وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي–

العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية، وعلوم التسيير

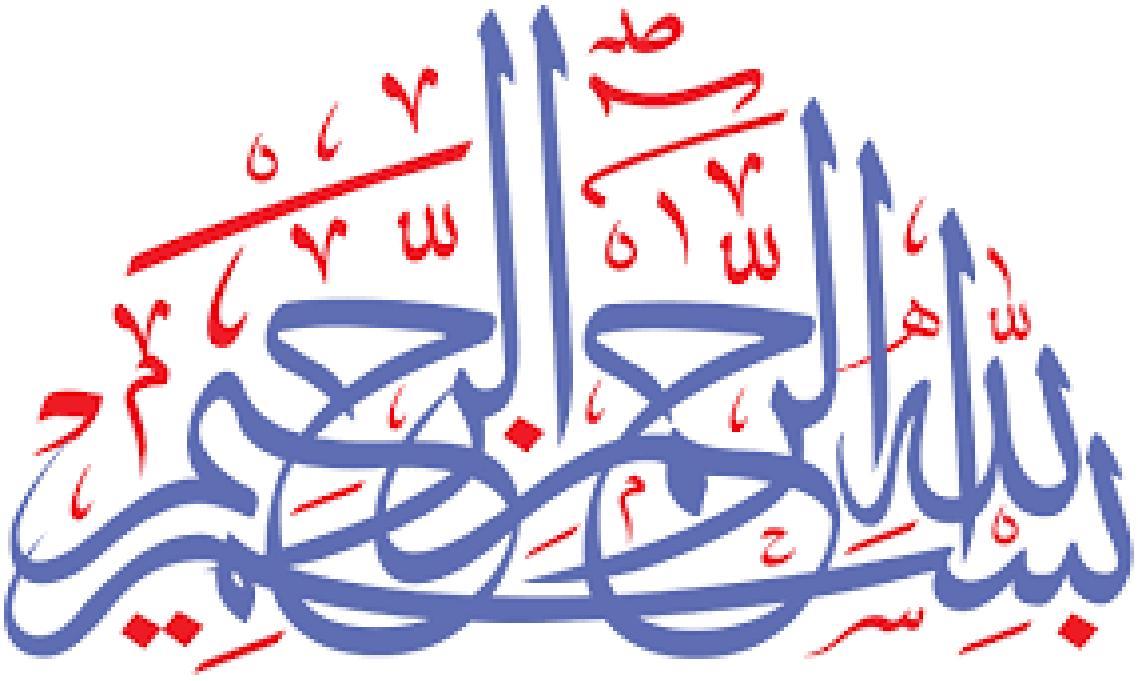
مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات في مقياس الاحصاء 3

مطبوعة موجهة الى طلبة سنة ثانية علوم اقتصادية ، علوم تجارية

د. تليلي بشير

السنة الدراسية : 2025\2026


بسم الله الرحمن الرحيم

دليل المادة التعليمية

اسم المادة : احصاء 3			
الميدان	العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية، وعلوم التسيير	**الشعبة**	علوم اقتصادية علوم تجارية
التخصص	.....	**السداسي**	الثالث
التعرف على المادة التعليمية			
اسم المادة	احصاء 3	**وحدة التعليم**	منهجية
عدد الارصدة	5	**المعامل**	3
الحجم الساعي الاسبوعي للمحاضرات	ثلاث ساعات	**الحجم الساعي الاسبوعي للاعمال الموجهة**	ساعة ونصف
وصف المادة التعليمية			
المكتسبات	الرياضيات، الاحصاء الوصفي والاحتمالات		
الهدف العام للمادة التعليمية	تمكين الطالب من استيعاب الأسس النظرية والتطبيقية لقوانين التوزيعات الاحتمالية، وتوظيفها في تحليل المشكلات الاقتصادية والإدارية والاجتماعية، مع تطوير القدرة على الصياغة الرياضية للنماذج الاقتصادية وتفسير نتائجها إحصائيًا.		
أهداف التعلم (المهارات المراد الوصول إليها)	-التعرف على أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة. -تطبيق التوزيعات الاحتمالية في معالجة وحل المشكلات الاقتصادية والإدارية والاجتماعية. -استيعاب مفهوم المتغيرات العشوائية الثنائية (المنفصلة والمتصلة) وخصائصها الأساسية. -التعرف على التوزيعات ذات المتغيرين وتحليل خصائصها الاحتمالية. تفسير النتائج الإحصائية وربطها بالظواهر الاقتصادية الواقعية.		
محتوى المادة التعليمية			
المحور الأول	أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة		
المحور الثاني	أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة		
المحور الثالث	تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية		
المحور الرابع	المتغيرات العشوائية الثنائية		

طريقة التقييم

المعيار	العلامة		الوزن النسبي للتقييم	
امتحان	20\20		وزن المحاضرة 60%	
امتحان جزئي	6			%12
واجب منزلي	4	20	وزن الاعمال 40%	%8
الجضور	6		الموجهة	%12
المشاركة	4			%8
معدل المادة				

Moy.M=(Note Ex×0.6)+(Note TD×0.4)

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

بوعبد الله، صالح.مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضي: دروس وتمارين. 2006.

غيطان، عبد الحميد ربيع.نظرة في الاحتمالات، الجزء الثاني، الطبعة الأولى. دار الكتب الأكاديمية، مصر، 2004.

سالفادور، دومينيك. ترجمة: سعدية حافظ منتصر.مدخل إلى الإحصاء والاقتصاد القياسي: نظريات ومسائل. الدار الدولية للنشر والتوزيع، مصر، 1982.

السعدي، رجال.نظرة في الاحتمالات ومبادئ الحساب الاحتمالي: دروس وتمارين، الجزء الأول، الطبعة الثانية. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2005.

العماري، عبد السلام؛ البليدي، حسين.الإحصاء والاحتمالات: النظرية والتطبيق. منشوراتELGA ، مالطا، 2000.

كبيّه، محمد؛ بدوي، ماهر.الإحصاء التطبيقي. منشورات جامعة حلب، كلية الاقتصاد، 2000.

المراجع باللغة الانجليزية

-Casella, G., & Berger, R. L. (2021).Statistical Inference (2nd ed.). Cengage Learning.

-Wooldridge, J. M. (2020).Introductory Econometrics: A Modern Approach (7th ed.). Cengage Learning.

-Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2021).Basic Econometrics (6th ed.). McGraw-Hill Education.

-DeGroot, M. H., & Schervish, M. J. (2012).Probability and Statistics (4th ed.). Pearson.

-Rice, J. A. (2006).Mathematical Statistics and Data Analysis (3rd ed.). Cengage Learning.

-Freedman, D., Pisani, R., & Purves, R. (2007).Statistics (4th ed.). W. W. Norton & Company.

-Ross, S. M. (2014).Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists (5th ed.). Academic Press.

الاعمال الشخصية المقررة للمادة

إعداد بطاقة قراءة	يقوم الطالب بالبحث في مراجع المادة واستعمالها لإعداد البطاقة بشكل منهجي.
واجب حول التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة	
واجب حول التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتصلة	
واجب حول تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية	
واجب حول المتغيرات العشوائية المزدوجة	
استجواب تقييمي	اختبار قصير لتقييم مدى استيعاب الطالب للمحاضرات والأعمال التطبيقية.
تقييم تفاعلي عبر منصة Moodle	متابعة التفاعل والمشاركة في الأنشطة الإلكترونية للطلبة.

قائمة المحتويات

دليل المادة التعليمية I

طريقة التقييم II

قائمة المراجع III

الاعمال الشخصية المقررة للمادة IV

قائمة المحتويات..... V .

مقدمة عامة 1

المحور الأول : قوانين التوزيعات الإحتمالية المتقطعة

تمهيد 2

1.توزيع بيرنولي"Bernoulli distribution":..... 2

2.توزيع ذي الحدين (التوزيع الثنائي) " Binomial distribution" 5

3.توزيع بواسون"Poisson distribution" 12

4.التوزيع الهندسي"Geometric distribution" 16

5. التوزيع فوق الهندسي "Hypergeometric distribution" 20

المحور الثاني : أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

تمهيد 31

1.التوزيع الطبيعي Normal Distribtion..... 31

2. التوزيع المنتظمuniform distribution 42

3.توزيع كاما"Gamma Distribution" 46

4.توزيع الأسي (Exponential Distribution)..... 51

5.توزيع بيتا "Beta Distribution" 54

6.توزيع كاي مربع "Chi-Square Distribution" 59

7.توزيع ستيودنت "Student's t-distribution" 63

8.توزيع فيشر "Distribution de Fisher" 68

المحور الثالث : تقريب التوزيعات الاحتمالية

تمهيد : 79

1.تقريب توزيع ثنائي الحد الى توزيع بواسون 79

2.تقريب توزيع ثنائي الحد الى التوزيع الطبيعي : 79

3.تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي 80

4.تقريب قانون فوق الهندسي الى قانون ثنائي الحدين 81

المحور الرابع: المتغيرات العشوائية الثنائية

تمهيد: 89

1. المتغيرات العشوائية المزدوجة المنفصلة 89

1.1 التوزيع الاحتمالي المنفصل للمتجه العشوائي: (X ,Y) 90

2.1. دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي (X,Y) 91

3.1. القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المتقطعة 91

2.المتغيرات العشوائية المزدوجة المتصلة: 92

1.2.دالة التوزيع الاحتمالي المتصل للمتجه العشوائي (X,Y) 93

2.2. دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي 93

3.2. القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المتصلة 94

الملاحق 101

مقدمة عامة

تُعدّ التوزيعات الاحتمالية من الأدوات الجوهرية في علمي الاحتمالات والإحصاء، إذ تُستخدم لوصف وتحليل الظواهر العشوائية التي تظهر في الطبيعة والعلوم والمجتمع. وتنقسم هذه التوزيعات إلى نوعين رئيسيين: التوزيعات الاحتمالية المنفصلة والتوزيعات الاحتمالية المتصلة.

في التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، تأخذ المتغيرات قيماً محددة ومنفصلة، وغالبًا ما تكون هذه القيم محدودة أو قابلة للعد. ومن أمثلتها توزيع بواسون، الذي يُستخدم لتمثيل عدد مرات وقوع حدث معين خلال فترة زمنية أو مجال مكاني محدد. أما التوزيعات الاحتمالية المتصلة، فإن المتغير فيها يمكن أن يأخذ أي قيمة ضمن مجال مستمر، مثل التوزيع الطبيعي الذي يُستعمل على نطاق واسع في تمثيل توزيع الأوزان أو الأطوال داخل عينة إحصائية.

إلى جانب ذلك، يُلجأ إلى تقريب التوزيعات من أجل تبسيط التحليل الإحصائي والاقتصادي، خاصة في الحالات التي يكون فيها التوزيع الأصلي معقدًا من حيث الحساب. فعلى سبيل المثال، يمكن تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي عندما يكون حجم البيانات كبيرًا، مما يسهل إجراء العمليات الحسابية.

أما التوزيعات المشتركة، فهي تُعنى بدراسة الاحتمالات المرتبطة بمتغيرين أو أكثر في آن واحد، وتُستخدم لتحليل العلاقات الإحصائية بينها وفهم طبيعة التأثير المتبادل بينها. وتُعد هذه التوزيعات ذات أهمية كبيرة في تحليل البيانات والبحث العلمي، لأنها تساعد على تفسير العلاقات بين المتغيرات ودعم اتخاذ القرارات المبنية على أسس إحصائية سليمة.

وخلاصة القول، فإن الإلمام بالتوزيعات الاحتمالية يُسهم في فهم أفضل للظواهر العشوائية وتحليل البيانات بفعالية، مما يعزز جودة القرارات المتخذة في مجالات البحث العلمي والأعمال والعديد من مجالات الحياة الأخرى.

المحور الأول : قوانين التوزيعات الإحتمالية المتقطعة

تمهيد

تُعدّ التوزيعات الاحتمالية المتقطعة من الأدوات الأساسية في تحليل وفهم الظواهر التي تتسم بعدم الاستمرارية، إذ تُستخدم لتحديد احتمالات القيم المنفصلة على مقياس محدد. وتكتسب هذه التوزيعات أهمية كبيرة لدى الباحثين والمحللين في مختلف المجالات، مثل الإحصاء، والعلوم الاجتماعية، والهندسة، والعلوم الطبيعية، لما توفره من إطار منهجي لتحليل الظواهر العشوائية المتقطعة.

ويُنظر إلى التوزيعات الاحتمالية المتقطعة على أنها أحد المفاهيم الجوهرية في علمي الإحصاء والاحتمالات، حيث تسهم في توضيح كيفية توزيع الاحتمالات على الأحداث غير المستمرة. وتمثل هذه التوزيعات أدوات رياضية فعّالة تُمكّن من حساب احتمالات مجموعة محددة من النتائج الممكنة ضمن سياق تجارب أو ظواهر معينة.

كما تتيح هذه التوزيعات توصيفًا دقيقًا لسلوك المتغيرات العشوائية في الحالات التي تكون فيها القيم متقطعة، وتساعد على تحليل الأنماط الاحتمالية للأحداث التي تتكرر بشكل غير مستمر، مما يسهم في تفسير النتائج المتوقعة واتخاذ قرارات مبنية على أسس علمية.

سيتم في هذا الفصل استعراض أهم القوانين المرتبطة بالتوزيعات الاحتمالية المتقطعة، مع توضيح كيفية توظيفها في حساب الاحتمالات ضمن سيناريوهات مختلفة. وستُمكّن هذه القوانين من تحليل البيانات المتقطعة وتفسيرها بدقة، إضافة إلى استنتاج النتائج المحتملة اعتمادًا على السلوك الاحتمالي للظاهرة المدروسة.

تُعرّف قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة بأنها مجموعة من الصيغ والقوانين الرياضية التي تقدم وصفًا دقيقًا لتوزيع الاحتمالات الخاصة بالأحداث والقيم العشوائية غير المستمرة. ومن أبرز هذه التوزيعات: توزيع برنولي، وتوزيع ذي الحدين، وتوزيع بواسون، والتوزيع الهندسي، والتوزيع فوق الهندسي، وغيرها من التوزيعات ذات الأهمية التطبيقية.

1.توزيع بيرنولي"Bernoulli distribution":

يُعدّ توزيع برنولي من الركائز الأساسية في علمي الإحصاء والاحتمالات، وقد سُمّي بهذا الاسم نسبة إلى العالم السويسري برنولي الذي وضع الأسس الأولى لنظرية الاحتمالات. ويتميّز هذا التوزيع ببساطته وقدرته الفعّالة على تمثيل الظواهر ذات النتائج الثنائية، حيث تقتصر نتائج التجربة على حالتين فقط: النجاح أو الفشل. ففي تجربة معينة اذا كانت النتائج المتوقعة لهذه التجربة عبارة عن احتمالين هما

احتمال النجاح واحتمال الفشل، حيث نرمز لاحتمال النجاح بالرمزP ، و نرمز لاحتمال الفشل بالرمزP q=1- فان المتغير العشوائي X يمثل نجاح التجربة أو فشلها وهذا المتغير يسمى بمتغير بيرنولي و سوف نرمز له بالرمز

$X \mapsto Ber\ (n=1.\ P)$ وتوزيعه الاحتمالي يسمى بتوزيع بيرنولي.

يكون احتمال X يساوي قيمة محددة ولتكن X، حيث X= 0 عند فشل التجربة، وX=1 عند نجاحها، و باحتمالين $P(X=1)=P$ و $P(X=0)=1-P=q$ ، كما أن عدد مرات تكرار التجربة n=1

1.1. خصائص توزيع بيرنولي:

يتسم توزيع برنولي بمجموعة من الخصائص التي تميزه وتحدد طبيعة سلوكه، وفيما يلي أبرز الخصائص الأساسية لتوزيع برنولي:

•**نتيجتان محتملتان** :يعبّر توزيع برنولي عن تجربة عشوائية لا تنتج إلا نتيجتين فقط، وهما النجاح أو الفشل.

•**احتمال النجاح** :يُرمز لاحتمال تحقق النجاح في تجربة برنولي بالرمز(P) ، ويمثل فرصة حدوث النجاح في التجربة الواحدة.

•**احتمال الفشل** :بما أن نتائج التجربة محصورة في حالتين فقط، فإن احتمال الفشل يُعطى بالعلاقة (1 – P).

•**الاستقلالية** :تكون تجارب برنولي مستقلة عن بعضها البعض، أي أن نتيجة أي تجربة لا تؤثر على نتائج التجارب الأخرى.

•**تمثيل النتائج عددياً** :يُمثَّل النجاح عادة بالقيمة (1)، في حين يُمثَّل الفشل بالقيمة (0)، مما يسهل المعالجة الرياضية والإحصائية.

•**التعميم إلى التوزيع ذي الحدين** :يُعدّ توزيع برنولي الحالة الخاصة والأساس الذي يُبنى عليه التوزيع ذي الحدين، والذي يصف عدد النجاحات في سلسلة من التجارب البرنولية المستقلة.

•**التطبيقات العملية** :يُستخدم توزيع برنولي في مجالات متعددة مثل الإحصاء، وعلم الأحياء، وعلوم الحاسوب، والاقتصاد، وغيرها، لتمثيل وتحليل الظواهر ذات النتائج الثنائية (نجاح / فشل) في مختلف الحالات التطبيقية.

2.1. دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائيx :

دالة الكتلة الاحتمالية (دالة التوزيع الاحتمالي) للمتغير العشوائي x الذي يتوزع وفق توزيع بيرنولي تكون من الشكل التالي:

أي:

$$P(X=x)=\begin{cases}P & ;x=1\\ q & ;x=0\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

3.1. التوقع و التباين للمتغير العشوائي X

التوقع و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X يكون من الشكل التالي:

بالنسبة للقيمة المتوقعة، لدينا :

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{1} x.P(X=x) = \sum_{x=0}^{1} x.P^x q^{1-x} = 0.q + P.1 = P$$

و بالتالي فإن المتوسط يساوي $E(X)=P$ $= \mu_x$ و هو احتمال النجاح في محاولة بيرنولي.

بالنسبة للتباين لدينا :

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

كما أن :

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2.P(X=x) = \sum_{x=0}^{1} x^2.P^x.q^{1-x} = 0.q + P.1 = P$$

وعليه فإن :

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = P - P^2 = P(1-P) = Pq$$

و بالتالي فإن التباين يساوي $\sigma_x^2 = V(x) = Pq$

بالنسبة للانحراف المعياري لدينا: $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{Pq}$

4.1. دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X

دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X تكون كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases}0 & ,x<1\\ q & ,0\le x<1\\ 1 & ,x\ge 1\end{cases}$$

تمارين مقترحة

التمرين 01

تفترض إدارة مؤسسة تجارية أن احتمال تحقيق صفقة بيع ناجحة مع أحد الزبائن خلال يوم معين يساوي 0.8.

ما هو احتمال فشل المؤسسة في إتمام هذه الصفقة خلال ذلك اليوم؟

حل التمرين 01

احتمال الفشل تعبر عنه الحالة المعاكسة للنجاح، وبما أن النجاح له احتمال 0.8، فإن الفشل سيكون باحتمال 1- 0.8 = 0.2.

التمرين 02

ألقيت قطعة نقود مرة واحدة و كان النجاح يمثل ظهور الرقم، أوجد ما يلي:

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

2.أحسب الوسط الحسابي، والتباين، والانحراف المعياري.

3.دالة التوزيع التراكمية للمتغير X .

حل التمرين 02

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X

لدينا قطعة النقود لها وجهين الصورة و الرقم، و بما أن الرقم تمثل نجاح فإن الصورة تمثل فشل، كما أن احتمال النجاح يساوي احتمال الفشل و يساوي $\frac{1}{2}$ ، و بالتالي دالة التوزيع الاحتمالي تكون بالشكل التالي:

$$P(X=x)=\begin{cases}P & ;x=1\\ q & ;x=0\\ 0 & ;otherwise\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2} & ;x=1\\ \frac{1}{2} & ;x=0\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

2.أحسب الوسط الحسابي، والتباين، والانحراف المعياري.

$$\mu_x = \mathrm{E(X)} = P = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_x^2 = V(x) = Pq = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

3.دالة التوزيع التراكمية للمتغير X.

$$F(X)=\begin{cases}0 & ;x<0\\ q & ;0\le x<1\\ 1 & ;x\ge 1\end{cases}\Rightarrow F(X)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ;x<0\\ \frac{1}{2} & ;0\le x<1\\ 0 & ;\ x\ge 1\end{cases}$$

2.توزيع ذي الحدين (التوزيع الثنائي) "Binomial distribution"

تتميز العديد من الظواهر العملية بكون نتائجها محصورة في حالتين فقط إحداهما تُسمّى و يحدث باحتمال P ، أما النتيجة الثانية تسمى فشلا و تحدث باحتمال$q=1-P$ ، يُطلق على هذا النوع من التجارب اسم تجربة بيرنولي، وعند تكرار تجربة برنولي عدد n من المرات، حيث تكون كل تجربة مستقلة عن غيرها نحصل على ما يُعرف باسم توزيع ذي الحدين.

نفرض أننا كررنا تجربة ما عدد n من المرات المستقلة، حيث في كل مرة تكون لدينا نتيجتين إما نجاح باحتمال p أو فشل باحتمال $q= 1- P$. المتغير العشوائي الذي يعطينا عدد مرات النجاح في مجموع هذه المحاولات، و يسمى المتغير العشوائي ذو الحدين، ثوابته *(n,p)* و نكتب $X \mapsto B(n,P)$

وقانون الاحتمال لهذا التوزيع كما يلي:

$$P(X) = C_x^n P(1-P)^{n-x}$$

1.2.خصائص توزيع ذي الحدين

يتصف توزيع ذي الحدين بمجموعة من الخصائص التي تحدد طبيعته وسلوكه. فيما يلي أبرز هذه الخصائص الرئيسية :

- **نتيجتين ممكنتين** : يصف توزيع ذي الحدين كل تجربة عشوائية تنتج نتيجتين ممكنتين فقط نجاحا أو فشلا.

- **احتمالية النجاح :** تُعبّر احتمالية تحقق النجاح في توزيع ذي الحدين *(P)*.

- **احتمالية الفشل :** وبما أن التجربة تحتوي على نتيجتين فقط، النجاح أو الفشل، فإن احتمال حدوث الفشل يُعطى بالعلاقة: *(1-P)*.

- **الاستقلالية :** تكون نتائج تجارب توزيع ذي الحدين مستقلة عن بعضها، أي أن نتيجة أي تجربة لا تؤثر على نتائج التجارب الأخرى.

- **تعدد المحاولات :** تتكون تجربة توزيع ذي الحدين من سلسلة من المحاولات المستقلة، وعددها يرمز له بـ *(n)* .

تطبيقات عملية: يُستخدم توزيع ذي الحدين في مجالات متعددة لتوصيف الأحداث الثنائية، مثل: جودة الإنتاج (معيب أو سليم)، نتيجة الامتحانات النهائية (نجاح أو رسوب)، نتيجة مباراة رياضية (فوز أو خسارة)، إصابة هدف معين أو فشله، وغيرها. ويُمكن الاعتماد عليه لتحليل عدد النجاحات أو الفشل عبر عدة محاولات مستقلة.

2.2دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائيX :

دالة الكتلة الاحتمالية (دالة التوزيع الاحتمالي) للمتغير للعشوائي X الذي يتوزع وفق توزيع ذي الحدين تكون من الشكل التالي:

$$X \mapsto B(n.P) \qquad ,x=0,1,3,\ldots..,n$$

$$f(X) \;\mapsto\; P(X=x) = C_x^n P^X (1-P)^{n-x}$$

أي:

$$P(X=x) = \begin{cases} C_x^n P^x (1-P)^{n-x} & ; x=1, x=0,1,3,\ldots.,n \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

3.2.التوقع والتباين للمتغير العشوائيX :

بالنسبة للقيمة المتوقعة، لدينا:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x.P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x.C_x^n P^x(1-P)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} P^x(1-P)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x.\frac{n(n-1)!}{x(x-1)!\,(n-x)!} P^{x-1}P(1-P)^{n-x} = nP\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} P^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

نفترض أن : $x = k+1 \Rightarrow k = x-1$ وبالتالي :

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x.P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x.C_x^n P^x(1-P)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} P^x(1-P)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=1}^{n} x.\frac{n(n-1)!}{x(x-1)!\,(n-x)!} P^{x-1}P(1-P)^{n-x} = nP\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} P^{x-1}(1-p)^{n-x}$$
$$= nP\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} P^k(1-P)^{(n-1)-k}$$

حسب نظرية ذات الحدين :

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} C_n^x a^x b^{n-x}$$

نجد :

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x.P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x.C_x^n P^x(1-P)^{x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} P^x(1-P)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=1}^{n} x.\frac{n(n-1)!}{x(x-1)!\,(n-x)!} P^{x-1}P(1-P)^{n-x} = nP\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} P^{x-1}(1-p)^{n-x}$$
$$= nP\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} P^k(1-P)^{(n-1)-k}$$
$$= nP\sum_{k=0}^{n-1} C_{(n-1)}^k P^k(1-P)^{(n-1)-k} = nP(P+(1-P))^{n-1} = nP$$

و بالتالي فإن المتوسط الحسابي يساوي $\mu_x = E(X) = nP$

وبالنسبة للتباين لدينا :

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2.P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x^2.C_n^x P^x(1-P)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{x^2 n!\,P^x(1-P)^{n-x}}{x!\,(n-x)!}$$

وبتعويض X ب x(x-1)

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} \frac{[x(x-1)+x]n!}{x!\,(n-x)!} P^x(1-P)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \frac{xn!\,(x-1)+xn!}{x!\,(n-x)!} P^x(1-P)^{n-x}$$

$$= \left[\sum_{x=0}^{n} \frac{x(x-1)n!}{x!\,(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} \frac{xn!}{x!\,(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x}\right]$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)!\,[(n-2)-(x-2)]!} P^x (1-P)^{(n-2)(x-2)} + E(X)$$

$$= n(n-1)P^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,[(n-2)-(x-2)]!} P^{(x-2)} (1-P)^{(n-2)-(x-2)} + nP$$

$$= n(n-1)P^2 (q+P)^{(n-2)} + nP = n^2P^2 - nP^2 + nP$$

ولدينا :

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = n^2P^2 - nP^2 + nP - n^2P^2 = nP - np^2 = nP(1-p) = nPq$$

وهكذا فإن : V(X) = nP(1- P)

و بالتالي فإن الانحراف المعياري يساوي : $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{nP(1-p)}$

4.2.دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X :

دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع ذي الحدين ثوابته (n,p) ونكتب :

$X \mapsto B(n;P)$

$$F(\alpha) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$

تمارين مقترحة:

التمرين 01

لنفترض أن شركة تجارية تقوم بإرسال 5 عروض أسعار مستقلة لعملاء محتملين، ويعتبر قبول العرض نجاحًا.، أوجد توزيع المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد العروض المقبولة من بين العروض الخمسة.

حل التمرين 01

نعتبر قبول العرض نجاحًا، وبالتالي X يمثل عدد النجاحات في 5 محاولات، أي أنه يتبع توزيع ذي الحدين:

$X \mapsto B\left(n = 5.\ P = \frac{1}{2}\right)$,x=0,1,3,4,5

$$f(X) \mapsto P(X = X) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$

إذا

$$P(0) = C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32}$$

$$P(1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{32}$$

$$P(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{10}{32}$$

$$P(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{10}{32}$$

$$P(4) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5}{32}$$

$$P(5) = C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{1}{32}$$

التمرين 02

تفترض إدارة شركة أن من بين 6 فواتير مراجعة لكل فترة مالية، احتمال أن تكون الفاتورة صحيحة دون أخطاء يساوي P=0.4 . ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الفواتير الصحيحة من بين الستة .احسب دالة التوزيع التراكمي للمتغير X.

حل التمرين 02 :

$X \mapsto B(n=6.P=0.4)$

$$F(\alpha) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$

$$F(0) = P(0) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x} = C_6^0 (0.4)^0 (0.6)^{6-0} = 0.0467$$
$$F(1) = P(0) + P(1) = 0.0467 + C_6^1 (0.4)^1 (0.6)^{6-1} = 0.0467 + 0.1866 = 0.2333$$
$$F(2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.2333 + C_6^2 (0.4)^2 (0.6)^{6-2} = 0.2333 + 0.3110 = 0.5443$$
$$F(3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0.5443 + C_6^3 (0.4)^3 (0.6)^{6-3} = 0.5443 + 0.2765 = 0.5443$$
$$F(4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0.5443 + C_6^4 (0.4)^4 (0.6)^{6-4} = 0.5443 + 0.13824 = 0.68254$$
$$F(5) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 0.68254 + C_6^5 (0.4)^5 (0.6)^{6-5} = 0.68254 + 0.036864 = 0.719404$$
$$F(6) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 0.719404 + C_6^6 (0.4)^6 (0.6)^{6-6} = 0.719404 + 0.040 = 0.760364$$

التمرين 03

نلقي حجر نرد 4 مرات، نفرض أن النجاح هو ظهور الرقم 5 أو 6 في أية رمية.

1.ماهو احتمال النجاح لثلاث مرات؟

2.أوجد التوقع والتباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X

3.أحسب قيم دالة التوزيع المتراكمة لهذا المتغير

حل التمرين 03

1.ماهو احتمال النجاح لثلاث مرات؟

$X \mapsto B\left(n = 4.\ P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\right)$,x=0,1,3,4

$$f(X) \mapsto P(X = x) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$

$$P(3) = C_4^3 P^3 (1-P)^{4-3} = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 4\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{81} = 0.09877$$

2.أوجد التوقع و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

$$\mu_x = E(X) = nP = 4.\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$V(X) = nP(1-P) = 4.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

3.أحسب قيم دالة التوزيع المتراكمة لهذا المتغير.

$X \mapsto B\left(n = 4.\ P = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\right)$,x=0,1,3,4

$$f(X) \mapsto P(X=x) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$

$$F(0) = P(3) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x} = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-0} = 0.1975$$

$$F(1) = P(0) + P(1) = 0.1975 + C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = 0.1975 + 0.3951 = 0.5926$$

$$F(2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.5926 + C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-2} = 0.5926 + 0.2963 = 0.8889$$

$$F(3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0.8889 + C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-3} = 0.8889 + 0.0988 = 0.9877$$

$$F(4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0.9877 + C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-4} = 0.9877 + 0.0123 = 1$$

التمرين 04

تفترض إدارة المبيعات أن مندوب المبيعات لديه احتمال نجاح في إتمام صفقة مع أي عميل يساوي 0.8 إذا قام المندوب بالتواصل مع 4 عملاء مستقلين، فما احتمال:

- يتم إتمام الصفقة مع عميلين فقط.
- يتم إتمام الصفقة مع عميلين أو أكثر.

حل التمرين 04

$X \mapsto B\left(n = 4.\ P = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\right)$,x=0,1,3,4

$$f(X) \mapsto P(X=x) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$

1. إتمام الصفقة مع عميلين فقط.

$$f(2) = P(X=2) = C_4^2 P^2 (1-P)^{4-2} = 0.1536$$

2. إتمام الصفقة مع عميلين أو أكثر.

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = f(2) + f(3) + f(4)$$
$$= 0.1536 + C_4^3 (0.8)^3 (0.2)^{4-3} + C_4^4 (0.8)^4 (0.2)^{4-4} = 0.9728$$

التمرين 05

يجري تفتيش الشحنات الكبيرة من البضاعة القادمة إلى مؤسسة صناعية بطريقة العينة، لنفترض أن هذه الطريقة تتلخص في اختيار عشر قطع عشوائيا، ثم اختبارها واحدة تلو الأخرى، ووترفض البضاعة إذا لاحظنا قطعتين مرفوضتين أو أكثر، إذا احتوت شحنة البضاعة على 5% من القطع المرفوضة.

1. فما هو احتمال قبول البضاعة.

2.فما هو احتمال رفض البضاعة.

حل التمرين 05

النجاح هو الحصول على قطعة مرفوضة P =0.05 و n = 10

$X \mapsto B(n = 10.\ P = 0.05)$,x=0,1,3,...,n

$$f(X) \mapsto P(X = x) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$

1.فما هو احتمال قبول البضاعة.

$$P(X=0) + P(X=1) = f(0) = f(1) = C_{10}^0 (0.05)^0 (0.95)^{10-0} + C_{10}^1 (0.05)^1 (0.95)^{10-1} = 0.914$$

2. فما هو احتمال رفض البضاعة.

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(x=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) = [P(x=0) + P(X=1)] = 1 - 0.914 = 0.086$$

التمرين 06

امت شركة بإطلاق منتج جديد، وجرى اختبار 10 عينات من هذا المنتج للتأكد من جودة المنتج وعدم وجود عيوب خلال فترة مراقبة معينة. وُجد أن 8 عينات كانت سليمة تمامًا. إذا كان احتمال أن تكون أي عينة سليمة طبيعيًا0.5، فما هو احتمال أن تكون 8 عينات أو أكثر سليمة تحت فرضية أن الإجراءات الجديدة لم تحسن جودة المنتج؟

حل التمرين 06

النجاح هو وعدم وجود عيوب خلال فترة المراقبة ، فيكون P= 0.5 وn=10

احتمال :$P(X \geq 8)$

$$P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) = f(8) + f(9) + f(10) = C_{10}^8 (0.5)^8 (0.5)^{10-8} + C_{10}^9 (0.5)^9 (0.5)^{10-9} + C_{10}^{10} (0.5)^{10} (0.5)^{10-10} = 0.055$$

التمرين 07:

إذا كان 90% من طلاب جامعة الوادي ينجحون، فما احتمال فشل اثنين على الأقل من اصل 20 طالبا.

حل التمرين 07

النجاح في هذه الحالة هو فشل الطالب ، فيكون P =1 − 0.9 = 0.1 و n = 20

احتمال فشل اثنين على الأقل :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)]$$
$$= 1 - [C_{20}^{1}(0.1)^{1}(0.9)^{20-1} + C_{20}^{0}(0.1)^{0}(0.9)^{20-0}]$$
$$= 1 - [20.(0.1).(0.9)^{19} + (0.9)^{20}] = 1 - [0.27 + 0.122] = 0.608$$

3.توزيع بواسون"Poisson distribution"

توزيع بواسون هو توزيع احتمالي سُمي نسبةً إلى عالم الرياضيات والفيزياء الفرنسي سيمون دني بواسون (Siméon Denis Poisson)الذي وضع أسس هذا التوزيع في القرن التاسع عشر.

يُستخدم توزيع بواسون لوصف الأحداث التي تحدث خلال فترة زمنية محددة عندما تكون هذه الأحداث نادرة الحدوث. ويرجع ذلك إلى طبيعة هذا التوزيع الذي يتعامل مع الحالات التي يكون فيها احتمال نجاح المحاولة صغيرًا جدًاP↦0، بينما يقترب احتمال الفشل من الواحد1-P↦1، مما يجعل وقوع الحدث أمرًا نادرًا جدًا.

نسمي المتغير العشوائي X بمتغير بواسون اذا كان يوجد عدد حقيقي $\lambda > 0$ ، حيثX↦P(ƛ) و دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل الآتي : $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

1.3.تطبيقات توزيع بواسون :

يُستخدم توزيع بواسون في مجموعة واسعة من التطبيقات، وفيما يلي بعض الأمثلة العملية الأكثر شيوعًا لاستخداماته: :

- عدد الأخطاء التي تظهر في مقال أو كتاب معين.
- عدد المكالمات الهاتفية الواردة إلى مركز خدمة العملاء خلال ساعة محددة.
- عدد الزوار الذين يدخلون إلى موقع إلكتروني خلال ساعة معينة.
- عدد الحوادث المرورية التي تقع على الطرق في يوم واحد.
- عدد العملاء الذين يزورون متجرًا خلال فترة زمنية محددة.
- عدد الطلبات المقدمة عبر موقع تجارة إلكترونية خلال فترة معينة.
- عدد حالات التسمم الغذائي التي تُسجل يوميًا في منطقة معينة.

2.3.دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X :

دالة الكتلة الاحتمالية (دالة التوزيع الاحتمالي) للمتغير العشوائيX الذي يتوزع وفق توزيع بواسون تكون من الشكل التالي:

$$X \mapsto P(\lambda)$$
$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & ; x = 0,1,3, \dots, +\infty \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

3.3.التوقع و التباين للمتغير العشوائي X :

بالنسبة للقيمة المتوقعة، لدينا:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x.P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x.P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}\lambda}{x(x-1)!} e^{-\lambda}$$
$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

و بالتالي فان المتوسط يساوي $\mu_x = E(X) = \lambda$

بالنسبة للتباين لدينا: $\sigma_x^2 = V(X) = \lambda$

و بالتالي فان الانحراف المعياري يساوي $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}$

4.3. دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X

دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائيX الذي يتبع توزيع بواسون بثابت (λ) ونكتب $X \mapsto P(\lambda)$:

$$F(a) = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

التمارين المقترحة

التمرين 01

في دراسة نفسية، يتم تحليل 3 استبيانات فردية، وعدد الاستبيانات التي تحتوي على أخطاء في الإجابات يُمثل متغيرًا عشوائيًاX يتبع توزيع بواسون بمعامل ($\lambda = 0.5$). أوجد دالة التوزيع المتراكمة.

حل التمرين 01

لدينا: ($\lambda = 0.5$)

دالة التوزيع المتراكمة للمتغير العشوائي X

$$F(0) = P(0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-0.5}\lambda^0}{0!} = e^{-0.5} = 0.606$$
$$F(1) = P(1) = \frac{e^{-0.5}\lambda^1}{1!} = \frac{0.5}{1}.e^{-0.5} = \frac{0.5}{1}P(0) = 0.303$$
$$F(2) = P(2) = \frac{e^{-0.5}\lambda^2}{2!} = \frac{(0.5)^2}{2}.e^{-0.5} = \frac{0.5}{2}.\frac{0.5}{1}.e^{-0.5} = \frac{0.5}{2}.P(1) = 0.0759$$
$$F(3) = P(3) = \frac{e^{-0.5}\lambda^3}{3!} = \frac{(0.5)^3}{3.2}.e^{-0.5} = \frac{0.5}{3}.\frac{(0.5)^2}{2}.e^{-0.5}\frac{0.5}{3}.P(2) = 0.0126$$

التمرين 02

في تجربة بيولوجية لمراقبة نشاط الخلايا، لوحظ أن متوسط عدد الانقسامات الخلوية في عينة معينة خلال ساعة واحدة هو 5 انقسامات.

احسب احتمال حدوث انقسامين فقط في العينة خلال ساعة مختارة عشوائيًا.

حل التمرين 02

$X \mapsto P(\lambda=5)$

$f(x)= P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$

احتمال حدوث انقسامين فقط.

$f(2)= P(X=2)=\frac{e^{-5}.5^{2}}{2!} = 0.08$

التمرين 03

في مصنع لإنتاج الأجهزة الكهربائية، يُلاحظ أن عدد الأعطال التي تحدث لجهاز معين خلال أسبوع واحد يتبع توزيع بواسون بمعامل0.4 = □ أحسب :

1. احتمال أن لا يتعرض الجهاز لأي عطل خلال أسبوع واحد.
2. احتمال أن يعمل الجهاز بشكل متواصل دون أي عطل لمدة ثلاثة أسابيع متتالية.

حل التمرين 03

$X \mapsto P(\lambda=0.4)$

$f(x)= P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$

1. احتمال أن لا يتعرض الجهاز لأي عطل خلال أسبوع واحد.

$f(0)= P(X=0)=\frac{e^{-0.4}.(0.4)^{0}}{0!} = 0.670$

2. احتمال أن يعمل الجهاز بشكل متواصل دون أي عطل لمدة ثلاثة أسابيع متتالية.

$P(X=0).P(X=0).P(X=0)=(0.67)^{3} = 0.301$

التمرين 04

في مركز خدمة العملاء، يُلاحظ أن معدل المكالمات الواردة إلى موظف معين هو 2 مكالمتين في الدقيقة احسب:

1. احتمال ألا يتلقى الموظف أي مكالمة خلال دقيقة واحدة.
2. احتمال وصول مكالمتين خلال دقيقة واحدة.
3. احتمال ألا يتلقى الموظف أي مكالمة خلال 5 دقائق متتالية.

حل التمرين 04

$X \mapsto P(\lambda = 2)$

$f(x)= P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$

1. احتمال ألا يتلقى الموظف أي مكالمة خلال دقيقة واحدة.

$f(0)= P(X=0)=\frac{e^{-2}.2^{0}}{0!} = 0.135$

2. احتمال وصول مكالمتين خلال دقيقة واحدة.

$f(2)= P(X=2)=\frac{e^{-2}.2^{2}}{2!} = 0.27$

3. احتمال ألا يتلقى الموظف أي مكالمة خلال 5 دقائق متتالية.

$P(X=0).P(X=0.(P(X=0).P(X=0).P(X=0)= [P(X = 0)]^5=(0.135)^5= 0.000045$

التمرين 05

تسجّل إحدى شركات التأمين في فرعٍ معيّن مطالبات تعويض عن حوادث سيارات بمعدل مطلب واحد كل يومين .نفترض أن عدد المطالبات اليومية مستقل ويتبع توزيع بواسون.

احسب احتمالات تسجيل:

1. حساب القيم الموافقة 0 ، 1، 2، 3، 4، 5، 6 مطالبات تعويض خلال أسبوع واحد.
2. حدّد عدد مطالبات التعويض الأسبوعية الأكثر احتمالاً.
3. احسب الاحتمال المتوقع للأيام في الأسبوع التي تمرّ دون تسجيل أي مطالبة تعويض.

. حل التمرين 05

1.الاحتمالات الموافقة لـ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 مطالبات تعويض خلال أسبوع واحد..

نحسب المتوسط: $\lambda = (0.5).7=3.5$

$X \mapsto P(\lambda=3.5)$

$$f(x)= P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$f(0)= P(X=0)=\frac{e^{-3.5}.(3.5)^0}{0!} = 0.03$$
$$f(1)= P(X=1)=\frac{e^{-3.5}.(3.5)^1}{1!} = 0.106$$
$$f(2)= P(X=2)=\frac{e^{-3.5}.(3.5)^2}{2!} = 0.185$$
$$f(3)= P(X=3)=\frac{e^{-3.5}.(3.5)^3}{3!} = 0.216$$
$$f(4)= P(X=4)=\frac{e^{-3.5}.(3.5)^4}{4!} = 0.189$$
$$f(5)= P(X=5)=\frac{e^{-3.5}.(3.5)^5}{5!} = 0.132$$
$$f(6)= P(X=6)=\frac{e^{-3.5}.(3.5)^6}{6!} = 0.077$$

2. عدد مطالبات التعويض الأسبوعية الأكثر احتمالاً.: $X=3$

3. احتمال المتوقع للأيام في الأسبوع التي تمرّ دون تسجيل أي مطالبة تعويض.

$$f(0)= P(X=0)=\frac{e^{-0.5}.(0.5)^0}{0!} = 0.607$$

التمرين 06

إذا كان متوسط عدد الحالات اليومية للتسرّب المدرسي في مجتمع معيّن هو حالة واحدة في اليوم. نفترض أن عدد الحالات اليومية مستقل ويتبع توزيع بواسون. المطلوب :

1.أكتب دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي.X

2.ما هو احتمال تسجيل حالتين في يوم ما.

حل التمرين 06

1.أكتب دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي X .

نفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد حالات التسرب اليومي، و عليه X يتبع توزيه بواسون ثابته 1=ƛ

X↦P (ƛ= 1)

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} & ,x=0,1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise\end{cases} \Rightarrow P(X=x)=\begin{cases}\frac{e^{-1}.\lambda^{x}}{x!} & ,x=0,1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

2.ما هو احتمال تسجيل حالتين في يوم ما.

$P(X=2)=\frac{e^{-1}.1^{2}}{2!}=0.184$

4.التوزيع الهندسي"Geometric distribution"

يُعد **التوزيع الهندسي** أحد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة في الإحصاء ونظرية الاحتمالات، ويُستخدم لوصف الظواهر التي تعتمد على تكرار تجارب مستقلة إلى أن يتحقق **النجاح لأول مرة**.

تفترض تجارب التوزيع الهندسي أن لكل تجربة نتيجتين محتملتين فقط **نجاح** باحتمال(P) أو فشل (1-P) مع ثبات هذا الاحتمال من تجربة إلى أخرى. كما يُفترض أن عدد المحاولات غير محدد مسبقًا، إذ تستمر التجارب إلى غاية تحقق أول نجاح. وبناءً على ذلك فإن المتغير العشوائي (x) يمثّل **عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح** .فإذا تحقق النجاح في المحاولة رقم X فهذا يعني أن التجارب السابقة وعددها(X-1) كانت جميعها محاولات فاشلة .

المتغير العشوائي (X) في هذه الحالة يسمى بالمتغير الهندسي لأنه يتبع التوزيع الهندسي و نكتب : X↦G(P)

و$P(X=x)=(1-P)^{x-1}P$ حيث X=1,2,3...,∞

1.4.دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائيX

دالة الكتلة الاحتمالية (دالة التوزيع الاحتمالي) للمتغير العشوائي X الذي يتوزع وفق التوزيع الهندسي تكون من الشكل التالي:

X ↦ G(P

$$P(X=x)=\begin{cases}(1-P)^{x-1}P & ,x=1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

2.4.التوقع و التباين للمتغير العشوائيX

بالنسبة للقيمة المتوقعة، لدينا:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x.P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} x.(1-P)^{x-1}.P = P\sum_{x=1}^{\infty} x.q^{x-1} = P\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq}q^x$$
$$= P.\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} q^x = P.\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}.q = P.\frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{\infty} q^k.q = P.\frac{d}{1-q}.q$$
$$= P.\frac{d}{dq}.\left(\frac{q}{1-q}\right) = P.\frac{(1-q)+q}{(1-q)^2} = P.\frac{1}{1-q^2} = \frac{P}{P^2} = \frac{1}{P}$$

و بالتالي فان المتوسط يساوي $\mu_x = E(X) = \frac{1}{P}$

بالنسبة للتباين لدينا : $\sigma_x^2 = V(X) = \frac{1-P}{P^2}$

و بالتالي فان الانحراف المعياري يساوي $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1-P}{P^2}}$

3.4.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائيX

دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الهندسي باحتمال (P) ونكتب:

X↦G(P)

$$F(X) = \sum_{n=1}^{x} P(1-P)^{n-1} = P\frac{1-(1-P)^x}{P} = 1-(1-P)^x$$

وبالتالي تكون دالة التوزيع التراكمية بالصيغة التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & ;x<1 \\ 1-(1-P)^x & ;x=1,2,\dots.n \\ 0 & ;x=+\infty \end{cases}$$

التمارين المقترحة

التمرين 01

كيس يحتوي على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء، نسحب من الكيس كرة بالارجاع الى غاية الحصول على كرة بيضاء، المطلوب :

1.اذا كان X يمثل عدد مرات سحب للحصول على كرة بيضاء هو متغير يتبع التوزيع الهندسي ثابته P ، أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغيرX.

2.أوجد القيمة التوقعة و التباين ثم أوجد الدالة التراكمية للمتغيرX .

3. احتمال القيام بالسحب 5 مرات للحصول على كرة بيضاء.

حل التمرين 01

1.نلاحظ أن احتمال سحب كرة بيضاء هو $P(x) = \frac{C_8^1}{C_{12}^1} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغيرX.

$X\mapsto G\left(P=\frac{2}{3}\right)$

$$P(X=x)=\begin{cases}(1-P)^{x-1}P & ,x=1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise\end{cases}\Rightarrow P(X=x)$$
$$=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{3}\right) & ,x=1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

قيمة التوقع و التباين والانحراف المعياري

$$\mu_x=E(X)=\frac{1}{P}=\frac{1}{2/3}=\frac{3}{2}$$
$$\sigma_x^2=V(X)=\frac{1-P}{P^2}=\frac{1-2/3}{(2/3)^2}=\frac{1/3}{4/9}=\frac{1}{3}.\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1-P}{P^2}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.الدالة التراكمية :

$$F(X)=\begin{cases}0 & ,x<1 \\ (1-P)^{x-1}P & ,x=1,2,\dots.n\Rightarrow F(X) \\ 1 & ,x=+\infty\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0 & ,x<1 \\ 1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^{x} & ,x=1,2,\dots.n \\ 1 & ,x=+\infty\end{cases}$$

3.احتمال القيام بالسحب 5 مرات للحصول على كرة بيضاء:

$X\mapsto G\left(P=\frac{2}{3}\right)$

$$P(X=5)=(1-P)^{x-1}P=\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-1}\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{243}$$

التمرين 02

يقوم بنك بمراقبة عمليات مالية مشبوهة، واحتمال أن تكون العملية غير سليمة هو $\frac{1}{6}$ تتم مراقبة العمليات بشكل مستقل إلى أن تُكتشف أول عملية غير سليمة.

المطلوب:

1. اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثّل عدد العمليات التي يتم فحصها إلى غاية اكتشاف أول عملية غير سليمة.
2. ما هو احتمال فحص 4عمليات على الأقل قبل اكتشاف أول عملية غير سليمة؟
3. احسب المعدل المتوقع لعدد العمليات المفحوصة.

حل التمرين 02

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

نلاحظ أن احتمال الحصول النجاح $P=\frac{1}{6}$

$$X \mapsto G\left(P=\frac{1}{6}\right)$$

$$P(X=x)=\begin{cases}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{6}\right) & ,x=1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

2.احتمال أن تحتاج فحص **4 عمليات على الأقل** قبل اكتشاف أول عملية غير سليمة.

$$P(X\geq 4)=1-P(X<4)=1-[P(1)+P(2)+P(3)]$$
$$=1-\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^{2-1}\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{6}\right)\right]=1-\left[\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}\right]$$
$$=0.579$$

3.معدل عدد المحاولات التي نحتاجها

$$\mu_x=E(X)=\frac{1}{P}=\frac{1}{1/6}=6$$

التمرين 03

تقوم مؤسسة اقتصادية بمراجعة فواتيرها المحاسبية يوميًا إلى غاية اكتشاف فاتورة تحتوي على خطأ محاسبي جسيم يؤدي إلى توقّف عملية المراجعة لإعادة التدقيق.

احتمال اكتشاف خطأ محاسبي في يوم واحد هو 0.1 ، نفترض أن عمليات المراجعة اليومية مستقلة.

ليكن المتغير العشوائي X هو عدد الأيام التي تمر دون اكتشاف خطأ محاسبي إلى غاية التوقف.

المطلوب:

1. ما هو احتمال أن تتوقف عملية المراجعة **بعد ثلاثة أيام**؟
2. ما هو احتمال أن تتوقف عملية المراجعة بعد ثلاثة أيام على الأكثر؟
3. أوجد الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي X .

. حل التمرين 03:

$X \mapsto G(P=0.1)$

$P(X=x)=(1-P)^{x-1}P$

1. احتمال أن تتوقف عملية المراجعة بعد ثلاثة أيام.

$$P(X=3)=(1-0.1)^{3-1}(0.1)=0.081$$

2. ما هو احتمال أن تتوقف عملية المراجعة بعد ثلاثة أيام على الأكثر.

$$P(X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=(1-0.1)^{1-1}(0.1)+(1-0.1)^{2-1}(0.1)+(1-0.1)^{3-1}(0.1)$$
$$=0.1+0.09+0.081$$

3.جد الوسط الحسابي و التباين.

$$\mu_x=E(X)=\frac{1}{P}=\frac{1}{0.1}=10$$

$$\sigma_x^2=V(X)=\frac{(1-P)}{P^2}=\frac{(1-0.1)}{(0.1)^2}=90$$

5. التوزيع فوق الهندسي "Hypergeometric distribution"

تعد تجارب التوزيع فوق الهندسي من التجارب المتكررة غير مستقلة و مبنية على أساس مفهوم السحب بدون ارجاع، مما يجعل احتمال الحصول على صفة غير ثابت ، أي أن الاحتمال يتغير من محاولة الى أخرى.

تعد تجارب التوزيع فوق الهندسي (Hypergeometric distribution) من التجارب المتكررة غير المستقلة، حيث يتم السحب بدون إرجاع، مما يؤدي إلى أن احتمال الحصول على النجاح ليس ثابتًا، بل يتغير مع كل محاولة.

لنفترض أن لدينا مجتمعًا مكونًا من N عنصرًا يحتوي على:

- N_1 عناصر من نوع معيّن نعتبرها نجاحًا،
- $N - N_1$ عناصر أخرى نعتبرها فشلًا.

إذا تم اختيار عينة عشوائية مكونة من n عناصر من هذا المجتمع بدون إرجاع، فإن عدد عناصر النجاح الممكنة في العينة يتراوح بين0 و N_1 ، بينما يمثل $N - N_1$ عدد عناصر الفشل المتبقية.

غالبا ما يعبر عن التوزيع فوق الهندسي بـ $X \mapsto H(N_1, N - N_1)$ و $P(X = x) = \frac{C_{N_1}^x . C_{(N-N_1)}^{(n-x)}}{C_N^n}$ حيث X=0,1,2,3,.....,n

1.5 دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X

دالة الكتلة الاحتمالية دالة(التوزيع الاحتمالي) للمتغير العشوائي X الذي يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي تكون من الشكل التالي :

$$X \mapsto H(N_1, N - N_1)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{C_{N_1}^x . C_{(N-N_1)}^{(n-x)}}{C_N^n} & , x = 0,1,3,\dots,n \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

2.5.التوقع و التباين للمتغير العشوائي X

بالنسبة للقيمة المتوقعة، لدينا:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x.P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} x.\frac{C_{N_1}^x . C_{(N-N_1)}^{(n-x)}}{C_N^n} = \frac{1}{C_N^n}\sum_{x=0}^{n} x.\frac{N_{1!}}{x!\,(N_1 - x)!}C_{(N-N_1)}^{(n-x)}$$

$$= \frac{1}{C_N^n}\sum_{x=0}^{n}\frac{1}{(x-1)!}.\frac{N_{1!}}{(N_1 - x)!}C_{(N-N_1)}^{(n-x)} = \frac{N_1}{C_N^n}\sum_{x=0}^{n}\frac{1}{(x-1)!}.\frac{(N_1-1)!}{(N_1 - x)!}C_{(N-N_1)}^{(n-x)}$$

$$= \frac{N_1}{C_N^n}\sum_{x=0}^{n} C_{(N_1-1)}^{(x-1)}\, C_{(N-N_1)}^{(n-x)} = \frac{N_1}{C_N^n}C_{(N-1)}^{(x-1)} = n\frac{N_1}{N}$$

و بالتالي فان المتوسط يساوي $\mu_x = E(X) = n\frac{N_1}{N}$

بالنسبة للتباين لدينا: $\sigma_x^2 = V(X) = n\frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

و بالتالي فان الانحراف المعياري يساوي $\sigma_x = V(X) = \sqrt{n\frac{N_1}{N}\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

التمرين 01

سلة تحتوي 10 زهرات منها 4 حمراء سحبت عشوائيا و بدون اعادة 3 زهرات، المطلوب:

1. أوجد دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأزهار الحمراء.

2.أوجد احتمال أن يكون من بين الزهور المسحوبة زهرتان لونهما أبيض.

3.أوجد التوقع الرياضي و التباين.

حل التمرين 01

1.دالة التوزيع الاحتمالية : x متغير عشوائي يتبع التوزيع فوق الهندسي

N: مجتمع يحتوي على 10 زهرات.

N_1: العناصر التي تمثل النجاح هي 4 أزهار حمراء.

(N-N_1): العناصر التي تمثل الفشل هي 6 أزهار بيضاء.

n : العينة المسحوبة هي 3 زهرات

$$X \mapsto H(N_1 = 4, N - N_1 = 6)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{C_4^x . C_6^{(3-x)}}{C_{10}^3} & ,x = 0,1,3,\dots,n \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

2.احتمال أن يكون من بين الزهور المسحوبة زهرتان لونهما أبيض

$$P(X=1) = \frac{C_{N_1}^x . C_{(N-N_1)}^{(n-x)}}{C_N^n} = \frac{C_4^1 . C_6^{(3-1)}}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = 0.5$$

3.التوقع الرياضي و التباين.

التوقع الرياضي:

$$\mu_x = E(X) = n\frac{N_1}{N} = 3.\frac{4}{10} = 1.2$$

التباين:

$$\sigma_x^2 = V(X) = n\frac{N_1}{N}\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3\frac{4}{10}\left(\frac{10-4}{10}\right)\left(\frac{10-3}{10-1}\right) = \frac{12}{10}.\frac{6}{10}.\frac{7}{9} = 0.56$$

التمرين 02

تدير شركة مخازن لديها 15موظفًا، من بينهم 3موظفين غير مؤهلين لأداء مهمة محددة.يتم اختيار 6 موظفين بشكل عشوائي لتكوين فريق عمل دون معرفة كفاءتهم مسبقًا.

المطلوب:

1. **اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، الذي يمثل عدد الموظفين غير المؤهلين في الفريق.**

2. ما هو احتمال أن يكون ضمن الفريق المختار موظفان غير مؤهلان.

حل التمرين 02

1.دالة التوزيع الاحتمالية : x متغير عشوائي يتبع التوزيع فوق الهندسي

N: مجتمع يحتوي على 15 موظف.

N_1: العناصر التي تمثل النجاح هي 3 موظفين غير مؤهلين.

(N-N_1): العناصر التي تمثل الفشل هي 12 موظف مؤهل.

n : العينة المسحوبة هي 6 موظفين.

$$X \mapsto H(N_1 = 3, N - N_1 = 12)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{C_3^x . C_{12}^{(6-x)}}{C_{15}^6} & ,x = 0,1,3,4,5,6 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

2 . 2. ما هو احتمال أن يكون ضمن الفريق المختار موظفان غير مؤهلان.

$$P(X = 2) = \frac{C_{N_1}^x . C_{(N-N_1)}^{(n-x)}}{C_N^n} = \frac{C_3^2 . C_{12}^{(6-2)}}{C_{15}^6} = 0.297$$

التمرين 03

لدى قسم الموارد البشرية في شركة 15موظفًا، منهم 6موظفات و9 موظفين ذكور. تم اختيار 7موظفين بشكل عشوائي لتكوين فريق عمل دون إرجاع.

1.أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الموظفين المختارين.

2. ما هو احتمال أن يكون من بين الموظفين المختارين 3 موظفات.

3. جد الوسط الحسابي ، التباين و الانحراف المعياري.

حل التمرين 03

1.دالة التوزيع الاحتمالية: x متغير عشوائي يتبع التوزيع فوق الهندسي

N: مجتمع يحتوي على 15 موظفا.

N_1: العناصر التي تمثل النجاح هي 6 موظفات

(N-N_1): العناصر التي تمثل الفشل هي 9 موظف.

n :العينة المسحوبة هي 7 موظفين .

$$X \mapsto H(N_1 = 6, N - N_1 = 9)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{C_6^x . C_9^{(7-x)}}{C_{15}^7} & ,x = 0,1,3,4,5,6,7 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

2. احتمال أن يكون من بين الموظفين المختارين 3 موظفات.

$$P(X=3)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{(N-N_1)}^{(n-x)}}{C_N^n}=\frac{C_6^3.C_9^{(7-3)}}{C_{15}^7}=0.392$$

3. جد الوسط الحسابي ، التباين و الانحراف المعياري.

المتوسط :

$$\mu_x=E(X)=n\frac{N_1}{N}=7.\frac{6}{15}=2.8$$

للتباين :

$$\sigma_x^2=V(X)=n\frac{N_1}{N}\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=7\frac{6}{15}\left(1-\frac{6}{15}\right)\left(\frac{15-7}{15-1}\right)=0.958$$

الانحراف المعياري : $\boldsymbol{\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n\frac{N_1}{N}\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}=\sqrt{0.958}=0.979}$

سلسلة تمارين رقم 01

التمرين 01

ألقيت حجرة نرد مرة واحدة و كان النجاح يمثل ظهور الرقم 6، أوجد ما يلي:

1.دالة للتوزيع الاحتمالي للمتغيرX.

2.أحسب الوسط الحسابي، والتباين، و الانحراف المعياري.

3.دالة التوزيع التراكمية للمتغيرX.

التمرين 02

قامت شركة بفحص 400 وحدة إنتاج مستقلة، وتعتبر وحدة الإنتاج المطابقة للمواصفات نجاحًا. إذا كان احتمال أن تكون أي وحدة مطابقة للمواصفات P=0.5 (أي احتمال متساو للنجاح والفشل)، احسب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الوحدات المطابقة

التمرين 03

اذا كان 40% من طلاب كلية العلوم الاقتصادية لا يحضرون المحاضرات، و اذا كان في احدى التخصصات 8 طلاب. المطلوب: أوجد الاحتمالات التالية:

1.أربعة منهم لا يحضرون المحاضرات.

2.ستة منهم لا يحضرون المحاضرات.

3.اثنين منهم على الأكثر لا يحضرون المحاضرات.

4.ثلاثة منهم على الاقل لا يحضرون المحاضرات.

التمرين 04

في دراسة نفسية، وُجد أن من بين كل 1000 اختبار شخصية يتم إجراؤه، يوجد 150 اختبارًا يحتوي على أخطاء أو تباين غير متوقع في الإجابات. إذا أخذ الباحث عينة مكونة من 5 اختبارات، احسب:

1. احتمال أن تكون كل الاختبارات المختارة سليمة.

2.. احتمال أن يحتوي واحد فقط أو أقل من الاختبارات على أخطاء

3. احتمال أن يحتوي اختباران على الأقل على أخطاء.

التمرين 05

يتلقى أحد البنوك يوميًا طلبات اعتراض على عمليات سحب غير مصرح بها بمعدل 6 طلبات في اليوم الواحد. ليكن X متغيرًا عشوائيًا يمثّل عدد طلبات الاعتراض التي يستقبلها البنك في يوم واحد. المطلوب:

1.أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

2.ما هو احتمال أن يستقبل البنك 3 طلبات اعتراض في يوم واحد؟

3.ما هو احتمال أن يستقبل البنك في يوم ما طلب اعتراض واحدًا على الأقل؟

4. أحسب$E(X)$ ، $V(X)$، σ_x

5.أكتب دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X خلال ثلاثة أيام.

التمرين 06

في مزرعة زراعية مخصّصة لزراعة القمح، يظهر مرض فطري على النباتات بمعدل 04إصابات في الشهر. نفترض أن عدد الإصابات الشهرية مستقل ويتبع توزيع بواسون.

المطلوب: احسب الاحتمالات التالية:

1. أن يحدث نفس عدد الإصابات في الشهر المقبل.
2. عدم حدوث أي إصابة في الشهر القادم.
3. أن تسجَّل 6إصابات على الأكثر في شهر واحد.
4. أن يحدث عدد الإصابات ما بين 4 و 6 إصابات في الشهر.

التمرين 07

يحتوي وعاء على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء نسحب كرة بالارجاع الى غاية الحصول على كرة سوداء . المطلوب:

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

2.ما هو احتمال القيام بالسحب 4 مرات للحصول على كرة سوداء.

3.ما هو احتمال القيام بالسحب على الأقل مرتين للحصول على كرة سوداء.

4.ما هو احتمال القيام بالسحب على الأقل ثلاثة مرات للحصول على كرة سوداء.

5.أحسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائيX .

6.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X .

التمرين 08

في مختبر طبي، يوجد 10 عينات دم، من بينها 6 عينات مصابة بعامل معين إيجابي، و 4 عينات سلبية يتم اختيار 3 عينات بشكل عشوائي في آن واحد لإجراء الفحص دون إرجاع.المطلوب:

1. دالة التوزيع الاحتمالية.
2. احتمال أن تكون عينة واحدة فقط ايجابية.
3. أن تكون على الأقل عينة واحدة إيجابية..
4. أن أن تكون العينة المختارة كلها سلبية
5. التوقع و التباين و الانحراف المعياري لهذه التجربة.

.حل السلسلة رقم 01

<u>حل التمرين 01</u>

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

لدينا حجر النرد له ستة أوجه، و بما أن الرقم 6 يمثل النجاح، فإن الأرقام1، 2،3،4،5 تمثل الفشل، كما أن احتمال النجاح يمثل $\frac{1}{6}$، احتمال الفشل يساوي $\frac{5}{6}$، وبالتالي دالة التوزيع الاحتمالي تكون بالشكل التالي:

$$X \mapsto \text{Ber}\left(n = 1. P = \frac{1}{6}\right)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} P & ; x = 1 \\ q & ; x = 0 \\ 0 & ; otherwise \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6} & ; x = 1 \\ \frac{5}{6} & ; x = 0 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

2.أحسب الوسط الحسابي، والتباين، و الانحراف المعياري.

$$\mu_x = \text{E(X)} = P = \frac{1}{6}$$

$$\sigma_x^2 = V(x) = Pq = \frac{1}{6}.\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

3.دالة التوزيع التراكمية للمتغير X

$$F(X) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ q & ; 0 \le x < 1 \\ 1 & ; x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow F(X) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{5}{6} & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$$

<u>حل التمرين 02</u>

لدينا : $P = 1/2$ و n =400

القيمة المتوقعة لـ X : E(X)= n.P =400.0.5= 200

التباين لـ X : V(X)= n.P.q= 400.1/2.1/2=100

الانحراف المعياري لـX :

$$\sigma_x^2 = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.P.q} = \sqrt{400.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$$

حل التمرين 03

النجاح في هذه الحالة هو عدد الطلاب الذين لا يحضرون المحاضرات فيكون P =0.4 وn=8

1.احتمال أربعة منهم لا يحضرون المحاضرات.

$$P(X = 4) = f(4) = C_8^4(0.4)^4(0.6)^{8-4} = 0.2322$$

2.احتمال ستة منهم لا يحضرون المحاضرات

$$P(X = 6) = f(6) = C_8^6(0.4)^6(0.6)^{8-6} = 0.0413$$

3.احتمال اثنين منهم على الأكثر لا يحضرون المحاضرات.

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = f(2) + f(1) + f(0)$$
$$= C_8^2(0.4)^2(0.6)^{8-2} + C_8^1(0.4)^1(0.6)^{8-1}C_8^0(0.4)^0(0.6)^{8-0} = 0.315$$

4.احتمال ثلاثة منهم على الاقل لا يحضرون المحاضرات.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$$
$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - 0.315 = 0.685$$

حل التمرين 04

النجاح في هذه الحالة هو وجود اختبار سليم في العينة العشوائية، فيكون $P = \frac{150}{1000} = 0.15$

1. احتمال أن تكون كل الاختبارات المختارة سليمة.

2. $P(X = 0) = f(0) = C_5^0(0.15)^0(0.85)^{5-0} = 0.4437$

3. **احتمال أن يحتوي واحد فقط أو أقل من الاختبارات على أخطاء**

$$\mathrm{P(X \leq 1) = P(X = 1) + P(X = 0) = f(1) + (0) == } C_5^1(0.15)^1(0.85)^{5-1} + 0.4437$$
$$= 0.0.8352$$

3. **احتمال أن يحتوي اختباران على الأقل على أخطاء.**

$$P(X \geq 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$= 1 - 0.8352 = 0.1618$$

حل التمرين 05

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي. X

نفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد شيكات بدون رصيد المستلمة يوميا من قبل البنك ، و عليه X يتبع توزيه بواسون ثابته 6 =□

$X \mapsto P(\lambda = 6)$

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} & ,x=0,1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise\end{cases} \Rightarrow P(X=x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{e^{-6}.6^{x}}{x!} & ,x=0,1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

2. احتمال أن يستقبل البنك 3 طلبات اعتراض في يوم واحد.

$P(X=3)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-6}.6^{3}}{3!}=0.072$

3. احتمال أن يستقبل البنك في يوم ما طلب اعتراض واحدًا على الأقل.

$$P(X\geq 1)=1-P(x\leq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{e^{-6}.6^{0}}{0!}=1-0.002=0.998$$

4. حساب E(X)، V(X)، σ_x

التوقع: $\mu_x=E(X)=6$

التباين $\sigma_x^2=V(X)=6$

الانحراف المعياري: $\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{6}$

5.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X خلال ثلاثة أيام.

$f(0)=P(0)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-6}.6^{0}}{0!}=e^{-6}=0.0025$

$f(1)=P(1)=\frac{e^{-6}.6^{1}}{1!}=\frac{6}{1}.e^{-6}=\frac{6}{1}.P(0)=0.015$

$f(2)=P(2)=\frac{e^{-6}.6^{2}}{2!}=\frac{(6)^{2}}{2}.e^{-6}=\frac{6}{2}.\left(\frac{6}{1}.e^{-0.5}\right)=\frac{6}{2}.P(1)=0.045$

$f(3)=P(3)=\frac{e^{-6}.6^{3}}{3!}=\frac{(6)^{3}}{3.2}.e^{-6}=\frac{6}{3}.\left(\frac{6^{2}}{1}.e^{-0.5}\right)=\frac{6}{3}.P(2)=0.09$

<u>حل التمرين 06</u>

X يتبع توزيع بواسون حيث يمثل معدل الاصابات الشهري حيث:

$X\mapsto P(\lambda=4)$

$f(x)=P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$

1. أن يحدث نفس عدد الإصابات في الشهر المقبل. (نظرا لأن عدد الحوادث في الشهر الماضي كانت 4 حوادث، فاننا نكرر نفس العدد في الشهر المقبل).

$f(4)=P(X=4)=\frac{e^{-4}.4^{4}}{4!}=0.1954$

2.عدم حدوث ولا اصابة في الشهر القادم.

$f(0)=P(X=0)=\frac{e^{-4}.4^{0}}{0!}=0.0183$

3.أن تقع 6 اصابات على الأكثر في الشهر. (نقوم بحسابها بدالة التوزيع المتراكمة)

$P(X\leq 6)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)$

$=e^{-4}+\frac{4}{1}.P(0)+\frac{4}{2}.P(1)+\frac{4}{3}.P(2)+\frac{4}{3}.P(3)+\frac{4}{3}.P(4)+\frac{4}{3}P(5)=0.8893$

$f(0)= P(0)=\frac{e^{-4}.4^0}{0!}=e^{-4}$

$$f(1)=P(1)=\frac{e^{-4}.4^1}{1!}=\frac{4}{1}.e^{-4}=\frac{4}{1}.P(0)=$$
$$f(2)=P(2)=\frac{e^{-4}.4^2}{2!}=\frac{4^2}{2}.e^{-4}=\frac{4}{2}.\frac{4}{1}.e^{-4}=\frac{4}{1}.P(1)=$$
$$f(3)=P(3)=\frac{e^{-4}.4^3}{3!}=\frac{4^3}{3.2}.e^{-4}=\frac{4}{3}.\frac{4^2}{2}.e^{-4}=\frac{4}{3}.P(2)=$$
$$f(4)=P(6)=\frac{e^{-4}.4^4}{4!}=\frac{5^3}{3.2}.e^{-5}=\frac{4}{3}.\frac{4^2}{2}.e^{-4}=\frac{4}{3}.P(3)=$$
$$f(5)=P(6)=\frac{e^{-4}.4^5}{5!}=\frac{5^3}{3.2}.e^{-5}=\frac{4}{3}.\frac{4^2}{2}.e^{-4}=\frac{4}{3}.P(4)=$$
$$f(6)=P(6)=\frac{e^{-4}.4^6}{6!}=\frac{5^3}{3.2}.e^{-5}=\frac{4}{3}.\frac{4^2}{2}.e^{-4}=\frac{4}{3}.P(5)=$$

4.أن يحدث ما بين 4 و 6 اصابات في الشهر.

$P(4\leq X\leq 6)= P(4)+P(5)+P(6)=\frac{e^{-4}.4^4}{4!}+\frac{e^{-4}.4^5}{5!}+\frac{e^{-4}.4^6}{6!}=0.1954+01563+0.1042=0.4559$

<u>حل التمرين 07</u>

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الهندسي حيث: $P=\frac{C_3^1}{C_8^1}=\frac{3}{8}$

$X\mapsto G\left(P=\frac{3}{8}\right)$

$$P(X=x)=\begin{cases}(1-P)^{x-1}P & ,x=1,3,\dots,+\infty\\ 0 & ,otherwise\end{cases}\Rightarrow P(X=x)$$
$$=\begin{cases}\left(\frac{5}{8}\right)^{x-1}\left(\frac{3}{8}\right) & ,x=1,3,\dots,+\infty\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

2.ما هو احتمال القيام بالسحب 4 مرات للحصول على كرة سوداء.

$$P(X=4)=(1-P)^{4-1}P=\left(\frac{5}{8}\right)^{4-1}\left(\frac{3}{8}\right)=0.0915$$

3.ما هو احتمال القيام بالسحب على الأقل مرتين للحصول على كرة سوداء.

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(1)=1-\left(\frac{5}{8}\right)^{1-1}\left(\frac{3}{8}\right)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

4.ما هو احتمال القيام بالسحب على الأقل ثلاثة مرات للحصول على كرة سوداء.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(1) + P(2)] = 1 - \left[\left(\frac{5}{8}\right)^{1-1}\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{5}{8}\right)^{2-1}\left(\frac{3}{8}\right)\right]$$
$$= 1 - \left[\frac{3}{8} + \frac{15}{64}\right] = 1 - 0.609 = 0.391$$

5.أحسب التوقع و التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائيX .

التوقع : $\mu_x = E(X) = \frac{1}{P} = \frac{1}{3/8} = \frac{8}{3}$

التباين : $\sigma_x^2 = V(X) = \frac{1-P}{P^2} = \frac{1-3/8}{(3/8)^2} = \frac{5/8}{9/64} = \frac{5}{8}.\frac{64}{9} = 4.444$

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1-P}{P^2}} = \sqrt{4.444} = 2.108$

6.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X :

وبالتالي تكون دالة التوزيع التراكمية بالصيغة التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & ,x < 1 \\ (1-P)^x & ,x = 1,2,\dots.n \\ 1 & ,x = +\infty \end{cases} \Rightarrow F(X) = \begin{cases} 0 & ,x < 1 \\ 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^x & ,x = 1,2,\dots.n \\ 1 & ,x = +\infty \end{cases}$$

<u>حل التمرين 08</u>

1 . دالة التوزيع الاحتمالية.

المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي:

N: صندوق يحتوي على 10 عينات دم.

N_1: العناصر التي تمثل النجاح هي 6 عينات ايجابية.

(N-N_1):العناصر التي تمثل الفشل هي 4 عينات سلبية.

n : العينة المسحوبة هي 3 عينات .

$$X \mapsto H(N_1 = 6, N - N_1 = 4)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{C_6^x . C_4^{(3-x)}}{C_{10}^3} & ,x = 0,1,3 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

2.احتمال أن تكون عينة واحد فقط ايجابية.

$$P(X = 1) = \frac{C_{N_1}^x . C_{(N-N_1)}^{(n-x)}}{C_N^n} = \frac{C_6^1 . C_4^{(3-1)}}{C_{10}^3} = 0.3$$

3. أن تكون عينة ايجابية على الأقل.

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{C_6^1 . C_4^2}{C_{10}^3} + \frac{C_6^1 . C_4^1}{C_{10}^3} + \frac{C_6^1 . C_4^0}{C_{10}^3}$$
$$= \frac{36 + 60 + 20}{120} = 0.9667$$

أو :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) \Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{C_6^0 . C_4^2}{C_{10}^3} = 1 - \frac{4}{120}$$
$$= 0.9667$$

4.أن تكون العينة المختارة كلها سلبية.

كرة غير بيضاء يعني أن تكون كرة واحدة فقط غير بيضاء و باقي الكرات تحمل اللون الأبيض.

$$P(X = 2) = \frac{C_{N_1}^x . C_{(N-N_1)}^{(n-x)}}{C_N^n} = \frac{C_6^2 . C_4^{(3-2)}}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = 0.5$$

5. التوقع و التباين و الانحراف المعياري لهذه التجربة.

و بالتالي فان المتوسط يساوي $\mu_x = E(X) = n\frac{N_1}{N}$

بالنسبة للتباين لدينا: $\sigma_x^2 = V(X) = n\frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

و بالتالي فان الانحراف المعياري يساوي $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n\frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

التوقع : $\mu_x = E(X) = n\frac{N_1}{N} = 3.\frac{6}{10} = 1.8$

التباين:$\sigma_x^2 = V(X) = n\frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3\frac{6}{10}\left(1 - \frac{6}{10}\right)\left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0.56$

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{V0.56} = 0.748$

المحور الثاني : أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

تمهيد

تُعد التوزيعات الاحتمالية المستمرة من المفاهيم الأساسية في الإحصاء، حيث تُستخدم لوصف احتمالات متغيرات عددية يمكنها أن تأخذ أي قيمة ضمن نطاق محدد. تتميز هذه التوزيعات بكونها غير منقطعة وتمثل مجموعة لانهائية من القيم الممكنة، مما يجعلها مناسبة لنمذجة العديد من الظواهر الطبيعية والاجتماعية.

تسمح التوزيعات الاحتمالية المستمرة بربط النماذج الإحصائية بالواقع بشكل دقيق، مما يُسهّل فهم الظواهر المعقدة واتخاذ قرارات مستندة إلى البيانات والاحتمالات.

1.التوزيع الطبيعي Normal Distribtion

يُعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات في الإحصاء لما له من انتشار واسع في وصف البيانات الحقيقية. ويرجع ذلك إلى أن العديد من الظواهر اليومية والعملية تتبع هذا التوزيع، كما أن نتائج العينات المتعددة تميل بطبيعتها إلى التوزيع الطبيعي بحسب ما توضح نظرية النهاية المركزية، حتى لو لم يكن توزيع المتغير الأصلي طبيعيًا. لهذا السبب يُشكّل التوزيع الطبيعي أداة أساسية لفهم البيانات وتحليلها، ويُستخدم كأساس في الكثير من التطبيقات الإحصائية.

1.1. دالة الكثافة للمتغير العشوائي X

يسمى المتغير العشوائي X متغيرا طبيعيا و يتبع التوزيع الطبيعي ثوابته (μ_x, σ_x) ، فان دالة الكثافة لمنحنى التوزيع الطبيعي (دالة التوزيع الاحتمالي) تكون من الشكل التالي:

$$X \mapsto N(\mu_x, \sigma_x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

2.1. التوقع و التباين للمتغير العشوائي X

بالنسبة للتوقع:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\mu;\sigma) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

نفرض أن: $x - \mu = v$ ، وبالتالي : $x = \mu + v$

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (v+\mu) e^{-(1/2)\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} + \mu e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv}_{0} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv}_{1}$$

$$= \mu$$

بالنسبة للتباين

$$V(X) = E[(x-\mu)^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x;\mu;\sigma) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

نفرض أن : $y = x - \mu$ ، و بالتالي: dy = dx

$$V(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

باستخدام التكامل بالتجزئة : $\int \tau dv = \tau v - \int v d\tau$

نفرض أن :

$$\tau = y$$

$$dv = y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

بالتالي :

$$d\tau = dy$$

$$v = -\sigma^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

أخيرا :

$$V(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left([\tau v]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v \, d\tau \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\left[-\sigma^2 y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\sigma^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \, dy \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[-\sigma^2 y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} -\sigma^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\left[y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \sigma^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \, dy}_{1}$$

$$= \sigma^2$$

3.1. الدالة التراكمية للمتغير العشوائي X

أما الدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي تكتب كما يلي :

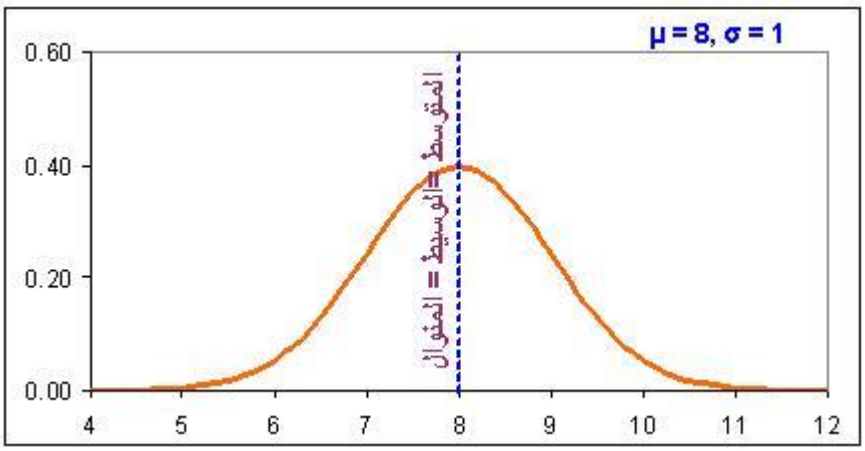
$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

حيث μ و σ هما على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري

4.1. منحنى التوزيع الطبيعي

يشبه منحنى التوزيع الطبيعي شكل الجرس، حيث يتسم بالتماثل التام بين جانبيه الأيمن والأيسر حول قيمة المتوسط. ومن الخصائص المميزة لهذا المنحنى أن المتوسط يساوي الوسيط ويساوي المنوال. يُحدد منحنى التوزيع الطبيعي بواسطة متوسط وانحراف معياري، ويُرمز عادة للمتوسط بالرمز μ. وللانحراف المعياري بـ σ. الشكل رقم (01) يبين شكل منحنى التوزيع الطبيعي حيث المتوسط $\mu_x = 8$ و الانحراف المعياري $\sigma_x = 1$.

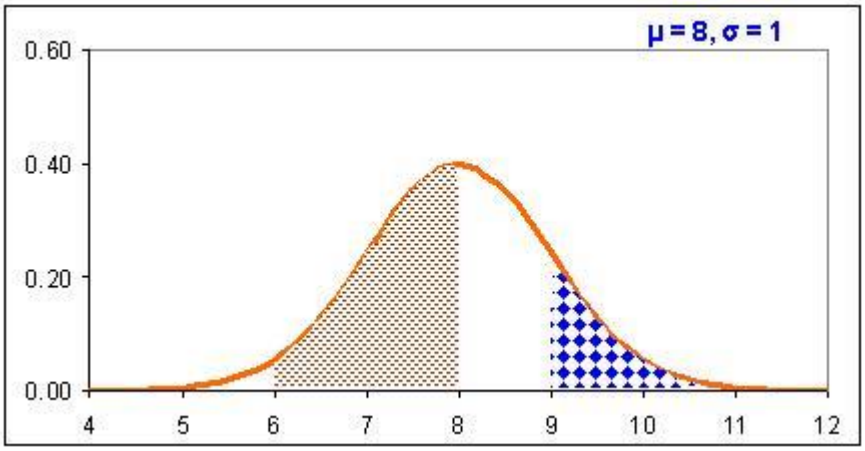
الشكل رقم (01): يبين شكل منحنى التوزيع الطبيعي ($\mu_x = 8$ و $\sigma_x = 1$)



5.1.المساحة تحت المنحنى

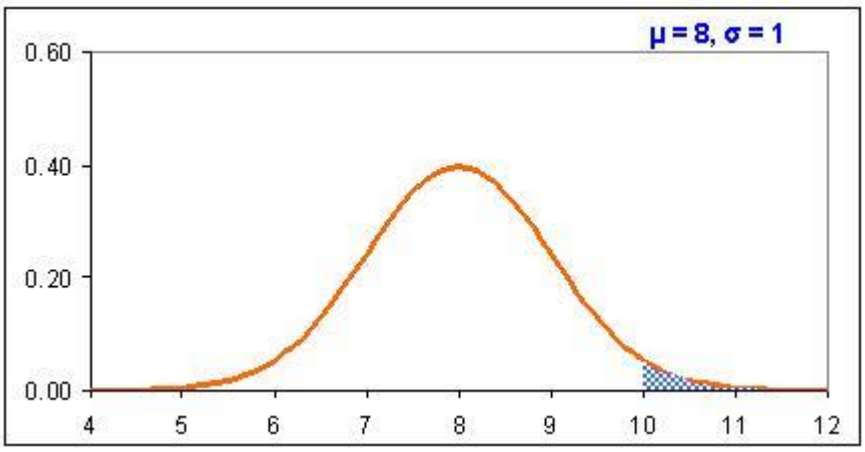
عندما نستخدم التوزيع الطبيعي فإننا نحدد الاحتماليات بالنظر للمساحة تحت المنحنى . فالشكل رقم (2) يوضح أن وقوع المتغير x بين 6 و 8 (المساحة البنية اللون) هي أكبر بكثير من وقوعه بين9 و 11 (المساحة الزرقاء اللون).

الشكل رقم (2): يوضح تحديد المساحة تحت المنحنى $(\mu_x = 9,\ \mu_x = 11)$ و$\mu_x = 6,\ \mu_x = 8$



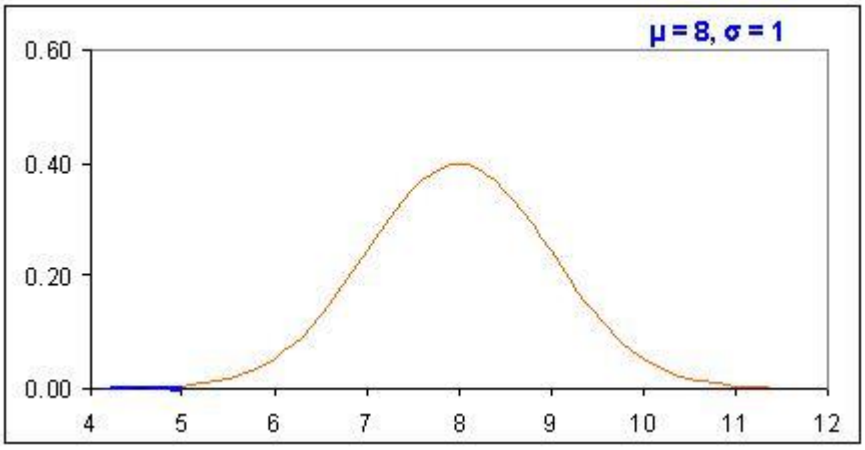
ويمكننا بنفس الطريقة تقدير احتمالية أن يتجاوز المتغير x قيمة ما أو يقل عنها. فمثلا لو أحببنا أن نعرف احتمالية أن يزيد هذا المتغير عن 10 فإننا ننظر إلى المساحة المبينة في الشكل رقم (3).

الشكل رقم (3) : يبين المساحة بين $\mu_x = 10$ و$\mu_x = 11$



ان احتمالية أن يقل هذا المتغير عن 5 فإننا ننظر إلى المساحة تحت المنحنى من قيمة 5 فما أقل وهي مساحة صغيرة جدا تقترب من الصفر (المساحة الزرقاء) في الشكل رقم (4).

الشكل رقم (4) : يبين المساحة بين $(\mu_x \leq 5)$



عملية حساب احتمال وقوع المتغير بين قيميتن أو أكبر من قيمة ما أو أقل من قيمة ما يتم تقديره على وجه الدقة باستخدام الجداول التي تعطي المساحة تحت المنحنى في كل جزء منه .

6.1.تأثير تغير قيمة المتوسط أو الانحراف المعياري

يتغير منحنى التوزيع الطبيعي وفقا لتغير قيمة المتوسط (μ_x) أو الانحراف المعياري (σ_x) [1]:

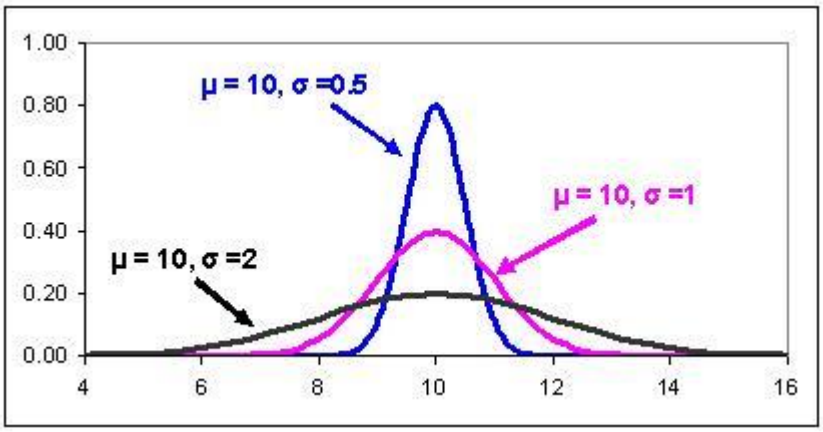
1.6.1. تأثير تغير قيمة الانحراف المعياري

الشكل رقم (5) يبين تأثير تغير الانحراف المعياري مع ثبات المتوسط، حيث أن المنحنى يقل انبعاجا كلما زادت قيمة الانحراف المعياري، وهذا مرتبط بأن الانحراف المعياري هو مقياس لتشتت المنحنى وبالتالي فكلما زاد الانحراف المعياري فإن هذا يعني أن المنحنى ينتشر على مدى أوسع،

[1] نبيل جمعة صالح النجارة الاحصاء التحليلي مع تطبيقات برمجية SPSS، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن،سنة 2015، ص 76.

يوضح الشكل رقم (5) كيف يؤثر تغير الانحراف المعياري على شكل منحنى التوزيع الطبيعي عند ثبات المتوسط. فكلما زادت قيمة الانحراف المعياري، أصبح المنحنى أكثر انتشارًا وأقل حدة حول المتوسط. ويرجع ذلك إلى أن الانحراف المعياري يقيس درجة تشتت البيانات، فالقيم الأكبر تشير إلى توزيع أوسع حول المتوسط. على سبيل المثال، كان المنحنى ضيقًا ومركزًا حول المتوسط عندما كان الانحراف المعياري يساوي 0.5 ، بينما ازداد اتساعا عندما زادت قيمة الانحراف المعياري إلى 1 ثم ازداد اتساعه عندما وصلت قيمة الانحراف المعياري إلى 2.

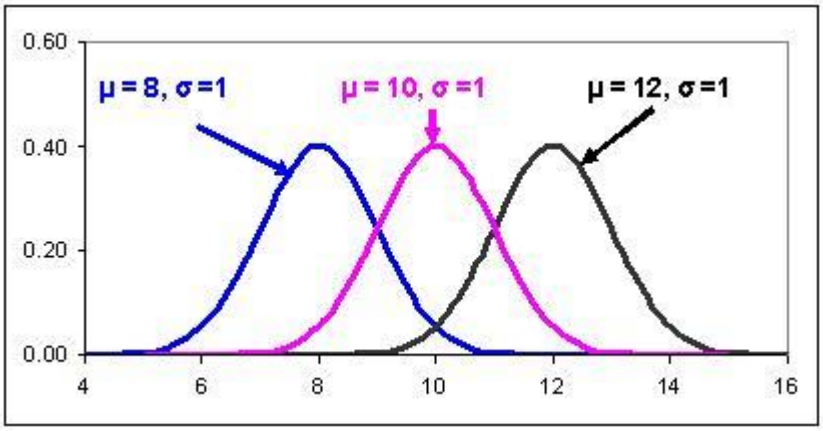
الشكل رقم (5) يبين تأثير تغير الانحراف المعياري مع ثبات المتوسط



2.6.1 . تأثير تغير قيمة المتوسط

تغير المتوسط يظهر في الرسم رقم (6)، حيث أن الانحراف المعياري لكل منحنى من هذه المنحنيات متساو بينما المتوسط مختلف، و بالتالي نلاحظ أن المنحنيات الثلاثة متشابهة تماما ولكن كل منها يتوزع حول متوسط مختلف .

الشكل رقم (6) : يبين تأثير تغير المتوسط مع ثبات الانحراف المعياري



7.1. التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) Standard Normal Distribution

يُحدد منحنى التوزيع الطبيعي بواسطة المتوسط والانحراف المعياري، حيث يمكن أن يأخذ المتوسط أي قيمة، بينما يكون الانحراف المعياري دائمًا قيمة موجبة. أما التوزيع الطبيعي القياسي فهو حالة خاصة من التوزيع الطبيعي يكون مساويا للصفر والانحراف المعياري مساويا للواحد الصحيح [1] .

1.7.1 . دالة الكثافة المتغير Z

اذا كان X يتبع توزيعا طبيعيا ثوابته (μ_x , σ_x) فان Z يتبع أيضا توزيعا طبيعيا ثوابته Z(1,0)

Z يسمى المتغير الطبيعي القياسي وتعطى دالة كثافة Z كما يلي:

$$Z \mapsto N(\mu_x = 0; \sigma_x = 1)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(\tau)^2}$$

2.7.1. دالة التوزيع التراكمية (الدالة التجميعية) للمتغير Z

تكتب دالة التوزيع كما يلي:

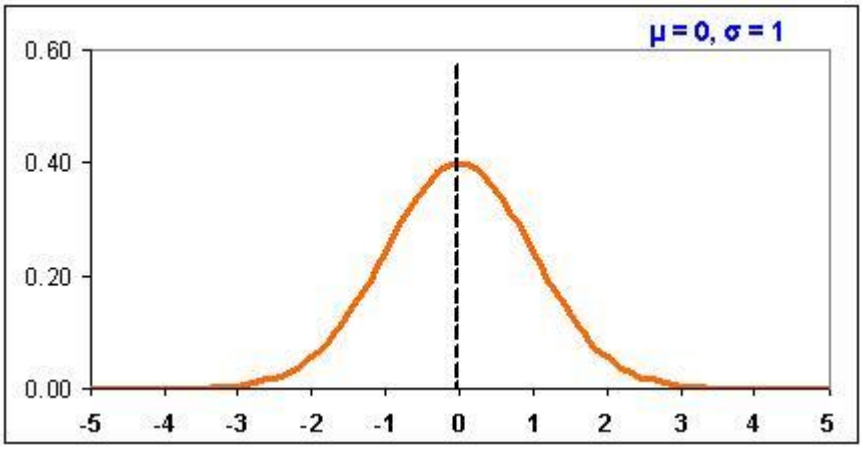
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(1/2)(\tau)^2} dz$$

3.7.1 . خصائص التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي)

1. $P(Z \leq -\alpha) = 1 - P(Z \leq \alpha)$
2. $P(Z \geq -\alpha) = P(Z \leq \alpha)$
3. $P(Z \geq \alpha) = 1 - P(Z \leq \alpha)$
4. $P(\alpha \leq Z \leq \beta) = P(Z \leq \beta) - P(Z \leq \alpha)$

4.7.1.منحنى التوزيع الطبيعي القياسي

الشكل رقم (7): يبين منحنى التوزيع الطبيعي القياسي



[1] ثروت محمد عبد المنعم، مرجع سبق ذكره ، ص 161.

يستخدم منحنى التوزيع الطبيعي القياسي لتحديد احتمالية أن يأخذ متغيرا يتبع التوزيع الطبيعي قيما في مدى محدد.

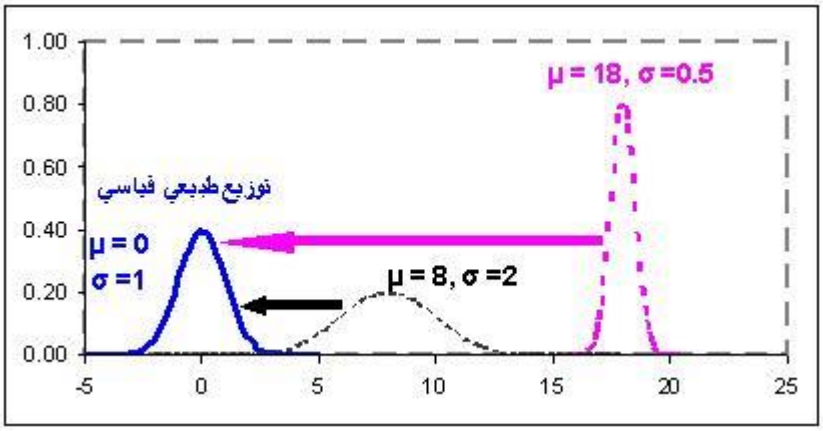
حيث :

- المساحة الكلية الواقعة تحت منحنى التوزيع الطبيعي وعلى طول محور السينات تساوي دائمًا واحدًا.
- هذا التوزيع يتميز بالتماثل حول المتوسط، وبالتالي تكون مساحة الجزء الأيسر مساوية لمساحة الجزء الأيمن، حيث تساوي كل منهما0.5 .
- لحساب المساحة الواقعة على الجانب السالب، يمكن الاستفادة من خاصية التناظر وتحويلها إلى الجانب الموجب.
- يمتد منحنى التوزيع الطبيعي بلا حدود في كلا الاتجاهين، أي إلى مالا نهاية على اليمين واليسار.

5.7.1. مفهوم التحويل لمنحنى التوزيع الطبيعي القياسي

يُعد منحنى التوزيع الطبيعي القياسي أداة مهمة لحساب الاحتمالات، أي المساحة الواقعة تحت منحنى أي توزيع طبيعي. فمن خلال تحويل أي قيمة x متغير يتبع توزيعًا طبيعيًا غير قياسي إلى القيمة المناظرة Z في التوزيع الطبيعي القياسي، يمكن تحديد المساحة تحت المنحنى بسهولة وتقدير الاحتمالات المرتبطة بها.[1]

الشكل رقم (8): يبين تحويل التوزيع الطبيعي للتوزيع القياسي

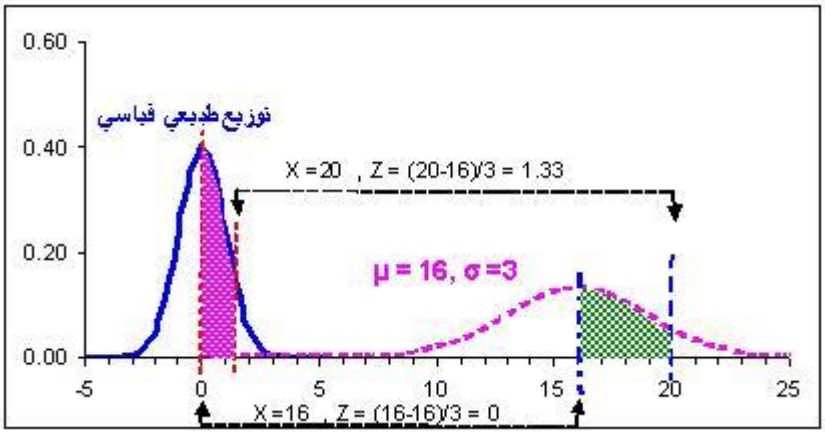


والشكل أدناه يبين مثالا لعملية التحويل . فلدينا توزيع طبيعي حيث$\mu_x = 5$ و $\sigma_x = 3$.ونريد أن نقدر احتمالية أن يقع هذا المتغير بين $P(16 \leq x \leq 20)$.نستخدم التحويل فنحول القيميتين 16 و 20 لنظيرتيهما في التوزيع القياسي وهما 0 و 1.33. ما معنى هذا التحويل؟

[1] سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، مبادىء الاحصاء الاستدلالي، الطبعة الثانية، دار المسير للنشر و التوزيع و الطباعة، عمان، سنة 2010، ص 263.

معنى هذا التحويل أن المساحة التي نريد حسابها أصلا والملونة باللون الأخضر والواقعة أسفل المنحنى الأصلي بين القيمتين 16 و 20 تساوي المساحة تحت المنحنى القياسي بين القيمتين 0 و 1.33 والملونة باللون الأحمر على الرغم من اختلاف الشكل. وبالتالي فالتحويل يمكننا من تقدير المساحة الملونة باللون الأحمر باستخدام جداول التوزيع الطبيعي القياسي. وبذلك نكون قد وصلنا للمساحة الأصلية (الخضراء) والتي هي معبرة عن احتمالية أن تكون قيمة المتغير تحت الدراسة بين 16 و 20. وفي هذا المثال نجد هذه المساحة تساوي 0.40 أي أن المساحة بين 0 و 1.33 في المنحنى القياسي تساوي 0.40 وهي مساوية للمساحة تحت المنحنى الأصلي بين 16 و 20 وهذا يعني أن احتمالية وقوع المتغير بين 16 و 20 هي 40 % .

الشكل رقم (9) : يبين تحويل التوزيع الطبيعي للتوزيع القياسي



تمارين مقترحة

التمرين 01

في مصنع لإنتاج قطع ميكانيكية، يُسجل طول القطع المصنعة يوميًا، وُجد أن طول القطع يتبع توزيعًا طبيعيًا حيث $\mu_x = 35$ و $\sigma_x = 2$ أوجد $P(x > 40)$.

حل التمرين 01

نستخدم معادلة بسيطة لتحويل قيمة المتغير لمنحنى التوزيع القياسي وبالتالي يمكننا استخدام جدول واحد فقط وهو منحنى التوزيع الطبيعي القياسي.

وعملية التحويل من أي توزيع طبيعي للتوزيع الطبيعي القياسي تتم باستخدام معادلة بسيطة حيث نرمز للمتغير الأصلي بـ X ولمقابله في المنحنى القياسي (المعياري) بـ Z ويتم التحويل باستخدام المعادلة التالية:

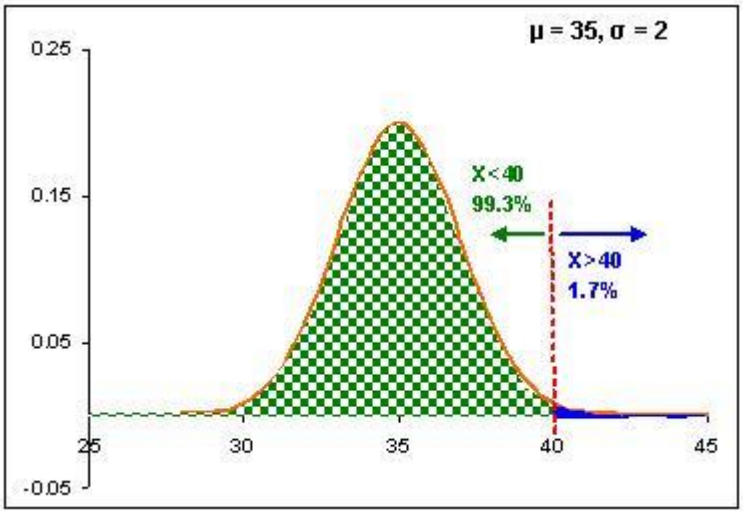
$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ حيث $\mu_x = 0$ و $\sigma_x = 1$

حيث تكون قيمة Z المناظرة $X \geq 40$ هي $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{40-35}{2} = 2.5$

وبالتالي فإننا نبحث في جدول التوزيع الطبيعي القياسي عن قيمة 2.5 والتي نجدها تناظر 0.993 أي أن المساحة على اليسار تساوي هذه القيمة والتي تناظر أن $X < 40$. ولكننا نبحث عن $P(X \geq 40)$. وبالتالي فإننا نبحث عن المساحة على يمين المنحنى وهي 1-0.993 = 0.017 أي أن $P(X \geq 40)$ هي 1.7 %

لاحظ أن المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي 1 في كل الأحوال ولذلك فإننا طرحنا القيمة التي حصلنا عليها من 1 لكي نحصل على المساحة على يمين المنحنى.

الشكل رقم (10): يبين المساحة على يمين المنحنى $P(X \geq 40)$



التمرين 02

تحديد احتمال $P(30.5 \leq x \leq 32)$ حيث $\mu_x = 35$ و $\sigma_x = 2$

حل التمرين 02

علينا أن نحسب المساحة تحت المنحنى على يسار كل قيمة ثم نطرحهما لنحصل على المساحة بين هاتين القيمتين وهي كما تعلم تساوي احتمالية وقوع X بين هاتين القيمتين.

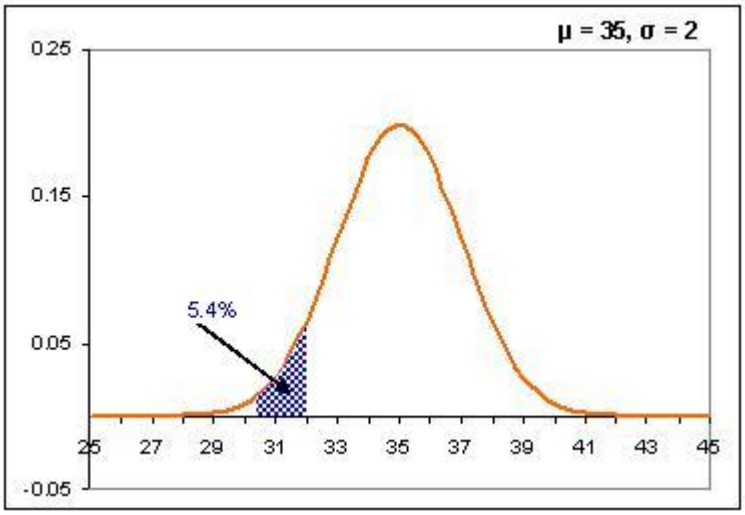
$$Z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{30.5 - 35}{2} = -2.5$$

$$Z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{32 - 35}{2} = -1.5$$

وباستخدام الجداول تجدا أن المساحتين هما 0.122 و 0.066 والفارق بينهما يساوي 0.054 أي أن

$$P(30.5 \leq x \leq 32 = 0.122 - 0.066 = 0.054 = 5.4\%$$

الشكل رقم (11): يبين المساحة بين قيمتين $P(30.5 \leq x \leq 32)$



التمرين 03

في قسم التحليل المالي لشركة، يُسجل عدد التقارير المالية اليومية التي تحتاج إلى مراجعة دقيقة لكل محلل. وُجد أن هذا المتغير يتبع توزيعًا طبيعيًا ثوابته $(\mu_x = 3; \sigma_x^2 = 9)$

أحسب الاحتمالات التالية:

1. $P(2 \leq x \leq 5)$
2. $P(x \geq 0)$
3. $P(|\ x-3\ | \geq 6)$

حل التمرين 03

$$1.\ \mathrm{P}(2 \leq \mathrm{x} \leq 5) = \mathrm{P}\left(\frac{2-3}{3} \leq \frac{\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}}{\sigma_{\mathrm{x}}} \leq \frac{3-3}{3}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{-1}{3} \leq z \leq \frac{2}{3}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leq \frac{2}{3}\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leq \frac{-1}{3}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leq \frac{2}{3}\right) - \left[1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{z} \leq \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 0.67) - [1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 0.33)] = 0.7486 - [1 - 036293] = 0.3779$$

$$2.\ \mathrm{P}(\mathrm{x} \geq 0) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}}{\sigma_{\mathrm{x}}} \geq \frac{0-3}{3}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{z} \geq -1) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 1) = 0.8413$$

$$|\ x-3\ | \geq 6 \Rightarrow \begin{cases} (x-3) \geq 6 \Rightarrow x \geq 9 \\ (-x+3) \geq 6 \Rightarrow -x \geq 3 \Rightarrow x \leq -3 \end{cases}$$

$$3.\ P(|\ x-3\ | \geq 6) = P(x \geq 9) = P(x \leq -3)$$

$$= \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \geq \frac{9-3}{3}\right) + P\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{-3-3}{3}\right) = P(z \geq 2) + P(Z \leq -2)$$

$$= [1 - P(Z \leq 2)] + [1 - P(Z \leq 2] = 2(1 - 0.9772) = 0.0456$$

التمرين 04

من خلال الاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي الاحتمالي أوجد ما يلي:

1. $P(Z \leq 0.01)$
2. $P(Z \geq 0.12)$
3. $P(Z \leq -0.22)$
4. $P(Z \geq -0.46)$
5. $P(1.15 \leq Z \leq 1.27)$
6. $P(-1.35 \leq Z \leq 1.43)$
7. $P(-3 \leq Z \leq 3)$

حل التمرين 04

1. $P(Z \leq 0.01) = 0.5398$
2. $P(Z \geq 0.12) = 1 - P(Z \leq 0.12) = 1 - 0.5478 = 0.4522$
3. $P(Z \leq -0.22) = 1 - P(Z \leq 0.22) = 1 - 0.5871 = 0.4129$
4. $P(Z \geq -0.46) = P(Z \leq 0.46) = 0.667$
5. $P(1.15 \leq Z \leq 1.27) = P(Z \leq 1.27) - P(Z \leq 1.15) = 0.8980 - 0.8749 = 0.0231$
6. $P(-1.35 \leq Z \leq 1.43) = P(Z \leq 1.43) - P(Z \leq -1.35)$
$= P(Z \leq 1.43) - [1 - P(Z \leq 1.35)] = 0.9236 - (1 - 0.9115) = 0.8351$
7. $P(-3 \leq Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq -3) = P(Z \leq 3) - [1 - P(Z \leq 3)]$
$= 2P(Z \leq 3) - 1 = 2(0.9987) - 1 = 0.9974$

2. التوزيع المنتظمuniform distribution

يعد التوزيع المنتظم من أهم التوزيعات الاحتمالية في علم الاحتمال والإحصاء، ويتميز بأن جميع القيم ضمن نطاق محدد لها نفس الاحتمال. بمعنى آخر، كل قيمة داخل هذا النطاق لها فرصة متساوية للحدوث، والانحراف بين القيم متساوٍ. يُستخدم هذا التوزيع في مجالات متعددة، فهو يمثل نموذجًا بسيطًا للظواهر العشوائية التي لا تُظهر أي تحيز تجاه قيم معينة، كما يُعد أساسًا لمحاكاة الظروف المتساوية أو غير المنحازة. في الإحصاء، يُستخدم التوزيع المنتظم لتحليل البيانات وتمثيل الفرضيات التي تفترض تكافؤ الفرص بين جميع القيم الممكنة، مما يجعله أداة مفيدة في النمذجة والمحاكاة.

1.2. استخدامات التوزيع المنتظم

يستخدم التوزيع المنتظم بشكل فعّال لتحليل العديد من العمليات التجارية واللوجستية، مثل وصول البضائع إلى المتاجر أو العملاء، وإليك كيفية تطبيقه:

- وقت وصول البضائع إلى المتجر: يمكن افتراض نطاق زمني محدد يمثل فترة وصول الشحنات المحتملة. باستخدام التوزيع المنتظم، يمكن تقدير احتمالات وصول البضائع في أوقات مختلفة، مما يساعد على تنظيم التخزين واستلام الشحنات بكفاءة.
- جدولة عمليات البيع أو التفريغ: باستخدام التوزيع المنتظم للأوقات، يمكن تحديد فترات متساوية لتفريغ البضائع وترتيب العرض على الرفوف، مما يضمن سلاسة العملية وتقليل الازدحام.
- وقت وصول العملاء أو الزبائن: يمكن استخدام التوزيع المنتظم لتقدير أوقات دخول العملاء إلى المتجر خلال اليوم، مما يساعد على تخطيط عدد الموظفين وتقديم خدمة أسرع.
- تقدير أوقات انتهاء الخدمة أو المغادرة: يمكن تطبيق التوزيع المنتظم لتقدير أوقات مغادرة العملاء أو انتهاء معاملات البيع، مما يسهل إدارة التدفقات اليومية وتحسين تجربة العميل.

2.2 .دالة التوزيع الاحتمالي (دالة الكثافة)

اذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم على المجال [a,b] فان دالة الكثافة الاحتمالية تكتب من الشكل التالي[1]:

$x \rightarrow U(a,b)$

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

3.2.التوقع و العباين للمتغير العشوائيX

بالنسبة للتوقع :

لدينا :

[1] مبارك اسير ديب، مبادئ في الاحتمالات و الاحصاء، جامعة تشرين، سوريا،2009، ص183.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty} 0dx$$
$$=\left[\frac{1}{b-a}.\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$
$$=\left(\frac{1}{b-a}.\frac{b^2}{2}\right)-\left(\frac{1}{b-a}.\frac{a^2}{2}\right)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)=\frac{1}{b-a}\frac{(b-a).(b+a)}{2}=\frac{(b+a)}{2}$$
$$E(X)=\frac{(b+a)}{2}$$

بالنسبة للتباين :

لدينا : $V(X)=E(x^2)-(E(x))^2$

نقوم أولا بحساب $E(x^2)$ حيث :

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{b} x^2\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty} 0dx$$
$$=\left[\frac{1}{b-a}.\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)=\frac{1}{b-a}\frac{(b-a).(b^2+ab+a^2)}{3}$$
$$E(x^2)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

و بالتالي :

$$V(x)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+a^2}{4}$$
$$=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2+6ab+3b^2}{12}=\frac{a^2+b^2-2ab}{12}$$
$$V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

4.2.دالة التوزيع التراكمي

اذا كان المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع المنتظم على المجال [a,b] ، فان دالة التوزيع التراكمية تكتب من الشكل :

$$F(X)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

تمارين مقترحة

التمرين 01

نفترض أن وقت استلام العملاء لطلباتهم عبر خدمة التوصيل يتراوح بين 2 و6 أيام، ويفترض أن هذا الوقت يتبع توزيعًا منتظمًا، أي أن كل يوم داخل هذا النطاق له نفس الاحتمال للحدوث.المطلوب:

1.أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

2.أكتب دالة التوزيع التراكمي للمتغيرX .

3.أحسب التوقع، التباين و الانحراف المعياري.

4.أحسب قيمة الاحتمالات التالية:

1. $P(x \leq 3)$
2. $P(x \geq 2)$
3. $P(-3 \leq x \leq -1)$
4. $P(-3 \leq x \leq 7)$

حل التمرين 01

X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم على المجال$[-2,6] = [a,b]$

1.أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغيرX .

$$x \rightarrow U(a=-2, b=6)$$

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)} & a \leq x < b \\ 0 & otherwise \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & -2 \leq x < 6 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2.أكتب دالة التوزيع التراكمي للمتغيرX .

$$f(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x-(-2)}{8} & -2 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

3.أحسب التوقع، التباين و الانحراف المعياري.

التوقع :

$$E(X) = \frac{(b-a)}{2} = \frac{6-(-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

التباين:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(6+2)^2}{12} = \frac{64}{12} = 5.33$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{5.33} = 2.3$$

4.أحسب قيمة الاحتمالات التالية:

$$1.\ P(x \leq 3) = F(3) = \frac{3-(-2)}{6-(-2)} = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$2.\ P(x \geq 2) = 1 - (x \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2-(-2)}{6-(-2)} = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$3.\ P(-3 \leq x \leq -1) = P(x \leq -1) - P(x \leq -3) = F(-1) - F(-3)$$

$$= \frac{-1-(-2)}{6-(-2)} - \frac{-3-(-2)}{6-(-2)} = \frac{1}{8} - \frac{-1}{8} = \frac{2}{8} = 0.25$$

$$4.\ P(-3 \le x \le 7) = p(x \le 7) - P(x \le -3) = F(7) - F(-3) = \frac{7-(-2)}{6-(-2)} - \frac{-3-(-2)}{6-(-2)}$$
$$= \frac{9}{8} - \frac{-1}{8} = \frac{10}{8} = 1.25$$

التمرين 02

استلم أحد فروع البنك 100 شيكًا للعملاء خلال شهر، ويقوم بصرفها بمعدل متساوٍ على مدار الشهر. نفترض أن الفترة الزمنية لصرف الشيكات تتبع توزيعًا منتظمًا.المطلوب:

1.أكتب دالة التوزيع الاحتمالي.

حل التمرين 02

Xمتغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a,b] = [0,12]$

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

$$x \rightarrow U(a=0, b=12)$$

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \le x < b \\ 0 & otherwise \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} \frac{1}{12} & 0 \le x < 12 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

التمرين 03

نفترض أن الوقت الذي يستغرقه وصول العملاء إلى فرع بنك يتراوح بين 5 و10 دقائق، ويُفترض أن هذا الوقت يتبع التوزيع المنتظم. المطلوب :

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

2.دالة التوزيع التراكمي X .

3.التوقع،التباين و الانحراف المعياري.

4. حساب احتمال وصول العميل في الدقيقة السابعة على الأقل.

حل التمرين 03

X : متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a,b] = [5,10]$

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

$$x \rightarrow U(a=5, b=10)$$

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \le x < b \\ 0 & otherwise \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 5 \le x < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2.دالة التوزيع التراكمي.

$$f(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x-5}{5} & 5 \le x < 10 \\ 1 & x \ge 10 \end{cases}$$

3.التوقع،التباين و الانحراف المعياري.

التوقع:

$$E(X) = \frac{(b-a)}{2} = \frac{10-5}{2} = \frac{15}{2}$$

التباين:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(10-5)^2}{12} = \frac{25}{12}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

4. احتمال وصول العميل في الدقيقة السابعة على الأقل..

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F(7) = 1 - \frac{x-a}{b-a} = 1 - \frac{7-5}{10-5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

3.توزيع كاما"Gamma Distribution"

يشكل توزيع كاما أداة أساسية لتحليل المتغيرات المستمرة والأحداث المرتبطة بالزمن في مختلف المجالات. هذا التوزيع قادر على تمثيل أشكال مختلفة من الاحتمالات، مما يجعله مناسبًا لتطبيقات متعددة. على سبيل المثال، يمكن استخدامه لتقدير الوقت اللازم لإنهاء مشروع أو لتخطيط المواعيد النهائية بشكل أدق.

كما يوفر توزيع كاما مرونة كبيرة في التعامل مع تباين البيانات، مما يسهل على المحللين توقع النتائج واتخاذ قرارات استراتيجية محسوبة. علاوة على ذلك، يساعد في تحسين فهم عمليات الصيانة وإدارة الموارد، ويؤدي بالتالي إلى رفع الكفاءة وتقليل النفقات التشغيلية.

يظهر توزيع كاما قوته في تحليل وفهم الأحداث الزمنية، مما يجعله أداة أساسية في علم الاحتمالات والإحصاء. تطبيقاته الواسعة تبرز أهميته في مجالات متعددة، مما يجعله أحد الأدوات الحيوية في علم تحليل البيانات واتخاذ القرارات.

1.3.استعمالات توزيع كاما توزيع كاما

يُعد توزيع كاما من توزيعات الاحتمالات البارزة في مجالات الإحصاء وعلم الاحتمالات، ويتميز بقدرته على نمذجة المتغيرات المستمرة المتعلقة بالزمن أو الأحداث المتتابعة. ويعود الاهتمام بهذا التوزيع إلى مرونته وكفاءته في تمثيل البيانات التي تتسم بتباين غير منتظم أو أوقات انتظار متفاوتة، مما يجعله أداة قوية للتحليل الكمي في العديد من السياقات التطبيقية. من أبرز مجالات استخدامه تحليل الزمن حتى الفشل، حيث يُستعمل لتقدير المدة الزمنية التي تستغرقها الأنظمة أو الأجهزة قبل حدوث الأعطال، الأمر الذي يسهم في تحسين خطط الصيانة الوقائية وتقليل فترات التوقف غير المخطط لها. كما يُطبق توزيع كاما في دراسة الطوابير وأنظمة الانتظار لتحسين كفاءة تقديم الخدمات في المؤسسات، سواء أكانت بنكية

أو صحية، من خلال تحليل توزيع أوقات الانتظار وفهم أنماط تدفق العملاء أو المستفيدين. إضافة إلى ذلك، يُستفاد من هذا التوزيع في النماذج الاحتمالية للمهام الزمنية لتقدير الوقت اللازم لإتمام مهمة محددة أو لحدوث حدث معين، كما يُوظف في تحليل الإنتاجية والعمليات الصناعية لتقييم أوقات الإنتاج وكفاءة أداء المعدات. وفي المجال المالي، يُستخدم لتسعير الأصول وتقييم الخيارات المالية ضمن نماذج الرياضيات المالية، بينما في المجال الطبي يمكن تطبيقه لتقدير مدة الإقامة في المستشفيات أو متابعة تطور الأحداث الصحية عبر الزمن. كما يمتد نطاق استخدامه ليشمل تحليل الشبكات، حيث يُسهم في تمثيل الزمن المستغرق لانتقال حدث أو تأثير عبر الروابط الشبكية، ما يجعله أداة متعددة الاستخدامات تدعم اتخاذ القرارات الاستراتيجية المبنية على بيانات دقيقة وتحليل علمي متين.

2.3.دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير X (دالة الكثافة)

لدينا متغير عشوائي متصل و ليكن X ، يتوزع وفق توزيع كاما، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، يأخذ الشكل التالي:

$$X \rightarrow G(\alpha, \beta)$$

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} X^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

حيث :

(α, β): تمثل معلمات توزيع كاما، و ان $(\alpha, \beta >)$

$\Gamma(\alpha)$: تمثل دالة كاما و تأخذ دالة كاما الشكل االتالي :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} X^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

بصورة عامة، اذا كان لدينا العدد n، عدد صحيح موجب، فان دالة كاما تأخذ الشكل التالي:

$$\Gamma n = (n-1)!$$

و في مايلي بعض الحالات الخاصة لدالة كاما

$$\Gamma_1 = 1$$

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \pi = 3.14159$$

3.3.التوقع و التباين للمتغير العشوائي X

التوقع : $E(X) = \alpha\beta$

التباين : $V(x) = \alpha\beta^2$

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \beta\sqrt{\alpha}$

4.3.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X

يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمية لتوزيع كاما، كما يلي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^x X^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}$$

التمارين المقترحة

التمرين 01

في مصنع لإنتاج قطع غيار السيارات، نفترض أن لدينا ثلاثة أنواع من عمليات الإنتاج x و y و z تختلف في الزمن اللازم لإنتاج القطع. يمكن نمذجة زمن الإنتاج لكل عملية باستخدام توزيع كاما بالمعلمات المناسبة لكل عملية .المطلوب:

أحسب المتوسط و التباين للمتغيرات العشوائية x وy وz المعرفة كما يلي:

$$X \rightarrow G(\alpha = 5, \beta = 2)$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{X^4 e^{\frac{-x}{2}}}{2^5 \Gamma(5)} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$y \rightarrow G(\alpha, \beta)$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^3 e^{\frac{-y}{4}}}{4^4 \Gamma(6)} & y \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$z \rightarrow G(\alpha, \beta)$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 e^{-z}}{6} & z \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

حل التمرين 01

دالة التوزيع الاحتمالي تكتب من الشكل التالي:

$$x \rightarrow G(\alpha, \beta)$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} X^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

المتغير x

$$x \rightarrow G(\alpha = 5, \beta = 2)$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{X^4 e^{\frac{-x}{2}}}{2^5 \Gamma(5)} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 4 \\ \frac{-x}{\beta} = \frac{-x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$E(x) = \alpha\beta = 5.2 = 10$$

$$V(x) = \alpha\beta^2 = 5.2^2 = 20$$

المتغير y

$$y \rightarrow G(\alpha = 4, \beta = 4)$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^3 e^{\frac{-y}{4}}}{4^4 \Gamma(6)} & y \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 3 \\ \frac{-y}{\beta} = \frac{-y}{4} \\ \beta^\alpha = 4^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

$$E(y) = \alpha\beta = 4.4 = 16$$
$$V(y) = \alpha\beta^2 = 4.4^2 = 64$$

المتغيرz

$$z \rightarrow G(\alpha, \beta)$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 e^{-z}}{6} & z \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 2 \\ \frac{-z}{\beta} = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$E(z) = \alpha\beta = 3.1 = 3$$
$$V(z) = \alpha\beta^2 = 3.1^2 =$$

التمرين 02

اذا كان لدينا المتغير العشوائي المتصل X ، يمثل مدة معالجة طلبات العملاء في بنك باليوم الواحد، و له دالة التوزيع الاحتمالي التالية:

$$X \rightarrow G(\alpha = 2, \beta = 2)$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{X}{4} \ e^{\frac{-x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

المطلوب:

1.اثبت أن دالة التوزيع الاحتمالي أعلاه، هي دالة كثافة احتمالية.

2.دالة التوزيع التراكمية.

3. ما هو احتمال أن تستغرق معالجة الطلبات مدة لا تتجاوز 10 دقائق على الاكثر؟.

4.أحسب المتوسط و التباين.

حل التمرين 02

1.اثبت أن دالة التوزيع الاحتمالي أعلاه، هي دالة كثافة احتمالية.

$$\begin{cases} 1)\ f(x) \geq 0 \\ 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$$1)\ f(x) \geq 0 \qquad [\forall X, X \geq 0]$$

$$2)\ \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{X}{4}\ e^{\frac{-x}{2}}dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} xe^{\frac{-x}{2}}dx$$

الطريقة الأولى:

نطبق التكامل بالتجزئة :

اذا كانت كل من u = u(x) و ν = ν(x) دالتين لـ X

فإن :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{\frac{-x}{2}} \Rightarrow v = -2e^{\frac{-x}{2}}$$

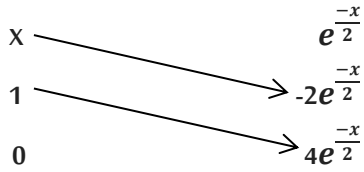
$$2)\ \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{X}{4}\ e^{\frac{-x}{2}}dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} xe^{\frac{-x}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2xe^{\frac{-x}{2}}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} -2xe^{\frac{-x}{2}}dx = \frac{1}{4}\left[-2xe^{\frac{-x}{2}}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{4}\left[4e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}(0-0) - (0-1)$$

$$= 1$$

الطريقة الثانية :

التكاملات $e^{\frac{-x}{2}}$ المشتقات x



$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{X}{4}\ e^{\frac{-x}{2}}dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} xe^{\frac{-x}{2}}dx = \frac{1}{4}\left[-2xe^{\frac{-x}{2}} - 4e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}xe^{\frac{-x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^{+\infty} = [0 - (-1)] = 1$$

2.دالة التوزيع التراكمية.

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{X}{4} e^{\frac{-x}{2}} dx = \frac{1}{4} \int_0^x X \ \ e^{\frac{-x}{2}} dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[-2xe^{\frac{-x}{2}} - 4e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^x = \left[\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}(-x-2)\right]_0^x$$

3. احتمال أن تستغرق معالجة الطلبات مدة لا تتجاوز 10 دقائق على الاكثر. (اما نعوض في دالة التوزيع الاحتمالية ، و من الأفضل التعويض في دالة التوزيع التراكمي)

$$P(x \leq 10) = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10} \frac{X}{4} e^{\frac{-x}{2}} dx = \frac{1}{4} \int_0^{10} x\, e^{\frac{-x}{2}} dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[-2xe^{\frac{-x}{2}} - 4e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^{10} = \frac{1}{4}[-2.10e^{-5} - 4e^{-5}] - \frac{1}{4}[0-4]$$
$$= \frac{1}{4}(-20.0.007 - 4.0.007) - \frac{1}{4}(0-4)$$
$$= (-5.0.007 - 0.007) - \frac{1}{4}(0-4) = -0.035 - 0.007 + 1 = 0.958$$

4.حساب المتوسط و التباين.

التوقع : $E(X) = \alpha\beta = 2.2 = 4$

التباين : $V(x) = \alpha\beta^2 = 2.2^2 = 8$

4.توزيع الأسي (Exponential Distribution)

يصنَّف التوزيع الأسي ضمن التوزيعات الاحتمالية المهمة التي تُستخدم لوصف الظواهر المرتبطة بزمن الانتظار حتى وقوع حدث معين. ويُعد هذا التوزيع أداة فعّالة لتحليل العمليات التي تتسم بالعشوائية والاستمرارية، حيث يسمح بدراسة الفترات الزمنية الفاصلة بين الأحداث المتتالية بطريقة دقيقة وبسيطة في آن واحد.

وقد حظي التوزيع الأسي باهتمام واسع نظرًا لاعتماده في مجالات متعددة، مثل الهندسة وتحليل الأعطال، والطب، والاقتصاد والمالية. ويعتمد هذا التوزيع على مفهوم **معدل الحدوث**، الذي يحدد سرعة وقوع الأحداث مع مرور الزمن، مما يجعله مناسبًا لنمذجة الأنظمة التي يكون فيها احتمال حدوث الحدث مستقلاً عن الزمن المنقضي سابقًا.

2.4.استعمالات التوزيع الأسي

يُستخدم التوزيع الأسي في العديد من المجالات التطبيقية نظرًا لفعاليته في تمثيل الفترات الزمنية الفاصلة بين وقوع الأحداث المتتابعة، خاصة في الحالات التي تتسم بالعشوائية والاستمرارية. ويُعد هذا التوزيع أداة مهمة في تحليل الصيانة والإصلاح، حيث يُستعمل لتقدير فترات التشغيل قبل حدوث الأعطال في الأنظمة الهندسية، مما يساعد على التخطيط المسبق للصيانة وإدارة الموارد بكفاءة. كما يُستخدم في نماذج البقاء والفشل لتقدير مدى استمرارية الأنظمة وتوقع زمن الانتظار حتى حدوث

الفشل. ويجد التوزيع الأسي تطبيقًا واسعًا في تحليل الطوابير ونظرية الانتظار، حيث يُستخدم لتقدير أوقات انتظار العملاء أو المشتركين قبل الحصول على الخدمة. وفي المجال المالي، يُستفاد منه في تسعير الخيارات المالية من خلال تقدير الأوقات المتوقعة لوقوع أحداث مالية معينة. كما يُستخدم في تحليل الاتصالات والشبكات لفهم الفترات الزمنية بين الأحداث داخل الشبكات وتحسين أدائها. وفي المجال الطبي، يُطبق التوزيع الأسي في تحليل الفترات الزمنية بين الحالات الطبية أو الفحوصات، مما يساعد في تنظيم مواعيد المرضى بشكل أفضل. إضافة إلى ذلك، يُستخدم في نماذج التصميم الهندسي لتقدير الزمن المتوقع لحدوث الحوادث أو الأعطال. وبذلك يُعد التوزيع الأسي أداة إحصائية فعالة تسهم في فهم أعمق لسلوك الزمن واتخاذ قرارات أكثر دقة في مختلف المجالات التطبيقية.

2.4.دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير x (دالة الكثافة)

يعد التوزيع الأسي، حالة خاصة من توزيع كاما، عندما ($\alpha = 1$)، و بالتالي لدينا متغير عشوائي متصل و ليكن X ، يتوزع وفق التوزيع الأسي، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، يأخذ الشكل التالي:

$$x \rightarrow EXP(\beta)$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} . e^{\frac{-x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

هذا يعني ان المتغير العشوائي X ، يتوزع وفق التوزيع الأسي بالمعلمة (β)

3.4.التوقع و التباين للمتغير العشوائي X

التوقع : $E(X) = \beta$

التباين : $V(x) = \beta^2$

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \beta$

4.4.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائيx

يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمية لتوزيع كاما، كما يلي:

$$f(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\beta}\int_0^x e^{\frac{-x}{\beta}} dx$$

$$= \frac{1}{\beta}\left[-\beta e^{\frac{-x}{\beta}}\right]_0^x = \left[-e^{\frac{-x}{\beta}}\right]_0^x = -e^{\frac{-x}{\beta}} + 1 = 1 - -e^{\frac{-x}{\beta}}$$

التمارين المقترحة

التمرين 01

اذا كان لدينا المتغير العشوائي المتصل X ،الذي يمثل مدة البقاء (بالساعات) لمصباح إضاءة يعمل في أحد المستشفيات قبل احتراقه، و له دالة كثافة احتمالية تأخذ الشكل الآتي:

$$f(X)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}.e^{\frac{-x}{500}} & x\geq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

المطلوب:

1.دالة التوزيع التراكمي.

2.ما هو احتمال أن لا تتجاوز مدة عمل مصباح الإضاءة في المستشفى 600 ساعة قبل احتراقه.

3.ما هو احتمال أن تتراوح مدة عمل مصباح الإضاءة في المستشفى بين 400 و600 ساعة قبل احتراقه.

4.احسب متوسط عمر هذا المصباح و تباينه.

حل التمرين 01

$x\rightarrow EXP(\beta=500)$

$$f(X)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}.e^{\frac{-x}{\beta}} & x\geq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}\Rightarrow f(X)=\begin{cases}\frac{1}{500}.e^{\frac{-x}{500}} & x\geq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

1.دالة التوزيع التراكمي.

$$f(X)=P(X\leq x)=1-e^{\frac{-x}{500}}$$

2. احتمال أن لا تتجاوز مدة عمل مصباح الإضاءة في المستشفى 600 ساعة قبل احتراقه.. (نستعمل دالة التوزيع التراكمية)

$$P(X\leq 600)=F(600)=1-e^{\frac{-x}{\beta}}=1-e^{\frac{-600}{500}}=1-e^{-1.2}=1-0.301=0.699$$

3احتمال أن تتراوح مدة عمل مصباح الإضاءة في المستشفى بين 400 و600 ساعة قبل احتراقه.. (نستعمل دالة التوزيع التراكمية)

$$P(400\leq X\leq 600)=P(x\leq 600)-P(x\leq 400)=F(600)-F(400)$$
$$=\left[1-e^{\frac{-600}{500}}\right]-\left[1-e^{\frac{-400}{500}}\right]=e^{\frac{-400}{500}}-e^{\frac{-600}{500}}=e^{-0.8}-e^{-1.2}$$
$$=0.449-0.301=0.148$$

4.احسب متوسط عمر هذا المصباح تباينه.

التوقع : $E(X)=\beta=500$

التباين : $V(x)=\beta^2=500^2=250000$

التمرين 02

اذا علمت أن الفترة الزمنية اللازمة لانهاء خدمة العميل في بنك التنمية المحلية تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 5 دقائق أوجد مايلي:

1.دالة التوزيع الاحتمالي التي تعبر عن الفترة الزمنية اللازمة لانهاء خدمة العميل.

2.احتمال خدمة العميل في أقل من 4 دقائق.

3.احتمال أن يتم انهاء خدمة العميل ما بين 2 و 4 دقائق.

4.أحسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري.

حل التمرين 02

1.دالة التوزيع الاحتمالي التي تعبر عن الفترة الزمنية اللازمة لانهاء خدمة العميل.

لدينا المتوسط : التوقع $E(X) = \beta = 5$

$x \rightarrow EXP(\beta = 5)$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} . e^{\frac{-x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} \frac{1}{5} . e^{\frac{-x}{5}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2.احتمال خدمة العميل في أقل من 4 دقائق.

$$P(X \leq 4) = F(4) = 1 - e^{\frac{-x}{\beta}} = 1 - e^{\frac{-4}{5}} = 1 - e^{-0.8} = 1 - 0.449 = 0.551$$

3.احتمال أن يتم انهاء خدمة العميل ما بين 2 و 4 دقائق.

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(x \leq 4) - P(x \leq 2) = F(4) - F(2) = \left[1 - e^{\frac{-4}{5}}\right] - \left[1 - e^{\frac{-2}{5}}\right]$$
$$= e^{\frac{-2}{5}} - e^{\frac{-4}{5}} = e^{-0.4} - e^{-0.8} = 0.67 - 0.449 = 0.221$$

4.أحسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري.

التباين : $V(x) = \beta^2 = 5^2 = 25$

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \beta = 5$

5.توزيع بيتا "Beta Distribution"

يُعد توزيع بيتا أحد التوزيعات الاحتمالية المهمة في علم الإحصاء وتحليل البيانات، ويتميز بمرونته العالية في تمثيل الظواهر المرتبطة بالنِّسَب والاحتمالات المحصورة بين الصفر والواحد. وتكمن أهمية هذا التوزيع في قدرته على نمذجة مجموعة واسعة من التجارب التي تعتمد على مفهومي النجاح والفشل، مما يجعله مناسبًا للعديد من التطبيقات العلمية والعملية.

يُوصف توزيع بيتا بواسطة معلمتين أساسيتين هما αوβ، حيث تعكس المعلمة α عدد النجاحات أو الحالات الإيجابية، بينما تمثل المعلمة β عدد الإخفاقات أو الحالات السلبية. ومن خلال تغيير قيم هاتين

المعلمتين، يمكن لتوزيع بيتا أن يأخذ أشكالًا مختلفة، مما يسمح بتمثيل درجات متعددة من التمركز أو التشتت حول قيم معينة للاحتمال.

ويُستخدم توزيع بيتا على نطاق واسع في تحليل البيانات الإحصائية المتعلقة بنسب النجاح أو الفشل في التجارب، مثل نتائج الاختبارات، ودراسات الجودة، والتجارب الطبية. كما يُعد أداة مهمة في التحليل الاقتصادي والمالي لتمثيل نسب النمو أو المخاطر، وفي ضبط الجودة الصناعية لتقييم معدلات العيوب. إضافة إلى ذلك، يلعب توزيع بيتا دورًا محوريًا في الإحصاء البايزي، حيث يُستخدم كتوزيع قبلي (Prior Distribution) لتحديث التوقعات الاحتمالية عند توفر معلومات أو بيانات جديدة، مما يتيح تحسين التنبؤات واتخاذ قرارات أكثر دقة.

1.5.استعمالات توزيع بيتا Beta Distribution

يُستخدم توزيع بيتا على نطاق واسع في علم الإحصاء والتحليل الإحصائي نظرًا لقدرته العالية على تمثيل المتغيرات الاحتمالية التي تقع قيمها بين الصفر والواحد. ويُعد هذا التوزيع مناسبًا بشكل خاص لتحليل النِّسَب والاحتمالات، مثل نسب النجاح والفشل، حيث يُستعمل في تقدير الاحتمالات غير المعروفة وقياس درجة الثقة في التنبؤات المتعلقة بهذه النِّسَب. كما يجد توزيع بيتا تطبيقًا مهمًا في التجارب السريرية بالمجال الطبي، إذ يُستخدم لتمثيل التوزيع الاحتمالي لنسب نجاح العلاجات أو فعالية الأدوية، مما يساعد الباحثين على تقييم النتائج واتخاذ قرارات مبنية على أسس إحصائية دقيقة.

ويمتد استخدام توزيع بيتا إلى مجالات الأعمال والاقتصاد، حيث يُوظف في تقدير النِّسَب المئوية والاحتمالات المرتبطة بالمخاطر والعوائد، الأمر الذي يدعم اتخاذ القرارات الاستراتيجية في بيئات تتسم بعدم اليقين. كما يُستخدم كتوزيع قبلي (تسبيقي) في إطار الإحصاء البايزي لتحديث التوقعات الاحتمالية عند توفر بيانات جديدة، مما يسمح بتحسين التنبؤات تدريجيًا. إضافة إلى ذلك، يلعب توزيع بيتا دورًا مهمًا في مراقبة الجودة وتحليل العمليات الصناعية من خلال تقدير نسب العيوب أو الأخطاء وتوقع الأداء المستقبلي للأنظمة. وفي مجال التسويق ونمذجة السلوك الاستهلاكي، يُستخدم توزيع بيتا لتمثيل احتمالات سلوك المستهلكين وتقدير فرص تحقيق نتائج معينة خلال فترات زمنية محددة، مما يعزز فهم السوق وتحسين استراتيجيات التسويق.

2.5.دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير x (دالة الكثافة)

نفرض لدينا متغير عشوائي متصل و ليكن X ، يتوزع وفق توزيع بيتا فان دالة التوزيع الاحتمالي له، يأخذ الشكل التالي:

$$X \rightarrow B(\alpha, \beta)$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

هذا يعني ان المتغير العشوائي X ، يتوزع وفق توزيع بيتا بالمعلمتين (α) و(β)

3.5.التوقع و التباين للمتغير العشوائيX

التوقع :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

التباين :

$$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma_x = \frac{1}{(\alpha + \beta)}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)}}$$

4.5.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائيX

يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمية لتوزيع بيتا، كما يلي:

$$f(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

تمارين مقترحة

التمرين 01

اذا كان لديك المتغير العشوائي المتصل يمثل نسبة الرطوبة في الخرسانة خلال مرحلة التجفيف له دالة التوزيع الاحتمالي التالية :

$$f(X) = \begin{cases} 30\,x^2(1-x)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

المطلوب:

1.أثبت أن دالة التوزيع الاحتمالي ، هي دالة كثافة.

2.أكتب دالة التوزيع التراكمي.

3.ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في الخرسانة 40% على الأكثر.

4.ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في الخرسانة 30% على الأقل.

5.أحسب القيمة المتوقعة لنسبة الرطوبة في الخرسانة.

حل التمرين 01

$$x \rightarrow B(\alpha = 3, \beta = 3)$$

$$f(X) = \begin{cases} 30\,x^2(1-x)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

1.أثبت أن دالة التوزيع الاحتمالي ، هي دالة كثافة.

$$\begin{cases} 1)\ f(x) \geq 0 \\ 2)\ \int_0^1 f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$$1)\ f(x) \geq 0 \qquad [\forall X, 0 \leq x \leq 1]$$

$$2)\ \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 30\,x^2(1-x)^2dx = 30\int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx =$$

$$30\int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4 dx = 30\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^1$$

$$= (10 - 15 + 6) - (0 - 0 + 0) = 16 - 15 = 1$$

2.أكتب دالة التوزيع التراكمي.

$$f(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = 30\int_0^1 x^2(1-x)^2dx$$

$$= [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^x$$

3.ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في الخرسانة 40% على الأكثر.

$$P(x \leq 0.4) = F(0.4) = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{0.4} = 10(0.4)^3 - 15(0.4)^4 + 6(0.4)^5 = 0.3$$

4.ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في الخرسانة 30% على الأقل.

$$P(x \geq 0.3) = 1 - P(x \leq 0.3) = 1 - F(0.3) = 1 - [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{0.3} = 1 - 0.162$$

$$= 0.838$$

5.أحسب القيمة المتوقعة لنسبة الرطوبة في الخرسانة.

التوقع : $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+3} = 0.5$

التمرين 02

ليكن لدينا المتغير العشوائي x الذي يمثل نسبة الأخطاء الطبية في أحد الأقسام الاستشفائية خلال فترة زمنية معينة، فاذا علمت بأن قيمة المعلمتين $(\alpha = 3)$ و$(\beta = 2)$ تتبع توزيع بيتا على التوالي، المطلوب : أوجد ما يلي:

1.أحسب القيم التالية : $\Gamma 5, \Gamma 3, \Gamma 2, \Gamma 1$

2.دالة التوزيع الاحتمالي و بين أنها دالة كثافة احتمالية.

3.دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع.

4.حساب احتمال أن لا تتجاوز نسبة الأخطاء الطبية في أحد الأقسام الاستشفائية 25.% خلال فترة زمنية معينة.

5.حساب احتمال ان تكون نسبة الأخطاء الطبية 10% على الأقل.

6.حساب التوقع و التباين و الانحراف المعياري

حل التمرين 02

المتغير العشوائي X ، الذي يمثل نسبة الأخطاء الطبية في أحد الأقسام الاستشفائية خلال فترة زمنية معينة ، يتوزع وفق توزيع بيتا بالمعلمتين $(\alpha = 3)$ و$(\beta = 2)$.أي $x \mapsto B(\alpha = 3, \beta = 2)$

1.حساب قيم دالة كاما للحالات التالية: $\Gamma 5, \Gamma 3, \Gamma 2, \Gamma 1$

بصورة عامة، اذا كان لدينا العدد ، عدد صحيح موجب فان دالة كاما تأخذ الشكل التالي:

$$\Gamma n = (n-1)!$$
$$\Gamma 1 = (1-1)! = 0! = 1$$
$$\Gamma 2 = (2-1)! = 1! = 1$$
$$\Gamma 3 = (3-1)! = 2! = 2$$
$$\Gamma 5 = (5-1)! = 4! = 24$$

2. كتابة دالة التوزيع الاحتمالي

$$X \rightarrow B(\alpha, \beta)$$
$$f(X) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

بتعويض قيمتي $(\alpha = 3)$ و$(\beta = 2)$ نجد :

$$X \rightarrow B(\alpha = 3, \beta = 2)$$
$$f(X) = \begin{cases} \frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} x^{3-1}(1-x)^{2-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

وبالتبسيط تصبح دالة التوزيع الاحتمالي كمايلي :

$$x \rightarrow B(\alpha = 3, \beta = 2$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} x^2 (1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

-اثبات أن دالة التوزيع الاحتمالي دالة كثافة احتمالية :

$$\begin{cases} 1)\ f(x) \ge 0 \\ 2)\ \int_0^1 f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$$1)\ f(x) \geq 0 \qquad [\forall X, 0 \leq x \leq 1]$$

$$2)\ \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 12x^2(1-x)dx = 12\int_0^1 x^2 - x^3 dx = 12\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$12\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = 12[0-0] = 4-3 = 1$$

3.ايجاد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع :

$$f(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \int_0^x 12x^2(1-x)dx$$

$$= 12\int_0^x x^2 - x^3 dx = 12\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^x = [4x^3 - 3x^4]_0^x$$

4.حساب احتمال أن لا تتجاوز نسبة الأخطاء الطبية في أحد الأقسام الاستشفائية 25 %

$$P(x \leq 0.25) = F(0.25) = [4x^3 - 3x^4]_0^{0.25} = \left[4(0.25)^3 - 3(0.25)^4\right]_0^{0.25} - [0-0]$$

$$= 0.0625 - 0.0117 = 0.051$$

5. احتمال ان تكون نسبة الأخطاء الطبية 10% على الأقل

$$P(x \geq 0.1) = 1 - P(x \leq 0.1) = 1 - F(0.1) = 1 - [4x^3 - 3x^4]_0^{0.1}$$

$$= 1 - [4(0.1)^3 - 3(0.1)^4]_0^{0.1} = 1 - (0.004 - 0.0003) = 0.9963$$

6.حساب التوقع و التباين و الانحراف المعياري :

التوقع :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5} = 0.6$$

التباين :

$$V(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{(3)(2)}{(3+2)^2(3+2+1)} = \frac{6}{150} = 0.04$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.04} = 0.2$$

6.توزيع كاي مربع "Chi-Square Distribution"

يعد توزيع كاي مربع من التوزيعات الاحتمالية المهمة في الإحصاء، ويستخدم على نطاق واسع لتحليل البيانات واختبار الفروض الإحصائية. يتميز هذا التوزيع بقدرته على قياس الانحرافات بين القيم الفعلية والقيم المتوقعة، مما يجعله أداة أساسية في تقييم مدى توافق البيانات مع النماذج النظرية. يرتبط توزيع كاي مربع ارتباطًا وثيقًا بالمتغيرات العشوائية المستقلة التي تتبع التوزيع الطبيعي، ويُستفاد منه في سياقات متعددة، منها الإحصاء، علم الأحياء، علوم الاجتماع، والاقتصاد، حيث يُستخدم لفهم الفروق والتباينات

داخل البيانات. كما يُستخدم توزيع كاي مربع بشكل أساسي في اختبارات الفرضيات، مثل اختبار الاستقلالية بين المتغيرات أو اختبار ملاءمة النموذج للبيانات، مما يتيح للمحللين تقييم قوة العلاقة بين البيانات الفعلية والنموذج النظري بدقة.

1.6.استخدامات توزيع مربع كاي

يُستخدم توزيع كاي مربع في العديد من التطبيقات الإحصائية المهمة، حيث يمثل أداة قوية لفحص العلاقات بين البيانات والنماذج النظرية. من أبرز استخداماته اختبار فحص التوزيع الذي يسمح بتحديد ما إذا كانت البيانات الفعلية تتبع توزيعا محددا أم لا، مما يساعد على تقييم صحة الفرضيات الإحصائية. كما يُستخدم في اختبار الاستقلال، خاصة عند تحليل الجداول المتقطعة، لتحديد ما إذا كانت المتغيرات مستقلة عن بعضها أم مرتبطة بطريقة ما. بالإضافة إلى ذلك، يساهم مربع توزيع كاي في تقدير التباين وتحليل الانحرافات القياسية في البيانات، مما يمكّن الباحثين من قياس مدى التشتت والتباين بين القيم الفعلية والمتوقعة بدقة، وهو ما يجعله أداة أساسية في الدراسات الإحصائية متعددة المجالات مثل العلوم الطبية والاجتماعية والهندسية.

2.6.دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير x (دالة الكثافة)

عند اختيار عينة عشوائية قوامها من المشاهدات و هي $(x_1, x_2, \dots \dots x_n)$ تمثل مشاهدات المتغير العشوائيx الذي يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط μ_x و تباين σ_x ، وعليه فان توزيع مربع كاي ,{1}_x للمشاهدات أعلاه، يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \rightarrow N(0.1)$$

$$z^2 = \left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 \rightarrow X^2_{(1)}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 &= z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 \\ &= \left(\frac{X_1 - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 \\ &= X^2_{(1)} + X^2_{(1)} + \cdots + X^2_{(1)} \\ &= X^2_{(n)}\end{aligned}$$

من أعلاه يتضح بأن مجموع مربعات الدرجات المعيارية $\sum_{i=1}^{n} z_i^2$تخضع لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية عددها n ،أي أن : $\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \rightarrow X^2_{(n)}$

وبافتراض أن المتغير العشوائي X يمثل $\sum_{i=1}^{n} z_i^2$، أي أن $X = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \rightarrow X_{(n)}^2$

في ضوء ما تقدم ، فان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يخضع لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية k، تكتب كالآتي:

$$f(x,k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} X^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

و يمكن تبسيط دالة الكثافة كما يلي:

$$f(x,n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} X^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

حيث :

k هو عدد درجات الحرية لتوزيع مربع كاي

$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$:دالة كاما

e أساس اللوغاريتم الطبيعي

3.6.التوقع و التباين للمتغير العشوائيX

التوقع : $E(X) = k$

التباين : $V(x) = 2k$

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \sqrt{2k}$

4.6.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائيx

يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمية لتوزيع كاي مربع، كما يلي:

$$F(x,k) = P(X \leq x) = \frac{\gamma\left(\frac{k}{2},\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} = P\left(\frac{k}{2},\frac{x}{2}\right)$$

γ دالة التوزيع التراككمي لتوزيع كاما

Γ دالة كاما

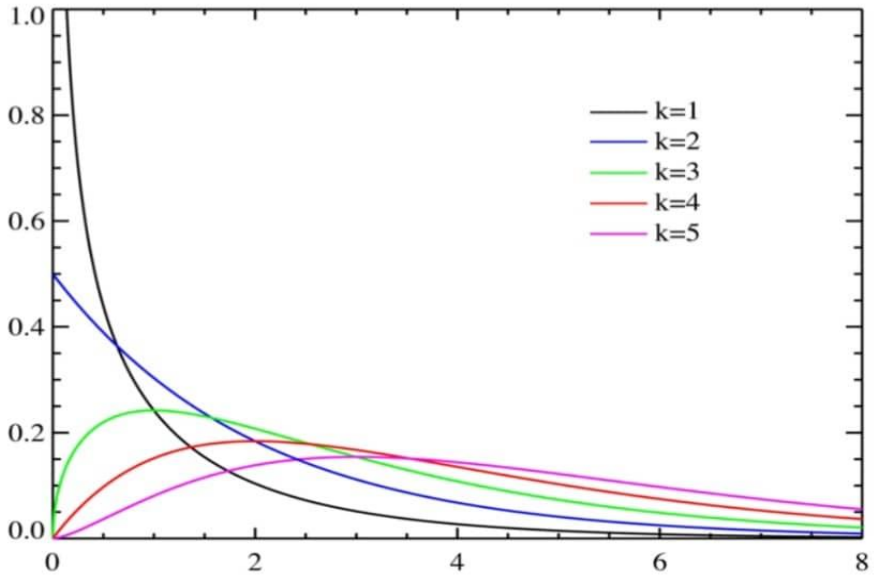
k هو عدد درجات الحرية لتوزيع مربع كاي

5.6.منحنى توزيع كاي مربع (X^2)

يُعد توزيع كاي مربع من التوزيعات الاحتمالية الأساسية في التحليل الإحصائي والتطبيقات العملية، حيث يُستخدم على نطاق واسع في الدراسات الإحصائية لتقدير الفروق بين القيم الفعلية والمتوقعة،

واختبار الفرضيات، وتحليل الانحرافات. يتميز هذا التوزيع بأن منحناه غير متماثل، حيث يظهر التواءً موجبًا أي أنه يميل نحو الجهة اليمنى، ويعتمد شكل المنحنى على عدد درجات الحرية، فكلما زادت درجات الحرية أصبح المنحنى أكثر اتساقًا ويقترب تدريجيًا من التماثل، كما في الشكل التالي:

الشكل رقم 12 : منحنى توزيع كاي مربع (X^2)



6.6.خصائص توزيع X^2

-المتغير X^2 موجب دائما و بذلك فان جميع منحنيات مربع كاي تقع على يمين المحور الرأسي.

- يوجد عدد لانهائي من توزيعات مربع كاي تختلف باختلاف عدد درجات الحرية k، و توزيع كاي بدرجات حرية k حيث (k = n - 1) يرمز له بالرمز $X^2(k)$.

- توزيع مربع كاي توزيع متصل و بالتالي فان منحناه الاحتمالي ممهدا و لذلك يمكن حساب الاحتمالات بايجاد المساحات تحت هذا المنحنى.

-المنحنى الاحتمالي لتوزيع كاي غير متماثل و ملتو ناحية اليمين.

- كلما زادت درجات الحرية كلما زاد المتوسط الحسابي و التباين و بالتالي تزداد درجة تفلكح منحنى توزيع مربع كاي و يقترب شكله من منحنى التوزيع الطبيعي.

-عندما تكون درجة الحرية $k > 30$ ،فان توزيع مربع كاي X^2 يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري z بمتوسط حسابي صفر $\mu = 0$ و تباين واحد $\sigma^2 = 1$ ،حيث يمكن ايجاد القيم الحرجة لتوزيع مربع كاي X_a^2 في هذه الحالة وفقا للصيغة التالية:

$$X_a^2 = k\left[1 - \frac{2}{9k} + z_a\left(\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)\right]^3$$

حيث أن:

z_a :قيمة z يتم استخراجها من جداول التوزيع الطبيعي المعياري، عند مستوى معنوية a .

التمارين المقترحة

التمرين 01

أوجد قيمة :

$$X^2(0.05,16) \text{ ، } X^2(0.1,14)$$

حل التمرين 01

بالاستعانة بجدول توزيع كاي مربع نجد:

$$X^2(0.1,14) = 21.06$$

$$X^2(0.05,16) = 26.30$$

التمرين 02

اذا كان المتغير العشوائي يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 10 فان:

$$1.\ P(X^2 \leq 20.48)$$

$$2.\ P(X^2 \geq 12.55)$$

$$3.\ P(15.99 \leq X^2 \leq 29.59)$$

حل التمرين 02

$$1.\ P(X^2 \leq 20.48) = 1 - P(X^2 \geq 20.48) = 1 - 0.025 = 0.975$$

$$2.\ P(X^2 \geq 12.55) = 0.25$$

$$3.\ P(15.99 \leq X^2 \leq 29.59 = \ P(X^2 \leq 29.59) - P(X^2 \leq 15.99)$$

$$= [1 - \ P(X^2 \leq 29.59)] - [1 - P(X^2 \leq 15.99)] = P(X^2 \geq 15.99) - P(X^2 \geq 29.59)$$
$$= 0.1 - 0.001 = 0.099$$

7.توزيع ستيودنت "Student's t-distribution"

يُعد توزيع ستيودنت من التوزيعات الإحصائية المهمة، ويُستخدم بشكل أساسي في تحليل البيانات الصغيرة وإجراء الاختبارات الإحصائية عند عدم توفر معلومات كافية عن التباين الحقيقي للسكان. تم تطوير هذا التوزيع لأول مرة بواسطة العالم الأيرلندي ويليام سيمون غوسيت (W.S. Gosset) عام 1908، ويُعرف أيضًا باسم توزيع t لعينات صغيرة.

يتميز توزيع ستيودنت بالاعتماد على درجات الحرية(Degrees of Freedom) ، وهي العامل الذي يؤثر مباشرة على شكل التوزيع. كلما كانت درجات الحرية قليلة، يصبح المنحنى أكثر اتساعًا وذو ذيول أثقل،

مما يعكس زيادة احتمالية الحصول على قيم متطرفة عند حساب الفروق بين المتوسطات. مع زيادة درجات الحرية، يقترب توزيع ستيودنت تدريجيًا من التوزيع الطبيعي القياسي.

يُستخدم هذا التوزيع بشكل واسع في اختبار الفرضيات، مثل اختبار الفروق بين المتوسطات لمجموعتين، أو تقدير معلمات السكان عندما تكون العينة صغيرة ولا يمكن الاعتماد على التوزيع الطبيعي. كما يُعد أداة فعّالة لتقدير فترات الثقة للمتوسطات والانحرافات المعيارية، مما يجعله عنصرًا أساسيًا في الإحصاء التطبيقي والبحث العلمي، خصوصًا في الدراسات التي تتعامل مع بيانات محدودة الحجم أو غير مكتملة المعلومات.

1.7. استخدامات توزيع ستيودنت

يستخدم توزيع ستيودنت في العديد من التطبيقات الإحصائية، ويمثل أداة قوية لتحليل البيانات خاصة عندما تكون العينات صغيرة. أحد أهم استخداماته هو اختبار الفرق بين متوسطين لعينتين مستقلتين، حيث يمكن من خلاله تحديد ما إذا كان هناك فرق ذو دلالة إحصائية بين متوسطين لعينة من السكان. هذا التطبيق شائع جدًا في الدراسات العلمية والطبية، مثل مقارنة فعالية علاجين مختلفين على مجموعتين من المرضى، أو مقارنة أداء طلاب في مجموعتين تعليميتين مختلفتين.

كما يستخدم توزيع ستيودنت في اختبارات الفروض حول المتوسطات لتقييم ما إذا كان متوسط عينة معينة يختلف بشكل كبير عن قيمة متوقعة أو معروفة. يساعد هذا الباحثين على اتخاذ قرارات مستندة إلى البيانات بدقة، سواء في مجالات الاقتصاد أو العلوم الاجتماعية. إضافة إلى ذلك، يُستفاد منه في تحليل الانحدار والتوقعات، حيث يتيح تقدير معاملات النماذج الإحصائية وفهم العلاقة بين المتغيرات. كما يمكن استخدامه في تحليل الثنائيات المتلازمة لدراسة العلاقة بين زوجين من المتغيرات، أو لفحص الفرضيات حول التغيرات في متغيرات مترابطة. بفضل هذه القدرات، يصبح توزيع ستيودنت أداة مرنة وفعّالة في تحليل البيانات الصغيرة، ويوفر إطارًا موثوقًا لفهم الأنماط الإحصائية واتخاذ القرارات المبنية على الأدلة.

2.7. دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير x (دالة الكثافة)

نشتق توزيع ستيودنت ، من متغيرين مستقلين، أولهما يمثل المتغير العشوائي : الذي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط حسابي صفر 0 و تباين قيمته واحد $\alpha_x^2 = 1$

أما المتغير العشوائي الثاني يمثل الجذر التربيعي للمتغير ير الذي يخضع الى توزيع مربع كاي بدرجة حريةk

$$z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \quad \rightarrow N(0.1)$$

$$X^2 \rightarrow X^2_{(k)}$$

يعد المتغيرين العشوائيين z و X^2مستقلين، وبالتالي يكون المتغير العشوائي t يعرف بالصيغة التالية:

$$t = \frac{z}{\sqrt{X^2_{(k)}/k}} \rightarrow t_{(k)}$$

يستخدم توزيع t في حالة العينات الصغيرة و على وجه التحديد عندما يكون حجم العينة أقل من (30) مشاهدة، أي $n < 30$.

في ضوء ما تقدم ، فان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يخضع لتوزيع ستيودنت t بدرجة حرية k، تكتب كالآتي:

$$f(x,k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left[1+\frac{x^2}{k}\right]^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} \qquad -\infty \le X \le +\infty$$

ويمكن تبسيط دالة الكثافة كمايلي :

$$f(x,k) = \frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\sqrt{k\pi}\,\left(\frac{k}{2}\right)!}\left[1+\frac{x^2}{k}\right]^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} \qquad -\infty \le X \le +\infty$$

k: هو درجات الحرية لتوزيع ستيودنت

Γ : دالة كاما

توزيع ستيودنت يعتمد على مفهوم درجات الحرية، وكلما زادت قيمة k، كانت الشكل النهائي للتوزيع يقترب أكثر من التوزيع الطبيعي القياسي.

3.7 .التوقع و التباين للمتغير العشوائيX

التوقع : $E(X) = 0$

التباين : $V(x) = \frac{k}{k-2}$

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \sqrt{\frac{k}{k-2}}$

4.7.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائيx

يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ستيودنت، كما يلي:

$$F(x,k) = \frac{1}{\beta\left(\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{x}\left[1+\frac{t^2}{k}\right]^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} dt$$

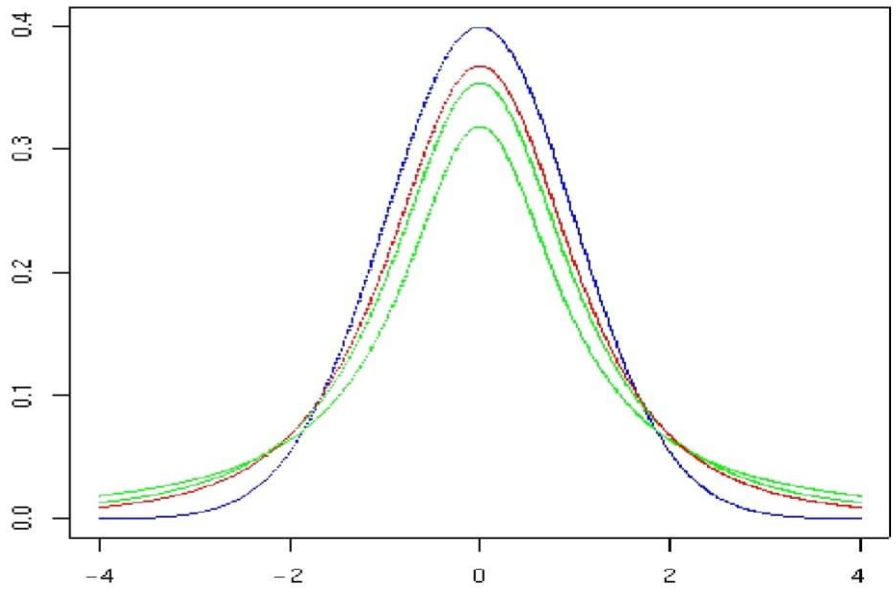
β : دالة بيتا

k: هو عدد درجات الحرية لتوزيع ستيودنت

5.7.منحنى توزيع ستيودنت (t)

يعكس منحنى توزيع ستيودنت توزيع الاحتمالات لقيم المتغير العشوائي الذي يتبع هذا التوزيع، ويتميز بمقاطع أطول وأوسع عند الذيلين مقارنة بالتوزيع الطبيعي المعياري، ما يعني أن الاحتمالات لحدوث القيم البعيدة عن الوسط أكبر قليلًا من التوزيع الطبيعي. إذا اعتُبر X متغيرًا عشوائيًا يتبع توزيع ستيودنت بدرجات حرية k، فإن شكل المنحنى يتأثر بشكل مباشر بقيمة k فكلما زادت درجات الحرية، أصبح المنحنى أكثر تشابهًا مع التوزيع الطبيعي المعياري، حيث يقل اتساع الذيلين ويقترب الشكل من منحنى الجرس المتماثل المعروف. بشكل عام، يكون منحنى توزيع ستيودنت متماثلًا حول الصفر وله قمة واحدة، ويتيح هذا التوزيع مرونة أكبر في التعامل مع العينات الصغيرة مقارنة بالتوزيع الطبيعي، مع المحافظة على القدرة على تقدير الاحتمالات والفروق الإحصائية بشكل دقيق.الرسم البياني لمنحنى توزيع ستيودنت يعتمد على قيمة درجات الحرية k ويظهر كيف يتغير شكل التوزيع مع تغيير هذه القيم. يمكن استخدام البرمجة الحاسوبية أو أدوات رسم البيانات الرسم هذا التوزيع بشكل دقيق.

الشكل رقم 13 : الرسم البياني لمنحنى توزيع ستيودنت



6.7.خصائص توزيع:

-يوجد عدد غير محدود من توزيعات t، و التي يمكن التعرف على كل منها باستخدام واحدة من درجات الحرية kحيث k= n - 1

-توزيع t متصل و بالتالي فان منحناه يكون ممهدا و لذلك يمكن حساب الاحتمالا بايجاد المساحات تحت هذا المنحنى.

-يشبه التوزيع الاحتمالي t شكل الجرس و هو متماثل حول الصفر حيث أن وسطه الحسابي يساوي صفر أي أن$\mu = 0$ وكذلك$-\infty < T < +\infty$

-تحدد درجات الحرية ، شكل منحنى توزيع t ، و كلما زادت درجات الحرية k، كلما نقصت قيمة التباين و كانت قيم المتغير أكثر تجانسا.

-كلما زادت درجات الحرية k اقترب التباين من الواحد صحيح و اقترب توزيع t من التوزيع الطبيعي المعياري و في هذه الحالة يزداد ارتفاع المنحنى و يصبح أكثر مديبا أي أقل تشتتا و في النهاية ينطبق على منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

-يسبب تماثل منحنى توزيع t حول العمود المقام على الصفر فان$t(\alpha, k) = -t(1-\alpha, k)$

-يمكن الاعتماد على جداول تخص هذا التوزيع للحصول على القيمة النظرية له و ذلك عند مستوى معين من المعنوية و درجة حرية محددة. علما أن:

$$1.\ P(t \geq 0) = P(t \leq 0)$$

$$2.\ P(t \geq t_0) = P(t \leq -t_0)$$

$$3.\ P(t \leq t_0) = 1 - P(t \leq t_0)$$

تمارين مقترحة

التمرين 01

يفرض أن المتغير العشوائي t يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجة حرية 19 المطلوب أوجد:

$$1.\ P(t \leq 1.729)$$

$$2.\ P(1.328 \leq t \leq 2.861)$$

$$3.\ P(-1.729 \leq t \leq 2.539)$$

حل التمرين 01

$$1.\ P(t \leq 1.729) = 0.95$$

$$2.\ P(1.328 \leq t \leq 2.861) = P(t \leq 2.861) - P(t \leq 1.328) = 0.995 - 0.9 = 0.095$$

$$3.\ P(-1.729 \leq t \leq 2.539) = P(t \leq 2.539) - P(t \leq -1.729)$$
$$= P(t \leq 2.539) - [1 - P(t \leq 1.729)] = 0.99 - 1 + 0.95 = 0.94$$

التمرين 02

بفرض أن المتغير العشوائي : يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجة حرية 6. المطلوب أوجد:

$$1.\ P(t \leq -1.943)$$

$$2.\ P(t \geq 3.707)$$

حل التمرين 02

$$1.\ P(t \leq -1.943) = 1 - P(t \leq 1.943) = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$2.\ P(t \geq 3.707) = 1 - P(t \leq 3.707) = 1 - 0.995 = 0.005$$

8.توزيع فيشر "Distribution de Fisher"

يُعد توزيع فيشر (F) أحد التوزيعات الإحصائية المهمة، ويلعب دورًا محوريًا في تحليل التباين (ANOVA)وفحص الفرضيات الإحصائية المتعلقة بتباين العينات. أُطلق على هذا التوزيع اسم "توزيع فيشر" تكريمًا للعالم البريطاني رونالد فيشر (Ronald Fisher) 1890 - 1962، وساهم بشكل كبير في تطويره وتعميم استخدامه في الإحصاء.

يعتبر توزيع فيشر أداة قوية في الإحصاء التجريبي، حيث يُستخدم لمقارنة تباين مجموعتين أو أكثر، ولتحديد مدى اختلاف البيانات الفعلية عن التوقعات النظرية. كما يمتد استخدامه إلى مجالات متعددة مثل العلوم الطبية، الزراعة، البحث الاجتماعي، والعلوم البيئية، حيث يساعد الباحثين على تحليل البيانات واتخاذ القرارات الإحصائية بناءً على أدلة كمية دقيقة. يتميز هذا التوزيع بأنه يعتمد على درجات الحرية لكل من البسط والمقام، مما يتيح تمثيل التباين بين العينات بشكل مرن ودقيق.

1.8.دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير x (دالة الكثافة)

نشتق توزيع فيشر F من نسبة توزيعين مستقلين، وكلاهما عبارة عن توزيع مربع كاي X^2 مقسوما على درجة حريته.

لدينا المتغير العشوائي لا يخضع لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية $n_1 - 1 = k_1$ حيث:

$$X_1^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} - X_{(n_1-1)}^2$$

و لدينا أيضا المتغير العشوائي X_t^2 يخضع لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية $n_1 - 1 = k_1$حيث:

$$X_2^2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} - X_{(n_2-1)}^2$$

و بالتالي يمكن الحصول على المتغير العشوائي F من خلال النسبة بين التوزيعين السابقين مقسوما كل منهما على درجات حريته حيث يعتمد المتغير F على نوعين من درجات الحرية، درجة حرية البسط $(n_1 - 1)$ و درجة حرية المقام$(n_2 - 1)$ أي أن:

$$F = \frac{X_1^2/(n_1-1)}{X_2^2/(n_2-1)} = \frac{\left.\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\right/(n_1-1)}{\left.\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\right/(n_2-1)}$$

و بالتالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع F ، و بدرجتي حرية k_1 ، k_2 تكتب كما يلي:

$$x \to F(k1, k2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_2}{k_1}\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{2}} \dfrac{x^{\frac{k_2}{2}-1}}{\left[1+\frac{k_2}{k_1}x\right]^{\frac{k_2+k_1}{2}}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$k_1 = n_1 - 1$: درجة حرية البسط

$k_2 = n_2 - 1$: درجة حرية المقام

Γ : دالة كاما

2.8.التوقع و التباين للمتغير العشوائيx

التوقع : $E(X) = \frac{k_2}{k_2-2}$

التباين $V(x) = \frac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)}$:

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \frac{k_2\sqrt{2(k_1+k_2-2)}}{(k_2-2)\sqrt{k_1(k_2-4)}}$

3.8.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائيx

يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمية لتوزيع فيشر، كما يلي:

$$F(x,k) = \frac{1}{\beta\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \left[1+\frac{t^2}{k}\right]^{\left(\frac{k+1}{2}\right)} dt$$

4.8.خصائص توزيعF

-يوجد عدد لانهائي من توزيعات F يمكن التعرف على كل منها باستخدام معلمتين هما درجات الحرية k_1 ، k_2حيث $k_1 = n_1 - 1$و $k_2 = n_2 - 1$و يرمز لتوزيع F بدرجات حرية (k_2, k_1) بالرمز$F(k_2, k_1)$

-توزيع F توزيع متصل و بالتالي فان منحناه الاحتمالي يكون ممهدا، و لذلك يمكن حساب الاحتمالات بايجاد المساحات تحت هذا المنحنى

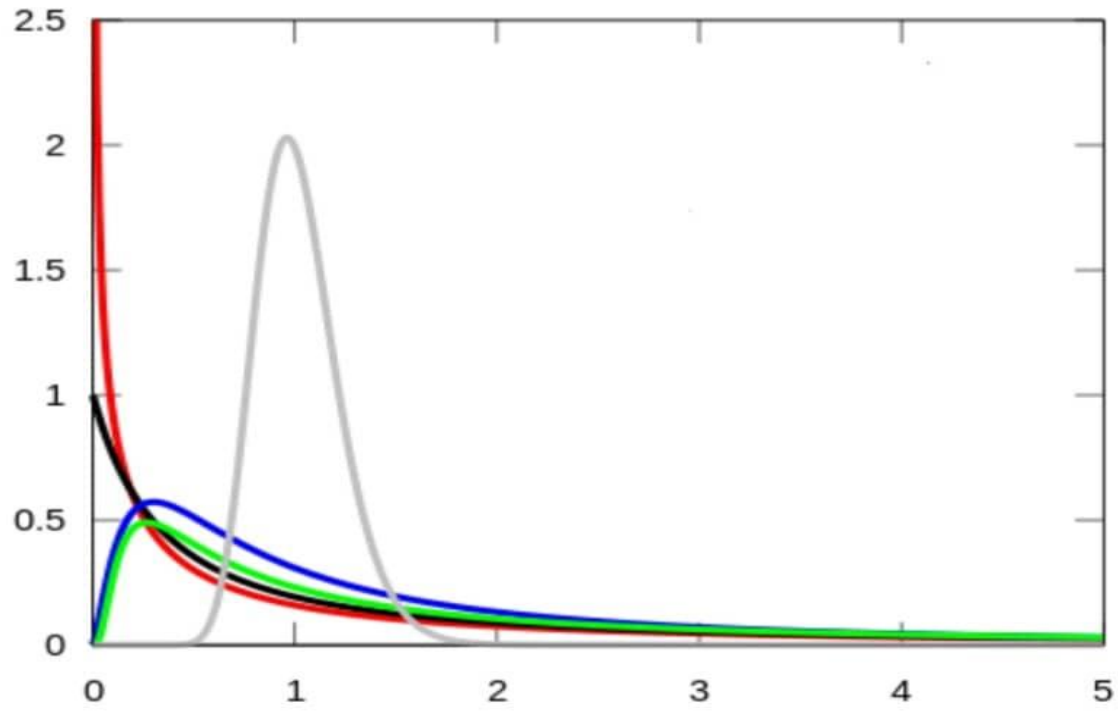
- المنحنى الاحتمالي لتوزيع F ملتو ناحية اليمين و يعتمد في شكله درجات الحرية (k_2, k_1) و يأخد دائما قيما موجبة $0 \leq F \leq \infty$

-قيم F بدرجات حرية (k_2, k_1) ، و التي يوجد على يمينها مساحة قدرها α يرمز لها بالرمز $F(\alpha, k_2, k_1)$

-هناك بعض قيم α غير موجودة في جداول توزيع F ، و في هذه الحالات نستخدم علاقة هامة تربط التوزيعات F ببعضها ببعض وفق العلاقة التالية $F(\alpha, k_2, k_1) = \frac{1}{F(1-\alpha, k_2, k_1)}$

-تحسب جداول فيشر احتمال أن يكون المتغير العشوائي أكبر من الاحصائية $F(\alpha, k_2, k_1)$ هو α و نكتب $P\big(x \geq F(\alpha, k_1, k_2)\big) = \alpha$ ، كما يمكن أن نحسب العكس (أصغر) لكن نستبدل α بـ $(1 - \alpha)$ و الذي يدعى عادة بمجال الثقة أي : $P\big(x \geq F(\alpha, k_1, k_2)\big) = 1 - \alpha$

الشكل رقم 14 : منحنى توزيع فيشر



تمارين مقترحة

التمرين 01

أوجد ما يلي:

1. $F(0.01; 6,10)$
2. $F(0.05; 8,12)$
3. $F(0.99; 6,8)$

$$4.\ F(0.99;10,6)$$

حل التمرين 01

$$1.\ F(0.01;6,10) = 5.3858$$

$$2.\ F(0.05;8,12) = 2.8486$$

$$3.\ F(0.99;6,8) = \frac{1}{F(1-0.99;8,6)} = \frac{1}{F(0.01;8,6)} = \frac{1}{8.1017} = 0.1234$$

$$4.\ F(0.95;10,6) = \frac{1}{F(1-0.95;6,10)} = \frac{1}{F(0.05;6,10)} = \frac{1}{3.2171} = 0.3108$$

التمرين 02

اذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $(k_2, k_1) = (7;12)$، فاحسب:

1.احتمال$P(x \geq 2.91)$

2.احتمال$P(X \geq 4.63)$

3.احتمال$P(X \leq 4.64)$

حل التمرين 02

لحساب الاحتمالات المطلوبة نطبق القاعدة التالية$P\big(x \geq F(\alpha, k_1, k_2)\big) = \alpha$

1.حساب احتمال$P(x \geq 2.91)$

$$P(x \geq 2.91) = 0.05 \quad F(0.05,7,12) = 2.91$$

2.حساب احتمال$P(X \geq 4.63)$

$$P(X \geq 4.63) = 0.01 \quad F(0.01,7,12) = 4.63$$

3.حساب احتمال$P(X \leq 4.64)$

لدينا : $P(X \leq 4.64) = 1 - P(X \geq 4.64)$

و : $F(\alpha, 7,12) = 4.64 \Rightarrow \alpha = 0.01$ وعليه : $P(X < 4.64) = 1 - P(X \geq 4.64 = 1 - 0.01 =$ 0.99

سلسلة تمارين رقم 02

<u>التمرين 01</u>

X متغير عشوائي يمثل طول اللاعبين في فريق كرة قدم،. وُجد أن الطول يتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط 165 سم و انحراف معياري 5 سم.المطلوب :

1.أوجد القيمة المعيارية للقيمة X =172

2.أوجد القيمة X اذا كانت القيمة المعيارية هي Z= - 0.52

3أحسب الاحتمالات التالية:

$$P(180 \leq x \leq 200)$$
$$P(x \geq 170)$$

التمرين 02

نفترض أن وزن القطع المعدنية المنتجة في مصنع يتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط 16 كغ و انحراف معياري 0.9 كغ. نختار قطعة معدنية واحدة عشوائيًا، المطلوب:

1. ما هو احتمال أن يكون وزنها أكثر من 14 كغ؟
2. ما هي النسبة المئوية للقطع التي يزيد وزنها عن 14 كغ؟
3. ما هي النسبة المئوية للقطع التي يتراوح وزنها بين 14 كغ و 18 كغ؟

التمرين 03

في مادة الإحصاء، أُجري امتحان على 500 طالب، وكانت نتائجهم تتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط 12.5 و انحراف معياري قدره 2.

المطلوب : أوجد مايلي:

1.عدد الطلبة الحاصلين على علامة تعادل أو تفوق 10.

2.احتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس تعادل أو تفوق 12.5.

3.احتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس أقل من 10.

4.احتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس ما بين 10 و 15

5.حدد عدد الطلبة المحتمل أن يحصلوا على هذه العلامات لهذه السنة اذا علمت بأن عدد المعنيين بامتحان مقياس الاحصاء 3 هم 820 طالب.

التمرين04

تصل شحنات البضائع إلى المخزن كل 45 دقيقة بشكل منتظم خلال ساعات العمل.المطلوب أوجد مايلي:

1.دالة التوزيع الاحتمالية (دالة الكثافة) للمتغير العشوائيX

2.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X.

3. احسب احتمال وصول شحنة خلال آخر 10 دقائق من كل فترة 45 دقيقة.

4. احسب احتمال وصول شحنة خلال آخر 15 دقيقة من كل فترة 45 دقيقة.

5. أوجد القيمة المتوقعة (المتوسط) والانحراف المعياري لزمن وصول الشحنات إلى المخزن.

التمرين 05

اذا كان ليكن المتغير العشوائي X يمثل الوقت الفعلي الذي تستغرقه صهاريج المياه للوصول إلى الحقل لري النباتات، ويتبع التوزيع المنتظم على الفترة الزمنية من 0إلى 20 دقيقة.

المطلوب:

1. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي.

2. أوجد دالة التوزيع التراكمية.
3. احسب احتمال وصول صهريج الماء خلال الخمس الدقائق الأخيرة على الأقل.
4. احسب احتمال وصول صهريج الماء خلال العشر الدقائق الأخيرة.
5. أوجد التوقع (المتوسط)، التباين، والانحراف المعياري لوقت وصول صهاريج الماء إلى الحقول.

التمرين 06

ليكن لدينا المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الاشهر التي يحتاجها المريض للتماثل للشفاء بعد اعادة التأهيل ، فاذا علمت بأن قيمة المعلمتين α و β تتبع توزيع كاما بمقدار يعادل 3 اشهر ، أي أن:

$\alpha = \beta = 3$ ، المطلوب:

1.أحسب قيم قاما للحالات التالية : $\Gamma_{\frac{1}{2}}, \Gamma 2, \Gamma 3, \Gamma n$

2.أوجد دالة التوزيع الاحتمالي و بين أنها دالة كثافة احتمالية.

3.أوجد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع.

4.ما هو احتمال أن يحتاج المريض 3 اشهر على الأكثر ليتماثل للشفاء.

5.ما هو احتمال أن يحتاج المريض بين 3 اشهر و 6 اشهر ليتماثل للشفاء.

6.أحسب عدد الاشهر المتوقعة ليتماثل للشفاء.، و ما مقدار التباين و الانحراف المعياري.

حل السلسلة رقم 02

حل التمرين 01

X يتبع التوزيع الطبيعي ثوابته $(\mu_x = 165;\ \sigma_x = 5)$

1.أوجد القيمة المعيارية للقيمة X = 172

$$Z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{172 - 165}{5} = 1.4$$

2.أوجد القيمة X إذا كانت القيمة المعيارية هي Z = -0.52

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \Rightarrow x - \mu_x = Z.\sigma_x \Rightarrow x = Z.\sigma_x + \mu_x \Rightarrow x = 5(-0.52) + 165 = 162.5$$

3.أحسب الاحتمالات التالية :

$$P(175 \le x \le 180) = P\left(\frac{175 - \mu_x}{\sigma_x} \le \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \le \frac{180 - \mu_x}{\sigma_x}\right)$$
$$= P\left(\frac{175 - 165}{5} \le Z \le \frac{180 - 165}{5}\right)$$
$$= P(2 \le Z \le 3) = P(Z \le 3) - P(Z \le 2) = 0.9987 - 0.9772 = 0.0215$$

$$P(x \ge 170) = P\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \ge \frac{170 - \mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(Z \ge \frac{170 - 165}{5}\right) = P(Z \ge 1)$$
$$= 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

حل التمرين 02

X يتبع النوزيع الطبيعي ثوابته $(\mu_x = 16;\ \sigma_x = 0.9)$

1.احتمال أن يكون وزنها أكثر من 14 كغ.

$$P(x \geq 14) = P\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \geq \frac{14-\mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(Z \geq \frac{14-16}{0.9}\right) = P(Z \geq -2.22) = P(Z \leq 2.22)$$
$$= 0.9868$$

2. النسبة المئوية للقطع التي يزيد وزنها عن 14 كغ

$$P(x \geq 14) = 0.9868 \Rightarrow P(x \geq 14) \times 100 = 0.9868 \times 100 = 98.68\%$$

3. النسبة المئوية للقطع التي يتراوح وزنها بين 14 كغ و 18 كغ؟

نحسب أولا $P(14 \leq x \leq 18)$ كما يلي:

$$P(14 \leq x \leq 18) = P\left(\frac{14-16}{0.9} \leq \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{18-16}{0.9}\right) =$$
$$= P(-2.22 \leq z \leq 2.22) = P(Z \leq 2.22) - P(Z \leq -2.22)$$
$$= P(Z \leq 2.22) - [1 - P(Z \leq 2.22)]$$
$$= 0.9869 - [1 - 0.9869] = 2(0.9869) - 1 = 0.9736$$

و عليه فان النسبة المئوية للأطفال من هذه المدرسة الذين تتراوح أوزانهم بين 14 كغ و 18 كغ هي:

97.36%

<u>حل التمرين 03</u>

X يتبع التوزيع الطبيعي ثوابته $\mu_x = 12.5; \sigma_x = 2, N = 500$

1.عدد الطلبة الحاصلين على علامة تعادل أو تفوق 10.

$$P(x \geq 10) = P\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \geq \frac{10-\mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(Z \geq \frac{10-12.5}{2}\right) = P(Z \geq -1.25)$$
$$= P(Z \leq 1.25) = 0.8944$$

بالاعتماد على القيمة الاحتمالية، فان عدد الطلاب الذي تحصلوا على علامة تعادل أو تفوق 10 هم:

$$N_{(X \geq 10)} = N.P(x \geq 10) \Rightarrow N_{(X \geq 10)} = 500(0.8944) = 447 Student$$

2.احتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس تعادل أو تفوق 12.5.

$$P(x \geq 12.5) = P\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \geq \frac{12.5-\mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(Z \geq \frac{12.5-12.5}{2}\right) = P(Z \geq 0)$$
$$= 1 - P(Z \leq 0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

3.احتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس أقل من 10.

$$P(x \leq 10) = P\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{10-\mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(Z \leq \frac{10-12.5}{2}\right) = P(Z \leq -1.25)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

4.احتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس ما بين 10 و 15. و حدد عدد الطلبة المحتمل أن يحصلوا على هذه العلامات لهذه السنة اذا علمت بأن عدد المعنيين بامتحان مقياس الاحصاء 3 820طاللب.

$$P(10 \leq x \leq 15) = P\left(\frac{10-12.5}{2} \leq \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{15-12.5}{2}\right) = P(-1.25 \leq z \leq 1.25)$$
$$= P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq -1.25) = P(Z \leq 1.25) - [1 - P(Z \leq 1.25)]$$
$$= 2P(Z \leq 1.25) - 1 = 2(0.8944) - 1 = 0.7888$$

5.بالاعتماد على القيمة الاحتمالية، فان عدد الطلاب الذي تحصلوا على علامة ما بين 10 و 15 هم:

$$N_{(10\leq X\leq 15)} = N.P(10 \leq x \leq 15) \Rightarrow N_{(10\leq x\leq 15)} = 820(0.7888) = 647 Student$$

حل التمرين 04

X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم على المجال$[a,b] = [0,45]$

1.دالة التوزيع الاحتمالية (دالة الكثافة) للمتغير العشوائي.

$$X \rightarrow U(a=0, b=45)$$

$$F(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)} & a \leq x < b \\ 0 & otherwise \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{45} & 0 \leq x < 45 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X.

$$f(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{45} & 0 \leq x < 45 \\ 1 & x \geq 45 \end{cases}$$

3. احتمال وصول شحنة خلال آخر 10 دقائق من كل فترة 45 دقيقة.

$$P\big(X \geq (45-10)\big) = P(X \geq 35) = 1 - P(X \leq 35) = 1 - F(35) = 1 - \frac{x-a}{b-a}$$
$$= 1 - \frac{35-0}{45-0} = 1 - \frac{35}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9} = 0.22$$

4. احتمال وصول شحنة خلال آخر 15 دقيقة من كل فترة 45 دقيقة.

$$P(30 \leq X \leq 45) = P(X \leq 45) - P(X \leq 30) = F(45) - F(30) = \frac{45-0}{45-0} - \frac{30-0}{45-0}$$
$$= \frac{45}{45} - \frac{30}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} = 0.33$$

5. القيمة المتوقعة (المتوسط) والانحراف المعياري لزمن وصول الشحنات إلى المخزن.

التوقع:

$$E(X) = \frac{(b-a)}{2} = \frac{45-0}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$$

التباين :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(45-0)^2}{12} = \frac{2025}{12} = 168.75$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{168.75} = 12.99$$

حل التمرين 05

X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a,b]=[0,20]$

1.دالة التوزيع الاحتمالية (دالةالكثافة) للمتغير العشوائي.

$X\rightarrow U(a=0,b=20)$

$$F(X)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)} & a\le x<b\\ 0 & otherwise\end{cases}\Rightarrow f(X)=\begin{cases}\frac{1}{20} & 0\le x<20\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

2.دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X .

$$f(X)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}\Rightarrow f(X)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{20} & 0\le x<20\\ 1 & x\ge 20\end{cases}$$

3. احتمال وصول صهريج الماء خلال الخمس الدقائق الأخيرة على الأقل.

$$P\big(X\ge(20-5)\big)=P(X\ge 15)=1-P(X\le 15)=1-F(15)=1-\frac{15-0}{20-0}=1-\frac{15}{20}$$
$$=\frac{1}{4}=0.25$$

4.احتمال وصول صهريج الماء خلال العشر دقائق الأخيرة.

$$P(10\le X\le 20)=P(X\le 20)-P(X\le 10)=F(20)-F(10)=\frac{20-0}{20-0}-\frac{10-0}{20-0}$$
$$=\frac{20}{20}-\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=0.5$$

5.أحسب القيمة المتوقعة و الانحراف المعياري لوصول صهريج الماء.

التوقع:

$$E(X)=\frac{(b-a)}{2}=\frac{20-0}{2}=\frac{20}{2}=10$$

التباين :

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(20-0)^2}{12}=\frac{400}{12}=33.33$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\sqrt{33.33}=5.77$$

<u>حل التمرين 06</u>

1.أحسب قيم قاما للحالات التالية : $\Gamma 2,\Gamma 3$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} X^{\alpha-1}\ e^{-x}\,dx$$

$$\Gamma 2 = \int_0^{\infty} X^{2-1}\ e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} X\ e^{-x}\,dx = [-x.e^{-x} - e^{-x}]_0^{+\infty} = (0-0) - (0-1) = 1$$

$$\Gamma 3 = \int_0^{\infty} X^{3-1}\ e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} X^2\ e^{-x}\,dx = [-X^2.e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}]_0^{+\infty}$$
$$= (0-0-0) - (0-0-2) = 2$$

2.أوجد دالة التوزيع الاحتمالي و بين أنها دالة كثافة احتمالية.

دالة التوزيع الاحتمالي :

$$X \rightarrow G(\alpha = 3, \beta = 3)$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} X^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} \frac{1}{54} X^2 e^{\frac{-x}{3}} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

اثبات أنها دالة كثافة احتمالية :

$$\begin{cases} 1)\ f(x) \geq 0 \\ 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$$1)\ f(x) \geq 0 \qquad [\forall X, X \geq 0]$$

$$2) \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{54} X^2 e^{\frac{-x}{3}}\,dx = \frac{1}{54}\int_0^{+\infty} x^2 e^{\frac{-x}{3}} dx = \frac{1}{54}\left[-3x^2 e^{\frac{-x}{3}} - 18xe^{\frac{-x}{3}} - 54e^{\frac{-x}{3}}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{54}(0-0-0) - \frac{1}{54}(0-0-54) = 1$$

3.أوجد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع.

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^{x} f(x)dx = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{x} X^{\alpha-1}\, e^{\frac{-x}{\beta}} dx = \frac{1}{54}\int_0^{x} X^2\ \ e^{\frac{-x}{3}} dx$$
$$= \left[\frac{-3}{54}x^2 e^{\frac{-x}{3}} - \frac{18}{54}xe^{\frac{-x}{3}} - e^{\frac{-x}{3}}\right]_0^{x} = \left[-\frac{1}{18}x^2 e^{\frac{-x}{3}} - \frac{1}{3}xe^{\frac{-x}{3}} - e^{\frac{-x}{3}}\right]_0^{x}$$
$$= \left[e^{\frac{-x}{3}}\left(\frac{-1}{18}x^2 - \frac{1}{3}x - 1\right)\right]_0^{x}$$

4. احتمال أن يحتاج المريض 3 اشهر على الأكثر ليتماثل للشفاء.

$$P(x \leq 5) = \int_0^3 f(x)dx = \left[e^{\frac{-x}{3}}\left(\frac{-1}{18}x^2 - \frac{1}{3}x - 1\right)\right]_0^3 = \left[e^{-1}\left(\frac{-1}{2} - 1 - 1\right)\right] - [-0 - 0 - 1]$$

$$= \frac{-5}{2}e^{-1} + 1$$

5. احتمال أن يحتاج المريض بين 3 اشهر و 6 اشهر ليتماثل للشفاء..

$$P(3 \leq x \leq 5) = \int_3^6 f(x)dx = \left[e^{\frac{-x}{3}}\left(\frac{-1}{18}x^2 - \frac{1}{3}x - 1\right)\right]_3^6$$

$$= [e^{-2}(-2 - 2 - 1)] - \left[e^{-1}\left(\frac{-1}{2} - 1 - 1\right)\right] = -5e^{-2} + \frac{-5}{2}e^{-1}$$

6 عدد الاشهر المتوقعة ليتماثل للشفاء ، و ما مقدار التباين و الانحراف المعياري.

التوقع : $E(X) = \alpha\beta = 3.3 = 9$

التباين : $V(x) = \alpha\beta^2 = 3.3^2 = 27$

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \beta\sqrt{\alpha} = 3\sqrt{3}$

المحور الثالث : تقريب التوزيعات الاحتمالية

تمهيد :

تقريب التوزيعات الاحتمالية يعد مفهومًا أساسيًا في علم الإحصاء وعلم الاحتمالات، ويشكل أداة مهمة لتبسيط دراسة الظواهر العشوائية المعقدة. يهدف هذا التقريب إلى تسهيل تحليل التوزيعات الاحتمالية المعقدة عن طريق تمثيلها بنماذج أبسط يمكن التعامل معها رياضيًا، مما يساهم في فهم البيانات بشكل أعمق واتخاذ قرارات أكثر دقة.

عند مواجهة توزيعات احتمالية صعبة أو معقدة، يصبح من الضروري استخدام أساليب التقريب لتقدير الاحتمالات بدقة مقبولة دون الحاجة لإجراء حسابات معقدة. يتيح هذا الأسلوب للباحثين والمحللين تمثيل الأحداث العشوائية بشكل يسهل التنبؤ بسلوكها المستقبلي، كما يمكن استخدام تقريب التوزيعات لدراسة الاحتمالات وتقدير النتائج باستخدام توزيعات بديلة، طالما أن النتائج متقاربة بما يكفي لتلبية متطلبات التحليل الإحصائي. بشكل عام، يساهم هذا الأسلوب في تطوير قدرات التحليل الإحصائي وتحسين جودة القرارات المبنية على البيانات.

1.تقريب توزيع ثنائي الحد الى توزيع بواسون

يعد توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذي الحدين و مشتق منه عندما يكون احتمال نجاح المحاولة P صغير جدا(يقترب من الصفر) ، أي P→0، و ان عدد المحاولات n كبير جدا (يقترب من مالانهاية)، أي $n \to +\infty$ ، و عليه فان :

$$P \to 0$$
$$n \to +\infty$$
$$Lim(nP) = \lambda$$

مما يجعل الاحتمالات حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين في الحالة المذكورة أعلاه شاقا، الا أنه بالإمكان من حساب الاحتمالات بواسطة توزيع بواسون، عندما تكون P→0 و أن $n \to +\infty$ ، بما يجعل قيمة$nP = \lambda$ معتدلة القيمة.

2.تقريب توزيع ثنائي الحد الى التوزيع الطبيعي :

يمكن تقريب التوزيع الثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي عندما تتحقق مجموعة من الشروط الخاصة بالتجربة الاحتمالية التي تتبع توزيعًا ثنائي الحدين. فعند استخدام قانون ثنائي الحدين لإجراء الحسابات، غالبًا ما تكون العمليات الحسابية معقدة وصعبة، خاصة مع عدد كبير من المحاولات أو الاحتمالات المتغيرة.

في هذه الحالات، يوفر التوزيع الطبيعي بديلاً مبسطًا وفعالًا، حيث يمكن استخدامه لإجراء الحسابات بشكل أسهل مع الحفاظ على دقة النتائج. عند تحقق الشروط اللازمة للتقريب، فإن الاحتمالات الناتجة

من التوزيع الطبيعي تكون قريبة جدًا من تلك الناتجة عن قانون ثنائي الحدين، مما يجعل هذا التقريب أداة عملية وموثوقة لتبسيط التحليلات الإحصائية.، وذلك عندما تكون n كبيرة أي $n \to +\infty$، و P تقترب من 0.5 أي P→0.5 .

و كقاعدة، يعتبر التقريب الملائم اذا توفرت الشروط التالية:

$$n \geq 30$$

$$nP \geq 5$$

$$n(1-P) \geq 5$$

حيث :

$$\mu = E(X) = nP$$

$$\sigma^2 = V(X) = nP(1-p)$$

بما أن التوزيع الثنائي متقطع و التوزيع الطبيعي متصل فاننا نحسن نوعية التقريب باستعمال معامل التصحيح:

اذا كان k عددا صحيحا موجبا بين فان 0 و n فإن :

$$P(X=k) = P\left(k - {}^{1}/_{2} \leq X \leq k + {}^{1}/_{2}\right) = P\left(\frac{k - {}^{-1}/_{2} - np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{k + {}^{-1}/_{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

اذا كان α و β أعداد صحيحة موجبة بين 0 و n فإن :

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = P\left(\alpha - {}^{1}/_{2} \leq X \leq \beta + {}^{1}/_{2}\right)$$
$$= P\left(\frac{\alpha - {}^{-1}/_{2} - np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{\beta + {}^{-1}/_{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

اذا كان α عدد صحيح موجب بين 0 و n فإن :

$$P(X \leq \alpha) = P\left(X \leq \alpha + {}^{1}/_{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha + {}^{-1}/_{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

3.تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي

يمكن تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي ، وهذا اذا كان $10 \geq$ □ (□ كبير)حيث يكون:

$\lambda = \mu = \sigma^2$(مع معامل التصحيح) :

$$P(X \leq \alpha) = P\left(X \leq \alpha + {}^{1}/_{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha + {}^{-1}/_{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$(X = k) = P\left(k - {}^{1}/_{2} \leq X \leq k + {}^{1}/_{2}\right) = P\left(\frac{k - {}^{-1}/_{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{k + {}^{-1}/_{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\boldsymbol{P(\alpha \leq X \leq \beta) = P\left(\alpha - {}^{1}/_{2} \leq X \leq \beta + {}^{1}/_{2}\right) = P\left(\frac{\alpha - {}^{-1}/_{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{\beta + {}^{-1}/_{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

4.تقريب قانون فوق الهندسي الى قانون ثنائي الحدين

عندما يكون حجم العينة صغيرا جدا مقارنة بحجم المجتمع N فان المعامل $\frac{N-n}{N-1}$يؤول الى الواحد، وتصبح قيمة تباين هذا القانون تساوي قيمة التباين الذي توصلنا اليها في قانون ثنائي الحدين و كنتيجة عامة اذا كان $\frac{n}{N} \leq 0.05$، فنقول عن متغير عشوائي X الذي يتبع القانون فوق الهندسي $X \mapsto H(N_1, N -$ N_1)أنه يمكن تقريبه بواسطة قانون ثنائي الحدين $X \rightarrow B(n, P)$ ،اذا توفرت الشرط التالي:

حجم العينة صغيرا جدا مقارنة بحجم المجتمع N

$$\frac{n}{N} \leq 0.05 \Rightarrow \frac{n}{N}.100 \leq 5\%$$

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{N-n}{N-1} 1$$

تمارين مقترحة

التمرين 01

لوحظ أن احتمال تعرّض جهاز إلكتروني معيّن لعطل في مجموعة من الوحدات كان 0.003، قامت فرق الصيانة باختيار عينة عشوائية مكونة من 1000 جهاز، ويفترض أن بعض هذه الأجهزة ستظهر عليها أعطال خلال فترة الاختبار. المطلوب:

1.أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيx

2.أحسب قيمة الاحتمالات التالية:

$$1.\ P(X = 4)$$

$$2.\ P(X \leq 2)$$

$$3.\ P(1 \leq X \leq 2)$$

حل التمرين 01

احتمال النجاح P = 0.003 صغير جدا و عدد المحاولات n = 1000 كبير جدا ، و عليه فان:

$\square = nP \Rightarrow \square = 1000(0.003) \Rightarrow \square = 3$

1.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

$X \mapsto P(\square = 3)$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} & ,x = 0,1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise \end{cases} \Rightarrow P(X = x)$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{-3}.3^x}{x!} & ,x = 0,1,3,\dots,+\infty \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

2.حساب قيمة الاحتمالات التالية:

$$1.\ P(X = 4) = \frac{e^{-3}.3^4}{4!} = \frac{81}{24}e^{-3} = 0.169$$

$$2.\ P(X \leq 2) = P(2) + P(1) + P(0) = \frac{e^{-3}.3^2}{2!} + \frac{e^{-3}.3^1}{1!} + \frac{e^{-3}.3^0}{0!} = \frac{9}{2}e^{-3} + 3e^{-3} + e^{-3}$$
$$= 0.425$$

$$3.\ P(1 \leq X \leq 2) = P(2) + P(1) = \frac{e^{-3}.3^2}{2!} + \frac{e^{-3}.3^1}{1!} = \frac{9}{2}e^{-3} + 3e^{-3} = 0.375$$

التمرين 02

في تجربة لقاح جديد، لوحظ أن احتمال حدوث تفاعل سلبي نادر بعد أخذ اللقاح هو 0.001. إذا تلقى 3000 شخص اللقاح، فما هو احتمال أن يعاني 4 أشخاص فقط من هذا التفاعل السلبي؟ ، و ذلك باستخدام:

1.توزيع ذي الحدين.

2.توزيع بواسون كتقريب لقانون توزيع ذي الحدين.

حل التمرين 02

1.استخدام توزيع ذي الحدين:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع ثنائي الحد، حيث: n=3000، P=0.001، q=0.999، و عند استخدام قانون ثنائي الحد، حيث الاحتمال المطلوب، هو:

$$P(4) = C_{3000}^4 \times (0.001)^1 \times (0.999)^{2996} \approx 0.1681$$

2.استخدام توزيع بواسون كتقريب لقانون ذي الحدين:

نلاحظ أن شروط التقريب متوفرة، حيث: P = 0.001 هي قيمة صغيرة جدا، n = 3000 كبيرة جدا.

$$nP = 3000 \times 0.001 = 3 \leq 5$$

$$n = 3000 \geq 30$$

اذا نستخدم قانون بواسون حيث3 = nP =λ ، و بالتالي يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(4) = \frac{3^4 . e^{-3}}{4!} \approx 0.1680$$

نلاحظ أن النتيجة نفسها عند استخدام توزيع ثنائي الحد أو توزيع بواسون.

سلسلة تمارين رقم 03

التمرين 01

في خط إنتاج مصابيح كهربائية، احتمال أن تكون المصباح المصنعة سليمة هو 0.6، واحتمال أن تكون معيبة هو 0.4. إذا فحصنا 33 مصباحًا، واعتُبر X عدد المصابيح السليمة، المطلوب :

1- حساب احتمال أن تكون المصابيح السليمة على الأكثر 14 مصباحًا.

2- حساب احتمال أن تكون المصابيح السليمة 15 مصباحًا.

3-حساب احتمال أن تكون المصابيح السليمة بين 14 و15 مصباحًا.

التمرين 02

في مزرعة لإنتاج الطماطم، احتمال أن تتطور الشتلات بشكل سليم هو 0.75. إذا تمت متابعة 70 شتلة خلال يوم معين، يمثل X عدد الشتلات التي نمت بنجاح ، المطلوب:

1- حساب احتمال أن تكون 60 شتلة قد نمت بنجاح.

2- حساب احتمال أن تكون 50 شتلة نمت بنجاح على الأكثر.

3- حساب احتمال أن تكون الشتلات التي نمت بنجاح أكثر من 45 وأقل من 60.

التمرين 03

مركز شرطة يستقبل في المتوسط 12.5 مكالمة هاتفية كل 5 دقائق المطلوب:

1.ما هو احتمال أن تستقبل 10 مكالمات هاتفية على الأكثر في التوقيت بين 11:10 و 11:15 صباحا.

2.ما هو احتمال أن تستقبل 11 مكالمات هاتفية في التوقيت بين 14 و 14:05 مساءا.

3.ما هو احتمال أن تستقبل بين 5 و 15 مكالمات هاتفية في التوقيت بين 00 و 00:05 ليلا.

التمرين 04

في مصنع لإنتاج السيارات يوجد 100 موظف في قسم التجميع، منهم 47 موظفين ماهرين و53 موظفين مبتدئين. سيتم اختيار موظفين عشوائيًا لتكوين فريق عمل لمهمة خاصة.

ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الموظفين الماهرين الذين تم اختيارهم من الموظفين الاثنين.

المطلوب:

1.ما هو القانون الاحتمالي الأصلي لـX

2.ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب اليه.

3.أوجد دالة التوزيع الاحتمالي لـ X

4.أوجد التوزيع الاحتمالي لـ X

5.أكتب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري.

حل السلسلة رقم 03

حل التمرين 01

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع توزيع ثنائي الحد، أي أن:

$$P(X > 14) = P(15) + P(16) + P(17) + \cdots + P(33)$$

$$= C_{33}^{15}(0.6)^{15}(0.4)^{33-15} + C_{33}^{16}(0.6)^{16}(0.4)^{33-16} + C_{33}^{17}(0.6)^{17}(0.4)^{33-17} + \cdots + C_{33}^{33}(0.6)^{33}(0.4)^{33-33}$$

نلاحظ عند استخدام قانون ثنائي الحد فان القيام بالعمليات الحسابية تكون صعبة جدا ، لذلك يتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لقانون ثنائي الحد، لأن شروط التقريب متوفرة :

$$n = 33 \geq 30$$

$$nP = 33 \times 0.6 = 19.8 \geq 5$$

$$n(1-P) = 33 \times 0.4 = 13.2 \geq 5$$

و عند استعمال التوزيع الطبيعي تحتاج الى:

$$\mu = E(X) = nP = 33 \times 0.6 = 19.8$$

$$\sigma^2 = V(X) = nP(1-P) = 33 \times 0.6 \times 0.4 = 7.92$$

1. حساب احتمال أن تكون المصابيح السليمة على الأكثر 14 مصباحًا.:

$$P(X \leq 14) = P(X \leq 14 + 0.5) = P\left(z \leq \frac{14 + 0.5 - 19.8}{\sqrt{7.92}}\right) = P\left(z \leq \frac{-5.3}{2.8}\right) = P(z \leq -1.98 = 1 - P(z \leq 1.89) = 1 - 0.9706 = 0.0294$$

2. حساب احتمال أن تكون المصابيح السليمة 15 مصباحًا..

$$P(X = k) = P\left(15 - {}^{1}/_{2} \leq X \leq 15 + {}^{1}/_{2}\right)$$

$$= P\left(\frac{15 - {}^{1}/_{2} - 19.8}{\sqrt{7.92}} \leq Z \leq \frac{15 + {}^{1}/_{2} - 19.8}{\sqrt{7.92}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-5.3}{2.8} \leq Z \leq \frac{-4.3}{2.8}\right) = P(-1.89 \leq Z \leq -1.54) = P(Z \leq -1.54) - P(Z \leq -1.89)$$

$$= [1 - P(Z \leq 1.54)] - [1 - P(Z \leq -1.89)] = (1 - 0.9382) - (1 - 0.9706) = 0.0324$$

3حساب احتمال أن تكون المصابيح السليمة بين 14 و15 مصباحًا..

$$P(14 \le X \le 15) = P\left(14 - {}^{1}/_{2} \le X \le 15 + {}^{1}/_{2}\right)$$
$$= P\left(\frac{14 - {}^{1}/_{2} - 19.8}{\sqrt{7.92}} \le Z \le \frac{15 + {}^{1}/_{2} - 19.8}{\sqrt{7.92}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-6.3}{2.8} \le Z \le \frac{-4.3}{2.8}\right) = P(-2.25 \le Z \le -1.54) = P(Z \le -1.54) - P(Z \le -2.25)$$

$$= [1 - P(Z \le 1.54)] - [1 - P(Z \le -2.25)] = (1 - 0.9382) - (1 - 0.9878) = 0.0496$$

<u>حل التمرين 02</u>

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع ثنائي الحد، حيث$n = 70$ ،$P = 0.75$،و عند استخدام قانون ثنائي الحد فان العمليات الحسابية تكون صعبة جدا، لذلك ينبغي تقريب هذا التوزيع الى توزيع آخر.

تقريب توزيع ثنائي الحد الى توزيع بواسون لا تتوفر فيه الشروط، لأن:

$$P \mapsto 0$$
$$n \mapsto +\infty$$
$$nP = \lambda$$

تقريب توزيع ثنائي الحد الى التوزيع الطبيعي تتوفر فيه الشروط، لأن:

$$n \ge 30 \Rightarrow 70 \ge 30$$
$$nP \ge 5 \Rightarrow 70(0.75) = 52.5$$
$$n(1 - P) \ge 5 \Rightarrow 70(0.25) = 17.5 \ge 5$$

حيث :

$$\mu = E(X) = nP = 70(0.75) = 52.5$$

$$\sigma^2 = V(X) = nP(1 - P) = 70(0.75)(0.25) = 13.125$$

1. حساب احتمال أن تكون 60 شتلة قد نمت بنجاح.

$$P(X = k) = P\left(60 - {}^{1}/_{2} \le X \le 60 + {}^{1}/_{2}\right)$$
$$= P\left(\frac{60 - {}^{1}/_{2} - 52.5}{\sqrt{13.125}} \le Z \le \frac{60 + {}^{1}/_{2} - 52.5}{\sqrt{13.125}}\right)$$

$$= P\left(\frac{7}{3.62} \le Z \le \frac{8}{3.62}\right) = P(1.93 \le Z \le 2.25) = P(Z \le 2.25) - P(Z \le 1.93)$$
$$= 0.4864 - 0.4732 = 0.0132$$

2حساب احتمال أن تكون 50 شتلة نمت بنجاح على الأكثر.

$$P(X \leq 50) = P(X \leq 50 + 0.5) = P\left(Z \leq \frac{60 + 0.5 - 52.5}{\sqrt{13.125}}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{-2}{3.62}\right) = P(Z \leq -0.55) = 1 - P(Z \leq 0.55) = 1 - 0.7088 = 0.2912$$

3.حساب احتمال أن تكون الشتلات التي نمت بنجاح أكثر من 45 وأقل من 60.

$$P(45 \leq X \leq 60) = P(45 - {}^1/_2 \leq X \leq 60 + {}^1/_2)$$
$$= P\left(\frac{45 - {}^1/_2 - 52.5}{\sqrt{13.125}} \leq Z \leq \frac{60 + {}^1/_2 - 52.5}{\sqrt{13.125}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-8}{3.62} \leq Z \leq \frac{8}{3.62}\right) = P(-2.21 \leq Z \leq 2.21) = P(Z \leq 2.21) - P(Z \leq -2.21)$$

$$= P(Z \leq 2.21) - [1 - P(Z \leq -2.21)] = 2 \times P(Z \leq 2.21) - 1 = 2(0.9864 - 1 = 0.9728$$

حل التمرين 03

نلاحظ أن هذه التجربة تتبع توزيع بواسون، حيث 12.5 =ƛ و نظرا لصعوبة حل الأسئلة باستخدام توزيع بواسون، وكذلك لأن10 ≤ 12.5 = ƛ ، لذلك يتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب بواسون، لأن شروط التقريب متوفرة و بالتالي$\sigma^2 = \mu = ƛ = 12.5$.

1.ما هو احتمال أن تستقبل 10 مكالمات هاتفية على الأكثر في التوقيت بين 11:10 و 11:15 صباحا.

$$P(X \leq 10) = P(X \leq 10 + {}^1/_2) = P\left(Z \leq \frac{10 + {}^1/_2 - 12.5}{\sqrt{12.5}}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{-2}{3.54}\right) = P(Z \leq -0.56) = 1 - P(Z \leq 0.56) = 1 - 0.9406 = 0.0594$$

2.ما هو احتمال أن تستقبل 11 مكالمات هاتفية في التوقيت بين 14 و 14:05 مساءا.

$$P(X = 11) = P(11 - {}^1/_2 \leq X \leq 11 + {}^1/_2)$$
$$= P\left(\frac{11 - {}^1/_2 - 12.5}{\sqrt{12.5}} \leq Z \leq \frac{11 + {}^1/_2 - 12.5}{\sqrt{12.5}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-2}{3.54} \leq Z \leq \frac{-1}{3.54}\right) = P(-0.56 \leq Z \leq -0.28) = P(Z \leq -0.28) - P(Z \leq -0.56)$$
$$= [1 - P(Z \leq -0.28)] - [1 - P(Z \leq -0.56)]$$
$$= (1 - 0.6103) - '1 - 0.7123) = 0.102$$

3.ما هو احتمال أن تستقبل بين 5 و 15 مكالمات هاتفية في التوقيت بين 00 و 00:05 ليلا.

$$P(5 \le X \le 15) = P\left(5 - {}^{1}/_{2} \le X \le 15 + {}^{1}/_{2}\right)$$
$$= P\left(\frac{5 - {}^{1}/_{2} - 12.5}{\sqrt{12.5}} \le Z \le \frac{15 + {}^{1}/_{2} - 12.5}{\sqrt{12.5}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-8}{3.54} \le Z \le \frac{3}{3.54}\right) = P(-2.26 \le Z \le 0.85) = P(Z \le 0.85) - P(Z \le -2.26)$$

$$= P(Z \le 0.85) - [1 - P(Z \le -2.26)] = 0.8023 - [1 - 0.9881] = 0.7904$$

<u>حل التمرين 04</u>

X: عدد الطلبة الذكور الذين تم إختيارهم

N: مجتمع يحتوي على 100 موظف

N_1 : العناصر التي تمثل النجاح هي 47 موظف ماهر

$(N - N_1)$:العناصر التي تمثل الفشل هي 53 موظف مبتدئ

n: العينة المسحوبة هي موظفين

1. القانون الأصلي لـ X هو القانون فوق الهندسي لأنه من الضروري اختيار الأعضاء دون ارجاع (عضوين مختلفين)، $X \mapsto H(N_1, N - N_1)$
2. نلاحظ أن حجم العينة n= 2 يبدو صغيرا مقارنة بحجم المجتمع N=100 و$\frac{n}{N} = \frac{2}{100} = 0.02 \le 0.05$ و عليه نقرب الى قانون ثنائي الحد $X \mapsto B(n.P)$ لأن شرط التقريب متوفر.
3. دالة التوزيع الاحتمالي لـ X (توزيع ثنائي الحد)

$X \mapsto B(n.P)$, x=0,1,3,…… ,n

$$f(x) \mapsto P(X = x) = C_n^x P^x (1 - P)^{n-x}$$

بتعويض n و P نجد:

$X \mapsto B\left(n = 2.P = \frac{47}{100} = 0.47\right)$, x=0,1, 2

$f(X) \mapsto P(X = x) = C_2^x (0.47)^x (0.53)^{2-x}$

4. التوزيع الاحتمالي لـ X ، حيث X= {0,1,2}

$\mathrm{P}(X = x) = C_2^x (0.47)^x (0.53)^{2-x}$

$\mathrm{P}(X = 0) = C_2^0 (0.47)^0 (0.53)^{2-0} = 1.1.(0.53)^2 = 0.2809$

$\mathrm{P}(X = 1) = C_2^1 (0.47)^1 (0.53)^{2-1} = 2.(0.47).(0.53) = 0.4982$

$$\mathrm{P}(X = 2) = C_2^2 (0.47)^2 (0.53)^{2-2} = 1.(0.47)^2.1 = 0.2209$$

ويمكن تلخيص ذلك كالتالي:

X	0	1	2	$\sum P(X)$
$P(X = x)$	0.2809	0.4982	0.2209	1

5. حساب التوقع والانحراف المعياري

- التوقع: $\mu_x = E(X) = nP = 2(.47) = 0.94$

- التباين: $V(X) = nP(1-P) = 2(0.47)(0.53) = 0.4982$

- الانحراف المعياري $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.4982} = 0.7058$

المحور الرابع: المتغيرات العشوائية الثنائية:

تمهيد:

يمكن تحديد أي متغير عشوائي بمجرد معرفة دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة التوزيع التراكمية الخاصة به. ومع ذلك في العديد من الحالات الإحصائية، نحتاج إلى دراسة متغيرين عشوائيين أو أكثر معًا، خصوصًا عندما تكون هذه المتغيرات معرفة على نفس فضاء التجربة. ويكتسب التركيز أهمية خاصة عندما تكون هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض.

تشكل المتغيرات العشوائية المزدوجة محورًا مهمًا في الإحصاء وعلم الاحتمالات، فهي تمثل زوجًا من المتغيرات التي يتم تحليلها معًا لفهم العلاقة بينهما وكيفية تأثير أحدهما على الآخر. من خلال دراسة هذه المتغيرات، يمكن للباحثين تحليل الارتباطات والتفاعلات بين المتغيرات، وهو ما يتيح فهمًا أعمق للظواهر المعقدة في البيانات.

يتم استخدام مفهوم المتغيرات العشوائية المزدوجة في نطاق واسع من التطبيقات العملية، مثل البحوث الطبية لتحليل تأثير دواء على متغيرات صحية متعددة، والتمويل لدراسة العلاقة بين أسعار الأصول المختلفة، والاقتصاد لدراسة التأثير المتبادل بين مؤشرات السوق، والهندسة لتحليل الأداء المشترك لمكونات النظام. وفهم هذه العلاقات يعتبر أمرًا حيويًا لاتخاذ القرارات المبنية على البيانات والتنبؤ بالأحداث المستقبلية بدقة أكبر.

1. المتغيرات العشوائية المزدوجة المنفصلة

عند دراسة المتغيرات العشوائية المزدوجة المنفصلة، يُعد فهم الاستقلال بين المتغيرين أمرًا أساسيًا، حيث إن استقلالهما يتيح تحليل كل متغير على حدة، مما يبسط العمليات الإحصائية بشكل كبير.

تُستخدم المتغيرات العشوائية المزدوجة المنفصلة في العديد من التطبيقات العملية، مثل تحليل الارتباطات في البحوث العلمية، وتوقع الأحداث المستقبلية في الأعمال والاقتصاد، وأيضًا في مجالات مثل الهندسة والطب .يوفر هذا النوع من التحليل إطارًا قويًا لدراسة العلاقات الاحتمالية بين زوج من المتغيرات، مما يعزز دقة وكفاءة الاستنتاجات الإحصائية.

ويطلق على الزوج (X,Y) اسم متجه عشوائي متقطع إذا كانت إحدى مركباته أو كلاهما متغيرًا عشوائيًا متقطعًا، أي أن قيم المتجه (X,Y) تشكل مجموعة منتهية أو قابلة للعد من الأزواج المرتبة من الأعداد

الحقيقية. وعندما يكون هذا المتجه منفصلاً، فإن ذلك يعني أن التوزيع المشترك للمتغيرين يمكن التعبير عنه كمضاعف للتوزيعات الفردية لكل متغير، مما يسهل حساب الاحتمالات وتحليل البيانات.

1.1 التوزيع الاحتمالي المنفصل للمتجه العشوائي: (X ,Y)

ان الدالة المعرفة على مجموعة قيم للمتجه العشوائي (X ,Y)، والتي تأخذ قيمها من مجموعة الأعداد الحقيقية R والممثلة لاحتمال كل قيمة (X ,Y) من قيم (X ,Y) .

تدعى دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين المنقطعين Xو Y، يرمز لهذه الدالة بالرمز $f(X,Y)$ وهي تعطينا التوزيع المشترك لهاذين المتغيرين وتكتب هذه الدالة كما يلي:

$$f(X,Y) = P(X = x, Y = y)$$

ان هذه الدالة تعطى عادة على شكل جدول يدعى جدول التوزيع الاحتمالي المنفصل للمتجه العشوائي(X ,Y) (التوزيع الاحتمالي المشترك) والمبين كما يلي:

Y / X	Y_1	Y_2	.....	Y_m	المجموع
X_1	$f(X_1,Y_1)$	$f(X_1,Y_2)$	.....	$f(X_1,Y_m)$	$f(X_1)$
X_2	$f(X_2,Y_1)$	$f(X_2,Y_2)$		$f(X_2,Y_m)$	$f(X_2)$
. . .	. . .	. . .	....	. . .	. . .
X_n	$f(X_n,Y_1)$	$f(X_n,Y_2)$	.....	$f(X_n,Y_m)$	$f(X_n)$
المجموع	$g(Y_1)$	$g(Y_2)$	.....	$g(Y_m)$	1

حيث:

$f(X_i) = \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)$: مجموع كل الاحتمالات الواقعة في السطر المقابل للقيمة X_i /(i=1,2 .....،n).

$g(Y_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)$: مجموع كل الواقعة في العمود المقابل للقيمة Y_j / (i=1,2 .....،m).

على الترتيب Yو X : الدوال الهامشية لكل من $g(Y)$ و $f(X)$

تحقق دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة (قانون التوزيع المشترك) الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} 1) f(x,y) \geq 0 \\ 2) \sum_x \sum_y f(x,y) = 1 \end{cases}$$

2.1. دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي (X,Y)

اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين وكانت $f(X,Y)$ دالة الكثافة المشتركة لهذين المتغيرين عندئذ تعرف دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي (X,Y) والتي يرمز لها بالرمز $F(X,Y)$ ، حيث تكتب بالعلاقة التالية:

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

حيث x وy تمثل أعداد حقيقية من قيم المتغيرين X و Y على الترتيب فإذا كان (X,Y) متجها عشوائيا منفصلا فإن:

$$F(x_0,y_0) = P[X \leq x_0, Y \leq y_0] = \sum_{X \leq x_0} \sum_{Y \leq y_0} f(x,y) = \sum_{X \leq x_0} \sum_{Y \leq y_0} P[X = x, Y = y]$$

3.1. القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المتقطعة

في هذه الفقرة سندرس ثلاثة وسطاء احصائية وهي التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري والتغاير ومعامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين أو أكثر.

1.3.1. التوقع الرياضي:

اذا كان X وY متغيران عشوائيان منفصلان لهما توزيع مشترك، وكانت دالة الكثافة الاحتمالية لكل منهما $f(x) = P(X = x)$ $g(y) = P(Y = y)$ فإن التوقع الرياضي لهذا التوزيع المشترك يكون من الشكل التالي:

$$E(x,y) = \sum_i \sum_j (x_i , y_j) f(x_i,y_j)$$

3.2.1. التباين المزدوج (التغاير):

يعرف التباين المزدوج لمتغيرين عشوائيين X و Y (أو التغاير لمتغيرين عشوائيين X و Y) بالعلاقة التالية:

$$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i\ y_j) f(x_i,y_j) - \sum_i x_i f(x_i) \sum_j y_j g(y_i)$$

$$Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y)$$

حيث: E(X) وE(Y) هما المتوسطان الحسابيان للمتغيرين X و Y على الترتيب

وبطريقة مكافئة:

$$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j [x_i - E(X)][y_j - E(Y)] f(x_i, y_j)$$
$$= \mathrm{E}[(x_i - E(X))(y_j - E(Y))]$$

3.3.1. معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين:

يعرف معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين بالعلاقة التالية:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i, y_j) f(x_i, y_j) - \sum_i x_i f(x_i) \sum_j y_j g(y_i)}{\sigma_x . \sigma_y}$$
$$= \frac{E(X,Y) - E(X)E(Y)}{\sigma_x . \sigma_y}$$

حيث: σ_x و σ_y هما الانحراف المعياري للمتغيرين X و Y على الترتيب

ان معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين هو عدد حقيقي محصور بين (-1) و(+1) أي أن:

$$-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1$$

2.المتغيرات العشوائية المزدوجة المتصلة:

تشكل المتغيرات العشوائية المزدوجة المتصلة مفهوماً أساسياً في ميدان الاحتمالات والإحصاء، حيث يتم من خلالها دراسة العلاقات والتفاعلات بين زوج من المتغيرات العشوائية .يشير هذا النوع من المتغيرات إلى وجود ارتباط محتمل بينهما، بحيث يمكن أن يؤثر تغير قيمة أحد المتغيرين بشكل محدد على قيمة الآخر.

تسهم دراسة المتغيرات العشوائية المزدوجة المتصلة في فهم التفاعلات المعقدة بين الأحداث أو الظواهر، وهي ذات أهمية كبيرة في مجالات متعددة مثل الاقتصاد والبيولوجيا والطب والهندسة .ففهم هذه العلاقات يتيح للباحثين والمحللين تحليل البيانات بشكل أدق واتخاذ قرارات مستنيرة تعتمد على معرفة أعمق بكيفية تأثير المتغيرات المختلفة على بعضها البعض.

ويطلق على الزوج (X,Y) اسم متجه عشوائي مستمر إذا كانت إحدى مركباته أو كلاهما متغيرًا عشوائيًا مستمرًا، أي أن قيم المتجه (X,Y) تشكل مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد من الأزواج المرتبة للأعداد الحقيقية. وعند دراسة هذا النوع من المتجهات، يتم التركيز على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة وتحليل التوزيع التراكمي المشترك للمتغيرين، مما يوفر فهمًا كاملًا لسلوكهما المشترك.

1.2.دالة التوزيع الاحتمالي المتصل للمتجه العشوائي (X,Y)

ليكن (X,Y) متجها عشوائي مستمرا عندئذ تكون الدالة $f(x,y)$ المعرفة على مجموعة قيم هذا المتجه و التي تأخذ قيمها من مجموعة الأعداد الحقيقية R، دالة كثافة احتمالية للمتجه العشوائي المستمر اذا حققت الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} \mathbf{1})f(x,y) \geq 0 \\ \mathbf{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1 \end{cases}$$

تسمى الدالة $f(x,y)$ أيضا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين المستمرين X وy من التعريف السابق نجد أن:

$$P[x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dxdy$$

وذلك اذا كانت الأعداد الحقيقية y_2 ,y_1 ,x_2 ,x_1 بحيث $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$

من تعريف دالة الكثافة $f(x,y)$للمتجه المستمر (X,Y) نجد أنه يمكننا الحصول على دالتي الكثافة لكل من المتغيرين العشوائيين المستمرينX وY كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\ g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \end{cases}$$

حيث تسمى الدالتين$f(x)$ و$g(y)$ بدالتي الكثافة الهامشية للمتغيرين العشوائيين على الترتيب . دوال المتغيرات العشوائية المزدوجة

2.2. دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي

اذا كان (X,Y)متجها عشوائيا مستمرا فإن:

$$F(x_0,y_0) = P[X \leq x_0, Y \leq y_0] = P[X < x_0, Y < y_0] = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f(x,y)dxdy$$

ان دالة التوزيع التراكمي هي عبارة عن دالة في المتغيرين الحقيقين X و Y ففي الحالة التي يكون فيها المتجه العشوائي(X,Y) مستمرا نلاحظ أن العلاقة الممثلة لدالة التوزيع التراكمي لهذا المتجه نحصل عليها من التكامل:

$$F(x_0, y_0) = P[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv$$

3.2. القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المتصلة

سندرس في هذه الفقرة التوقع الرياضي و التغاير و الانحراف المعياري و التغاير و معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين.

1.3.2. التوقع الرياضي

اذا كان X و Y متغيران عشوائيان متصلان ، وكانت دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المشترك $f(x, y)$ فإن التوقع الرياضي لهذا التوزيع المشترك يكون من الشكل التالي:

$$E(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i, y_j) f(x_i, y_j) dx dy$$

2.3.2. التباين المزدوج (التغاير)

يعرف التباين المزدوج لمتغيرين عشوائيين X وY (أو التغاير لمتغيرين عشوائيينX وY) بالعلاقة التالية:

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i, y_j) f(x_i, y_j) dx dy - \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_i) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y_j g(y_j) dy$$

$$Cov(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y)$$

حيث: $E(x)$ و $E(Y)$ هما المتوسطان الحسابيان للمتغيرين X وY على الترتيب

وبطريقة مكافئة:

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)][y_j - E(Y)] f(x_i, y_j) dx dy = E[(x_i - E(X)(y_j - E(Y)]$$

3.3.2 معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين:

يعرف معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين بالعلاقة التالية:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i, y_j)f(x_i, y_j)dxdy - \int_{-\infty}^{+\infty} x_i\, f(x_i)dx \int_{-\infty}^{+\infty} y_j\, g(y_j)dy}{\sigma_x . \sigma_y}$$

$$= \frac{E(X,Y) - E(X)E(Y)}{\sigma_x . \sigma_y}$$

حيث: σ_x و σ_y هما الانحراف المعياري للمتغيرين X وYعلى الترتيب

ان معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين هو عدد حقيقي محصور بين (-1) و(+1)أي أن:

$$-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1$$

<u>سلسلة تمارين رقم 04</u>

التمرين 01:

نفرض أن المتغير العشوائي يأخذان القيم 1و2و3 وأن الاحتمالات التالية معطاة:

$P(X=1) = 0.5$ $\quad P(X=1, Y=1) = 0.35$

$P(X=2, Y=2) = 0.06$

$P(X=3, Y=1) = 0.2$

$P(X=2) = 0.3$

$P(Y=1) = 0.7$

$P(Y=2) = 0.2$

المطلوب: أوجد جدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X وY

التمرين 02

نلقي حجر نرد و نعرف x بأنه متغير عشوائي الذي يخصص لكل ثنائية الرقم الأكبر فيها، و Y بأنه متغير عشوائي الذي يخصص مجموع الرقمين في كل ثنائية. المطلوب:

1.أوجد التوزيع المشترك لـ X و Y

2.أوجد توزيع الدوال الهامشية$f(x)$ و$g(y)$

3. أوجد التوقع و التغاير .

التمرين 03:

$$f(x,y)=k(6+x-y),\begin{cases}0\le x\le 3\\0\le y\le 2\end{cases}$$

1. أوجد k بحيث يكون$f(x,y)$ تابع كثافة مشترك للشعاع العشوائي (x,y)
2. أوجد$Cov(X,Y)$
3. أوجد$\rho(X,Y)$

حل السلسلة رقم 04

حل التمرين 01

جدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X وY

	$Y_1=1$	$Y_2=2$	$Y_3=3$	$\sum f(X_i)$
$X_1=1$	**0.35**	0.14	0.01	**0.5**
$X_2=2$	0.15	**0.06**	0.09	**0.3**
$X_3=3$	**0.2**	00	00	0.2
$\sum g(Y_J)$	**0.7**	**0.2**	0.1	1

$P(X=3)=1-(0.5+0.3)=0.2$
$P(X=3)=1-(0.7+0.2)=0.1$

$P(X=2,Y=1)=0.7-(0.2+0.35)=0.15$

$P(X=2,Y=3)=0.3-(0.15+0.06)=0.09$

$P(X=3,Y=2)=0$

$P(X=3,Y=3)=0$

$P(X=1,Y=3)=0.1-0.09=0.01$

$P(X=1,Y=2)=0.5-(0.35+0.01)=0.14$

حل التمرين 02

1. أوجد التوزيع المشترك لX و Y

Y \ X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum.$
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$

3	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{7}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
$\sum.$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	01

2. أوجد توزيع الدوال الهامشية $f(x)$ و$g(y)$

الدالة الهامشية $f(x)$

X	1	2	3	4	5	6	$\sum.$
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1
$[X - E(X)]$	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	-6

$$E(X) = \sum x_i f(x_i) = 1.\frac{1}{36} + 2.\frac{3}{36} + 3.\frac{5}{36} + 4.\frac{7}{36} + 5.\frac{9}{36} + 6.\frac{11}{36} = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36}$$

$$\frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36} = 4.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\sum(x - E(x)))^2}{n}} = \sqrt{\frac{(-6)^2}{6} = \sqrt{6}} = 2.4$$

الدالة الهامشية$g(y)$

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum.$
$g(Y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$[Y - E(Y)]$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	0

$$E(X) = \sum y_j f(y_j)$$

$$= 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + 4.\frac{3}{36} + 5.\frac{4}{36} + 6.\frac{5}{36} + 7.\frac{6}{36} + 8.\frac{5}{36} + 9.\frac{4}{36} + 10.\frac{3}{36}$$

$$+ 11\frac{2}{36} + 12.\frac{1}{36}$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{42}{36} + \frac{40}{36} + \frac{36}{36} + \frac{30}{36} + \frac{22}{36} + \frac{12}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\sum(y - E(y)))^2}{n}} = \sqrt{\frac{(0)^2}{11}} = 0$$

3. أوجد التوقع والتغاير والارتباط بين المتغيرين X و Y

التوقع المشترك:

$$E(X,Y)=\sum_i\sum_j (x_i,y_j)f(x_i,y_j)$$
$$=1.2.\frac{1}{36}+2.3.\frac{2}{36}+2.4.\frac{1}{36}+3.4.\frac{2}{36}+3.5\frac{2}{36}+3.6.\frac{1}{36}+4.5.\frac{2}{36}+4.6.\frac{2}{36}$$
$$+4.7\frac{2}{36}+4.8.\frac{1}{36}+5.6.\frac{2}{36}+5.7.\frac{2}{36}+5.8.\frac{2}{36}+5.9.\frac{2}{36}+5.10.\frac{1}{36}$$
$$+6.7.\frac{2}{36}+6.8.\frac{2}{36}+6.9.\frac{2}{36}+6.10.\frac{2}{36}+6.11.\frac{2}{36}+6.12.\frac{1}{36}$$
$$=\frac{2}{36}+\frac{12}{36}+\frac{8}{36}+\frac{24}{36}+\frac{30}{36}+\frac{18}{36}+\frac{40}{36}+\frac{48}{36}+\frac{56}{36}+\frac{32}{36}+\frac{60}{36}+\frac{70}{36}+\frac{80}{36}$$
$$+\frac{90}{36}+\frac{50}{36}+\frac{84}{36}+\frac{96}{36}+\frac{108}{36}+\frac{120}{36}+\frac{132}{36}+\frac{72}{36}=\frac{1232}{36}=34.2$$

التباين المشترك (التغاير):

$$Cov(X,Y)=\sum_i\sum_j (x_i,y_j)f(x_i,y_j)-\sum_i x_i f(x_i)\sum_j y_j g(y_i)$$

$$Cov(X,Y)=E(X,Y)-E(X)E(Y)=\frac{1232}{36}-\frac{161}{36}.\frac{252}{36}=\frac{1232}{36}-\frac{40572}{36}=34.2-31.3$$
$$=2.9$$

<u>حل التمرين 03</u>

$$f(x,y)=k(6+x-y),\begin{cases}0\le x\le 3\\0\le y\le 2\end{cases}$$

1. أوجد k بحيث يكون $f(x,y)$ تابع كثافة مشترك للشعاع العشوائي (x,y)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i,y_j)dxdy=k\int_0^3\int_0^2((6+x-y))dxdy=k\int_0^3\left[6x+\frac{1}{2}x^2-xy\right]_0^2 dy$$
$$=k\int_0^3(14-2y)dy=k\left[14y-2.\frac{1}{2}y^2\right]_0^3=k(42-9)=33k\Rightarrow 33k=1$$
$$\Rightarrow k=\frac{1}{33}$$

2. أوجد $Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i,y_j)f(x_i,y_j)dxdy-\int_{-\infty}^{+\infty}x_i\,f(x_i)dx\int_{-\infty}^{+\infty}y_i\,g(y_j)dy$$

$$Cov(X,Y)=E(X,Y)-E(X)E(Y)$$

$$\begin{cases} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^2 f(x_i,y_j)dy = \frac{1}{33}\int_0^2 (6+x-y)dy = \frac{1}{33}\left[6y+xy-\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = \frac{1}{33}(10+2x) \\ g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^3 f(x_i,y_j)dx = \frac{1}{33}\int_0^3 (6+x-y)dx = \frac{1}{33}\left[6x+\frac{1}{2}x^2-xy\right]_0^3 = \frac{1}{33}\left(\frac{45}{2}-3y\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_i)dx = \frac{1}{33}\int_0^2 x(10+2x)dx = \frac{1}{33}\int_0^2 (10x+2x^2)dx = \frac{1}{33}\left[5x^2+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{33}\left(20+\frac{16}{3}\right) = \frac{20}{33}+\frac{16}{99} \\ = \frac{60}{99}+\frac{16}{99} = \frac{76}{99} = 0.77 \\ E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_j g(y_j)dy = \frac{1}{33}\int_0^3 Y\left(\frac{45}{2}-3Y\right)dY = \frac{1}{33}\int_0^3 \left(\frac{45}{2}y-3y^2\right)dY = \frac{1}{33}\left[\frac{45}{4}y^2-y^3\right]_0^3 = \frac{1}{33}\left(\frac{405}{4}-27\right) = \\ \frac{405}{132}-\frac{27}{33} = \frac{405-108}{132} = \frac{297}{132} = 2.25 \end{cases}$$

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_i,y_j)f(x_i,y_j)dxdy$$

$$= \frac{1}{33}\int_0^3\int_0^2 xy(6+x-y)dxdy = \frac{1}{33}\int_0^3\int_0^2 (6xy+yx^2-xy^2)dxdy$$

$$= \frac{1}{33}\int_0^3 \left[6y\frac{1}{2}x^2+y\frac{1}{3}x^3-y^2\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 dy = \frac{1}{33}\int_0^3 \left[12y+\frac{8}{3}y-2y^2\right]_0^2 dy$$

$$= \frac{1}{33}\left[\frac{44}{6}y^2-\frac{2}{3}y^3\right]_0^3 = \frac{396}{6}+\frac{27}{3} = 66+9 = 75$$

$$Cov(X,Y) = E(X,Y)-E(X)E(Y) = 75-(0.77)(2.25) = 75-1.7325 = 73.2675$$

3. أوجد $\rho(X,Y)$

$$\sigma_x^2 = \int_0^2 \big(x-E(X)\big)f(x)dx$$

$$= \frac{1}{33}\int_0^2 \left(x-\frac{76}{99}\right)(10+2x)dx = \frac{1}{33}\int_0^2 \left(10x+2x^2-\frac{10.76}{99}-\frac{2.76}{99}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{33}\int_0^2 \left(2x^2+\frac{838}{99}x-\frac{760}{99}\right)dx = \frac{1}{33}\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{838}{198}x^2-\frac{760}{99}x\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{33}\left(\frac{2}{3}8+\frac{838}{198}4-\frac{760}{99}2\right)$$

$$= \frac{16}{99}+\frac{3352}{6534}-\frac{1520}{3267} = 0.16+0.51-0.47 = 0.2$$

$\sigma_{y=\sqrt{0.2}=1.41}$

$$\sigma_y^2 = \int_0^3 \big(y - E(y)\big)g(y)dy$$

$$= \frac{1}{33}\int_0^3 \left(y - \frac{297}{132}\right)\left(\frac{45}{2} - 3y\right)dy = \frac{1}{33}\int_0^3 \left(\frac{45}{2}y - 3y^2 - \frac{13365}{264} + \frac{891}{132}y\right)dy$$

$$= \frac{1}{33}\left[\frac{45}{4}y^2 - y^3 - \frac{13365}{264}y + \frac{891}{396}y^2\right]_0^3 = \frac{1}{33}\left(\frac{405}{4} - 27 - \frac{40095}{264} + \frac{8019}{396}\right)$$

$$= \frac{1}{33}\left(\frac{405}{4} - 27 - \frac{40095}{264} + \frac{8019}{396}\right) = \frac{405}{132} - \frac{27}{33} - \frac{40095}{8712} + \frac{8019}{13068}$$

$$= 3.07 - 0.82 - 4.6 + 0.6 = 5.42 - 3.67 = 1.82$$

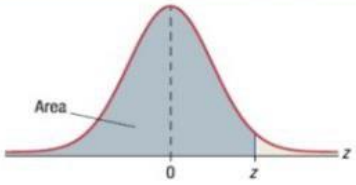
$\sigma_{y=\sqrt{1.82}=1.35}$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x.\sigma_y} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i,y_j)f(x_i,y_j)dxdy - \int_{-\infty}^{+\infty} x_i\, f(x_i)dx \int_{-\infty}^{+\infty} y_j\, g(y_j)dy}{\sigma_x.\sigma_y}$$

$$= \frac{E(X,Y) - E(X)E(Y)}{\sigma_x.\sigma_y} = \frac{73.2675 - (0.77)(2.25)}{(1.41)(1.35)} = \frac{71.54}{0.9} = 79.49$$

B Standard Normal Distribution

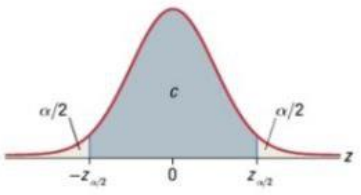
Numerical entries represent the probability that a standard normal random variable is between $-\infty$ and z where $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Critical Values of z

Level of Confidence, c	$\alpha = 1 - c$	$z_{\alpha/2}$
0.80	0.20	1.28
0.85	0.15	1.44
0.90	0.10	1.645
0.95	0.05	1.96
0.98	0.02	2.33
0.99	0.01	2.575

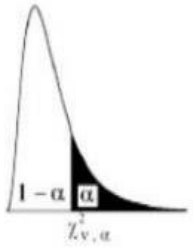


t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{\nu,\alpha}$

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$$



	α														
ν	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92

Critical Values of *F* (Area = 0.050)

Denominator Degrees of Freedom	Numerator Degrees of Freedom								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684	238.8827	240.5433
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

Critical Values of *F* (Area = 0.010)

Denominator Degrees of Freedom	Numerator Degrees of Freedom								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052.1807	4999.5000	5403.3520	5624.5833	5763.6496	5858.9861	5928.3557	5981.0703	6022.4732
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424
11	9.6460	7.2057	6.2167	5.6683	5.3160	5.0692	4.8861	4.7445	4.6315
12	9.3302	6.9266	5.9525	5.4120	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994	4.3875
13	9.0738	6.7010	5.7394	5.2053	4.8616	4.6204	4.4410	4.3021	4.1911
14	8.8616	6.5149	5.5639	5.0354	4.6950	4.4558	4.2779	4.1399	4.0297
15	8.6831	6.3589	5.4170	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045	3.8948
16	8.5310	6.2262	5.2922	4.7726	4.4374	4.2016	4.0259	3.8896	3.7804
17	8.3997	6.1121	5.1850	4.6690	4.3359	4.1015	3.9267	3.7910	3.6822
18	8.2854	6.0129	5.0919	4.5790	4.2479	4.0146	3.8406	3.7054	3.5971
19	8.1849	5.9259	5.0103	4.5003	4.1708	3.9386	3.7653	3.6305	3.5225
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4307	4.1027	3.8714	3.6987	3.5644	3.4567
21	8.0166	5.7804	4.8740	4.3688	4.0421	3.8117	3.6396	3.5056	3.3981
22	7.9454	5.7190	4.8166	4.3134	3.9880	3.7583	3.5867	3.4530	3.3458
23	7.8811	5.6637	4.7649	4.2636	3.9392	3.7102	3.5390	3.4057	3.2986
24	7.8229	5.6136	4.7181	4.2184	3.8951	3.6667	3.4959	3.3629	3.2560
25	7.7698	5.5680	4.6755	4.1774	3.8550	3.6272	3.4568	3.3239	3.2172
26	7.7213	5.5263	4.6366	4.1400	3.8183	3.5911	3.4210	3.2884	3.1818
27	7.6767	5.4881	4.6009	4.1056	3.7848	3.5580	3.3882	3.2558	3.1494
28	7.6356	5.4529	4.5681	4.0740	3.7539	3.5276	3.3581	3.2259	3.1195
29	7.5977	5.4204	4.5378	4.0449	3.7254	3.4995	3.3303	3.1982	3.0920
30	7.5625	5.3903	4.5097	4.0179	3.6990	3.4735	3.3045	3.1726	3.0665
40	7.3141	5.1785	4.3126	3.8283	3.5138	3.2910	3.1238	2.9930	2.8876
60	7.0771	4.9774	4.1259	3.6490	3.3389	3.1187	2.9530	2.8233	2.7185
120	6.8509	4.7865	3.9491	3.4795	3.1735	2.9559	2.7918	2.6629	2.5586
∞	6.6349	4.6052	3.7816	3.3192	3.0173	2.8020	2.6393	2.5113	2.4074