

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPLUAIRE

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire d'EL-Oued

Institut des Sciences et Technologie

Département de Génie Mécanique

Spécialité mécanique énergétique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du **diplôme licence**

Sujet:

**ETUDE DES CARACTERISTIQUES DE LA COUCHE
LIMITE DYNAMIQUE LAMINAIRE
INCOMPRESSIBLE SUR UNE PLAQUE LISSE**

Présenté par :

Maatougui Ali
Ghemima Lakhdar
Makki Mourad

Encadré par:

M^m : BERKANE HOUDA

Session:2009/2010

REMERCIEMENTS

Avant tout nous tenant à remercier **Dieu** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la force pour bien mener ce modeste travail.

Nous remercions notre encadreur M^m **Berkane houda** d'avoir accepté de nous encadrer ainsi que pour leur conseil instructif et leur patience.

Nous tenant a remercier nos **cher parents** , pour leur soutien moral et financier.

Enfin, pour toutes les personnes ayant contribué de près ou à la bonne conduit de ce projet.

TABLE DES MATIERES

Remerciements	i
Table des matières	ii
Nomenclature	x
Introduction	01

Chapitre 1 : PROPRIETES GENERALES DES FLUIDES ET MODELES D'ECOULEMENTS

1.1 Propriétés physiques d'un fluide	03
1.1.1 Notion de fluide.....	03
1.1.2 Viscosité.....	03
1.2 Types d'écoulements	05
1.2.1 Ecoulements incompressibles et compressibles.....	05
1.2.2 Ecoulements laminaires et turbulents.....	05
1.2.3 Ecoulements stationnaires et instationnaires.....	05
1.2.4 Ecoulements unidimensionnels et bidimensionnels.....	05
1.3 Equations fondamentales	06
1.3.1 Equation de continuité.....	06
1.3.2 Equation de quantité de mouvement.....	07

Chapitre 2 : COUCHE LIMITE LAMINAIRE : CONCEPTS DYNAMIQUE

2.1 Concept de couche limite	09
2.1.1 Couche limite dynamique.....	09
2.2 Paramètres caractéristiques de couche limite	10
2.2.1 Epaisseurs.....	10
2.2.1.1 Epaisseur conventionnelle de couche limite dynamique.....	10

2.2.1.3 Epaisseur de déplacement.....	10
2.2.1.4 Epaisseur de quantité de mouvement.....	11
2.2.1.6 Facteur de forme.....	12
2.2.2 Frottements.....	12
2.2.2.1 Frottement local.....	12
2.2.2.2 Traînée visqueuse.....	12
2.2.2.3 Coefficient local de frottement-Coefficient de traînée.....	13
2.3 Equations de couche limite dynamique isovolume.....	13
2.3.1 Configuration de la couche limite.....	14
2.3.2 Forme adimensionnelle des équations locales.....	14
2.3.3 Hypothèses et modèle de "Prandtl".....	15
2.3.4 Couplage fluide parfait couche limite.....	16

Chapitre 3 :

CALCUL DE COUCHE LIMITE DYNAMIQUE ISOVOLUME

3.1 Solution de Blasius des équations de couche limite.....	17
3.1.1 Situation du problème et mise en équation.....	17
3.1.2 Méthodes de résolution du problème.....	20
3.1.3 Présentation de l'organigramme de calcul.....	23
3.1.4 Evaluation de la couche limite dynamique.....	24
3.2 Contrôle actif de la couche limite dynamique.....	25
3.2.1 Aspiration et soufflage avec une vitesse uniforme.....	25
3.2.2 Aspiration et soufflage avec un profil linéaire de vitesse.	27

Chapitre 4 :**RESULTATS ET COMMENTAIRES**

4.1 Représentation graphique des résultats.....	29
4.1.1 Epaisseur conventionnelle de la couche limite dynamique.....	29
4.1.2 Epaisseur de déplacement.....	30
4.1.3 Epaisseur de quantité de mouvement.....	30
4.1.4 Coefficient de frottement.....	31
4.2 Commentaires et analyse des résultats.....	31
CONCLUSION GENERALE	33
BIBLIOGRAPHIE.....	34

NOMENCLATURE

Caractères usuels

c	célérité du son	m/s
C_p	chaleur spécifique à pression constante	m^2/s^2k
D	traînée visqueuse par unité d'envergure	kg/s^2
$\overline{\overline{D}}$	tenseur de taux de déformations	$1/s$
e	énergie interne par unité de masse	m^2/s^2
f	fonction de Blasius	
\vec{f}	vecteur des forces appliquées au fluide	kgm/s^2
g	accélération de la pesanteur	m/s^2
H	facteur de forme	
L	longueur de la plaque	m
m	la masse	kg
\vec{n}	vecteur unitaire normal à un élément de surface	
p	Pression	kg/ms^2
$\overline{\overline{P}}$	tenseur des contraintes totales	kg/ms^2
S	distance entre deux plans parallèles	m
ds	élément de surface	m^2
t	le temps	s
U, V	composantes de vitesse	m/s
\vec{v}	vecteur unitaire tangent à un élément de surface	
w	envergure de la plaque	m

Caractères grecs

δ	épaisseur de la couche limite dynamique	m
δ_1	épaisseur de déplacement	m
δ_2	épaisseur de quantité de mouvement	m
δ_3	épaisseur d'énergie cinétique	m
$\varepsilon, \varepsilon'$	nombres infiniment petits	m
μ	viscosité dynamique	
ν	viscosité cinématique	kg/ms
η	coordonnée réduite	
	masse volumique	
ρ	surface de contrôle	kg/m^3
τ	tenseur des contraintes visqueuses	m^2
Ω	volume de contrôle	kg/ms^2
ϕ	densité de flux par unité de surface	m^3
ψ	fonction de courant	m^2/s^2
Φ	fonction de dissipation visqueuse	m^2/s

Nombres sans dimensions

C_f	coefficient de frottement local	$\tau_p / (1/2) \rho U_E^2$
C_D	coefficient de traînée	$D / (1/2) \rho \Sigma U_\infty^2$
Eu	nombre d'Euler	$\mathcal{U}_0^2 / C_p T_0$
Ec	nombre d'Eckert	$U_0^2 / C_p T_0$
Fr	nombre de Froude	$U_0^2 / g_0 L$
Gr	nombre de Grashof	$g \alpha \Delta T L^3 / \nu^2$

Re nombre de Reynolds $\rho U_0 L / \mu$

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents.

A mes chers frères.

A tout mes grand famille.

A tout mes amis , pour leur sincérité et leur gentillesse.

A mes binôme Lakhdar et Mourad.

A tout le groupe génie mécanique.

Maatougui Ali.

DÉDICACE

**QUOI QUE PLUS QUE DE POUVOIRS PARTAGER MEILLEURS
MOMENT DE SA VIE AVEC LES AUTRES QU'ON AMIS.**

JE DÉDIE CE MODESTE MÉMOIRE:

A MES TRÈS CHERS PARENT.

A MES FRÈRES ET SŒURS.

A TOUT MA FAMILLE.

À TOUT MEILLEURS AMIS.

À MON BINÔME ALI ET LAKHDAR.

MAKKI MOURAD.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail, aux être les plus tendres a mes yeux et les plus Cher a mon cœur , a qui je dois endormement et qui je ne remercierai jamais assez:

A mes grande parents .

A mes frères , cousines et cousins .

A tout mes amis.

Ghemima Lakhdar.

INTRODUCTION

Un des problèmes que doit résoudre la mécanique des fluides est celui de l'action d'un courant sur un solide. En effet, plongé dans un fluide en mouvement, un solide subit de la part de celui-ci une action sur la surface de contact dont la détermination est de première importance dans des domaines aussi variés comme la propulsion des navires et des avions, le mouvement des projectiles, les turbomachines...etc. Car toutes les réalisations techniques baignent dans des fluides comme l'air, l'eau et les fluides industriels. Ce problème, dit de la résistance des fluides.

La première approximation de la mécanique des fluides (fluide parfait), conduit au paradoxe d'**Alembert** qui, pour un mouvement stationnaire, s'annonce de la façon suivante: La résultante R des pressions du fluide sur un obstacle est perpendiculaire à la vitesse U_∞ de l'écoulement à l'infini, ce qui est contraire à l'observation courante.

La deuxième approximation (fluide visqueux), conduit à des équations plus complexes et on ne connaît que peu de solutions exactes. En particulier, on aboutit pratiquement à la résolution du problème de la résistance des fluides, par une schématisation qui est l'introduction de la notion de couche limite.

Le concept de la couche limite est introduit par "**Prandtl**" qui montre que les écoulements visqueux, pour la plupart, peuvent être découpés en deux zones :

- Une zone proche à la paroi où les forces visqueuses et d'inertie sont du même ordre de grandeur ; appelée région de couche limite,
- la région extérieure où les forces visqueuses sont négligeables devant les forces d'inertie.

Ce concept impose de regarder l'écoulement, et donc de le modéliser différemment en fonction de la région qu'on désire étudier, les ordres de grandeur des principaux termes étant différents.

Dans cette étude on s'intéresse à l'étude des caractéristiques de la couche limite

laminaire pour des fluides incompressibles sur une paroi lisse

Pour arriver à cet objectif on propose les chapitres suivants :

Dans le premier chapitre on présente une étude théorique sur quelques propriétés du fluide, et des différents types d'écoulements puis un rappel des équations fondamentales de la mécanique des fluides.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la couche limite laminaire de l'écoulement dynamique, et les différentes caractéristiques de ces couches. Les idées de base sur lesquelles repose le concept de la couche limite sont exposées avec les simplifications des équations conduisant aux formes régissant les écoulements de type couche limite.

A partir du troisième et quatrième chapitre nous résolvons les équations de la couche limite dynamique à l'aide de la méthode de "Blasiu" ensuite on détermine les caractéristiques de cette couche.

Une conclusion générale est donnée pour commenter les résultats obtenus et pour proposer des perspectives à notre étude.

Chapitre 1 :

PROPRIETES GENERALES DES FLUIDES ET MODELES D'ECOULEMENTS

1.1 Propriétés physiques d'un fluide.

1.1.1 Notion de fluide.

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Les liquides et gaz habituellement étudiés sont isotropes, mobiles et visqueux. La propriété physique qui permet de faire la différence entre les deux est la compressibilité.

1.2 Viscosité:

La notion de viscosité est associée à la résistance qu'oppose tout fluide à sa mise en mouvement. Pour préciser cette propriété de façon plus quantitative, nous considérons l'expérience de "Couette" en écoulement plan. Telle qu'elle est schématisée à la figure (1.1), cette expérience concerne un fluide visqueux disposé entre deux plans parallèles distants d'une hauteur S . Elle consiste à déplacer relativement à l'autre, l'une des deux parois d'un mouvement permanent de translation rectiligne dans son propre plan. Pour simplifier, on suppose la paroi inférieure fixe et la paroi supérieure mobile à la vitesse U_0 .

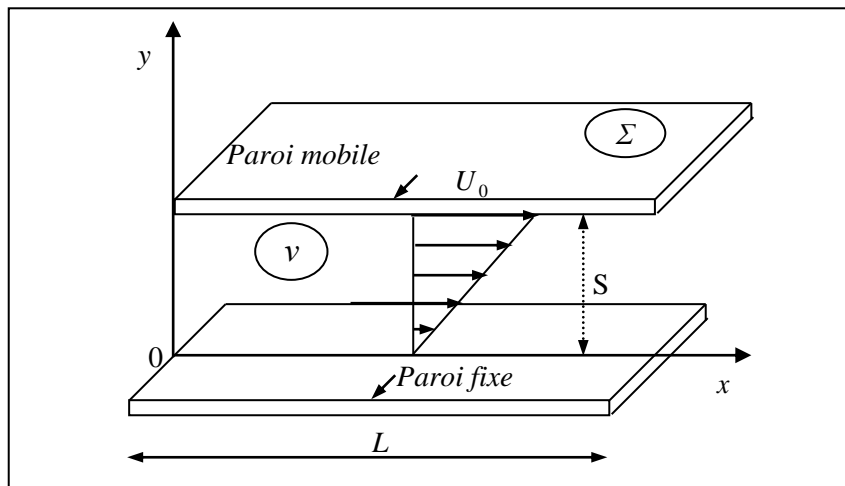


Fig.1.1: Schéma de l'écoulement de couette plan.

En régime permanent, l'expérience révèle, pour certains fluides, que le profil de vitesses qui s'établit entre les deux plaques est linéaire. En outre pour maintenir le mouvement uniforme de la paroi supérieure, il faut exercer sur une aire Σ de celle-ci une force tangentielle dont le module F est tel que :

$$F/\Sigma \propto U_0/S$$

En désignant par μ le coefficient de proportionnalité appelé *viscosité dynamique* du fluide, on écrira :

$$\frac{F}{\Sigma} = \mu \frac{U_0}{S} \quad (1.1)$$

Cette relation s'applique bien aux fluides usuels. Elle est à l'origine d'un *comportement rhéologique* que nous qualifierons de *newtonien*.

On introduit également le coefficient de *viscosité cinématique* :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.2)$$

1.2 Types d'écoulements.

1.2.1 Ecoulements incompressibles et compressibles.

On dit qu'un fluide est incompressible si sa masse spécifique varie faiblement avec la pression ou la température. Pour juger de l'effet de compressibilité dans un fluide en mouvement il faut faire intervenir à la fois la célérité du son et la vitesse de l'écoulement.

1.2.2 Ecoulements laminaires et turbulents.

On dit qu'un écoulement est *laminaire* lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. L'écoulement est *turbulent* lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide. Les deux types d'écoulements peuvent être observés par exemple dans le cas d'un filet d'eau s'échappant d'un simple robinet. Lorsque la vitesse est faible, l'écoulement est régulier et laminaire. Au contraire, pour des débits importants et à vitesse plus élevée, on constate que les filets d'eau oscillent autour d'une position moyenne et l'écoulement prend un aspect irrégulier et turbulent.

1.2.3 Ecoulements stationnaires et instationnaires.

On dit qu'un écoulement est *stationnaire* si toutes les variables décrivant le mouvement sont indépendantes du temps. Ainsi la pression p , la vitesse V , la densité ρ , l'énergie e d'un écoulement stationnaire sont des quantités indépendantes du temps. Un écoulement est dit *instationnaire* si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps.

1.2.4 Ecoulements unidimensionnels et bidimensionnels.

Dans certains cas particuliers intéressants, le problème physique réel tridimensionnel peut se ramener à l'étude d'un écoulement théorique bidimensionnel ou unidimensionnel. C'est pour ça, on peut considérer l'écoulement de grande étendue suivant l'axe des (z) comme un écoulement bidimensionnel suivant les axes des (x) et (y), et toutes les grandeurs cinématiques ne dépendent alors que de deux variables d'espace.

1.3 Equations fondamentales.

1.3.1 Equation de continuité.

Considérons un volume matériel Ω . La masse contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{\Omega} \rho dv$$

où ρ désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans Ω est constante et on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho dv = 0 \quad (1.3)$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de transport au volume Ω :

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho dv = \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int \int_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds$$

Σ est la surface de contrôle. D'après (1.3) on peut écrire :

$$\int \int \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int \int_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (1.4)$$

Si le volume Ω ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur Σ peut être remplacée par une intégrale de volume et "le théorème de Green-Ostrogradsky" permet d'écrire :

$$\int \int_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) dv$$

dans ces conditions, l'équation (1.4) devient :

$$\int \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] dv = 0$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrale doit être identiquement nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) est souvent appelée *équation de continuité* (forme différentielle).

1.3.2 Equation de quantité de mouvement.

Pour un volume arbitraire Ω , la quantité de mouvement, définie pour une particule de fluide par le produit mV , doit être conservée. Cette conservation, sous sa forme générale, peut être exprimée par l'équation suivante, sous forme intégrale :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \vec{v}) dv + \iint_{\Sigma} (\rho \vec{v} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V} ds = \iiint_{\Omega} \rho \cdot \vec{f} dv + \iint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \overline{\overline{P}} ds \quad (1.6)$$

où \vec{v} est le vecteur unité tangent à la surface Σ , et $\overline{\overline{P}}$ définit le tenseur des contraintes totales appliquées en un point du fluide et qui s'écrit de la manière suivante :

$$\overline{\overline{P}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

L'équation (1.6) s'écrit sous la forme différentielle comme suit :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{f} - \nabla \cdot \overline{\overline{P}}$$

Où \vec{f} représente le vecteur des forces appliquées au fluide (forces massiques).

Dans le cas d'un écoulement idéal, donc sans frottements internes, ou pour un fluide au repos, le tenseur des contraintes totales se réduit uniquement à l'effet de la pression hydrostatique p , et cela devient :

$$\overline{\overline{P}}_{ideal} = - \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Pour un fluide incompressible, newtonien et visqueux, le tenseur ci-dessus présente alors des contraintes visqueuses, dont le tenseur est $\overline{\overline{\tau}}$, et cela devient :

$$\overline{\overline{P}}_{visq} = \overline{\overline{P}}_{ideal} + \overline{\overline{\tau}}$$

Le tenseur des contraintes visqueuses, selon l'hypothèse de "Newton", est une fonction linéaire du taux de déformation $\overline{\overline{D}}$:

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu \overline{\overline{D}}$$

Avec \overline{D} défini de la manière suivante :

$$\overline{D} = \left[\nabla \otimes \vec{V} + (\nabla \otimes \vec{V})^T \right]$$

En tenant compte de la condition d'incompressibilité, défini par $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, on aboutit aux *équations de Navier-Stokes*, qui expriment la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide incompressible, newtonien et visqueux et dont l'expression est :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{f} - \nabla \cdot p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Chapitre 3 :

CALCUL DE COUCHE LIMITE DYNAMIQUE ISOVOLUME

Dans ce chapitre nous calculons les propriétés essentielles de la couche limite dynamiques en utilisant la méthode de "Blasius" pour la résolution du modèle présenté au chapitre précédent, ensuite, nous étudions l'influence du contrôle sur le comportement de la couche limite en ayant recours à quelques procédés tels que le soufflage ou l'aspiration des fluides avec une vitesse uniforme ou linéairement variée.

3.1 Solution de Blasius des équations de couche limite.

3.1.1 Situation du problème et mise en équation.

Nous étudierons la configuration la plus simple et qui fut historiquement la première application de la théorie de "Prandtl". C'est celle d'une couche limite sur une plaque plane, infiniment mince, de longueur L et d'envergure w disposée parallèlement à un écoulement uniforme de vitesse U_∞ d'un fluide visqueux (ν) et non pesant. Le mouvement est supposé permanent et le rapport de forme (w/L) tel qu'il autorise une approche bidimensionnelle plane. Enfin le nombre de "Reynolds" global ($U_\infty L/\nu$) est pris suffisamment grand pour justifier les approximations de couche limite.

En fluide parfait, l'obstacle se confondant avec une portion de ligne de courant, l'écoulement reste celui d'un champ de vitesse uniforme en tout point, de valeur U_∞ auquel correspond bien évidemment un champ de pression constante. En application du théorème de "Bernoulli" le long de la plaque, on en déduit que $dP_E/dx = 0$.

Comme le schématise la figure suivante (3.1), le caractère visqueux du fluide réel provoque une répartition transversale (profil) de vitesse s'accompagnant d'une déflexion des lignes de courant (b). Ce sont ces caractéristiques qu'il s'agit de déterminer ainsi que la loi

correspondante de frontière de couche limite.

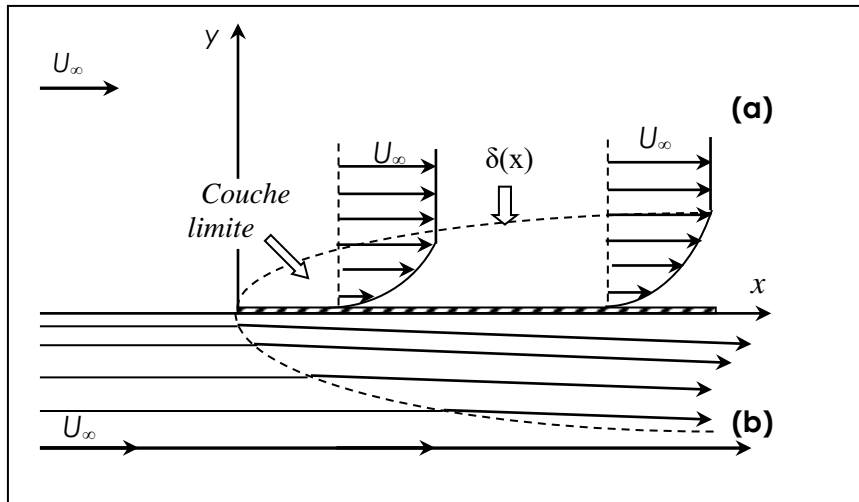


Fig.3.1 : Couche limite sur une plaque plane à incidence nulle dans un courant uniforme à l'infini : (a) Profils de vitesse ; (b) Déflexion des lignes de courant.

En application du modèle de "Prandtl" et puisque le gradient longitudinal de pression est nul, la correction de vitesse au sein de la couche limite est régie par les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$U(x, 0) = V(x, 0) = 0 \quad (\text{représentent l'effet de l'adhérence}).$$

$$U(x, \infty) = U_\infty (\equiv C^{te}). \quad (\text{vitesse uniforme; pas de déformation de lignes de courant}).$$

La solution d'affinité correspond à une fonction de courant de la forme :

$$\psi = U_\infty g(x) f(\eta) \quad (3.1)$$

où la variable η est définie par $\eta = y / g(x)$. En observant que :

$$d\eta = -y \frac{g'(x)}{g^2(x)} dx + \frac{dy}{g(x)}$$

on en déduit immédiatement que $\partial\eta/\partial x = -\eta g'/g$ et $\partial\eta/\partial y = 1/g$. Les composantes du vecteur vitesse s'obtient par :

$$\begin{cases} U = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = U_\infty f' \\ V = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} = U_\infty g'(\eta f' - f) \end{cases}$$

ainsi que :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -U_\infty \frac{g'}{g} \eta f'' \\ \frac{\partial U}{\partial y} = U_\infty \frac{f''}{g} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = U_\infty \frac{f'''}{g^2} \end{cases} \quad (3.2)$$

La substitution de ces expressions dans l'équation de la dynamique, conduit après simplifications à la relation :

$$\frac{U_\infty}{\nu} g g' = -\frac{f'''}{f f''}$$

qui, en raison de la séparation des variables ne peut être satisfaite que pour :

$$\frac{U_\infty}{\nu} g g' = Cte \equiv K \quad \text{et} \quad -\frac{f'''}{f f''} = Cte \equiv K$$

Le choix de la constante $K \neq 0$; reste arbitraire et en suivant la proposition de "Blasius" [04], nous prendrons $K = 1/2$. Le changement de variable est alors fixé par $\eta = y\sqrt{U_\infty/\nu x}$ et l'équation différentielle résolvante du champ de vitesse devient :

$$2f''' + f f'' = 0 \quad (3.3)$$

Les conditions aux limites après transformation, imposent que :

$$\left. \begin{array}{l} u=0 \Leftrightarrow f'=0 \\ v=0 \Leftrightarrow (\eta f' - f) = 0 \Leftrightarrow f=0 \\ f'=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(à la paroi)} \\ \text{(loin de la paroi)} \end{array} \quad (3.4)$$

Nous avons donc transformé le problème aux dérivées partielles initial en un problème différentiel ordinaire avec des conditions aux limites définies en deux points. La similitude des profils de vitesse est une propriété remarquable puisqu'une fonction unique détermine la forme de tous les profils. La solution analytique de cette équation n'est pas possible, c'est donc à travers une résolution numérique qu'on obtient la solution de notre problème.

3.1.2 Méthodes de résolution du problème.

Des méthodes très variées permettant la résolution numérique des équations de la couche limite. Si l'on s'intéresse seulement à des problèmes différentiels avec des conditions aux limites spécifiées en deux points, comme celui défini par l'équation (3.3) munie des conditions aux limites (3.4), les formules de type "Runge-Kutta" sont parmi les plus utilisées, elles sont faciles à programmer, en général stables, elles utilisent une largeur du pas peut être modifiée sans difficultés, en plus de ça la connaissance de la valeur initiale suffit à intégrer l'équation différentielle. Mais, elles demandent plus de temps de calcul que les autres méthodes de précision comparables. Si f, f' et f'' sont tous connues dans une certaine position (η_i), la formule de "Runge-Kutta" du quatrième ordre est préférable à utiliser pour obtenir la solution à ($\eta_{i+1} = \eta_i + h$) positions. Pour se préparer à l'utilisation de cette méthode, l'équation du troisième ordre (3.3), doit être écrite en trois équations de premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{df}{dn} = p \\ \frac{dp}{dn} = q \\ \frac{dq}{dn} = -\frac{1}{2}fq \end{cases} \quad (3.5)$$

En appliquant les formules de "Runge-Kutta" pour chacune des équations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta_1 f_i = hp_i \\ \Delta_1 p_i = hq_i \\ \Delta_1 q_i = -\frac{1}{2}hf_i q_i \\ \Delta_2 f_i = h(p_i + \frac{1}{2}\Delta_1 p_i) \\ \Delta_2 p_i = h(q_i + \frac{1}{2}\Delta_1 q_i) \\ \Delta_2 q_i = -\frac{1}{2}h(f_i + \frac{1}{2}\Delta_1 f_i)(q_i + \frac{1}{2}\Delta_1 q_i) \\ \Delta_3 f_i = h(p_i + \frac{1}{2}\Delta_2 p_i) \\ \Delta_3 p_i = h(q_i + \frac{1}{2}\Delta_2 q_i) \\ \Delta_3 q_i = -\frac{1}{2}h(f_i + \frac{1}{2}\Delta_2 f_i)(q_i + \frac{1}{2}\Delta_2 q_i) \\ \Delta_4 f_i = h(p_i + \frac{1}{2}\Delta_3 p_i) \\ \Delta_4 p_i = h(q_i + \frac{1}{2}\Delta_3 q_i) \\ \Delta_4 q_i = -\frac{1}{2}h(f_i + \frac{1}{2}\Delta_3 f_i)(q_i + \frac{1}{2}\Delta_3 q_i) \end{cases}$$

Finalement, les valeurs de f , f' et f'' sont calculées pour (η_{i+1}) :

$$\begin{cases} f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 f_i + 2\Delta_2 f_i + 2\Delta_3 f_i + \Delta_4 f_i) \\ p_{i+1} = p_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 p_i + 2\Delta_2 p_i + 2\Delta_3 p_i + \Delta_4 p_i) \\ q_{i+1} = q_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 q_i + 2\Delta_2 q_i + 2\Delta_3 q_i + \Delta_4 q_i) \end{cases}$$

Il faut noter que, l'intégration numérique des équations (3.5) ne peut pas démarrer pour la valeur de $\eta = 0$ parce que q est inconnue en ce point. Les conditions aux limites (3.4) concernent seulement les valeurs de f et p' pour $\eta = 0$. La résolution par la méthode de "Runge-Kutta", exige de démarrer avec la méthode de "Moitié intervalle" présentée sur la figure (3.2), pour fixer la valeur de q à $\eta = 0$. La condition aux limites pour η tend vers l'infini est inapplicable, on va limiter notre ordre d'intégration numérique à une valeur maximale η_{\max} . La condition : $\eta \rightarrow \infty \Rightarrow f' \rightarrow 1$, devient :

$$1 - p \leq \varepsilon \quad \text{pour } \eta = \eta_{\max} \quad (3.6)$$

Au début du calcul, on choisit une valeur arbitraire de q_0 avec une incrémentation positive $\Delta_1 q_0$. Pour les conditions $f = p = 0$ et q_0 pour $\eta = 0$. Les équations (3.5) sont intégrées jusqu'à η proche de η_{\max} . La dernière valeur calculée de p est notée p_{\max} . Si ce point est inférieur à 1, on remplace q_0 par $q_0 + \Delta_1 q_0$ et on répète l'intégration à partir de $\eta = 0$.

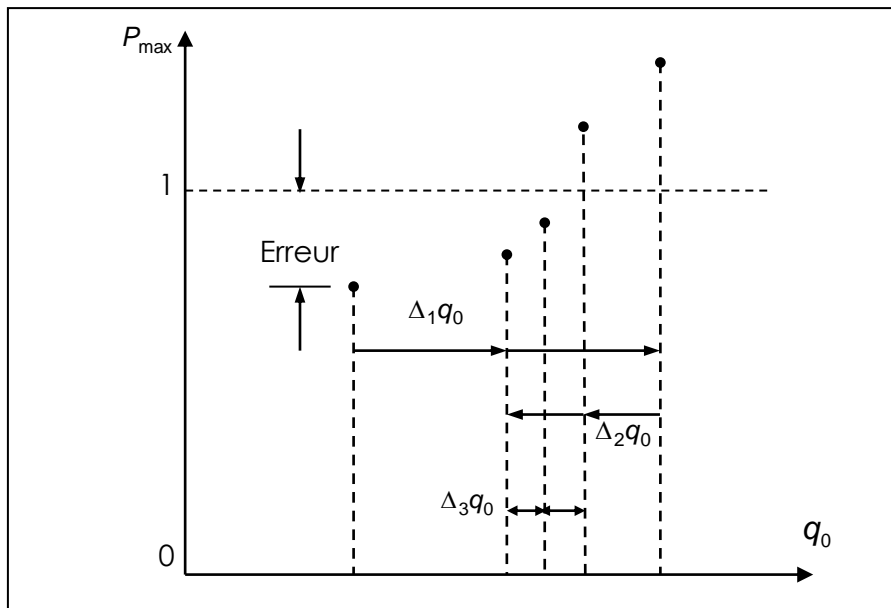


Fig.3.2 : Représentation de la méthode de Moitié intervalle.

Si la valeur de ρ_{\max} est supérieur à 1, on prend $\left(\Delta_2 q_0 = \frac{\Delta_1 q_0}{2}\right)$ pour inverser la direction et on remplace q_0 par $(q_0 + \Delta_2 q_0)$. On répète le calcul avec cette valeur négative jusqu'à ce que ρ_{\max} sera inférieur à 1 (figure 3.2). Puis on inverse la direction, en mettant $\left(\Delta_3 q_0 = -\frac{\Delta_2 q_0}{2}\right)$ et en remplaçant q_0 par $(q_0 + \Delta_3 q_0)$ jusqu'à ce que la valeur de ρ_{\max} sera supérieure à 1 tant que q_0 est positive, ou ρ_{\max} sera inférieure à 1 lorsque q_0 est négative. A la fin de chaque itération on calcul $(1 - \rho_{\max})$ comme l'erreur indiquée sur la figure (3.2) et on vérifie si l'erreur est positive et aussi si elle est inférieure ou égale à la valeur 'estimée de epsilon. Quand les deux conditions précédentes sont vérifiées, la condition aux limites est satisfaite, et l'itération est terminée.

3.1.3 Présentation de l'organigramme de calcul.

L'organigramme présenté sur la figure (3.3) traduit les étapes de calcul précédentes.

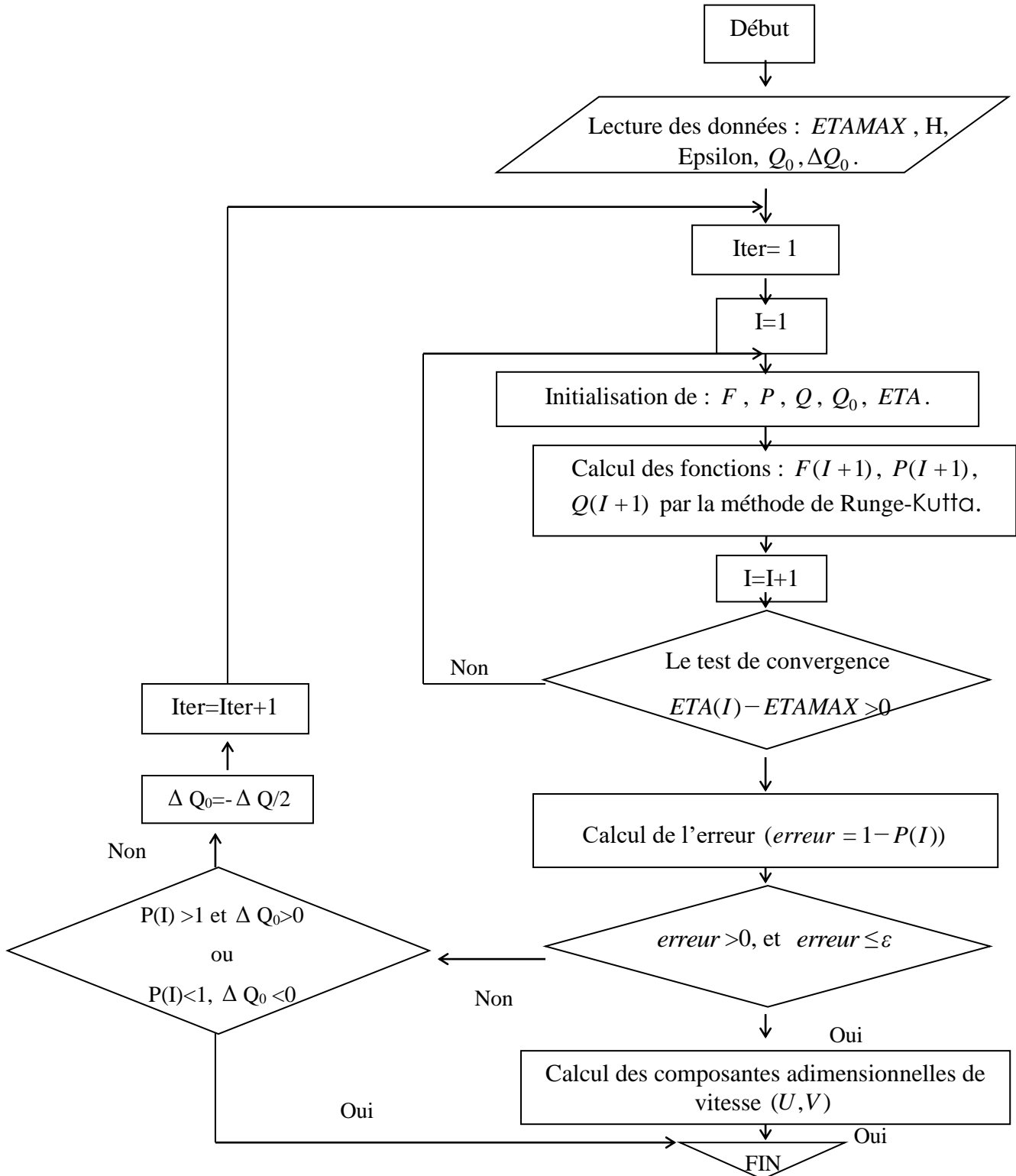


Fig.3.3 : Organigramme de résolution de l'équation de "Blasius" pour une couche limite dynamique le long d'une plaque plane.

3.1.4 Evaluation de la couche limite dynamique.

La détermination des fonctions f, f' et f'' permet le calcul de toutes les caractéristiques de la couche limite. La fonction $f(\eta)$ et sa dérivée seconde $f''(\eta)$ sont représentées sur la figure (3.5). Les courbes de $f = U/U_\infty$ et $\frac{V}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}$ en fonction de η sont représentées sur la figure (3.4). On note que f' varie de façon presque linéaire au voisinage de $\eta = 0$, puis tend asymptotiquement vers 1 lorsque η augmente et tend vers η_{max} . Pour $\eta = 5$, $f'(\eta) = 0.99$ et en ce point $U = 0.99U_E$. L'épaisseur de la couche limite δ est donnée par la relation suivante :

$$\delta \approx 5 \left(\frac{\nu x}{U_E} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

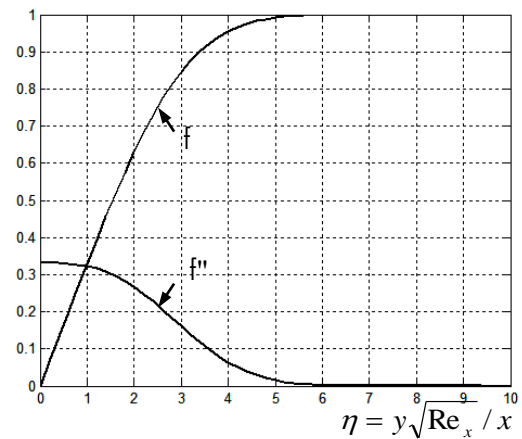
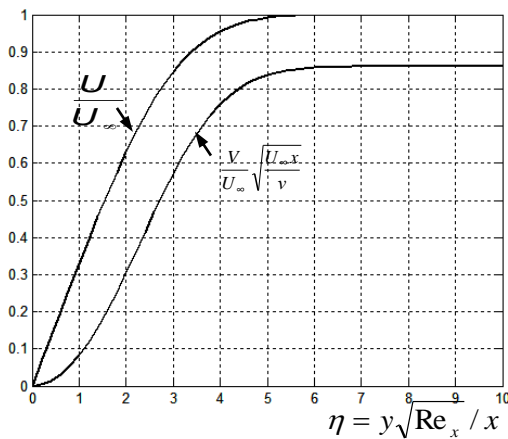


Fig.3.4 : Distribution des vitesses dans la couche limite dynamique le long d'une plaque plane.

Fig.3.5 : Les fonctions de Blasius, f et f'' .

La composante normale du vecteur vitesse peut être déduite en fonction de (η) à l'aide de :

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} U_E \left(\frac{\nu}{U_E x} \right)^{1/2} (\eta f' - f)$$

Si l'on représente le produit :

$$\frac{V}{U_E} \left(\frac{U_E x}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{V}{U_E} (\text{Re}_x)^{1/2} = \frac{1}{2} (\eta f' - f)$$

en fonction de η , on constate que cette fonction tend vers une valeur constante égale à 0.860 lorsque $\eta \rightarrow \infty$. Ainsi sur la frontière de la couche limite, la vitesse transversale garde une valeur non nulle telle que :

$$V_E = 0.860 \frac{U_E}{(\text{Re}_x)^{1/2}} \quad (3.8)$$

L'augmentation de l'épaisseur de la couche limite induit un déplacement du fluide dans la direction transversale.

3.2 Contrôle actif de la couche limite dynamique.

Il existe en général plusieurs techniques, qui ont été développées, pour le contrôle artificiel du comportement de la couche limite le long d'un corps. Parmi ces techniques, le soufflage ou l'aspiration d'un fluide par la surface du corps qui conduit au changement de la structure de la couche limite.

3.2.1 Aspiration et soufflage avec une vitesse uniforme.

L'écoulement de la couche limite en présence de l'aspiration ou du soufflage peut devenir auto similaire si la vitesse est uniformément distribuée.

On se propose d'étudier la couche limite sur une plaque plane avec aspiration ou soufflage du fluide avec une vitesse uniforme V_0 , en l'absence du gradient de pression (figure 3.6).

Les équations de la couche limite dans ce cas sont :

$$\begin{cases} \frac{dV_0}{dy} = 0 \\ V_0 \frac{dU}{dy} = \nu \frac{d^2U}{dy^2} \end{cases}$$

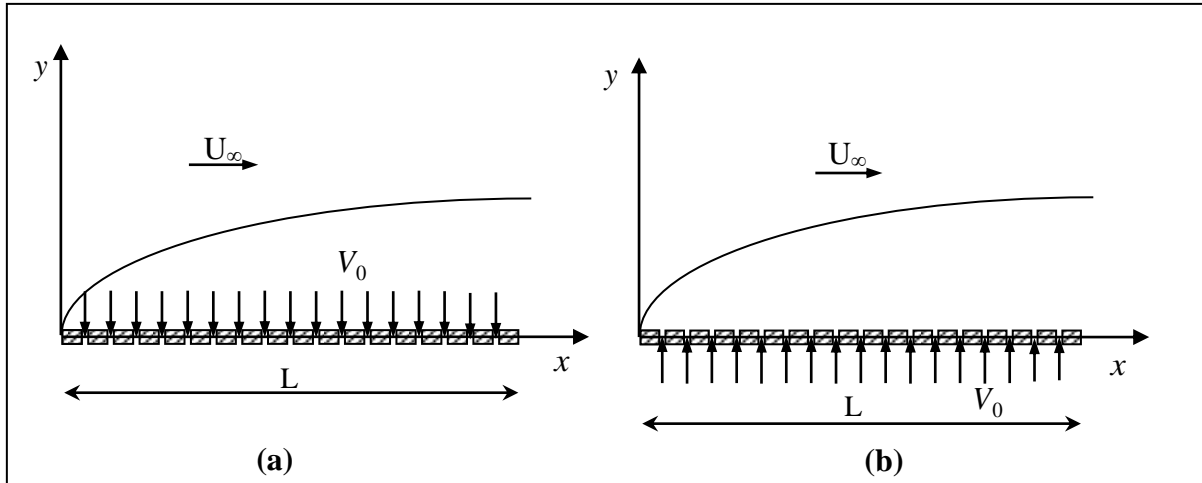


Fig.3.6 : Contrôle actif avec une vitesse uniforme V_0 d'une couche limite dynamique sur une plaque plane : (a) Aspiration, (b) Soufflage.

On a :

$$V_0 = -\frac{\partial \psi}{dx} = \frac{1}{2}(\eta f' - f) \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}$$

puisque la composante U de vitesse est nulle au niveau ($\eta = 0$) :

$$U = 0 \quad \frac{U}{U_\infty} = f' = 0$$

on obtient :

$$V_0 = -\frac{1}{2} f \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \quad (3.9)$$

$$\frac{V_0}{U_\infty} = -\frac{1}{2} f \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}}$$

Le rapport entre la vitesse de l'aspiration ou de soufflage et U_∞ doit être petit pour vérifier les hypothèses de "Prandtl", on lui donne comme valeur :

$$\frac{V_0}{U_\infty} \approx 0.0001$$

D'après l'équation (3.9), on peut déduire la valeur de f :

$$f = \pm 0.2 \quad (3.10)$$

f est positive pour le cas de l'aspiration et négative pour le cas du soufflage. En injectant cette valeur dans les conditions aux limites (3.4), elles deviennent :

$$\begin{aligned}
 U = 0 &\Leftrightarrow f' = 0 && \text{(pour l'aspiration)} \\
 V = V_0 &\Leftrightarrow \begin{cases} f = +0.2 \\ f = -0.2 \end{cases} && \text{(pour le soufflage)}
 \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule la fonction f et ses deux dérivées, f' et f'' pour les deux procédés de contrôle.

Tab.3.1 : Comparaison des caractéristiques de la couche limite dynamique en absence et en présence du contrôle avec une vitesse uniforme.

Type du contrôle	$\frac{\delta\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_1\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_2\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	H	$C_f\sqrt{\text{Re}_x}$	$C_D\sqrt{\text{Re}_L}$
Aspiration	4.6	1.53	0.81224	1.885	0.81224	1.6245
Sans contrôle	5	1.72	0.66411	2.59	0.66411	1.328
Soufflage	5.4	1.96	0.52327	3.74	0.52327	1.0465

3.2.2 Aspiration et soufflage avec un profil linéaire de vitesse.

soit le profil suivant (figure 3.7) :

$$V = ax + b \quad (3.11)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x=L) = V_0 \end{cases}$$

L'introduction de ces conditions dans l'équation (3.11), donne :

$$V = \frac{V_0}{L} x$$

On détermine les valeurs de la vitesse en plusieurs points de la plaque, ensuite on calcule, pour chaque une de ces valeurs, la fonction f et on l'injecte sa valeur dans les conditions aux limites (3.4).

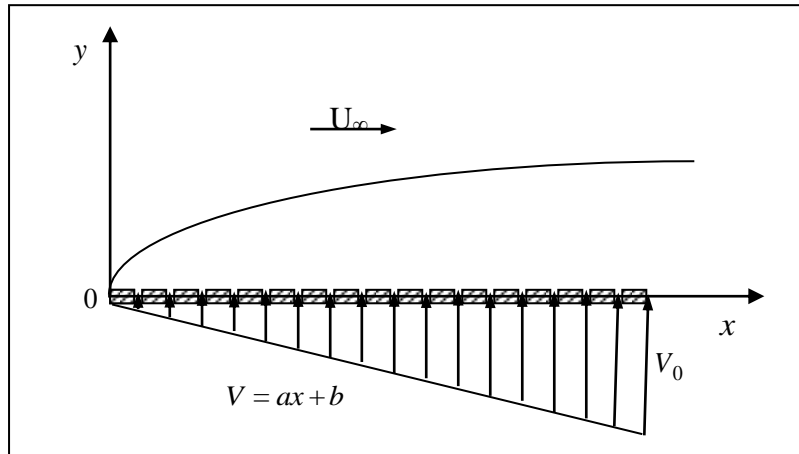


Fig.3.7 : Soufflage avec un profil de vitesse linéaire d'une couche limite dynamique sur une plaque plane.

La résolution de l'équation de Blasius avec ces nouvelles conditions nous a permis de déterminer les valeurs de δ_1 , δ_2 et C_f pour chaque valeur de vitesse, on interpole ces résultats afin de déterminer les différentes caractéristiques de la couche limite pour ce type de contrôle.

Tab.3.2 : Comparaison des caractéristiques de la couche limite dynamique en absence et en présence du contrôle avec un profil de vitesse linéaire.

Type du contrôle	$\frac{\delta_1 \sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_2 \sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_2 \sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$C_f \sqrt{\text{Re}_x}$
Aspiration	$5.052 - 0.044x$	$1.715 - 0.024x$	$0.664 + 0.014x$	$0.664 + 0.014x$
Sans contrôle	5	1.71672	0.66411	0.66411
Soufflage	$4.948 + 0.044x$	$1.715 + 0.024x$	$0.664 - 0.014x$	$0.664 - 0.014x$

Chapitre 4:

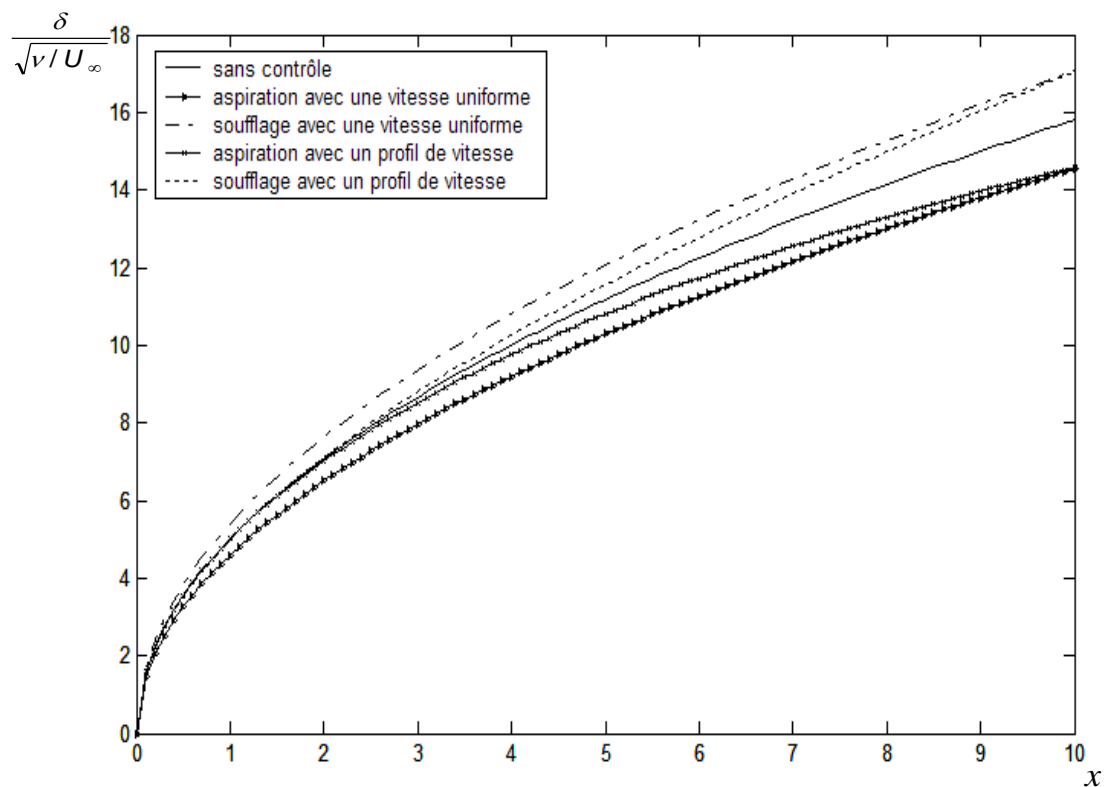
RESULTATS ET COMMENTAIRES**4.1 Représentation graphique des résultats.****4.1.1 Epaisseur conventionnelle de la couche limite.**

Fig.4.1 : Influence du contrôle actif sur l'épaisseur conventionnelle de la couche limite dynamique δ le long d'une plaque plane à zéro incidence.

4.1.2 Epaisseur de déplacement.

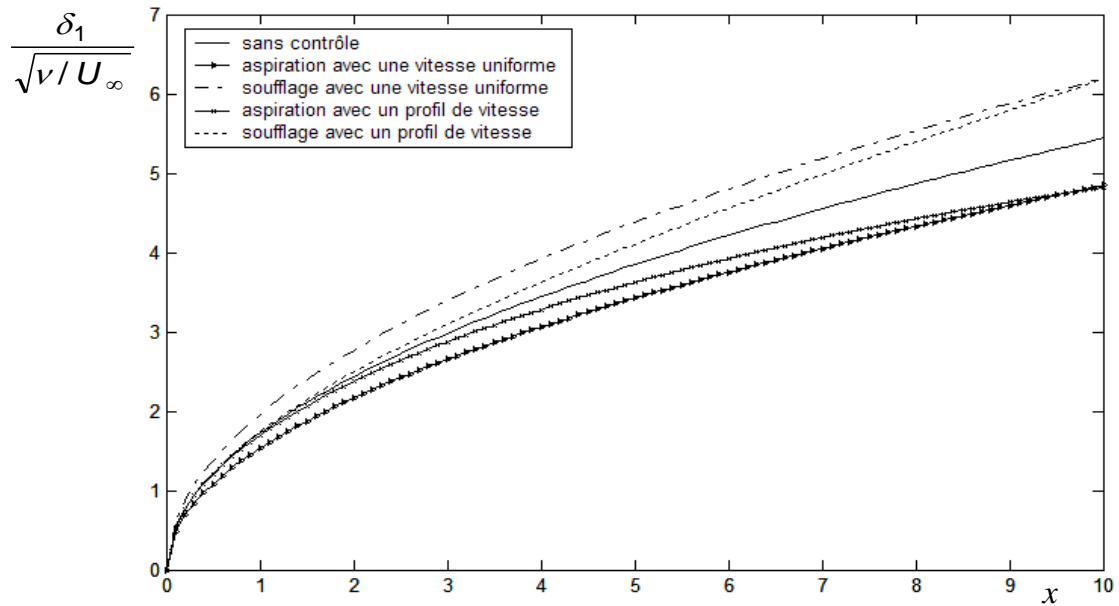


Fig.4.2 : Influence du contrôle actif sur l'épaisseur de déplacement δ_1 en couche limite sur une plaque plane à zéro incidence.

4.1.3 Epaisseur de quantité de mouvement.

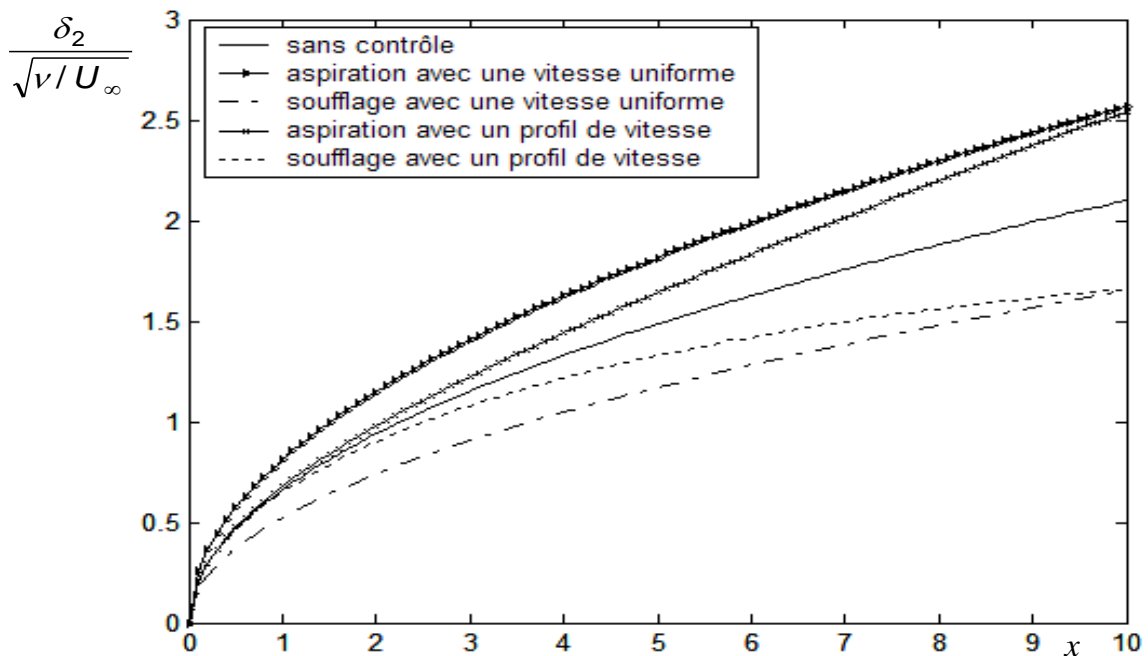


Fig.4.3 : Influence du contrôle actif sur l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 en couche limite sur une plaque plane à zéro incidence.

4.1.4 Coefficient de frottement.

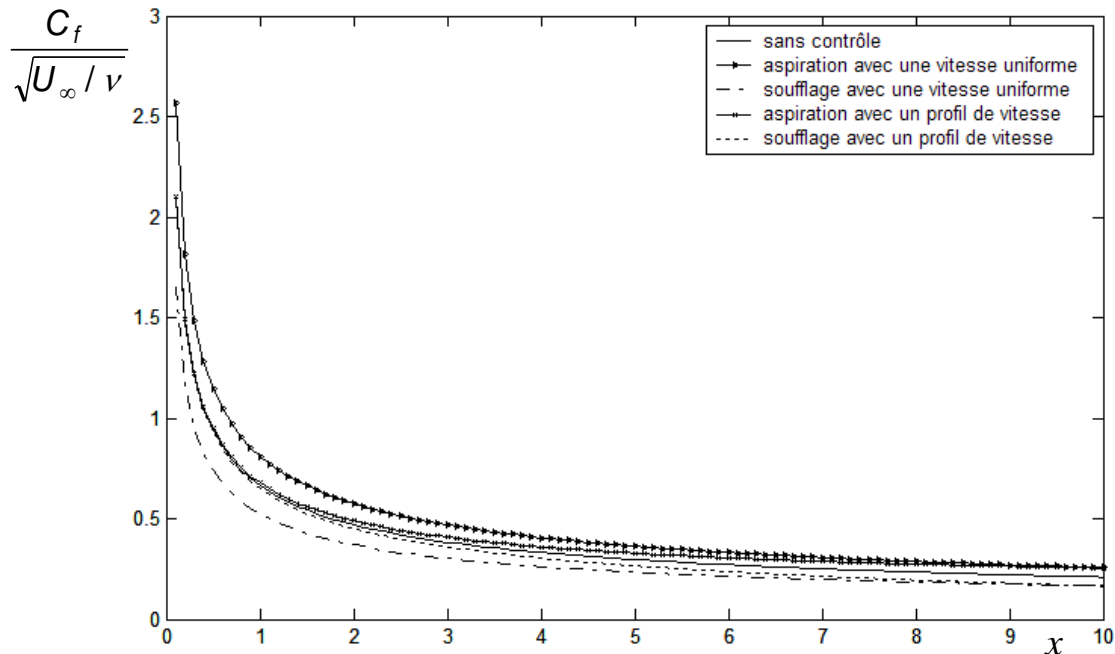


Fig.4.4 : Influence du contrôle actif sur le coefficient de frottement en couche limite sur une plaque plane à zéro incidence.

4.2 Commentaires et analyse des résultats.

La résolution de l'équation de la couche limite dynamique en variable réduite a permis de représenter les différentes caractéristiques de l'écoulement visqueux au voisinage de la paroi solide.

L'épaisseur conventionnelle δ , représentée sur la figure (4.1), reflète le bon sens d'évolution et délimite clairement la zone où les effets visqueux sont prépondérants.

Les figures (4.2),(4.3) montrent dans leur ensemble, que les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement possèdent la même allure que celle de l'épaisseur de la couche limite.

Quant à la courbe représentative du coefficient de frottement C_f figure (4.4), elle montre la dépendance du frottement et de l'abscisse x , autrement dit plus qu'on s'éloigne en aval du bord d'attaque, plus l'effet de frottement s'amortit.

Il est important de noter que les différents procédés de contrôle actif ont une grande influence sur les différentes caractéristiques de la couche limite laminaire. Le soufflage (uniforme ou linéaire) a déplacé l'épaisseur δ vers le haut, ce qui provoque une diminution dans la valeur du coefficient de frottement C_f , et induit un déplacement de la courbe de ce dernier vers le bas relativement à celle de la plaque sans contrôle.

L'épaisseur de déplacement est aussi influencée par le contrôle actif de la même manière que l'épaisseur de la couche limite, par contre, l'épaisseur de quantité de mouvement représentée sur la figure (4.3) possède un comportement contraire relativement à celui de δ et δ_1 . Ce qui traduit la dépendance étroite entre le déficit de quantité de mouvement et de type de contrôle.

Par contre, un comportement tout à fait contraire a été remarqué dans le cas d'une aspiration (uniforme ou linéaire).

On conclut que, les procédés de contrôle actif ont une grande influence sur les différentes caractéristiques de la couche limite dynamique.

Le soufflage fait augmenter l'épaisseur conventionnelle de la couche limite dynamique et l'épaisseur de déplacement, par contre il fait diminuer le coefficient de frottement C_f et l'épaisseur de quantité de mouvement, contrairement au cas de l'aspiration.

CONCLUSION GENERALE

On a étudié la couche limite sur une plaque plane lisse à incidence nulle en écoulement laminaire incompressible.

Après simplification des équations de "Navier-Stokes" et de l'équation d'énergie selon les hypothèses de "Prandtl", on a déduit les équations qui régissent notre problème.

La résolution du problème dynamique a permis de déterminer le champ des vitesses, ainsi que les différentes caractéristiques de la couche limite laminaire.

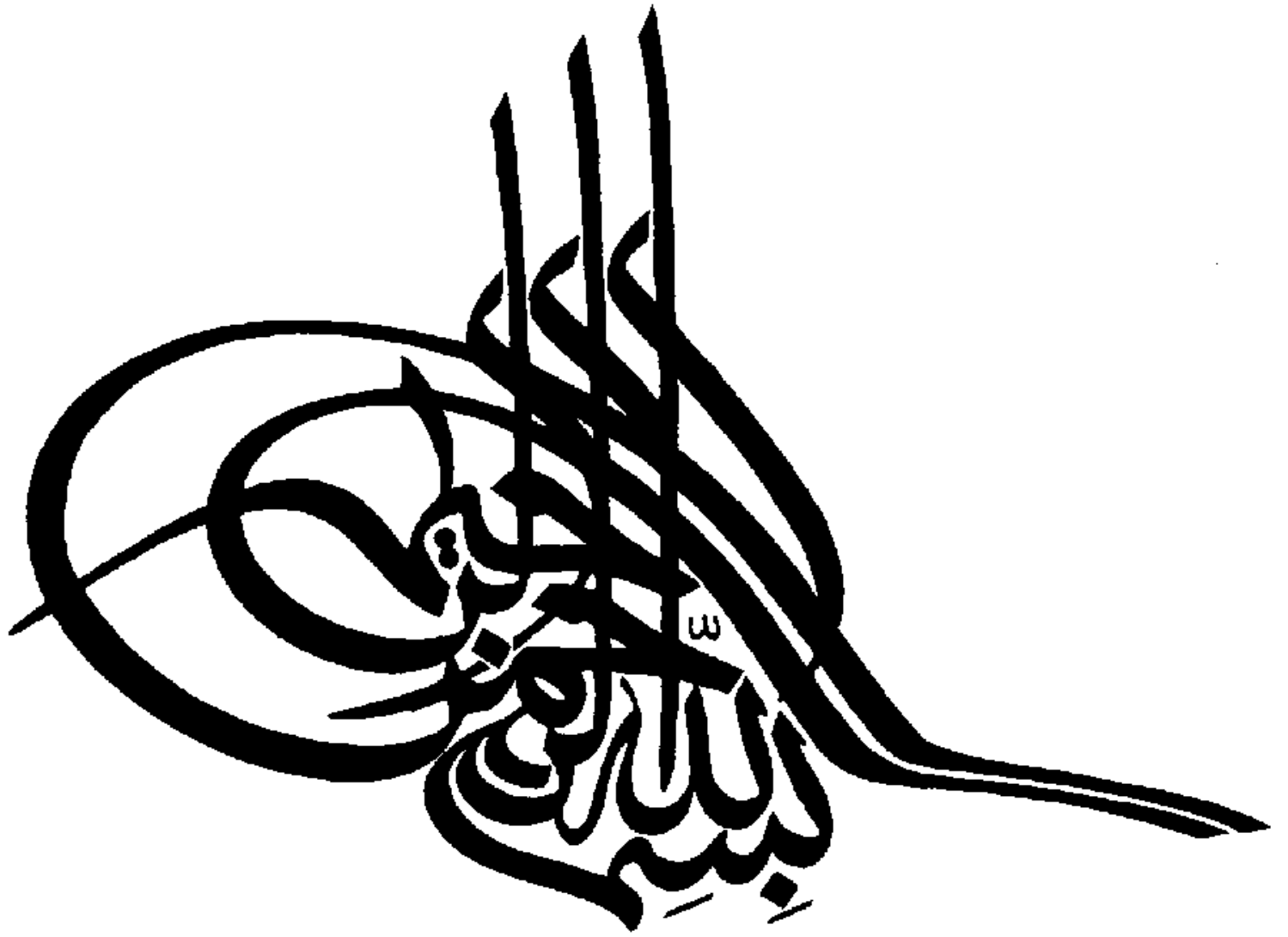
Les résultats obtenus en présence du contrôle actif des couches limites dynamiques, montrent clairement l'influence de ce dernier sur les caractéristiques de ces couches limites.

En perspective à ce travail, on propose une étude qui peut traiter les couches limites qui se développent sur diverses configurations d'obstacles, en écoulement laminaire ou turbulent, pour des fluides compressibles ou incompressibles.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. CANDEL. "Mécanique des fluides". Edition Dunod, Paris, 1995.
2. P. CHASSAING. "Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours". CÉPADÈUS, Paris, 2000.
3. C. Y. CHUEN. "An Introduction to Computational Fluid Mechanics". Seminole Publishing Company Boulder, Colorado, 1983.
4. H. SCHLISHTING. "Boundary Layer Theory". MC Graw-Hill, Newyork, 1968.
5. M. BOUMAHRAT & A. GOURDIN. "Méthodes numériques appliquées". Techniques et Documentation, Paris, 1983.





SOUTENANCE DE LICENCE

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

ETUDE DES CARACTERISTIQUES DE LA COUCHE LIMITE DYNAMIQUE LAMINAIRE INCOMPRESSIBLE SUR UNE PLAQUE LISSE

Présenté par :

MAATOUGUI ALI
GHEMIMA LAKHADAR
MAKKI MOURAD

Encadré par :

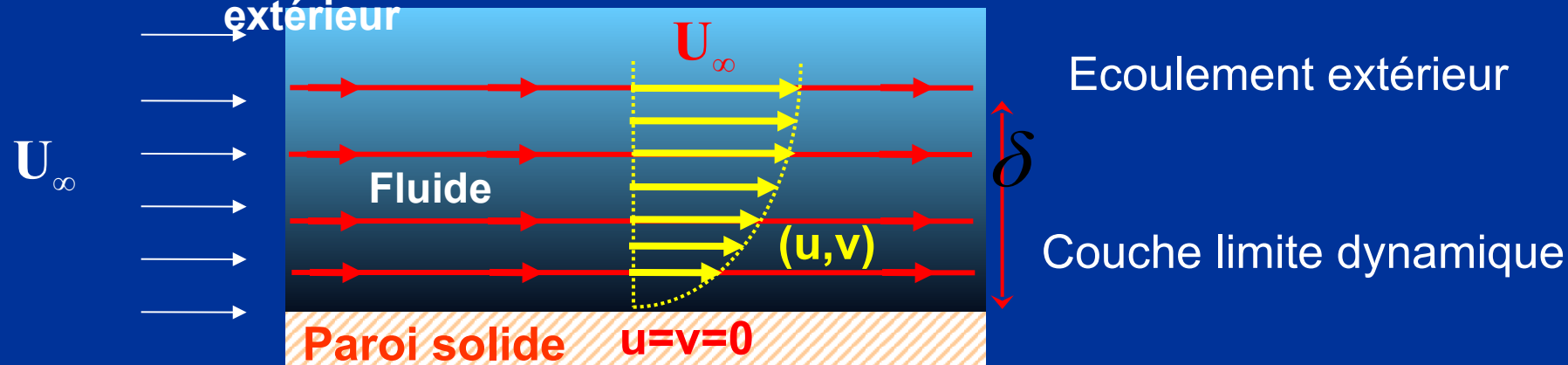
M^m : BERKANE HOUDA

1. PROBLEMATIQUE :

Etude dynamique de l'écoulement d'un fluide **visqueux** sur une paroi solide.

L'écoulement est divisé en deux zones :

- ✓ Zone visqueuse proche de la paroi : Couche limite
- ✓ Zone loin de la paroi : Ecoulement extérieur



Entre la paroi fixe ($u=0$) et l'écoulement extérieur ($u = U_\infty$), le gradient de vitesse est élevé, les effets visqueux sont prépondérants.

Zone de **couche limite dynamique**.

Introduction



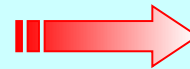
**Equations fondamentales
Grandeurs caractéristiques de la couche limite**



Etude dimensionnelle



Etude dynamique



**Contrôle actif de la
couche limite dynamique**



Résultats et commentaires de l'étude dynamique

2. Equations fondamentales :

Equation de continuité

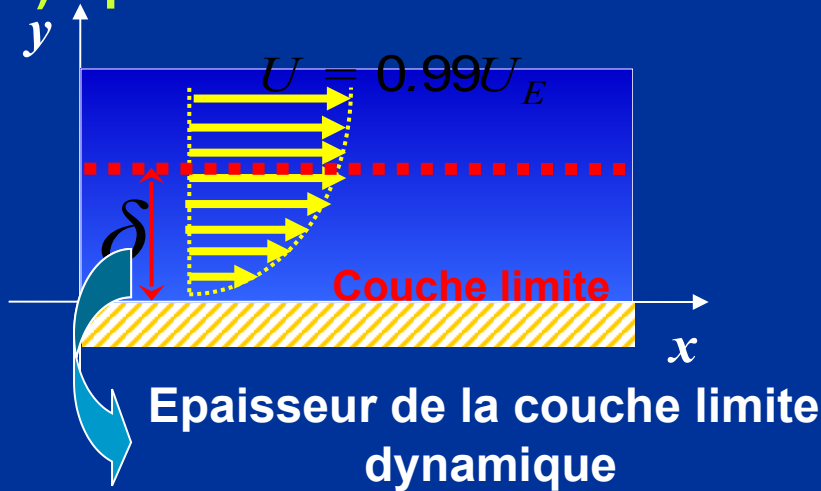
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot V) = 0$$

Equation de quantité de mouvement

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = f - \nabla \cdot p + \mu \nabla^2 V$$

3. Grandeurs caractéristiques de la couche limite

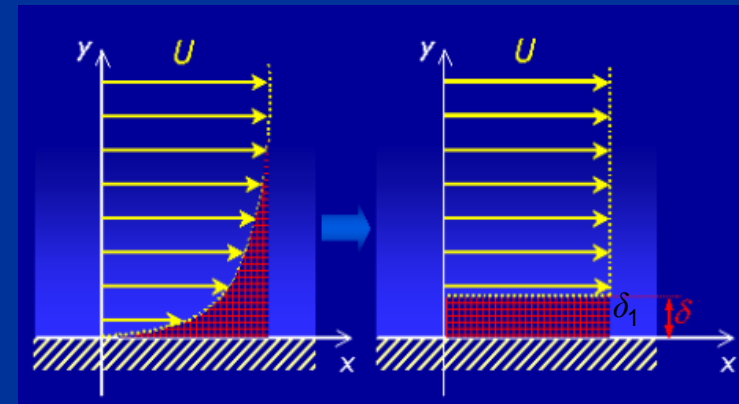
a) Epaisseur (δ)



b) Epaisseur de déplacement

Pour définir cette épaisseur, on évalue le flux manquant par rapport à celui qu'on aurait dans l'hypothèse d'un écoulement uniforme jusqu'à la paroi.

$$\delta_1(x) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \right) dy$$



c) Epaisseur de quantité de mouvement

Le ralentissement du fluide à la paroi se traduit également par un déficit de quantité de mouvement.

$$\delta_2(x) = \int_0^{\infty} \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(1 - \frac{U}{U_E} \right) dy$$

d) Coefficient local de frottement

Le coefficient local de frottement est défini à partir de la contrainte pariétale locale normé par la pression dynamique :

$$C_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2} \rho U_E^2}$$

4. Etude dimensionnelle

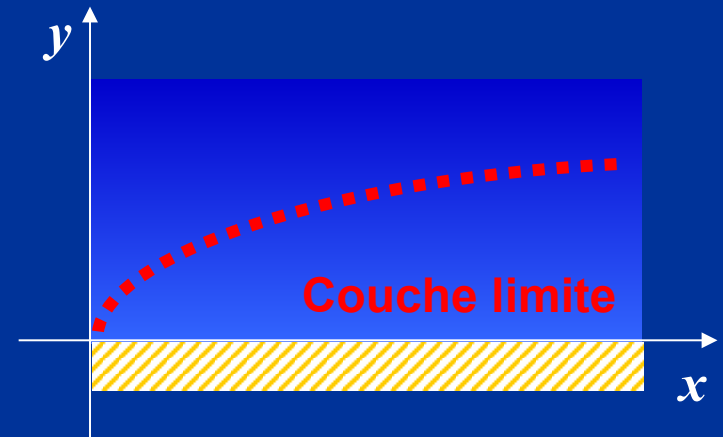
L'analyse dimensionnelle nous a permis de réduire les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{cases}$$

Les conditions aux limites :

$$U(x, 0) = V(x, 0) = 0$$

$$U(x, \infty) = U_{\infty} (\equiv C^{te}).$$



5. Etude dynamique

Soit l'écoulement d'un fluide sur une plaque plane de vitesse à l'infini amont U_∞ .

Hypothèses :

- ✓ Fluide isovolume.
- ✓ Écoulement bidimensionnel.
- ✓ Régime permanent.
- ✓ Propriétés physiques constantes.

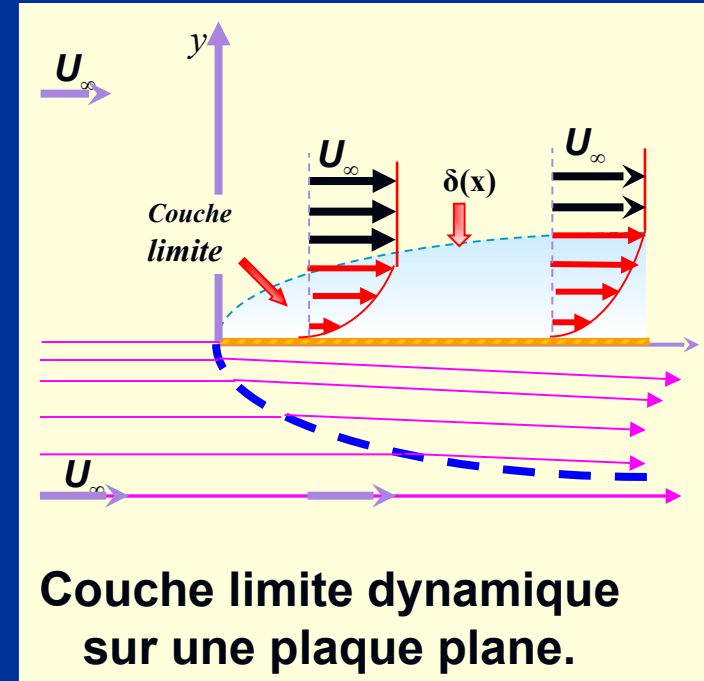
Étant donnée que l'écoulement extérieur est uniforme.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U_e^2 + gz = cte \quad (\text{Equation de Bernoulli})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{1}{2} U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} = 0 \quad \text{car } U_e = U_\infty = cte$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Résolution \longrightarrow Méthode de Blasius



a) Méthode de Blasius :

- Pour satisfaire l'équation de continuité, on pose :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad V = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- On regroupe x et y en η tel que :

$$\eta = y / \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

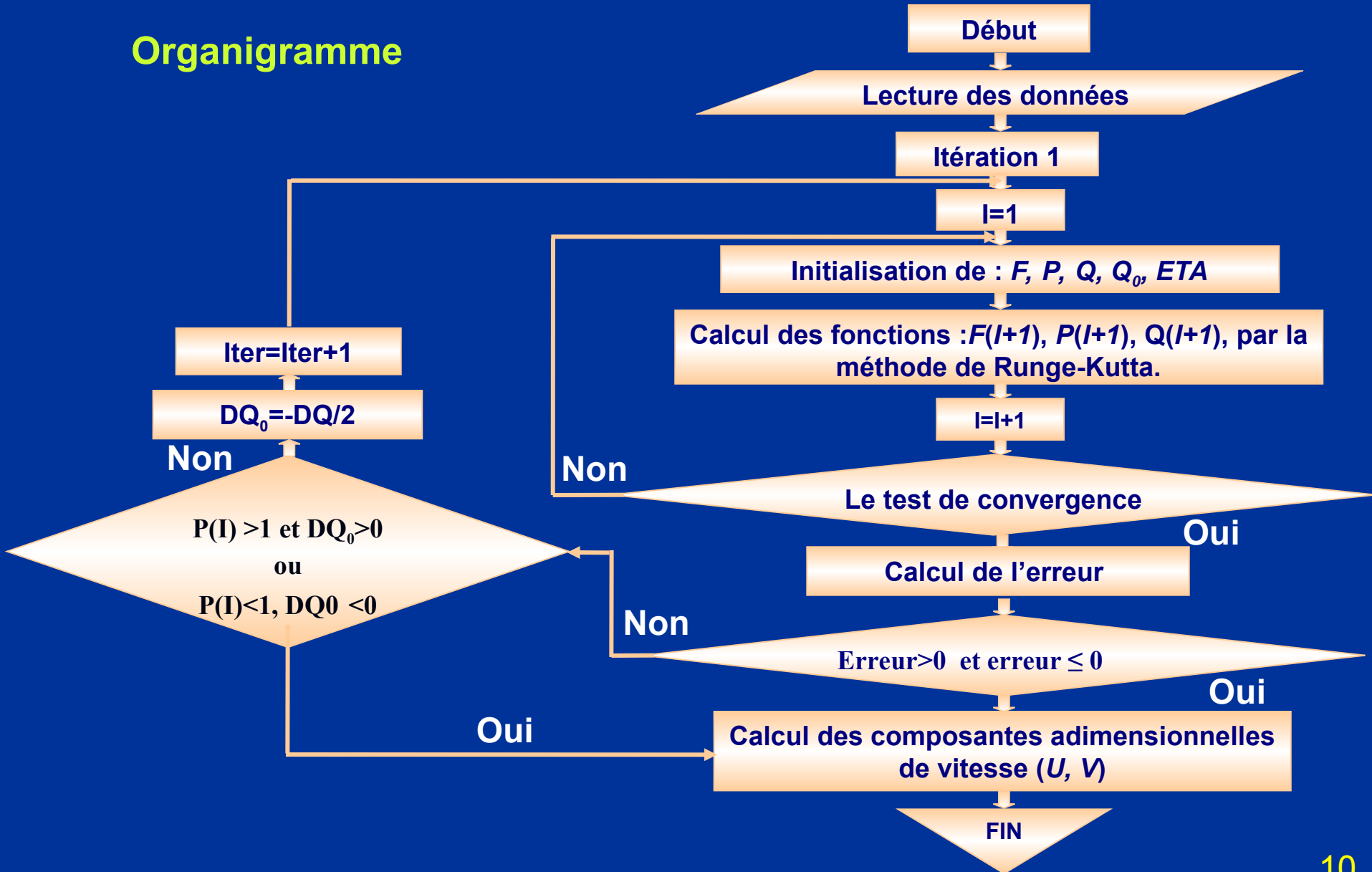
La fonction ψ sous la forme :

$$\psi = f(\eta) \sqrt{\nu U_\infty x}$$

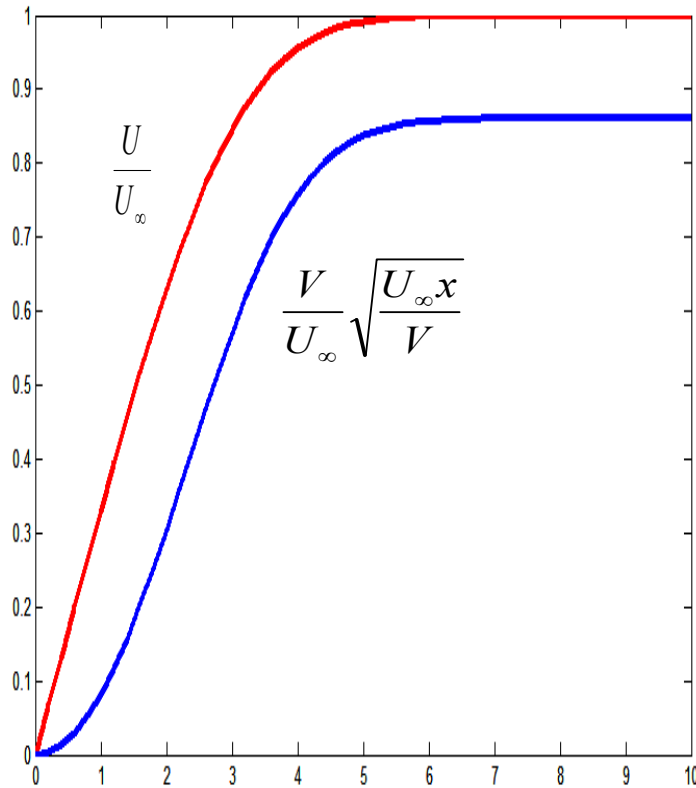
On aboutit à l'équation de Blasius :

$$f f'''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

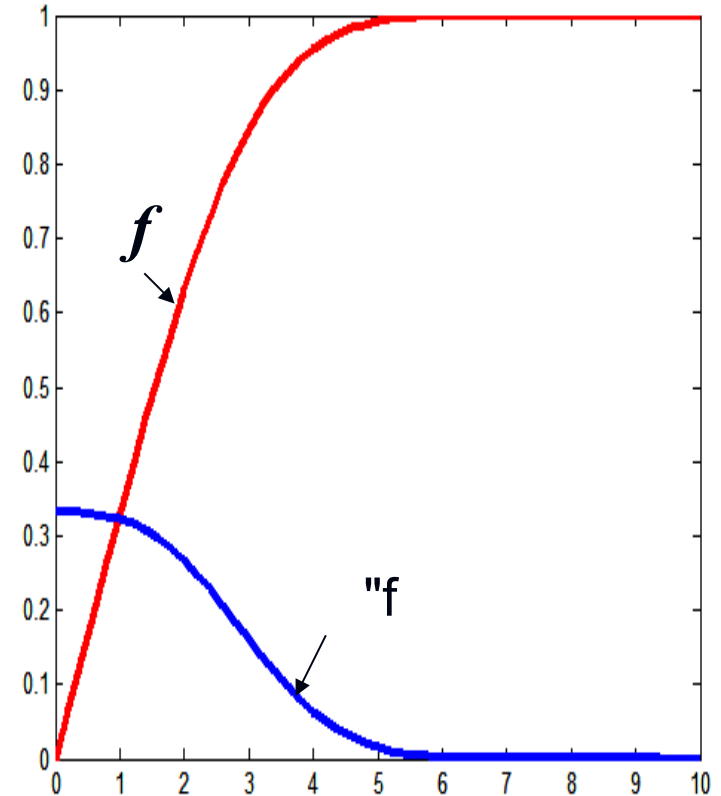
Organigramme



Les vitesses réduites et les fonctions de courant :



Les vitesses réduites



Les fonctions de Blasius

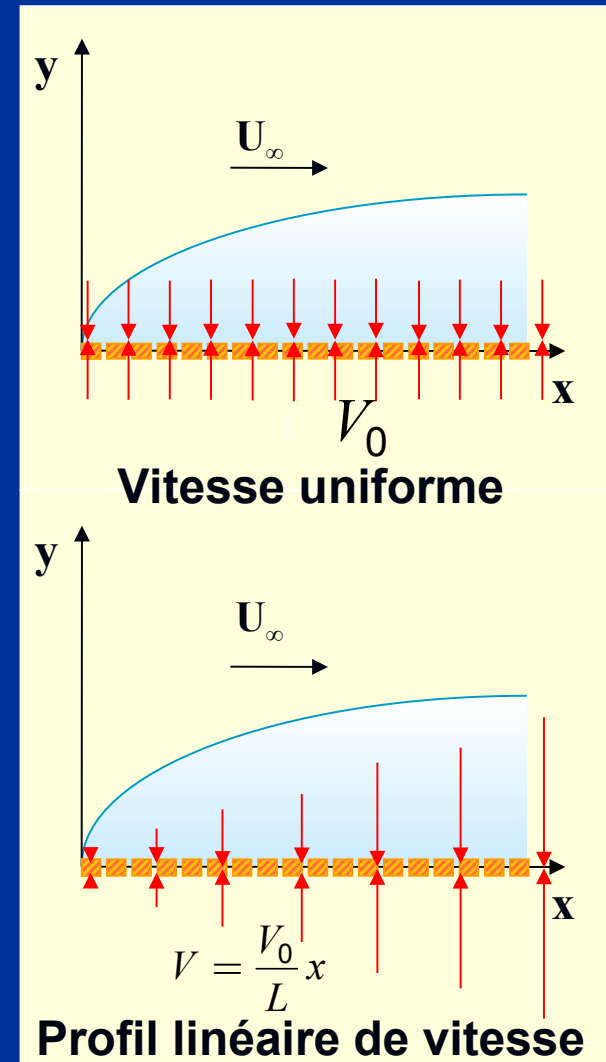
Contrôle actif de la couche limite dynamique

Pour contrôler le comportement de la couche limite dynamique, deux techniques du contrôle ont été proposé :

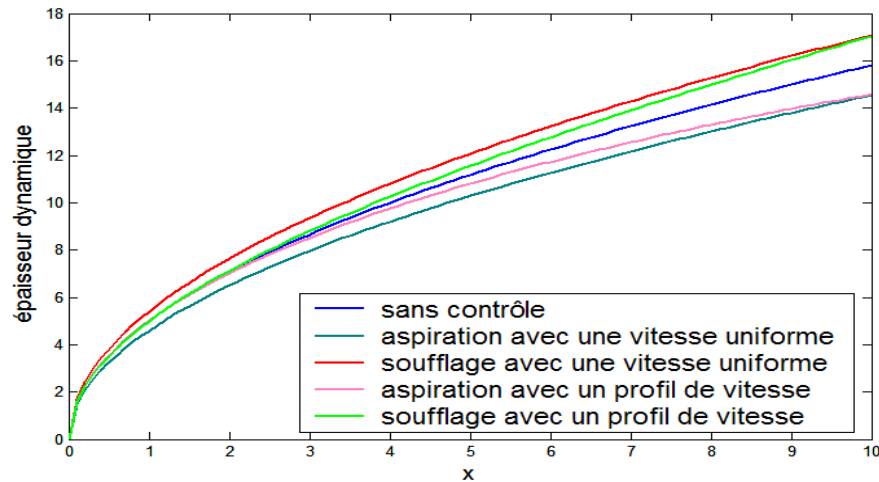
Le soufflage et l'aspiration

Qui seront exercées avec :

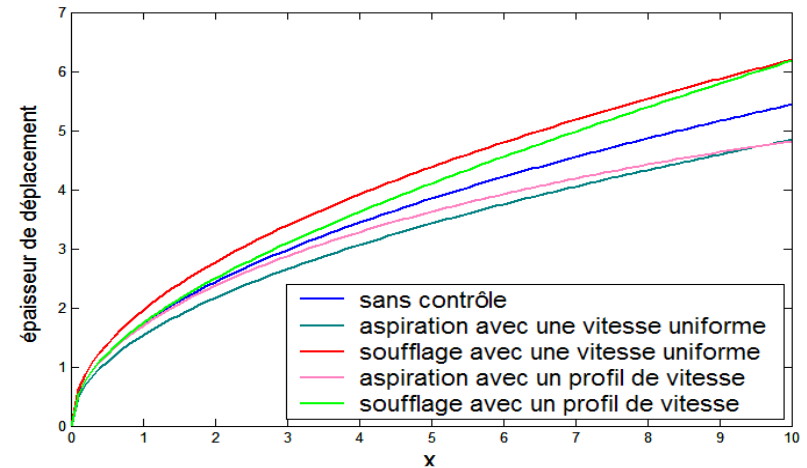
- Une vitesse uniforme ;
- Un profil linéaire de vitesse.



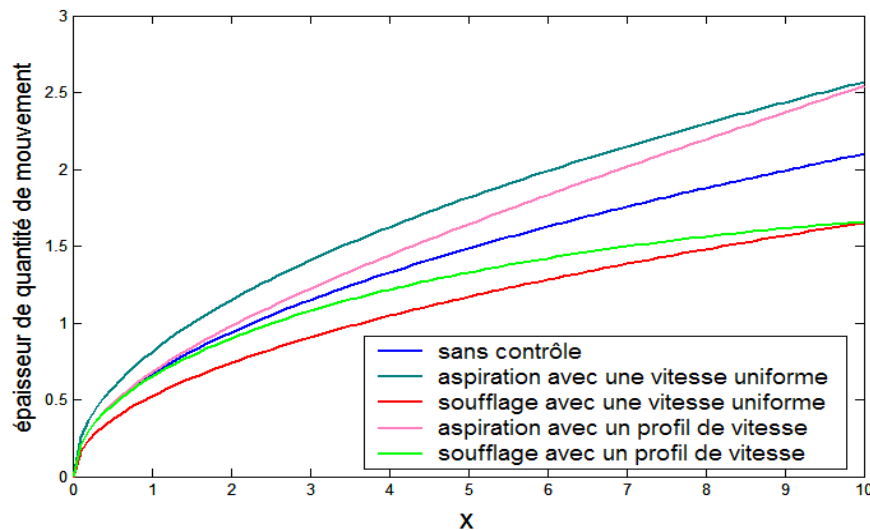
6. Résultats et commentaires



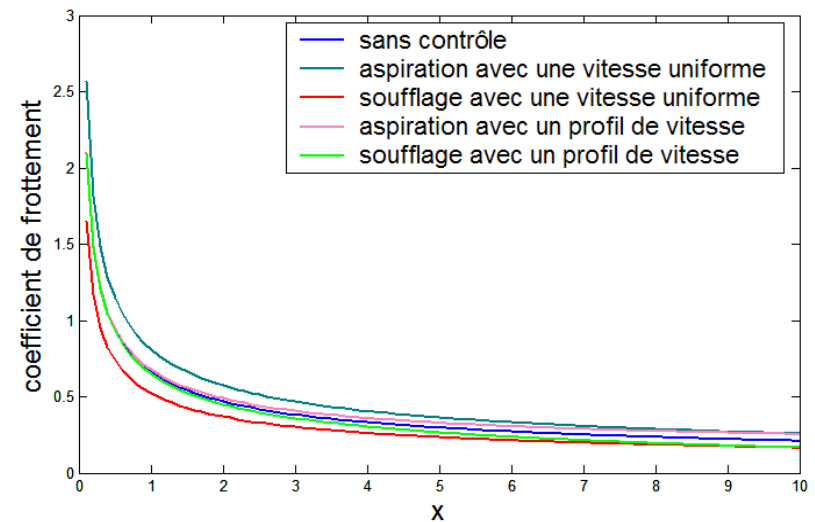
Épaisseur de la couche limite dynamique.



Épaisseur de déplacement.



Épaisseur de quantité de mouvement.



Coefficient de frottement.

Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail est l'analyse du comportement des fluides type couche limite. L'étude fait partie d'un axe de recherche très important.

La résolution du problème dynamique a permis de déterminer le champ des vitesses, ainsi que les différentes caractéristiques de la couche limite laminaire.

Les résultats obtenus par cette étude illustrent l'influence du contrôle actif sur les caractéristiques de ces couches limites..

En perspective à ce travail, on propose une étude qui peut traiter les couches limites qui se développent sur diverses configurations d'obstacles, en écoulement laminaire ou turbulent, pour des fluides compressibles ou incompressibles.