C_φ est dit de composition s'il est défini par $C_\varphi f(x) = f(\varphi(x))$. L'opérateur de composition $C_{\lambda x}$, va être simplement noté par C_λ . De plus, si $\varphi \in L^\infty[0, 1]$, on définit l'opérateur de multiplication par φ comme $M_\varphi f(x) = \varphi(x)f(x)$. Dans cet exemple, on peut utiliser le corollaire III.2.2 pour décrire les ensembles des valeurs propres et des vecteurs propres étendus de l'opérateur T . En effet, si l'on note par la mesure spectrale

associée à T , alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $E(\{[0, \lambda]\}) = \chi_{[0, \lambda]}$. On peut alors obtenir le résultat de la même manière comme dans le dernier exemple. Cependant, on va traiter cet exemple autrement en utilisant la théorie des fonctions, une telle méthode qui va avoir son propre étendu. Supposons pour cela que λ soit un nombre complexe et que X soit un opérateur borné sur $L^2[0, 1]$ tels que $TX = \lambda XT$. Notons d'abord, puisque T est injectif, que $X = 0$ est l'unique solution de l'équation $TX = 0$, on peut alors supposer que $\lambda \in \mathbb{C}^*$. D'après les hypothèses, pour tout $f \in L^2[0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$T^n X f = \lambda^n X T^n f$$

ce qui implique en particulier

$$Xp(t) = p\left(\frac{t}{\lambda}\right) X1, \forall p \in \mathbb{C}[X].$$

Supposons dans un premier temps que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ et posons $K = [0, 1] \cup [0, \frac{1}{\lambda}]$. Soit $f \in L^2[0, 1]$, alors f peut être vue comme élément de $L^2(K)$ si l'on pose $f_{[0, 1]/\lambda} = 0, p.p.$

D'après le corollaire III.2.1, il existe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}[X]$ qui converge vers f dans $L^2(K)$. Ainsi,

$$Xf(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Xp_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n\left(\frac{t}{\lambda}\right) X1 = 0, p.p. t \in [0, 1]$$

D'où $X = 0$. Par conséquent $\sigma_{\text{ext}}(T) \subset [0, \infty[$.

Exemple IV.2.2 Soit $R > 0$, et posons $D := D(0, R]$ le disque fermé $D(0, R]$, et considérons sur $L^2(D)$ l'opérateur normal N défini par $Nf(z) = zf(z)$ pour tout $f \in L^2(D)$. Si l'on note par E la mesure spectrale associée à N , alors $E(\Delta) = M_{\chi_\Delta}$. Alors, $\sigma_{\text{ext}}(N) = \mathbb{C}^*$.

CONCLUSION

Cette thèse est consacré à l'étude de quelques propriétés de l'image numérique, rayon numérique, transformation d'Aluthge et spectre étendu des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert H et interactions.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert H . De plus, nous avons présenté quelques définitions et propriétés de transformation d'Aluthge. En outre, une brève étude sur opérateur linéaire borné, quelques classes d'opérateurs, Spectre d'un opérateur.

Dans le deuxième chapitre, nous montrons que la norme (α, β) est équivalente à la rayon numérique et à la norme usuelle de l'opérateur. Nous étudions également les conditions d'égalité pour ces bornes. Nous obtenons ensuite des bornes supérieure et inférieure pour la norme (α, β) des opérateurs linéaires bornés, et appliquons les résultats pour obtenir des bornes pour le rayon numérique des opérateurs linéaires bornés.

Dans la quatrième partie, nous présentons quelques résultats sur les relations possibles entre le spectre étendu de AB et BA en dimension finie, et ses conséquences sous forme de plusieurs corollaires, aussi et nous prouvons quelques égalités entre le spectre étendu pour l'opérateur T , pour la transformation Aluthge et pour la transformation Duggal en dimension infinie.

Nous avons alloué la dernière partie pour calculer l'image numérique, le rayon numérique, la transformation d'Aluthge et le spectre étendu des opérateurs de quelques exemples prédéfinis. Aussi, nous avons appliqué des résultats obtenus dans les premiers chapitres.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Alkanjo, *On extended eigenvalues and extended eigenvectors of truncated shift*. *Concrete Operators*, 1(2013), 19-27.
- [2] H. Alkanjo, *Spectre étendu des opérateurs et applications*, Thèse, Université Claude Bernard Lyon1, (2014).
- [3] A. Aluthge, *On p -hyponormal Operators for $0 < p < 1$* , *Integral Equations Operator Theory* 13(1990), 307-315.
- [4] S. Bag, P. Bhunia and K. Paul, *Bounds of numerical radius of bounded linear operator using t -Aluthge transform*, *J. Mathematical Inequalities and Applications*, 23(2020).
- [5] P. Bhunia, A. Bhanja, D. Sain and K. Paul, *Numerical radius inequalities of operator matrices from a new norm on $B(H)$* , (2021).
- [6] P. Bhunia, D. Sain and K. Paul, *On the Davis-Wielandt shell of an operator and the Davis- Wielandt index of a normed linear space*, (2020).
- [7] A. Biswas, A. Lambert, and S. Petrovic. *Extended eigenvalues and the Volterra operator*. *Glasg. Math. J.*, 44(3) :521-534, 2002.
- [8] M.L. Buzano, *Generalizzazione della diseguaglianza di Cauchy-Schwarz*, *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politech. Trino* 31 (1971) 405-409.

-
- [9] G. Cassier, H. Alkanjo, *Extended spectrum, extended eigenspaces and normal operators*. J. Math. Anal. Appl. 418(2014), 305-316.
 - [10] F. Chabbabi, *La applications qui commutent avec la transformation de Aluthge*, Thèse, Université de Lille. (2017).
 - [11] F. Chabbabi, *Product commuting maps with the λ -Aluthge transform*, J. Math. Anal. Appl. (2016).
 - [12] F. Chabbabi, M. Mbekhta, *Jordan product maps commuting with the λ -Aluthge transform*. J. Math. Anal. Appl. (2017).
 - [13] O.S. Cyprian. *A note on the joint essential numerical range of Aluthge transform*, International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 118 No. 3 2018, 573-579.
 - [14] E.B. Davies, *Linear operators and their spectra*, Cambridge University Press. 106 (2007).
 - [15] S.S. Dragomir, *Inequalities for the Numerical Radius of Linear Operators in Hilbert Spaces*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer International Publishing. (2013).
 - [16] C. Foias, I. B. Jung, E. Ko and C. Pearcy, *Complete contractivity of maps associated with the Aluthge and Duggal Transforms*, Pacific J. Math. 209(2003), 249-259.
 - [17] T. Furuta, *Invitation to linear operators*, Taylor Francis, London 2001.
 - [18] A. Guemoula, A. Mansour, *Extended spectrum of the Aluthge transformation*, Korean J. Math. 29(2021), 511-518.
 - [19] K.E. Gustafson and D.K.M. Rao, *Numerical Range*. Springer, New York, Inc. (1997).
 - [20] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, 2nd ed, Cambridge Univ. press, Cambridge, 1988.
 - [21] T. Huruya, *A note on p -hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 125(1997), 3617-3624.
 - [22] G. Ji, N. Liu, Z. Li, *Essential numerical range and maximal numerical range of the Aluthge transform*, Linear and Multilinear Algebra, 55 (2007), 315-322.
 - [23] I. Jung, E. Ko and C. Pearcy, *Aluthge transform of Operators*, Integral Equations Operator Theory 37(2000), 437-448.
 - [24] F. Kittaneh, *Notes on some inequalities for Hilbert Space operators*, Publ Res. Inst. Math. Sci. 24 (1988), 283-293.

-
- [25] S. Mechri, *Some recent results on operator commutators and related operators with applications*, Lecture Monograph, (2010).
- [26] K. Okuba, *On weakly unitarily invariant norm and the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl. 371(2003), 369-375.
- [27] D. Sain, P. Bhunia, A. Bhanja and K. Paul, *On a new norm on $B(H)$ and its applications to numerical radius inequalities*, Ann. Funct. Anal, (2021), 12-51.
- [28] M. Sertbas, F. Yilmaz, *On the extended spectrum of some quasinormal operators*, Turk J Math, 41(2017), 1477-1481.
- [29] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Graduate Texts in Mathematics 68. SpringerVerlag. New York, (1980).
- [30] T. Yamazaki, *On numerical range of the aluthge transformation*, Linear Algebra Appl. 341(2002), 111-117.
- [31] T. Yamazaki, *On upper and lower bounds for the numerical radius and an equality condition*, Studia Math. 178 (2007), 83-89.
- [32] K. Zaiz, *Images numériques des opérateurs, spectres étendus et interactions*, Thèse, Université Echahid Hamma Lakhdar- ELoued, (2019)