N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Analyse asymptotique de l'écoulement dynamique de fluide Bingham dans un domaine mince avec des conditions non linéaires sur le bord

Présenté par: TEREA Fatma
BEYOUDA Maroua

Soutenu devant le jury composé de

Djedidi Mohammed Yacine	MAA	Président	Univ. El Oued
Letoufa Yassine	MCA	Raporteur	Univ. El Oued
Elmehdi Zaouche	MCA	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2020 – 2021

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail et tous les personnes qui nous ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire nous voudrions dans un premier temps remercier notre encadreur de mémoire *Letoufa Yassine*, à l'université Echahid Hamma Lakhdar à El-Oued pour sa patience , sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils , qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Je suis également reconnaissant à messieurs les profs *Mr. Y. Djedidi Mohammed* et *Mr. E. Zaouche* d'avoir bien voulu faire partie du jury, de leur lecture attentive du manuscrit et de leurs précieuses suggestions. Nous tenons à remercier à la fois le père et la mère pour leur soutien moral et leurs encouragements pendent les années scolaires , donc nous prions Dieu de les protéger et de prolonger leur vie. Enfin, nous dédions ce travail à nos chers parents pour leur grands soutien

Table des matières

Introduction générale

Un fluide de Bingham est un fluide viscoplastique rigide qui est un type particulier de fluide non newtonien. Le nom est associé à Eugene C. Bingham (1878–1945) qui, pour la première fois, en 1916, proposa une description mathématique de ce comportement visco-plastique [4]. Il existe de nombreux matériaux dans la nature et l'industrie présentant le comportement du milieu Bingham. Par exemple, les pétroles bruts lourds, les solutions colloïdales, les mélanges de poudres, les métaux sous pression, le sang dans un capillaire, les denrées alimentaires, le dentifrice. Les modèles mathématiques pour de tels matériaux impliquent la loi de constitution des fluides visqueux incompressibles avec une composante de tenseur de contrainte supplémentaire modélisant les effets visco-plastiques.

L'analyse variationnelle d'écoulement de fluide de Bingham a été réalisée dans [10], où les auteurs ont étudié l'existence, l'unicité et la régularité de la solution pour les écoulements stationnaires et non-stationnaires dans un réservoir. Qulques résultats d'existence et de régularité supplémentaire pour le problème d'écoulement de fluide de Bingham de dimension (1d) avec des conditions aux limites de Dirichlet sont également étudiés dans [22,23].

Plus récemment, les auteurs de [16] ont prouvé l'etude du système dynamique de Stokes dans un domaine mince avec conditions aux limites de Fourier et de Tresca. L'étude d'un problème aux limites non linéaires qui décrivent l'évolution des matériaux élastiques linéaires avec un terme non linéaire $|u^\varepsilon|^\rho u^\varepsilon$, $\rho = p-2$ pour $p>1$ a été pris en compte dans [3].

Plusieurs études théoriques et numériques relatives aux fluides non newtoniens peuvent être trouvées dans [10,13,14].

En effet ce travail se donne une extension à la description de l'écoulement non stationnaire de fluides de certains des résultats obtenus dans une série d'articles [1,2,5,6,7,9,11], dans lesquels les auteurs ne considèrent que le cas stationnaire seulement des équations générales décrivant le mouvement de certains écoulements fluides dans un domaine mince borné.

Pour cela, nous nous intéressons dans ce mémoire à l'etude de l'écoulement non stationnaire d'un fluide de Bingham dans un domaine borné suposé mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$. Comme il est courant dans la théorie de la mécanique des milieux continus, le bord du domaine s'est divisé en trois parties disjoints et mesurables; Partie supérieure, inférieure et latérale. Nous supposons la condition aux limites non linéaire de Fourier sur la surface supérieure et la condition non linéaire de Tresca sur la surface inférieure. Alors, nous allons étuder à l'existence et l'unicité de la solution de ce problème ainsi qu'à son comportement asymptotique lorsque l'épaisseur du domaine mince tend vers zéro.

Plus précisément, ce modèle asymptotique est principalement lié à des problèmes à la mécaniques de lubrification dans de nombreux papiers mécaniques [17,15,18,21] lorsque l'espace entre les surfaces solides est très faible. Dans ce système dynamique, la condition antidérapante est causée par la structure chimique entre les lubrifiants et les surfaces environnantes. Au contraire, les contraintes tangentielles, lorsqu'elles atteignent un certain seuil, détruisent la structure chimique et induisent un phénomène de glissement. Ce phénomène est implicitement exprimé par l'équation de Reynolds, tenant compte d'un tel glissement, qui a été posée mathématiquement en 1985 dans [19].

Alors, en suivant les mêmes idées que dans [7, 25, 27]. Le point de départ est les lois de conservation, qui incluent ici l'effet des forces d'inertie dépendantes de l'accélération. Une loi de frottement de Tresca [12] et la condition aux limites de Fourier [7] sont supposées sur la frontière, rentrent donc dans le cadre des travaux de [11].

La forme faible de notre problème est une inégalité variationnelle. Dans ce cadre nous utilisons l'approche qui consiste à transposer le problème initialement posé dans le domaine Ω^ε qui dépend d'un petit paramètre ε dans un problème équivalent posé dans le domaine fixe Ω qui est indépendant de ε. Nous montrons que la solution limite satisfait aussi une inégalité variationnelle. Nous obtenons en outre une forme faible de l'équation de Reynolds et donnons une lois de Bingham de dimension (2d) qui est un modèle connu chez les ingénieurs.

Voir d'autres cas de problèmes non-stationnaires que nous avons récemment publiés dans [3] and [16].

De plus que ce travail est consacré à prouver nos résultats, avec des conditions convenables sur les données initiales, contrairement à ce qui était supposé dans [12, p. 289-290] et [3] où les conditions initiales pour les données étaient nulles. La principale difficulté ici est d'estimer les solutions du problème, à cause du terme fractionnaire d'une loi de comportement de Bingham. Cette difficulté nous amène à prouver un résultat nécessaire d'une convergence, en utilisant la méthode de régularisation de fonctionnelle convexe dérivés de [8, 12, 20].

Le plan de ce mémoire est le suivant;

Le premier chapitre, est consacré tout d'abord au rappel des notions principales de la théorie des milieux continus et d'analyse fonctionnelle nécessaires et des résultats utilisés tout au long de ce travail. Ensuite, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélisent l'ecoulement dynamique d'un fluide de Bingham, ainsi les équations et hypothèses de base sont données.

Dans le deuxième chapitre, nous prouvons le résultat d'existence et d'unicité d'une la formulation faible du système dynamique des équations de l'écoulement du fluide de Bingham dans un domaine borné Ω^ε à trois dimensions avec conditions aux limites non linéaire de Fourier sur la frontière supérieure, la condition non linéaire de Tresca sur la frontière inférieure et Dirichlet sur l'autre partie.

Dans le troisième chapitre, Nous étudions l'analyse asymptotique du problème présenter au deuxième chapitre. La méthode consiste à changer d'échelle, pour ramener l'étude sur un domaine Ω indépendant de ε. Nous établissons des estimations et des théorèmes des convergences en utilisant les inégalités de Korn et de Poincaré (développées récemment dans Refs [26, 27]). Le problème limite et ses propriétés sont donnés, l'unicité d solution limite et l'équation constitutive bidimensionnelle (2d) du fluide de Bingham sont prouvée, finalement l'équation spécifique de Reynolds est aussi prouvée.

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d\,(d=2,3)$, on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontière de Ω
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v défini sur $\overline{\Omega}$.
$C^1\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω.
$C_0^\infty(\Omega)=D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$	l'espace de distributions sur Ω.
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables de puissance p-ième integrable sur Ω.
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables sur Ω telles que $\exists$ c>0: $\lvert u(x)\rvert \leq c,\ p.p$ sur Ω.
$H^1(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω.
$H_0^1(\Omega)$	l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
$H^{-1}(\Omega)$	l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.
$H^1_{\Gamma_i}(\Omega)$	l'espace $\{\varphi\in H^1(\Omega):\varphi=0 \quad \text{sur } \Gamma_i\}$.
$\gamma\ : H^1(\Omega)^d\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.
$L^2(\Omega)^d$	l'espace $\left\{u=(u_i)\,/\,u_i\in L^2(\Omega),\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$H^1(\Omega)^d$	l'espace $\left\{u=(u_i)\,/\,u_i\in H^1(\Omega),\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$\lVert\cdot\rVert_{0,\Omega}$	la norme de $L^2(\Omega)^d$.
$\lVert\cdot\rVert_{1,\Omega}$	la norme de $H^1(\Omega)^d$.

Pour une application f on note par

dom f	le domaine de f.
supp f	le support de f.
∇f	le gradient de f.
$D(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$.
$div\ f$ ou $Div\ f$	la divergence de f.
$\dot{f}$	la dérivation par rapport au temps.
$\frac{\partial f}{\partial \nu}$	la dérivée normale extérieure.
$\liminf$	la limite inférieure.
δ_{ij}	le symbole de Krönecker.
I_3	le tenseur identité du seconde ordre sur $\mathbb{R}^d$.
0	le zéro de $\mathbb{R}^d$.
$p.p$	presque partout.

Si X est un espace de Banach et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

$\lVert . \rVert_X$	la norme de X.
$\mathbb{S}_d$	l'espace $\left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{d\times d} / \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ i,j = \overline{1,d}\right\}$
X^d	l'espace $\left\{x = (x_i) \,/\ x_i \in X,\ i = \overline{1,d}\right\}$.
$x_n \to x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$\lvert . \rvert$	la valeur absolue ou la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
(u,v), $u.v$	le produit scalaire des vecteurs u et v.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Résumé. *Le but est d'introduire les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités.*

Dans la première section, nous commençons par un rappel des résultats essentiels de la théorie du milieux continus et d'établir le cadre physique et mathématique décrivant des problèmes de contact en mécanique des fluides utilisés dans ce mémoire en suivant [12], [25], [26] et [27].

La deuxième et la troisiéme section sont consacrées aux espaces fonctionnels, quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle et quelques outiles mathématiques qui interviennent dans l'étude du problème de ce mémoire. De nombreux ouvrages parcourent ce sujet, voir par exemple J.L. Lions et E. Magenes [24] et G. Duvant [20] .

1.1 Rappels de la mécanique des milieux continus

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$.

1.1.1 L'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Soit $u(x,t)$ le champ des vitesses de compsantes u_i $(i = 1,2,3)$ à l'instant $t \in [0,T]$ des points $x \in \Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère Ox, le tenseur $\sigma(x,t)$ de compsantes σ_{ij} $(i,\ j = 1,2,3)$, est le tenseur des contraintes. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus, conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u \right) = Div\ \sigma + f\ , \tag{1.1}$$

où le vecteur f, de composantes f_i $(i = 1,2,3)$, représente une densité massique des forces extérieures, ρ est la densité de masse et Div désigne l'opérateur divergence, défini par

$$Div\ \sigma = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_{i=1,2,3} .$$

D'un point de vue mathématique, nous disposons de trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Donc les lois de conservation de la quantité de mouvement est insuffisantes pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on appelle des lois de comportement. Nous présentons ci-dessous la loi de comportement du fluide de Bingham coresspandant à notre probleme que nous allons étudier.

1.1.2 Loi de comportement du fluide de Bingham

On présente ici une description de la loi de comportement viscoplastique du fluide de Bingham traité dans cette thèse. Ce fluide est un milieu viscoplastique rigide, incompessible vérifiant les lois générales de la mécanique des milieux continus et ayant une loi de comportement non-linéaire particulière. Il existe de nombreux matériaux dans la nature et l'industrie présentant le comportement du milieu Bingham est la pate dentifrice, le cas de certaines huiles ou de certaines boues, utilisées dans la technique des forages pétrolières ainsi que dans certaines peintures. On l'utilise aussi pour décrire l'écoulement à haute température de certains corps solides. Celles-ci le matériau commence à s'écouler seulement si les forces appliquées dépassent une certaine limite, dite le seuil de plasticité . Les modèles mathématiques de ces milieux impliquent la loi constitutive des fluides visqueux incompressibles avec un composant tensoriant supplémentaire et rentre dans la catégorie des fluides non-Newtoniens.

L'hypothèse d'incompessibilité du volume, est donnée par la rélation

$$TrD\left(u\right) = 0 \tag{1.2}$$

où $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$d_{ij}\left(u\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \tag{1.3}$$

et que équivalent à la condition suivante

$$\operatorname{div}\left(u\right) = 0, \tag{1.4}$$

Pour décrire ce modèle. Notons par σ le tenseur des contraintes de Cauchy et son déviateur

$$\sigma^D = p\delta + \sigma,$$

tel que $-p = \frac{1}{n}Tr\left(\sigma\right)$ représente la partie sphérique du tenseur des contraintes correspond à la pression, où les compoantes σ_{ij}^D du tenseur des contraintes sont données par:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^D = \alpha \dfrac{D_{ij}}{\left(D_{II}\right)^{\frac{1}{2}}} + 2\mu D_{ij}, \text{ si } D_{II} \neq 0, \\ |\sigma^D| \leq \alpha, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } D_{II} = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

La notation D_{II} désigne la norme matricielle:

$$D_{II} = \frac{1}{2}D_{ij}.D_{ij}$$

Les scalaires positifs α et μ sont respectivement le seuil de plasticité et la viscosité du fluide de Bingham.

On peut aussi inverser l'équation constitutive (1.5). Si $|\sigma^D| \leq \alpha$, d'après (1.5) on a $D_{II} = 0$ et si $|\sigma^D| > \alpha$ on trouve facilement $D_{II} \neq 0$.

Par ailleurs, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} |\sigma^D| &= \alpha + 2\mu D_{II}, \\ D_{II} &= \frac{1}{2\mu}\left(|\sigma^D| - \alpha\right), \end{aligned}$$

donc, l'équation inverse de (1.5) s'écrit:

$$D = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\left(1 - \dfrac{\alpha}{|\sigma^D|}\right)\sigma^D & \text{si } \left|\sigma^D\right| > \alpha, \\ 0 & \text{si } |\sigma^D| \leq \alpha \end{cases} \tag{1.6}$$

Remarque 1.1. Dans la loi de comportement (1.5), le choix $\alpha = 0$ conduit à nous du fluide visqueux incompressible newtonien. Par conséquent, pour α assez petit, le fluide de Bingham peut être considéré comme un modèle comme modèle de contact des fluides visqueux Newtoniens. Si α est strictement positif, on observe des zones rigides au sein de l'écoulement. Lorsque α croit, ces zones rigides augmentent et peuvent bloquer complètement l'écoulement. Cette propriété s'appelle propriété de blocage. Le fluide de Bingham possède la particularité supplémentaire, mise en évidence par la loi de comportement (1.5), tant que le seuil α n'est pas atteint, le fluide se déforme comme un milieu rigide sans couler.

Les équations générales modélisant l'ecoulement d'un fluide de Bingham dans un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$, sont données par le système (1.1), (1.3) et (1.5). Les fonctions inconnues de ce problème sont le champ des vitesse u et la pression p.

1.1.3 La lois de frottement de type de Tresca.

Dans cette paragraphe supposons que le milieu occupe un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\Omega = \{(x',\, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < h(x')\}$$

de la frontière régulière sera notée $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L \cup \overline{\omega}$, avec Γ_1 est la frontière supérieure d'équation $x_3 = h(x')$, Γ_L est la frontière latérale, ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω.

Sur la surface du contacte ω, on décompose le champ de vitesse et le vecteur de contraintes en composantes normale et tangentielle comme suit

$$u_\nu = u.\nu, \qquad u_\tau = u - u_\nu.\nu, \qquad \sigma_\nu = (\sigma.\nu).\nu, \qquad \sigma_\tau = \sigma.\nu - (\sigma_\nu).\nu, \tag{1.7}$$

où ν représente la normale sortante de la frontière du domaine ω.
Sur ω, la force surfacique de réaction avec l'outil se décompose en σ_τ et σ_ν. Ici, le contact se fait de façon bilatérale si le contact est maintenu pendant le mouvement, il n'y a pas de séparation entre le milieu et l'obstacle. Ce qui se traduit par

$$u_\nu = 0$$

la vitesse est donc inconnue sur cette surface.
Quand $\sigma_\tau = 0$, il s'agit du cas sans frottement, cette façon de voir le contact implique que la force de contact tangentielle est nulle dans la zone de contact. On est dans le cas d'un glissement parfait.

La loi de frottement non linéaire de type de Tresca se caractérise par la propriété suivante: Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage. Lorsque ce seuil est atteint le milieu peut se déplacer tangentiellement par rapport à la fondation et il ya alors un glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à le champ u. On a

$$\begin{cases} \text{Si } \ |\sigma_\tau| < k \ \text{ alors } u_\tau \ = s, \\ \text{Si } \ |\sigma_\tau| = k \ \text{ alors } \sigma_\tau = s - \lambda\, u_\tau \ \text{ avec } \lambda \geq 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

où s la vitesse de cisaillement et k désigne le seuil de frottement fixe qui est supposé connu et qui ne dépend pas de la contrainte normale.

Nous avons le resultat suivant

Remarque 1.2 [26, 27] *La condition* (1.8) *est équivalente à la relation suivante:*

$$(u_\tau - s)\,\sigma_\tau + k|u_\tau - s| = 0 \quad \text{sur} \quad \omega.$$

Remarque 1.3. Si $k = 0$, on obtient $\sigma_\tau = 0$ sur $\omega \times]0, T[$. Il s'agit du cas sans frottement.

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Nous commençons par un rappel d'analyse fonctionnelle concernant l'espace des fonctionnelles et la convergence faible. Ensuite, nous présentons les espaces de Sobolev, les espaces à valeurs vectorielles de type $L^p(0,T;X)$, et les principales propriétés notamment les théorèmes de trace.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On désigne par $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. L'espace des distributions $D^{'}(\Omega)$ est le dual de $D(\Omega)$. On note $\langle T, \phi \rangle$ le produit de dualité entre une distribution $T \in D^{'}(\Omega)$ et une fonction $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. En effet, on vérifie que si f est une fonction localement intégrable dans Ω, alors

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \; dx.$$

L'inégalité de Hölder

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ avec la convention $\dfrac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$.

Il résulte de l'inégalité de Hölder que si (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$, et (v_n) une suite telle que $v_n \to v$ dans $L^q(\Omega)$. on obtient que la suite $(u_n v_n) \subset L^1(\Omega)$ converge vers uv dans $L^1(\Omega)$, ce qui implique $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v_n \; dx = \int_\Omega uv \; dx$.

Théorème 1.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telle que $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors, il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ et $v \in L^1(\Omega)$ telle que*

$$u_n \to v \;\; p.p \; dans \; \Omega \qquad et \;\; |u_{n_k}| \leq v \quad p.p \; dans \; \Omega.$$

Convergence faible dans les espaces de Hilbert.

Soit H un espace de Hilbert. Une suite $(f_n) \subset H$ converge faiblement dans H vers un élément $f \in H$, et on note $f_n \rightharpoonup f$, si pour tout $v \in H$, le produit scalaire $\langle f_n, v \rangle_H$ convergent vers $\langle f, v \rangle_H$ dans $\mathbb{R}$. f s'appelle limite faible de la suite (f_n) .

Théorème 1.2 (d'Aloaglu). *Soit H un espace de Hilbert, et soit (f_n) une suite bornée dans H . Alors il existe une sous-suite extraire (f_{n_k}) qui converge faiblement dans H.*

Théorème 1.3 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet). *Soit H un espace de Hilbert réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire de H. Pour toute $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$*

unique tel que

$$\langle \varphi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H \quad et \quad \|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H .$$

Proposition 1.1. **S***oit E un espace de Hilbert, et une suite $(u_n) \subset E$. Alors*

(1) $u_n \to u$ *implique* $u_n \rightharpoonup u$.

(2) *Si* $u_n \to u$, *alors* (u_n) *est bornée et* $\liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \|u\|$.

(3) *Si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* E *et* $f_n \to f$ *dans* E, *alors il suit que* $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$.

(4) *Si* $u_n \to u$ *dans* E *et* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* E, *alors il suit que* $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$.

Voici un théorème de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert.

Théorème 1.4. *Si H est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée dans H admet une sous-suite faiblement convergente.*

Définition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1,\ ..., d\}\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ *est la dérivée partielle de v au sens faible comme suit*

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \rangle = -\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle,\ \forall \phi \in D(\Omega).$$

.

Proposition 1.2. *L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u(x)v(x) \ + \nabla u(x).\nabla v(x))\ dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 \ + |\nabla u(x)|^2)\ dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Soboleve $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Voici l'inégalité très utile portant sur les normes de Sobolev.

Théoreme de trace et la formule de Green

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, appelé opérateur trace, tel que

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega) \ \textit{est compact.}$$

On définit l'espace vectoriel $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *comme suit :*

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{\gamma(u);\quad u \in H^1(\Omega)\right\}$$

munit de sa norme

$$\|f\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} = \inf\left\{\|u\|_{1,\Omega};\quad \gamma(u) = f\right\}.$$

Proposition 1.3. *Si* $u \in H^1(\Omega)$, *alors* $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *est linéaire surjectif et*

$$\|\gamma(u)\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \leq C\,\|u\|_{1,\Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Le théorème de trace permet de généraliser aux fonctions de $H^1(\Omega)$ la formule de Green établie pour des fonctions de classe C^1.

Théorème 1.5 . *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de classe* C^1. *Si* u *et* v *sont des fonctions de* $H^1(\Omega)$, *on a la formule de Green*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x)dx,$$

où $\nu = (\nu_i)_{1\leq i\leq d}$ *est la normale unité extérieure à* $\partial\Omega$.

Formule de Green pour la mécanique

On munit l'espace produit $H^1(\Omega)^d$ du produit scalaire canonique et de la norme associée respectivement $(.,.)_{1,\Omega}$ et $\|.\|_{1,\Omega}$ qui définis par :

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega u_i v_i\ dx + \int_\Omega u_{i,j}v_{i,j}\ dx,$$

$$\|v\|^2_{1,\Omega} = \int_\Omega |v|^2\ dx + \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx.$$

et la norme de $H^1(\Omega)^d$ sera notée $\|.\|_{0,\Omega}$.

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega)^d \to L^2(\Gamma)^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de $H^1(\Omega)^d$ pare cette application notée par H_Γ, c'est un sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Pour σ assez régulier nous avons la formule de Green :

$$\int_\Omega \sigma : d(u)\,dx + \int_\Omega Div(\sigma).u\ dx = \int_\Gamma \sigma\nu.v\ d\Gamma \qquad \forall v \in H^1(\Omega)^d.$$

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Inégalité de Korn

Théorème 1.6. *Soit Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)^d$, on a :*

$$\int_\Omega v_i v_i \, dx + \int_\Omega d_{ij}(v) \, d_{ij}(v) \, dx \geq C \|v\|^2_{1,\Omega} . \tag{1.9}$$

Remarque 1.4. *Pour tout Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on a*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv \left(L^2(\Omega)\right)' \subset H^{-1}(\Omega).$$

Les espaces à valeurs vectorielles

Soit $T > 0$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel.

Définition 1.2. On définit les espaces suivants :

$$C(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \ \text{ continue}\},$$

$$L^p(0,T;X) = \left\{u : [0,T] \to X \text{ mesurable} \; ; \; \int_0^T \|u(t)\|_X \, dt \prec \infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \ dt\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

et

$$L^\infty(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \text{ mesurable} \; ; \; \exists C > 0 \ \|u(t)\|_X \leq C \ \ p.p.t\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{C > 0 \; ; \; \|u(t)\|_X \leq C \ \text{ p.p. } t\}.$$

On désigne par $H^1(0,T;X)$ l'espace de Sobolev sur $]0,T[$ à valeurs dans X, défini par

$$H^1(0,T;X) = \left\{u; \quad u \in \ L^2(0,T; \ X) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in \ L^2(0,T; \ X)\right\},$$

tel que la dérivée $\dfrac{\partial .}{\partial t}$ défini par

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t) \, \phi(t) \ dt = -\int_0^T u(t) \, \frac{\partial}{\partial t}\phi(t) \ dt , \quad \forall \phi \in C_0^\infty(]0,T[).$$

$C_0^\infty(]0,T[)$ étant l'espace des fontions réelles indéfniment dérivables, à support compact dans $]0,T[$.

Proposition 1.4.

(1) *Si* X *est un espace de Hilbert avec le produit scalaire* $(.,.)_X$ *alors* $L^p(0,T;\,X)$ *est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \ dt.$$

(2) $L^r(0,T;\,X) \subset L^q(0,T;\,X)$, *avec injection continue,* $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(3) *Si* X *un espace de Hilbert, alors*

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X), \text{si } 1 < p,q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0,T;X)' = L^\infty(0,T;X),$$

où $L^p(0,T;\,X)'$ *représente le dual de l'espace* $L^p(0,T;\,X)$, $1 \leq p < \infty$.

Proposition 1.5. *Soit* X *un espace de Hilbert et soit* $u \in H^1(0,T;X)$. *Alors, pour tout* $t \in \,]0,T[$

(1) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_X^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), u(t)\right)_X$,

(2) $\frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2}\|u(0)\|_X^2 + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s), u(s)\right)_X ds$.

1.3 Outiles mathématiques complementaire

On y présente ici quelques lemmes de type Gronwall et quelques résultats fondamentaux sur les fonctions convexes et différentiabilité.

Lemmes de type Gronwall

Les lemmes du type Gronwall, sont plus utiles notamment dans la démonstration d'unicité des solutions faibles, voir [24] , [27] .

Lemme 1.1. *Soit* $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ *telle que,* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in \,]0,T[$ *, et soit* $a \geq 0$ *. Si* $\phi \in C(0,T;\mathbb{R})$ *est une fonction telle que*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\,\phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)\,ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

Lemme 1.2. *Soient m et $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)\,dt + \int_0^s n(t)\phi^2(t)\,dt \quad \forall s \in [0,T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)\,dt\right)\exp\left(\int_0^s n(t)\,dt\right) \quad \forall s \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$ le lemme1.2 devient :

Corollaire 1.1. *Soit $m \in C([0,T];\mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)\,dt \quad \forall s \in [0,T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)\,dt\right) \quad \forall s \in [0,T].$$

Fonctions convexes et différentiabilité

Soient $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction et X un espace vectoriel réel. On note par dom (ϕ) l'ensemble défini par:

$$\text{dom } (\phi) = \{u \in X \ : \ \phi(u) < +\infty\}.$$

ϕ est dite propre si dom $(\phi) \neq \varnothing$. ϕ est dite convexe si

$$\phi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda\phi(u) + (1-\lambda)\phi(v) \quad \forall u,\ v \in \text{dom } (\phi),\ \forall \lambda \in [0,1],$$

ϕ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u,\ v \in$dom (ϕ) et tels que $u = v$.

Soit X un espace topologique, une fonction $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement si l'ensemble $\{u \in X \ : \ \phi(u) < \alpha\}$ est fermé pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si une fonction ϕ est s.c.i en u et si u_n est une suite qui converge vers u on a $\liminf_{n\to\infty} \phi(u_n) \geq \phi(u)$.

Réciproqueement, si pour toute suite $u_n \to u$ on a $\liminf_{n\to\infty} \phi(u_n) \geq \phi(u)$. La norme d'un espace normé est semi-continue inférieurement pour la topologie faible. Alors, pour tout $u \in X$ et tout suite $u_n \rightharpoonup u$ on a donc $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \|u\|$.

Théorème 1.5. Soit X un espace de Hilbert et soit $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et propre. Alors ϕ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de X.

Proposition 1.6. Soit X un espace topologique et soient $\phi,\ \psi : X \to]-\infty, +\infty]$ deux fonctions semi-continues inférieurement en $u \in X$. Alors $\phi + \psi$ est semi-continue inférieurement en u.

Définition 1.3. Une fonction $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est dite Gâteaux-différentiable en un point $u \in X$ s'il existe un élément $\phi'(u) \in X$ tel que

$$\langle \phi' (u) , v \rangle_X = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} \left(\phi \left(u + \lambda v \right) - \phi \left(u \right) \right),$$

pour tous $v \in X$. L'élément $\phi' (u)$ est appelé la différentielle au sens de Gâteaux de ϕ au point u. La fonction ϕ est dite Gâteaux-différentiable si elle Gâteaux-différentiable en tout point de X, dans ce cas l'opérateur $\phi : u \in X \to \phi' (u) \in X$ s'appelle le gradient de la fonction ϕ.

Proposition 1.7. [8] Soit X un espace de Hilbert et soit $\phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Les propriétés suivantes sont équivalantes

(i) ϕ est convexe,

(ii) $\phi (v) , -\phi (u) \geq \langle \phi' (u) , v - u \rangle_X \ , \quad \forall u,\ v \in X,$

(iii) $\langle \phi' (v) - \phi' (u) , v - u \rangle_X \geq 0 \ , \quad \forall u,\ v \in X.$

Chapitre 2

Position du problème et Formulation variationnelle

Nous donnons le cadre mathématique pour prouver le résultat d'existence et d'unicité d'une la formulation faible modélisant l'écoulement dynamique du fluide incompressible dans un domaine borné Ω^ε à trois dimensions avec des conditions de Tresca et la condition de Fourier.

Contenu

2.1 Introduction et position du problème

Considérons un milieu visco-plastique de type Bingham qui occupe un domaine mince représentée par l'ouvert $\Omega^\varepsilon = \omega \times]0, \varepsilon h(x')[$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$, où $0 < \varepsilon < 1$ est un petit paramètre et ω est un domaine Lipschitzienne borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε. On suppose que h est une fonction de classe C^2 définie sur ω telle que

$$0 < \underline{h} \leq h(x') \leq \overline{h} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

La frontière de Ω^ε est notée $\Gamma^\varepsilon = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_L^\varepsilon$, avec Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x')$ et Γ_L^ε est la frontière latérale.

$$\Omega^\varepsilon = \left\{ (x', \, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \, (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x') \right\}.$$

Soit $u^\varepsilon(x, t)$ le champ des vitesses à l'instant $t \in [0, T]$ des points $x = (x', \, x_3) \in \Omega^\varepsilon$ et D le tenseur taux de déformation défini par $D(u^\varepsilon) = \dfrac{1}{2}(\nabla u^\varepsilon + (\nabla u^\varepsilon)^T)$

On note par $\sigma^\varepsilon(x, t)$ le tenseur des contraintes de Cauchy et son déviateur $\sigma^{D,\varepsilon} = p^\varepsilon I + \sigma^\varepsilon$, tel que p^ε est la pression, où le tenseur $\sigma^{D,\varepsilon}$ vérifie la loi de comportement du fluide de Bingham [26] :

$$\begin{cases} \sigma^{D,\varepsilon} = \alpha^\varepsilon \dfrac{D(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|} + 2\mu D(u^\varepsilon), \text{ si } D(u^\varepsilon) \neq 0; \\ |\sigma^{D,\varepsilon}| \leq \alpha^\varepsilon, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } D(u^\varepsilon) = 0, \end{cases} \quad \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon \times [0, T]$$

où $\alpha^\varepsilon \geq 0$ le seuil de plasticité et $\mu > 0$ la viscosité qui sont supposées connues. La notation $|.|$ désigne la norme matricielle:

$$|\tau| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tau_{ij} . \tau_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \tau \in \mathbb{S}_3.$$

Les équations qui gouvernent l'écoulement dynamique du fluide incompressible dans le domaine Ω^ε sont les suivantes :

• l'équation de la conservation de la quantité de mouvement mais en négligeant la force d'inertie convective,

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma^\varepsilon) = f^\varepsilon \quad \text{in } \Omega^\varepsilon \times [0, T], \tag{2.1}$$

où le vecteur f^{ε} de composantes f_i^{ε} $(i = 1, 2, 3)$, représente des forces extérieures.

• l'équation d'incmpressibilité

$$\operatorname{div}(u^{\varepsilon}) = 0, \qquad \text{in } \Omega^{\varepsilon} \times [0, T] . \tag{2.2}$$

Soit ν le vecteur unitaire normal à Γ^{ε} extérieur à Ω^{ε}. On utilise les notations usuelles

$$u_{\nu}^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}.\nu, \quad u_{\tau}^{\varepsilon} = u^{\varepsilon} - u_{\nu}^{\varepsilon}.\nu, \quad \sigma_{\nu}^{\varepsilon} = (\sigma^{\varepsilon}.\nu).\nu \text{ et } \sigma_{\tau}^{\varepsilon} = \sigma^{\varepsilon}.\nu - (\sigma_{\nu}^{\varepsilon}).\nu$$

respectivement, la vitesse normale, la vitesse tangentielle, la composante normale et tangentielle du tenseur.

• Sur la frontière de Ω^{ε}. On suppose qu'il n'y pas de flux sortant à travers $\omega \cup \Gamma_1^{\varepsilon}$ pendant l'intervalle de temps $[0, T]$. Aussi on impose sur ω, des conditions de contact avec frottement liquide-solide s'est modélisé par la loi non linéaire de Tresca;

$$\begin{cases} u^{\varepsilon} \cdot \nu = 0, & \\ |\sigma_{\tau}^{\varepsilon}| < k^{\varepsilon} \Rightarrow u_{\tau}^{\varepsilon}(t) = 0 \ , & \text{sur } \omega \times [0, T] , \\ |\sigma_{\tau}^{\varepsilon}| = k^{\varepsilon} \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \ u_{\tau}^{\varepsilon}(t) = -\lambda \sigma_{\tau}^{\varepsilon}, & \end{cases} \tag{2.3}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, k^{ε} est une fonction donnée.

• Sur le bord supérieur Γ_1^{ε} , nous supposons le condition non linéaire de Fourier;

$$\begin{cases} u^{\varepsilon} \cdot \nu = 0, \\ \sigma_{\tau}(u^{\varepsilon}) = -l^{\varepsilon} u^{\varepsilon}, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_1^{\varepsilon} \times]0, T[\tag{2.4}$$

où $l^{\varepsilon} \succ 0$ est une constante donnée.

• Enfin sur Γ_L^{ε}, la vitesse est connue et donnée par une fonction de g dépendant du temps;

$$u^{\varepsilon}(s, t) = g(s, t) \, , \text{ on } \Gamma_L^{\varepsilon} \times [0, T] . \tag{2.5}$$

Pour la compatibilité les conditions aux limites sur la frontière de Ω^{ε}avec l'incompressibilité, on suppose que $g \in L^{\infty}\left(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^{\varepsilon})^3\right)$ et la fonction vectorielle g doit vérifier

$$\int_{\Gamma^{\varepsilon}} g(s, t).\nu(s) \ ds = 0 \quad \forall t \in [0, T] .$$

Donc, on peut montrer [25] que cette condition est équivalente à l'existence d'un relèvement $G^\varepsilon \in L^\infty\left(0, T, H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$ de g sur Ω^ε vérifiant

$$\operatorname{div} G^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad G^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \quad G^\varepsilon.\nu = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1^\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.6}$$

Le problème consiste donc est de trouver le champ de vitesse u^ε satisfaisant les équations (2.1)-(2.6) avec la condition initiale suivante

$$u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x) \ \ \forall x \in \Omega^\varepsilon. \tag{2.7}$$

Nous allons considérer que $u_0^\varepsilon \neq 0$ et on introduit une constante strictement positive η^ε telle que

$$\left|D\left(u_0^\varepsilon\right)\right| \geq \eta^\varepsilon \ \text{ p.p. dans } \Omega^\varepsilon. \tag{2.8}$$

2.2 Formulation variationnelle du problème

Pour obtenir la formulation faible, nous introduisons:

$$\begin{aligned}
K^\varepsilon &= \left\{\phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : \phi = G^\varepsilon \text{ on } \Gamma_L^\varepsilon,\ \phi.\nu = 0 \text{ on } \omega \cup\ \Gamma_1^\varepsilon\right\}, \\
K_{\text{div}}^\varepsilon &= \left\{\phi \in K^\varepsilon : \operatorname{div}(\phi) = 0\right\}, \\
L_0^2(\Omega^\varepsilon) &= \left\{q \in L^2(\Omega^\varepsilon) : \int_{\Omega^\varepsilon} q \ dx = 0\right\},
\end{aligned}$$

où G^ε est la fonction définie dans (2.6).

Pour simplifier l'écriture du problème faible on note :

$$\begin{aligned}
a(u^\varepsilon, \phi) &= 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) d_{ij}\left(\phi\right) dx, \\
\breve{a}(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) &= a(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon.\left(\phi - u^\varepsilon\right) d\tau, \\
(p^\varepsilon, \operatorname{div} \phi) &= \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \phi dx, \\
(f, \varphi) &= \int_{\Omega^\varepsilon} f_i \phi_i dx.
\end{aligned}$$

Pour $\phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, on définit la fonctionnelle F^ε par

$$\left\{\begin{array}{c}
F^\varepsilon(\phi) = J^\varepsilon(\phi) + P^\varepsilon(\phi), \\
J^\varepsilon(\phi) = \int_\omega k^\varepsilon \left|\phi\right| \ dx' \ \text{ et} \\
P^\varepsilon(\phi) = \sqrt{2}\alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \left|D\left(\phi\right)\right| dx.
\end{array}\right. \tag{2.9}$$

Remarque 2.1 La forme bilinéaire $\breve{a}(.,.) : K^{\varepsilon}_{\text{div}} \times K^{\varepsilon}_{\text{div}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est :

(i) Continue. Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe une constante $C(\Omega^{\varepsilon}) > 0$

$$|\breve{a}(\varphi, \psi)| \leq (2\mu + l^{\varepsilon} C(\Omega^{\varepsilon})) \|\varphi\|_{1,\Omega^{\varepsilon}} \|\psi\|_{1,\Omega^{\varepsilon}}, \forall (\varphi, \psi) \in K^{\varepsilon}_{\text{div}} \times K^{\varepsilon}_{\text{div}}.$$

(ii) Coercitive. En effet, d'après l'inégalité de Korn, il existe [15] une constante $C_K > 0$ telle que

$$\breve{a}(\psi, \psi) = a(\psi, \psi) + l^{\varepsilon} \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} \psi^2 d\tau \geq 2\mu C_K \|\psi\|^2_{1,\Omega^{\varepsilon}}, \forall \psi \in K^{\varepsilon}_{\text{div}}.$$

La fonction F^{ε} est convexe, semi-continue inférieure et propre sur $K^{\varepsilon}_{\text{div}}$. Par [11] il existe une constante positive $C_0(\Omega^{\varepsilon}) > 0$ telle que

$$\begin{gathered} |F^{\varepsilon}(\phi) - F^{\varepsilon}(\psi)| \leq \left(|\omega|^{1/2} \|k^{\varepsilon}\|_{\infty,\omega} C_0(\Omega^{\varepsilon}) + \sqrt{2}\alpha^{\varepsilon} |\Omega^{\varepsilon}|^{1/2} \right) \|\varphi - \psi\|_{1,\Omega^{\varepsilon}}, \\ \forall (\varphi, \psi) \in K^{\varepsilon}_{\text{div}} \times K^{\varepsilon}_{\text{div}}. \end{gathered}$$

Il est plus pratique de chercher des solutions plus faibles, pour cela on va chercher $u^{\varepsilon}(t)$ solution du problème (2.1) − (2.7) dans l'espace K^{ε}. On a donc besoin de la dérivée $\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}$ dans cet espace.

Lemme 2.1. *Si $u^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}(x,t)$ est une solution (régulière) du problème (2.1)-(2.7), alors elle vérifie le problème variationnel suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{c} Pv^{\varepsilon}\text{: } \textit{Trouver } \{u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}\} \textit{ où } u^{\varepsilon}(t) \in K^{\varepsilon}_{\text{div}}, \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t) \in K^{\varepsilon} \text{ et } p^{\varepsilon}(t) \in L^2_0(\Omega^{\varepsilon}), \textit{ telle que} \\ \left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t), \phi - u^{\varepsilon}(t) \right) + \breve{a}(u^{\varepsilon}(t), \phi - u^{\varepsilon}(t)) + F^{\varepsilon}(\phi) \\ -F^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t)) \geq (f^{\varepsilon}, \phi - u^{\varepsilon}(t)), \ \forall t \in [0,T], \ \forall \phi \in K^{\varepsilon}_{\text{div}} \\ \textit{avec} \qquad u^{\varepsilon}(0) = u^{\varepsilon}_0 \end{array} \right.$$

où

$$\breve{a}(u^{\varepsilon}(t), \phi - u^{\varepsilon}(t)) = a(u^{\varepsilon}(t), \phi - u^{\varepsilon}(t)) + l^{\varepsilon} \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} u^{\varepsilon}.(\phi - u^{\varepsilon}(t))\, d\tau.$$

Preuve. On multiplie l'équation (2.1) par $\phi - u^{\varepsilon}(t)$, où $\phi \in K^{\varepsilon}_{\text{div}}$, en utilisant la formule de Green on obtient pour $t \in [0,T]$

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t), \phi - u^{\varepsilon}(t) \right) + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi_i - u^{\varepsilon}_i(t))\, dx - \\ - \int_{\Gamma^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{ij} \nu_j (\phi_i - u^{\varepsilon}_i(t))\, ds = \int_{\Omega^{\varepsilon}} f^{\varepsilon}_i (\phi_i - u^{\varepsilon}_i(t))\, dx, \forall \phi \in K^{\varepsilon}_{\text{div}}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

on a

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi_i - u_i^\varepsilon(t))\, dx = a(u^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)) + \alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} D_{II}(u^\varepsilon)^{-1/2} d_{ij}(u^\varepsilon) d_{ij}(\phi - u^\varepsilon) dx \tag{2.11}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-schwartz

$$d_{ij}(u^\varepsilon)\, d_{ij}(\phi) \leq |D(u^\varepsilon)|\, |D(\phi)|,$$

l'égalité (2.11) devient comme suit

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi_i - u_i^\varepsilon(t))\, dx \geq a(u^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)) + \sqrt{2}\alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} (|D(\phi)| - |D(u^\varepsilon)|)\, dx. \tag{2.12}$$

En utilisant maintenant les conditions aux limites dans chaque partie du bord. Donc l'intégration sur ω avec la condition de tresca donne

$$\int_\omega k^\varepsilon (|\varphi| - |u^\varepsilon|)\, dx' \geq -\int_\omega \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)\nu_j (\phi_i - u_i^\varepsilon(t))\, dx'. \tag{2.13}$$

Sur Γ_1^ε, on a $\phi_\nu - u_\nu^\varepsilon(t) = 0$ et $\sigma_\tau(u^\varepsilon) = -l^\varepsilon u^\varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_1^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)\nu_j (\phi_i - u_i^\varepsilon(t))\, d\tau &= -\int_{\Gamma_1^\varepsilon} [\sigma_\tau^\varepsilon(u^\varepsilon) + (\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon).\nu).\nu.\nu_i] (\phi_i - u_i^\varepsilon(t))\, d\tau \\ &= l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon.(\phi - u^\varepsilon(t))\, d\tau, \end{aligned} \tag{2.14}$$

et sur Γ_L^ε, on trouve

$$-\int_{\Gamma_L^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)\nu_j (\phi_i - u_i^\varepsilon(t))\, dx' = 0. \tag{2.15}$$

De $(2.10) - (2.15)$, on obtient l'inéquation variationnelle suivante

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi - u^\varepsilon(t)\right) + \breve{a}(u^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)) + \\ F^\varepsilon(\phi) - F^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon(t)), \quad \forall \phi \in K_{\text{div}}^\varepsilon \\ avec \qquad u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon . \end{gathered} \tag{2.16}$$

Où la fonctionnelle F^ε est déja définie dans (2.9).

2.3 Théorème d'existence et d'unicité du problème

On établit ici un théorème d'existence de solutions faibles pour le problème (Pv^{ε}).

Théorème 2.1. *On fait les hypothèses suivantes :*

$$f^{\varepsilon},\ \frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial t} \in L^{2}\left(0,T;L^{2}\left(\Omega^{\varepsilon}\right)^{3}\right), \tag{2.17}$$

$$k^{\varepsilon} \in C_{0}^{\infty}(\omega),\ k^{\varepsilon} > 0 \text{ ne depend pas de } t, \tag{2.18}$$

$$u_{0}^{\varepsilon} \in H^{2}(\Omega^{\varepsilon})^{3} \cap H_{0}^{1}(\Omega^{\varepsilon})^{3},\ \left(\sigma_{0}\right)_{\tau} = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_{1}^{\varepsilon}, \tag{2.19}$$

$$\exists \eta^{\varepsilon} \succ 0 \quad \left|D\left(u_{0}^{\varepsilon}\right)\right| \geq \eta^{\varepsilon} \ \text{ p.p. dans } \Omega^{\varepsilon} \tag{2.20}$$

Dans ces conditions, il existe une fonction u^{ε} unique solution de (2.16) *avec*

$$u^{\varepsilon},\ \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t} \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}\left(\Omega^{\varepsilon}\right)^{3}\right) \cap L^{2}\left(0,T;H^{1}\left(\Omega^{\varepsilon}\right)^{3}\right). \tag{2.21}$$

Afin de prouver l'existence de la solution de notre problème, nous allons suivre la méthode de régularisation ceci en transformant l'inéquation variationnelle à une équation variationnelle parabolique non linéaire.

2.3.1 Régularisation du problème

Par [12] on régularise la fonctionnelle $\digamma^{\varepsilon} = J^{\varepsilon} + P^{\varepsilon}$, par une famille de fonctionnelles $\digamma_{\zeta}^{\varepsilon} = J_{\zeta}^{\varepsilon} + P_{\zeta}^{\varepsilon}$ $(\zeta > 0)$, telle que J_{ζ}^{ε} et P_{ζ}^{ε} sont deux fonctionnelles différentiables :

$$\begin{aligned} J_{\zeta}^{\varepsilon}(v) &= \int_{\omega} k^{\varepsilon}(x,t)\varphi_{\zeta}\left(|v_{\tau}|\right)dx', \quad \text{et} \\ P_{\zeta}^{\varepsilon}(v) &= \sqrt{2}\alpha^{\varepsilon}\int_{\Omega^{\varepsilon}} \varphi_{\zeta}\left(|D(v)|\right)dx \end{aligned}$$

où $\varphi_{\zeta}\left(\lambda\right) = \dfrac{1}{1+\zeta}\left|\lambda\right|^{(1+\zeta)}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\digamma_{\zeta}^{\varepsilon}\right)'(v), \phi \right\rangle &= \frac{d}{d\lambda}\digamma_{\zeta}^{\varepsilon}(v+\lambda\phi)\Big|_{\lambda=0} \\ &= \left\langle \left(J_{\zeta}^{\varepsilon}\right)'(v), \phi \right\rangle + \left\langle \left(P_{\zeta}^{\varepsilon}\right)'(v), \phi \right\rangle \end{aligned}$$

telle que

$$\left\langle \left(J_{\zeta}^{\varepsilon}\right)'(v), \phi \right\rangle = \int_{\omega} k^{\varepsilon}\psi_{\zeta}(v_{\tau}).\phi_{\tau}dx',$$

et

$$\left\langle \left(P_{\zeta}^{\varepsilon}\right)' (v) \, , \phi \right\rangle = \sqrt{2}\alpha^{\varepsilon} \int_{\Omega^{\varepsilon}} \Psi_{\zeta}(D\,(v)).D\,(\phi)\, dx \tag{2.22}$$

où $\psi_{\zeta}(v_{\tau}) = |v_{\tau}|^{\zeta-1} v_{\tau}$ et $\Psi_{\zeta}(D\,(v)) = |D\,(v)|^{\zeta-1} D\,(v)$.

En effet, on remplace dans (2.16) la fonction ϕ par $u_{\zeta}^{\varepsilon}(t) \pm \lambda\phi$, où $\lambda \succ 0$ et faisant tendre λ vers 0, on trouve alors l'équation approchée suivante

$$\left(\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}\,(t) \, , \phi \right) + \breve{a}\left(u_{\zeta}^{\varepsilon}\,(t) \, , \phi\right) + \left\langle \left(F_{\zeta}^{\varepsilon}\right)' \left(u_{\zeta}^{\varepsilon}\,(t)\right) , \phi \right\rangle = \left(f^{\varepsilon}\,(t) \, , \phi\right) \, \forall \phi \in K_{\text{div}}^{\varepsilon} \tag{2.23}$$

avec

$$u_{\zeta}^{\varepsilon}(0) = u_0^{\varepsilon}. \qquad (u_0^{\varepsilon} \neq 0) \tag{2.24}$$

Le problème a déjà été résolu dans le cas $\langle u_0^{\varepsilon} = 0 \rangle$ avec frottement, le cas $\langle u_0^{\varepsilon} \neq 0 \rangle$ a traité mais dans un domaine en dimension 2 avec la condition de Direchlet sur le bord, voir [12]. L'existence de u_{ζ}^{ε} a eté démontré par une passage à la limite sur la dimension dans l'approximation de Galarkin, comme dans n° 4 [12]. Dans le cas général, selon les conditions du théoreme 2.1 on va utiliser des arguments de compacité et de monotonie pour la résoudre. L'hypothèse $\langle u_0^{\varepsilon} \neq 0 \rangle$ nous conduit à faire des techniques supplémentaires dans la résolution de (2.16), bien qu'il y ait une difficulté technique que nous allons simplifier grâce aux deux lemmes utiles pour la suite.

Lemme 2.2. Soit $G : \mathbb{S}_3^{\star} \to \mathbb{S}_3$ définie par $G(\tau) = |\tau|^{\zeta-1} \tau$, telle que $0 \prec \zeta \preceq 1$. Soit $\sigma \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon}\right)^{3\times 3}$, supposons qu'il existe une constante strictement positive β telle que $|\sigma| \geq \beta$ p.p. dans $\overline{\Omega}^{\varepsilon}$, alors

$$Go\sigma \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon}\right)^{3\times 3} \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_k}\,(Go\sigma) = \left(\frac{\partial G}{\partial \tau_{ij}} o\sigma\right) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \quad \forall i,j,k \in \{1,2,3\}\,.$$

Preuve. On a $|G(\tau)| = |\tau|^{\zeta}$ $\forall \tau \in \mathbb{S}_3^{\star}$ et donc $|Go\sigma| = |\sigma|^{\zeta}$, comme $0 \prec \zeta \preceq 1$, il vient que $Go\sigma \in L^2\left(\Omega^{\varepsilon}\right)^{3\times 3}$, et de mème on a

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial G}{\partial \tau_{ij}} o\sigma\right) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right| &= \left| |\sigma|^{\zeta-1} \left((\zeta-1)\, \sigma_{ij}^2 \, |\sigma|^{-2} + 1 \right) \right| \left| \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right| \\ &\leq 2\, |\sigma|^{\zeta-1} \left| \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right|. \end{aligned}$$

Cela entraîne l'existence d'une constante $M(\zeta,\beta)$ vérifiant

$$\left| \left(\frac{\partial G}{\partial \tau_{ij}} o\sigma\right) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right| \leq M(\zeta,\beta) \left| \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right| \tag{2.25}$$

et donc $\left(\frac{\partial G}{\partial \tau_{ij}} o\sigma\right) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \in L^2 \left(\Omega^\varepsilon\right)^{3\times 3}$. On va maitenant vérifier que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} (Go\sigma) : \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} dx = \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{\partial G}{\partial \tau_{ij}} o\sigma\right) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} : \Psi dx \quad \forall \Psi \in \mathcal{C}_0^1 \left(\Omega^\varepsilon\right)^{3\times 3}. \tag{2.26}$$

On prend une suite σ_n dans $\mathcal{C}_0^\infty \left(\mathbb{R}^3\right)^{3\times 3}$ telle que $\sigma_n \to \sigma$ dans $L^2 \left(\Omega^\varepsilon\right)^{3\times 3}$ et p.p. sur Ω^ε, $\nabla \sigma_n \to \nabla \sigma$ dans $\left(L^2 \left(W^\varepsilon\right)^{3\times 3}\right)^3$ pour tout ouvert W^ε vérifie $\overline{W^\varepsilon} \subset \Omega^\varepsilon$ et $\overline{W^\varepsilon}$ est compact (théorème de Friedrichs IX.2 [8]). On a

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (Go\sigma_n) : \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{\partial G}{\partial \tau_{ij}} o\sigma_n\right) \frac{\partial \left(\sigma_n\right)_{ij}}{\partial x_k} : \Psi dx \quad \forall \Psi \in \mathcal{C}_0^1 \left(\Omega^\varepsilon\right)^{3\times 3}.$$

Or $Go\sigma_n \to Go\sigma$ dans $L^2 \left(\Omega^\varepsilon\right)^{3\times 3}$ et $\left(\frac{\partial G}{\partial \tau_{ij}} o\sigma_n\right) \frac{\partial \left(\sigma_n\right)_{ij}}{\partial x_k} \to \left(\frac{\partial G}{\partial \tau_{ij}} o\sigma\right) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}$ dans $L^2 \left(\Omega^\varepsilon\right)^{3\times 3}$ par convergence dominée de Lebsgue. On en déduit (3.10).

Lemme 2.3. Si u_0^ε vérifie les hypothèses des conditions intiales (2.19) et (2.20), et si $0 \prec \zeta \preceq 1$ alors

$$\left(P_\zeta^\varepsilon\right)' \left(u_0^\varepsilon\right) \in L^2 \left(\Omega^\varepsilon\right)^3,$$

et il existe une constante $\gamma^\varepsilon > 0$ dépend de ε, telle que

$$\left\| \left(P_\zeta^\varepsilon\right)' \left(u_0^\varepsilon\right) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \gamma^\varepsilon \left\| u_0^\varepsilon \right\|_{2,\Omega^\varepsilon}. \tag{2.27}$$

Démonstration. De (2.22) on a pour tout $\phi \in K_{\text{div}}^\varepsilon$,

$$\left\langle \left(P_\zeta^\varepsilon\right)' \left(u_0^\varepsilon\right), \phi \right\rangle_{\left(K_{\text{div}}^\varepsilon\right)' \times K_{\text{div}}^\varepsilon} = \sqrt{2} \alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \left|D\left(u_0^\varepsilon\right)\right|^{\zeta - 1} D_{ij}\left(u_0^\varepsilon\right) D_{ij}(\phi)\, dx, \tag{2.28}$$

en utilisant la formule de Green dans (2.28) avec la condition (2.19), on obtient

$$\left\langle \left(P_\zeta^\varepsilon\right)' \left(u_0^\varepsilon\right), \phi \right\rangle_{\left(K_{\text{div}}^\varepsilon\right)' \times K_{\text{div}}^\varepsilon} = \int_{\Omega^\varepsilon} \left\{ -\sqrt{2} \alpha^\varepsilon \operatorname{Div}\left(\Psi_\zeta(D\left(u_0^\varepsilon\right)\right) \right\} .\phi\, dx.$$

On peut utiliser le lemme 2.1 pour $\sigma = D\left(u_0^\varepsilon\right)$ et $\beta = \eta^\varepsilon$, il vient que

$$\Psi_\zeta(D\left(u_0^\varepsilon\right) \in H^1(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}. \tag{2.29}$$

Par [24], les inclusions $K_{\text{div}}^\varepsilon \subset L^2(\Omega^\varepsilon)^3 \subset \left(K_{\text{div}}^\varepsilon\right)'$, permettent de conclure pour tout $\phi \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3$:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(P_\zeta^\varepsilon\right)' \left(u_0^\varepsilon\right), \phi \right\rangle_{\left(K_{\text{div}}^\varepsilon\right)' \times K_{\text{div}}^\varepsilon} &= \left(\left(P_\zeta^\varepsilon\right)' \left(u_0^\varepsilon\right), \phi \right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} \left\{ -\sqrt{2} \alpha^\varepsilon \operatorname{Div}\left(\Psi_\zeta(D\left(u_0^\varepsilon\right)\right) \right\} .\phi\, dx. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Il résulte de (2.29), (2.30) que $\left(P_\zeta^\varepsilon\right)'(u_0^\varepsilon) \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3$. Pour d'avoir (2.27), on utilise l'inégalité de Hölder et le fait $|\mathrm{div}\,(v)|^2 \leq 3\,|\nabla(v)|^2$ dans (2.30), on trouve

$$\left(\left(P_\zeta^\varepsilon\right)'(u_0^\varepsilon), \phi\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \leq \sqrt{6}\alpha^\varepsilon \left\|\Psi_\zeta(D(u_0^\varepsilon))\right\|_{1,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}. \quad (2.31)$$

On fait du même raisonnement qui utlisé pour démontrer l'inégalité (2.25) (voir la Démonstration du lemme 2.2). Il existe donc une constante $\gamma^\varepsilon > 0$ telle que

$$\left\|\Psi_\zeta(D(u_0^\varepsilon))\right\|_{1,\Omega^\varepsilon} \leq \gamma^\varepsilon \left\|D(u_0^\varepsilon)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}, \quad (2.32)$$

avec

$$\gamma^\varepsilon = \sqrt{6}\alpha^\varepsilon \left(1 + (\eta^\varepsilon)^{\zeta-1}\right).$$

De (2.31), (2.32) et comme $|D(v)|^2 \leq |\nabla(v)|^2$, on déduit

$$\left(\left(P_\zeta^\varepsilon\right)'(u_0^\varepsilon), \phi\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \leq \gamma^\varepsilon \left\|u_0^\varepsilon\right\|_{2,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}. \quad (2.33)$$

D'où le résultat.

2.3.2 Démonstration de du Théorème 2.1

a) L'unicité de la solution

Soient u_1^ε et u_2^ε deux solutions éventuelles. Prenant dans (2.16) $\phi = u_2^\varepsilon(t)$ (resp $\phi = u_1^\varepsilon(t)$) dans l'inéquation relative à u_1^ε (resp u_2^ε) et ajoutant, il vient, en posant $w^\varepsilon = u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon$:

$$-\left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}, w^\varepsilon\right) - a(w^\varepsilon, w^\varepsilon) - l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |w^\varepsilon|^2 \, d\tau \geq 0$$

ceci implique que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a(w^\varepsilon(t), w^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |w^\varepsilon(t)|^2 \, d\tau \leq 0$$

et comme $a(v,v) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |v|^2 \, d\tau \geq 2\mu C_K \|v\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2$, on a

$$\left\|w^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + 4\mu C \int_0^T \left\|w^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \leq$$

$$\left\|w^\varepsilon(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 = 0, \ \forall t \Rightarrow w^\varepsilon(t) = 0$$

d'où l'unicité.□

b) L'existence de la solution

On montre d'abord l'existence d'une solution u_ζ^ε de (2.23)-(2.24) puis l'on établit des estimations à priori indépendantes de ζ. On passe ensuite à la limite en ζ. En suivant [16, 12] nous allons commencer la démonstration en supposant que k^ε peut dépendre de t, avec

$$k^\varepsilon, \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty\left(\omega \times]0, T[\right) .$$

Estimation à priori (I)

On prend dans (2.23), (2.24) $\phi = u_\zeta^\varepsilon(t)$, comme $\left\langle \left(F_\zeta^\varepsilon\right)'(w), w\right\rangle \geq 0, \;\; \forall w \in K_{\text{div}}^\varepsilon$, on obtient

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), u_\zeta^\varepsilon(t)\right) + \breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t)\right) \leq \left(f^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t)\right)$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a(u_\zeta^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|u_\zeta^\varepsilon(t)\right|^2 d\tau \leq \left(f^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t)\right) \tag{2.34}$$

utilisant l'inégalité de Korn :

$$a(v, v) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} v^2 d\tau \geq 2\mu C_K \left\|v\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2, \forall v \in K_{\text{div}}^\varepsilon$$

on déduit de (2.34) après intégration en t

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + 4\mu C_K \int_0^t \left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \leq \left\|u_0^\varepsilon\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + 2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right) d\sigma \tag{2.35}$$

D'après les hypothèses (2.17) et le fait que

$$\begin{aligned} 2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right) d\sigma &\leq 2\int_0^t \left\|f^\varepsilon(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left\|\left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma \\ &\leq \int_0^t \left\|f^\varepsilon(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \int_0^t \left\|\left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \end{aligned}$$

l'inégalité (2.35) devient comme suite

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\int_0^t\left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\leq c\left(1+\int_0^t\left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\right) \tag{2.36}$$

en particulier de (2.36), on écrit

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\leq c\left(1+\int_0^t\left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\right)$$

donc par un lemme de Gronwall,

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\leq c.$$

Et renvoyer à la relation (2.36) on en déduit que

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\int_0^t\left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\leq c, \tag{2.37}$$

où c est une constante indépendante de ζ.

Estimation à priori (II).

Dérivons (2.23) en t il vient que

$$\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\phi\right)+\breve{a}\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi\right)+\left(\frac{d}{dt}\left(F_\zeta^\varepsilon\right)'\left(u_\zeta^\varepsilon(t)\right),\phi\right)=\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi\right)$$

on prend $\phi=\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)$, on trouve

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\breve{a}\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\\ +X(t)=\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\end{gathered} \tag{2.38}$$

où $X(t)=\left\langle\dfrac{d}{dt}\left(F_\zeta^\varepsilon\right)'\left(u_\zeta^\varepsilon(t)\right),\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\rangle$.

Rappelons que

$$\begin{aligned}\left\langle\left(F_\zeta^\varepsilon\right)'(v),\phi\right\rangle &= \int_\omega k^\varepsilon\psi_\zeta(v_\tau).\phi_\tau dx'+\sqrt{2}\alpha^\varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon}\Psi_\zeta\left(D(v)\right).D(\phi)\,dx\\ &= \int_\omega k^\varepsilon\left|v_\tau\right|^{\zeta-1}v_\tau.\phi_\tau dx'+\sqrt{2}\alpha^\varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon}\left|D(v)\right|^{\zeta-1}D_{ij}(v).D_{ij}(\phi)\,dx\end{aligned}$$

où

$\psi_\zeta(v_\tau) = |v_\tau|^{\zeta-1} v_\tau$ et $\Psi_\zeta(D(v)) = |D(v)|^{\zeta-1} D(v)$.

On voit que

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left(F_\zeta^\varepsilon\right)'(\phi(t)), \phi'(t)\right\rangle = \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t)).\phi'_\tau(t)dx' +$$
$$+\int_\omega k^\varepsilon \lim_{h\to 0}\frac{\psi_\zeta(\phi_\tau(t+h)) - \psi_\zeta(\phi_\tau(t))}{h}.\frac{\phi_\tau(t+h)-\phi_\tau(t)}{h}dx' +$$
$$+\sqrt{2}\alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon}\lim_{h\to 0}\frac{\Psi_\zeta\left[D(\phi(t+h))\right] - \Psi_\zeta\left[D(\phi(t))\right]}{h}.\frac{D(\phi(t+h)) - D(\phi(t))}{h}dx.$$

On sait que les opérateurs ψ_ζ et Ψ_ζ sont monotones, alors le deuxième terme et le troisième sont positives et donc

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left(F_\zeta^\varepsilon\right)'(\phi(t)), \phi'(t)\right\rangle \geq \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t)).\phi'_\tau(t)dx'$$
$$= \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t))dx'$$

avec cette inégalité, (2.38) s'écrit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + l^\varepsilon\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2$$
$$+\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)dx' \leq \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)$$

où l'on remplace ϕ par $\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)$.

Par [12] , on utilise l'inégalité de Korn

$$a(v,v) + \rho\|v\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \geq \alpha\|v\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2$$

pour $\rho > 0$ et $\alpha > 0$, puis en intégrant de 0 à t on en déduit

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \alpha\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + 2l^\varepsilon\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma \leq \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 +$$
$$+\rho\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + 2\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right) d\sigma - \tag{2.39}$$
$$-2\int_0^t\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(\sigma)\right)dx'd\sigma$$

et comme $\dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$, alors avec l'inégalité de Cauchy Shwartz et Younng respect,

$$\begin{aligned}2\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right) d\sigma &\leq 2\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma \\ &\leq \int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Portant (2.40) dans (2.39), il vient

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \alpha\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + 2l^\varepsilon \int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma \leq \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ &\qquad + (\rho+1)\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \\ &\qquad +2\left|\int_0^t \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(\sigma)\right) dx' d\sigma\right|\end{aligned} \tag{2.41}$$

on fait maintenant estimer $\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)$.

On déduit de (2.24), (2.25) que

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \phi\right) = (f^\varepsilon(0),\phi) - a(u_0^\varepsilon,\phi) - l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u_0^\varepsilon.\phi d\tau - \left\langle \left(F_\zeta^\varepsilon\right)'(u_0^\varepsilon), \phi\right\rangle, \ \forall\phi \in K_{\text{div}}^\varepsilon \tag{2.42}$$

d'après (2.18) $u_0^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)^3$, (2.42) s'écrit encore

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \phi\right) = (f^\varepsilon(0),\phi) - (A(u_0^\varepsilon),\phi) - \left\langle \left(P_\zeta^\varepsilon\right)'(u_0^\varepsilon), \phi\right\rangle$$

où $A(u_0^\varepsilon) : \phi \to a(u_0^\varepsilon,\phi)$ est une forme linéaire continue sur $K_{\text{div}}^\varepsilon$, et $\left(P_\zeta^\varepsilon\right)'$ est définie dans (2.22) . D'où

$$\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) = f^\varepsilon(0) - A(u_0^\varepsilon) - P_\zeta^{\varepsilon\prime}(u_0^\varepsilon).$$

d'aprés le lemme 2.3 : $P_\zeta^{\varepsilon\prime}(u_0^\varepsilon) \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3$et $A(u_0^\varepsilon) \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3$, on en déduit

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \text{cte}. \tag{2.43}$$

Faisons une intégration par parties dans le dernier terme de (2.27) et utilisons l'hypothèse (2.18); $\dfrac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} = 0$, on aura

$$\int_0^t \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(\sigma)\right)dx'd\sigma =$$

$$\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}(x',0).\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(t)\right)dx' - \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}(x',0)\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(0)\right)dx'$$

$$+\int_0^t \int_\omega \frac{\partial^2 k^\varepsilon}{\partial t^2}(x',0).\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(\sigma)\right)dx'd\sigma = 0.$$

Alors (2.41) et (2.43) donnent :

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + l^\varepsilon \int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma \le c\left[1 + \int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\right]$$

en utilisant le lemme de Gronwall on obtient

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + l^\varepsilon \int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma \le c \tag{2.44}$$

Passage à la limites en ξ

On en déduit, en utilisant les estimations (2.37) et (2.44), qu'on peut extraire de u_ζ^ε une suite notée encore u_ζ^ε, telle que

$$\begin{array}{ccl} u_\zeta^\varepsilon \longrightarrow u^\varepsilon & \text{dans} & L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \cap L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \\ \dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \longrightarrow \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} & \text{dans} & L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \cap L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \end{array} \tag{2.45}$$

et par suite d'après la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega^\varepsilon)$ dans $L^2(\Gamma_1^\varepsilon)$, on a

$$u_\zeta^\varepsilon \longrightarrow u^\varepsilon \quad \text{dans} \quad H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)^3\right) \tag{2.46}$$

on déduit de l'équation (2.23) que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \phi - u_\zeta^\varepsilon\right) + a\left(u_\zeta^\varepsilon, \phi - u_\zeta^\varepsilon\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u_\zeta^\varepsilon.\left(\phi - u_\zeta^\varepsilon\right)d\tau + F_\zeta^\varepsilon(\phi) \; - \\ -F_\zeta^\varepsilon\left(u_\zeta^\varepsilon\right) - \left(f^\varepsilon, \phi - u_\zeta^\varepsilon\right) = F_\zeta^\varepsilon(\phi) - \\ - F_\zeta^\varepsilon\left(u_\zeta^\varepsilon\right) - \left\langle \left(F_\zeta^\varepsilon\right)'\left(u_\zeta^\varepsilon\right), \phi - u_\zeta^\varepsilon\right\rangle \ge 0 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Prenant dans (2.47) $\phi = \phi(t), \quad \phi \in L^2\left(0,T;K^{\varepsilon}_{\text{div}}\right)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}_{\zeta}}{\partial t}(t), \phi \right) + a(u^{\varepsilon}_{\zeta}, \phi) + l^{\varepsilon} \int_{\Gamma^{\varepsilon}_1} u^{\varepsilon}_{\zeta}.\phi d\tau + F^{\varepsilon}_{\zeta}(\phi) - \left(f^{\varepsilon}, \phi - u^{\varepsilon}_{\zeta} \right) \right] dt \geq \\
&\quad \int_0^T \left[\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}_{\zeta}}{\partial t}(t), u^{\varepsilon}_{\zeta}(t) \right) + a\left(u^{\varepsilon}_{\zeta}, u^{\varepsilon}_{\zeta}(t) \right) + l^{\varepsilon} \int_{\Gamma^{\varepsilon}_1} \left| u^{\varepsilon}_{\zeta} \right|^2 d\tau + F^{\varepsilon}_{\zeta}\left(u^{\varepsilon}_{\zeta} \right) \right] dt \\
&\qquad = \frac{1}{2} \left\| u^{\varepsilon}_{\zeta}(T) \right\|^2_{0,\Omega^{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \left\| u^{\varepsilon}_0 \right\|^2_{0,\Omega^{\varepsilon}} + \int_0^T a(u^{\varepsilon}_{\zeta}(s), u^{\varepsilon}_{\zeta}(s)) ds + \\
&\qquad\quad + l^{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma^{\varepsilon}_1} \left| u^{\varepsilon}_{\zeta}(\sigma) \right|^2 d\tau d\sigma + \int_0^T F^{\varepsilon}_{\zeta}\left(u^{\varepsilon}_{\zeta} \right) dt
\end{aligned} \tag{2.48}$$

on déduit alors de (2.48) que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t), \phi - u^{\varepsilon} \right) + a(u^{\varepsilon}, \phi) + l^{\varepsilon} \int_{\Gamma^{\varepsilon}_1} u^{\varepsilon}.\phi d\tau + F^{\varepsilon}(\phi) - (f^{\varepsilon}, \phi - u^{\varepsilon}) \right] dt \geq \\
&\qquad + \liminf_{\xi \to 0} \int_0^T \breve{a}(u^{\varepsilon}_{\zeta}(s), u^{\varepsilon}_{\zeta}(s)) ds + \liminf_{\xi \to 0} \int_0^T F^{\varepsilon}_{\zeta}\left(u^{\varepsilon}_{\zeta} \right) dt
\end{aligned} \tag{2.49}$$

où $\breve{a}(u^{\varepsilon}_{\zeta}(s), u^{\varepsilon}_{\zeta}(s)) = a(u^{\varepsilon}_{\zeta}(s), u^{\varepsilon}_{\zeta}(s)) + l^{\varepsilon} \int_{\Gamma^{\varepsilon}_1} \left| u^{\varepsilon}_{\zeta}(\sigma) \right|^2 d\sigma$,

mais comme la fonction $u \to \int_0^T \breve{a}(u,u) dt$ est semi-continue infériérement pour la topologie faible de $L^2\left(0,T;K^{\varepsilon}_{\text{div}}\right)$, et d'après la convergence faible des (2.48), (2.49) on a

$$\liminf_{\xi \to 0} \int_0^T \breve{a}(u^{\varepsilon}_{\zeta}(s), u^{\varepsilon}_{\zeta}(s)) ds \geq \int_0^T \breve{a}(u^{\varepsilon}(s), u^{\varepsilon}(s)) ds$$

ainsi la fonction $v \to \int_0^T F^{\varepsilon}(v) dt$ est continue convexe sur $L^2\left(0,T;K^{\varepsilon}_{\text{div}}\right)$ elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $L^2\left(0,T;K^{\varepsilon}_{\text{div}}\right)$, donc

$$\liminf_{\xi \to 0} \int_0^T F^{\varepsilon}_{\zeta}\left(u^{\varepsilon}_{\zeta} \right) dt \geq \int_0^T F^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) dt$$

et donc (2.49) donne

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \phi - u^\varepsilon \right) + a\left(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon . \left(\phi - u^\varepsilon\right) d\tau + F^\varepsilon(\phi) - F^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) \right. \tag{2.50}$$
$$\left. - \left(f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon\right) \right] dt \geq 0, \ \forall \phi \in L^2\left(0, T; K_{\mathrm{div}}^\varepsilon\right).$$

On passe maienant à l'inégalité ponctuelle (2.16).

Soit $t \in]0, T[$ fixé quelconque et soit $\phi \in K_{\mathrm{div}}^\varepsilon$ quelconque. Prenons la famille $\mathcal{I}_n = \left] t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n} \right[$ de voisinages de t . La restriction de (2.50) sur $\mathcal{I}_n$ qui vaut

$$\int_{\mathcal{I}_n} \left[\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \phi \right) + a(u^\varepsilon, \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon . \phi d\tau + F^\varepsilon(\phi) - (f^\varepsilon, \phi) \right] ds -$$
$$- \int_{\mathcal{I}_n} \left[\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, u^\varepsilon \right) + a\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|u^\varepsilon\right|^2 d\tau - F^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) - \left(f^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \right] ds \geq 0$$

donc

$$\left(|\mathcal{I}_n|^{-1} \int_{\mathcal{I}_n} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) ds, \phi \right) + a\left(|\mathcal{I}_n|^{-1} \int_{\mathcal{I}_n} u^\varepsilon(s) ds, \phi \right) +$$
$$+ |\mathcal{I}_n|^{-1} l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon . \phi d\tau + F^\varepsilon(\phi) - \left(|\mathcal{I}_n|^{-1} \int_{\mathcal{I}_n} f^\varepsilon(s) ds, \phi \right) \tag{2.51}$$
$$- |\mathcal{I}_n|^{-1} \int_{\mathcal{I}_n} \left[\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, u^\varepsilon \right) + a\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|u^\varepsilon\right|^2 d\tau - F^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) - \left(f^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \right] ds \geq 0.$$

où $|\mathcal{I}_n|$ est la mesure de $\mathcal{I}_n$.

Par passage à la limite lorsque $n \to 0$ dans (2.51) et utilisation du *Théorème de Lebesgue,* on ait

$$|\mathcal{I}_n|^{-1} \int_{\mathcal{I}_n} g(s) ds \to g(t), \ \text{pour presque tout } t,$$
$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi - u^\varepsilon(t) \right) + a\left(u^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(t) . \left(\phi - u^\varepsilon(t)\right) d\tau + F^\varepsilon(\phi)$$
$$- F^\varepsilon\left(u^\varepsilon(t)\right) \geq \left(f^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)\right), \quad \forall \phi \in K_{\mathrm{div}}^\varepsilon$$

d'où (2.16). $\square$

Chapitre 3

Analyse asymptotique du problème

On étude l'analyse asymptotique du problème que nous avons présenté au Chapitre 2. La méthode consiste à changer d'échelle, pour ramener l'étude sur un domaine Ω indépendant de ε. Nous établissons des estimations et des théorèmes des convergences en utilisant les inégalités de Korn et de Poincaré, développées récemment par [26, 27]. Le problème limite et ses propriétés sont donnés, l'unicité de solution limite et l'équation constitutive bidimensionnelle du fluide de Bingham sont prouvée, et l'équation spécifique de Reynolds est aussi prouvée.

Contenu

3.1 Transformation de problème dans un domaine fixe

Dans cette section, nous allons utiliser la technique de mise à l'échelle Ω^ε sur la coordonnée x_3, en introduisant le changement des variables $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$. On obtient un domaine fixe Ω qui est indépendant de ε. Nous désignons par $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L \cup \overline{\omega}$ sa frontière, nous définissons les fonctions suivantes en Ω:

$$\hat{u}_i^\varepsilon(x', z, t) = u_i^\varepsilon(x', x_3, t),\ i = 1, 2,\ \hat{u}_3^\varepsilon(x', z, t) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3, t)$$

et

$$\hat{p}^\varepsilon(x', z, t) = \varepsilon^2 p^\varepsilon(x', x_3, t).$$

Pour les données du problème, on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante:

$$\hat{f}(x', z, t) = \varepsilon^2 f^\varepsilon(x', x_3, t),\ \widehat{g}(x', z, t) = g(x', x_3, t)\ ,\ \hat{\alpha} = \varepsilon\alpha^\varepsilon,\ \hat{l} = \varepsilon l^\varepsilon, \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \hat{\eta} = \varepsilon\eta^\varepsilon,$$
$$(\widehat{u}_0)_i\,(x', z) = (u_0^\varepsilon)_i\,(x', x_3),\ \ i = 1, 2 \text{ et } (\widehat{u}_0)_3\,(x', z) = \varepsilon^{-1}\,(u_0^\varepsilon)_3\,(x', x_3).$$

Soit $\widehat{G}(x', z, t)$ tel que $\widehat{G} = \widehat{g}$ sur $\Gamma \times [0, T]$, ainsi on peut définir le relèvement G^ε de g , par

$$G_i^\varepsilon(x', x_3, t) = \widehat{G}_i(x', z, t),\ \ i = 1, 2 \text{ et } G_3^\varepsilon(x', x_3, t) = \varepsilon\widehat{G}_3(x', z, t).$$

Au bord supérieur Γ_1^εse trouvent des calculs supplémentaires de ce modèle effectués par [27]. Cela a conduit à la condition suivante

$$\mu C(\Gamma_1^\varepsilon) \leq l^\varepsilon \tag{3.1}$$

où

$$C(\Gamma_1^\varepsilon) = 2||\frac{\partial}{\partial x_2} h^\varepsilon||_{\mathcal{C}(\bar{\omega})}(1 + ||\frac{\partial}{\partial x_1} h^\varepsilon||^2_{\mathcal{C}(\bar{\omega})}).$$

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω. On note

$$\begin{aligned}
K &= \left\{\phi \in H^1(\Omega)^3 : \hat{\phi} = 0 \text{ on } \Gamma_L,\ \ \hat{\phi}.n = 0 \text{ on } \omega \cup\ \Gamma_1\right\},\\
K_{\text{div}} &= \left\{\hat{\phi} \in K : \text{div}(\hat{\phi}) = 0\right\},\\
V_z &= \left\{v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega);\ v = 0 \text{ on } \Gamma_L\right\}.
\end{aligned}$$

La norme de V_z est

$$\|v\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\|v_i\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 \right) \right)^{1/2}.$$

Nous utilisons les nouvelles données et les fonctions inconnues en (2.16) et en multipliant par ε, alors cela conduit à nous au problème suivant

$$\textit{Trouver} \quad \widehat{u}^\varepsilon(t) \in K \quad \forall t \in [0,T], \textit{ telle que}$$

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t), \widehat{\phi}_i - \widehat{u}_i^\varepsilon(t) \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t), \widehat{\phi}_3 - \widehat{u}_3^\varepsilon(t) \right) + \widehat{a}\left(\widehat{u}^\varepsilon(t), \widehat{\phi} - \widehat{u}^\varepsilon(t) \right) \\
+ \sum_{i=1}^{2} \hat{l} \int_\omega \hat{u}_i^\varepsilon(x', h(x'), t) \left(\hat{\phi}_i(x', h(x')) - \hat{u}_i^\varepsilon(x', h(x'), t) \right) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' + \\
+ \hat{l} \int_\omega \varepsilon^2 \hat{u}_3^\varepsilon(x', h(x'), t) \left(\hat{\phi}_3(x', h(x')) - \hat{u}_3^\varepsilon(x', h(x'), t) \right) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' + \\
+ \int_\omega \hat{k} \left(|\hat{\phi} - s| - |\hat{u}^\varepsilon - s| \right) dx' + \sqrt{2}\hat{\alpha} \int_\Omega \left(\left| \widetilde{D}\left(\hat{\phi}\right) \right| - \left| \widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right) \right| \right) dx'dz \geq \\
\geq \sum_{i=1}^{2} \left(\widehat{f}_i^{\,\varepsilon}(t), \phi_i - \widehat{u}_i^\varepsilon(t) \right) + \varepsilon \left(\widehat{f}_3^{\,\varepsilon}(t), \phi_3 - \widehat{u}_3^\varepsilon(t) \right), \forall \widehat{\phi} \in K
\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\widehat{u}^\varepsilon(0) = \widehat{u}_0 \tag{3.3}$$

où

$$\begin{gathered}
\widehat{a}\left(\widehat{u}^\varepsilon(t), \widehat{\phi} - \widehat{u}^\varepsilon(t) \right) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left[\varepsilon^2 \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) - \hat{p}^\varepsilon \delta_{ij} \right] \frac{\partial (\hat{\phi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon)}{\partial x_j} dx'dz + \\
\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial (\hat{\phi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon)}{\partial z} dx'dz + \int_\Omega \left(2\mu\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon} \hat{p}^\varepsilon \right) \frac{\partial (\hat{\phi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon)}{\partial z} dx'dz + \\
+ \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \mu\varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z} \right) \frac{\partial (\hat{\phi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon)}{\partial x_j} dx'dz \quad ,
\end{gathered}$$

$$\widehat{F}(\widehat{\phi}) = \int_\omega \widehat{k} \left| \widehat{\phi}_\tau \right| \, dx' + \sqrt{2}\hat{\alpha} \int_\Omega \left| \widetilde{D}\left(\hat{\phi}\right) \right| dx'dz \quad ,$$

et

$$\left| \widetilde{D}(v) \right| = \left[\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

3.2 Estimations a priori sur les soulutions

Dans la suite, nous allons établir les estimations pour le champ de vitesse $\hat{u}^{\varepsilon}$ et la pression $\hat{p}^{\varepsilon}$ dans Ω.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et l'hypothèse (3.1), il existe des constantes* A, B, C et D *indépendantes de* ε *telle que :*

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^t \left\|\frac{\partial \widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds + \|\varepsilon \widehat{u}_i^{\varepsilon}(t)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\|\varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds\right) + \\ \sum_{i,j=1}^{2}\int_0^t \left\|\varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds + \int_0^t \left\|\varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds + \left\|\varepsilon^2 \widehat{u}_3^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega}^2 \leq A,\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\|\hat{u}_i^{\varepsilon}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|\varepsilon \hat{u}_3^{\varepsilon}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq B, \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^t \left\|\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z \partial t}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds + \left\|\varepsilon^3 \frac{\partial \widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\|\varepsilon^4 \frac{\partial^2 \widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i \partial t}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds\right) + \\ \sum_{i,j=1}^{2}\int_0^t \left\|\varepsilon^3 \frac{\partial^2 \widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j \partial t}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds + \int_0^t \left\|\varepsilon^3 \frac{\partial^2 \widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z \partial t}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds + \left\|\varepsilon^4 \frac{\partial \widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2 \leq C,\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\|\varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|\varepsilon^3 \frac{\partial \widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq D\ . \tag{3.7}$$

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses des théorèmes 4.1 alors il existe une constante* C *indépendante de* ε *telle que*

$$\|\frac{\partial \hat{p}^{\varepsilon}}{\partial x_i}\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leq C,\ \textit{pour}\ i = 1, 2, \tag{3.8}$$

$$\|\frac{\partial \hat{p}^{\varepsilon}}{\partial z}\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leq C\ \varepsilon\ . \tag{3.9}$$

Lemme 3.1. *On rappelle que* $0 < \underline{h} \leq h(x') \leq \overline{h}$, $h^{\varepsilon}(x') = \varepsilon h(x')$, $\forall x' \in \omega$, *il existe une constante* C_0 *indépendante de* ε *telle que*

$$\varepsilon\left(\int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} |\phi|^2 d\tau\right) \leq C_0(\Omega, h)\int_{\Omega^{\varepsilon}} \left(|\phi|^2 + \varepsilon^2 |\nabla \phi|^2\right) dx \quad \forall \phi \in K^{\varepsilon}, \forall \varepsilon \in]0, 1]\,. \tag{3.10}$$

Preuve du Lemme 3.1. Soit $0 < z < h^{\varepsilon}(x')$, on a

$$\phi(x', h^{\varepsilon}(x')) = \phi(x', z) + \int_z^{h^{\varepsilon}(x')} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x', \theta)\, d\theta.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que :

$$\left|\phi\left(x', h^{\varepsilon}\left(x'\right)\right)\right|^{2} \leq 2\left|\phi\left(x', z\right)\right|^{2}+2 h^{\varepsilon}\left(x'\right) \int_{0}^{h^{\varepsilon}\left(x'\right)}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\left(x', \theta\right)\right|^{2} d \theta,$$

nous intégrons par rapport à z de 0 à $h^{\varepsilon}\left(x'\right)$ on obtient

$$h^{\varepsilon}\left(x'\right)\left|\phi\left(x', h^{\varepsilon}\left(x'\right)\right)\right|^{2} \leq 2 \int_{0}^{h\left(x'\right)}\left|\phi\left(x', z\right)\right|^{2} d z+2\left(h^{\varepsilon}\left(x'\right)\right)^{2} \int_{0}^{h^{\varepsilon}\left(x'\right)}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\left(x', \theta\right)\right|^{2} d \theta .$$

En multipliant l'inéquation précédente par $\sqrt{1+\left|\nabla h^{\varepsilon}\left(x'\right)\right|^{2}}$ et en intégrant par rapport à x' sur ω, on trouve

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \underline{h} \int_{\omega}\left|\phi\left(x', h^{\varepsilon}\left(x'\right)\right)\right|^{2} \sqrt{1+\left|\nabla h^{\varepsilon}\left(x'\right)\right|^{2}} d x' \\
\leq\ & 2 \sqrt{1+\left\|D_{1} h^{\varepsilon}\right\|^{2}}\left(\int_{\omega} \int_{0}^{h^{\varepsilon}\left(x'\right)}\left|\phi\left(x', z\right)\right|^{2} d z d x'+(\varepsilon \overline{h})^{2} \int_{\omega} \int_{0}^{h^{\varepsilon}\left(x'\right)}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}\left(x', \zeta\right)\right|^{2} d \zeta d x'\right)
\end{aligned}$$

pour $0<\varepsilon \leq 1$, on voit que

$$\varepsilon \int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}|\phi|^{2} d \tau \leq C_{0} \int_{\Omega^{\varepsilon}}\left(|\phi|^{2}+\varepsilon^{2}|\nabla \phi|^{2}\right) d x$$

où

$$C_{0}=\frac{2}{\underline{h}}\left(1+(\overline{h})^{2}\right) \sqrt{1+\left\|D_{1} h\right\|^{2}}$$

d'où (3.10).□

3.3 Démonstrations des Théorèmes 3.1-3.2

Preuve de la théorème 3.1. Soit u^ε la solution du problème (2.16), donc

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), u^\varepsilon(t)\right) + a\left(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 \, d\tau \leq \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi\right) +$$
$$+a\left(u^\varepsilon(t), \phi\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(t).\phi d\tau + F^\varepsilon(\phi) + \left(f^\varepsilon, u^\varepsilon(t)\right) - (f^\varepsilon, \phi), \ \forall \phi \in K_{\text{div}}^\varepsilon$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 \, d\tau \leq \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi\right) +$$
$$+a(u^\varepsilon(t), \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(t).\phi d\tau + F^\varepsilon(\phi) + (f^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) - (f^\varepsilon(t), \phi),$$

et en intégrant en temps pour $s \in [0, t]$, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t a(u^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))ds \\
&+l^\varepsilon \int_0^t \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(s)|^2 \, d\tau\right) ds + \int_0^t F^\varepsilon(u^\varepsilon(s))ds \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_0^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 + \quad + \int_0^t \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s), \phi\right) ds+ \\
&+ \int_0^t a(u^\varepsilon(s), \phi)ds + l^\varepsilon \int_0^t \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(s).\phi d\tau\right) ds \\
&+TF^\varepsilon(\phi) + \int_0^t (f^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))\, ds - \int_0^t (f^\varepsilon(s), \phi)ds,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Young, il vient que

$$\begin{aligned}
a(u^\varepsilon, \phi) \quad &\leq \frac{1}{2}a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \frac{1}{2}a(\phi, \phi) \\
&\leq \frac{1}{2}a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \mu\|\nabla\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^t a(u^\varepsilon(s), \phi)ds \quad \leq \frac{1}{2}\int_0^t a(u^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))ds + T\mu\|\nabla\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \tag{3.12}$$

on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s), \phi\right) ds &= (u^\varepsilon(t), \phi) - (u^\varepsilon(0), \phi) \\ &\leq \frac{1}{4}\left\|u^\varepsilon(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \frac{3}{2}\left\|\phi\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \frac{1}{2}\left\|u_0^\varepsilon\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon}\end{aligned} \tag{3.13}$$

De [11], nous rappelons l'inégalité de Poincaré et de Young respectivement :

$$\left\|u^\varepsilon(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} \leq 2\overline{h}^2\varepsilon^2\left\|\nabla u^\varepsilon(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + 2\overline{h}\varepsilon\int_{\Gamma_1^\varepsilon}|u^\varepsilon(t)|^2 d\tau \tag{3.14}$$

$$ab \leq \eta^2\frac{a^2}{2} + \eta^{-2}\frac{b^2}{2},\ \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{a+b} \leq a+b$$

donc on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t (f^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))ds\right| &\leq \int_0^t \left\|f^\varepsilon(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}\left\|u^\varepsilon(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} ds \\ &\leq \int_0^t \left(\left\|f^\varepsilon(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}\left(2\overline{h}^2\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla u^\varepsilon(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\left\|f^\varepsilon(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}\left(2\overline{h}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}\left\|u^\varepsilon(s)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}\right) ds \\ &\leq \frac{\mu}{4}\int_0^t \left\|\nabla u^\varepsilon(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \frac{2\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu}\int_0^t \left\|f^\varepsilon(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \\ &\quad \frac{l^\varepsilon}{8}\int_0^t \left\|u^\varepsilon(s)\right\|^2_{0,\Gamma_1^\varepsilon} ds + \frac{4\overline{h}\varepsilon}{l^\varepsilon}\int_0^t \left\|f^\varepsilon(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds\end{aligned} \tag{3.15}$$

et

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^t (f^\varepsilon(s), \phi)ds\right| &\leq T\frac{\mu}{4}\left\|\nabla\phi\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \frac{2\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu}\int_0^t \left\|f^\varepsilon(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \\ &\quad + T\frac{l^\varepsilon}{4}\left\|\phi\right\|^2_{0,\Gamma_1^\varepsilon} + \frac{2\overline{h}\varepsilon}{l^\varepsilon}\int_0^t \left\|f^\varepsilon(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds\end{aligned} \tag{3.16}$$

De (3.12)-(3.16), on déduit que

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}a(u^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))ds+\\ \frac{3l^{\varepsilon}}{4}\int_{0}^{t}\left\|u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}ds+\int_{0}^{t}F^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(s))ds\leq\\ \left\|u_{0}^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{3}{2}\left\|\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{\mu}{4}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\\ \frac{5}{4}T\mu\left\|\nabla\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{9}{4}Tl^{\varepsilon}\left\|\phi\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}+TF^{\varepsilon}(\phi)+\\ +\left(\frac{6\overline{h}}{\hat{l}}+\frac{4\overline{h}^{2}}{\mu}\right)\varepsilon^{2}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds.\end{gathered}\tag{3.17}$$

Par [4], et d'après la condition (4.1), l'inégalité de Korn devient:

$$\begin{aligned}\mu\left\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}&\leq a(u^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))+\mu\mathcal{C}(\Gamma_{1}^{\varepsilon})\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}|u^{\varepsilon}(t)|^{2}d\tau\\ &\leq a(u^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))+l^{\varepsilon}\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}|u^{\varepsilon}(t)|^{2}d\tau.\end{aligned}\tag{3.18}$$

On utilise (3.18) dans le membre de gauche de (3.17). Alors

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{\mu}{2}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\\ \frac{l^{\varepsilon}}{4}\int_{0}^{t}\left\|u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}ds+\int_{0}^{t}F^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(s))ds\leq\\ \left\|u_{0}^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{3}{2}\left\|\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{\mu}{4}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\\ \frac{5}{4}T\mu\left\|\nabla\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{9}{4}Tl^{\varepsilon}\left\|\phi\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}+TF^{\varepsilon}(\phi)+\\ +\left(\frac{6\overline{h}}{\hat{l}}+\frac{4\overline{h}^{2}}{\mu}\right)\varepsilon^{2}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds\end{gathered}\tag{3.19}$$

Pour t quelconque dans $]0,T[$, nous choisissons $\phi=G^{\varepsilon}(t)$ et en multipliant (4.19) par ε . Dans le membre de droite, il faut estimer le terme $\left\|G^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}$, pour cela on utilise la continuité de l'application trace de $H^{1}(\Omega^{\varepsilon})$ dans $L^{2}(\Gamma_{1}^{\varepsilon})$ comme dans lemme 3.1. Aussi bien que d'estimer $F^{\varepsilon}(G^{\varepsilon})$, on utilise le fait que $\varepsilon F^{\varepsilon}(G^{\varepsilon})\leq\widehat{F}\left(\widehat{G}\right)$ et de la lipschitizienne de $\widehat{F}$

, voir la Remarque 2.1. Par conséquent, si on passe au domaine fixe Ω dans le membre de droite dans (3.19), nous obtenons une constante A indépendente de ε telle que

$$\varepsilon\left(\|u^{\varepsilon}(t)\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\mu\int_{0}^{t}\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}\,ds\right)+\widehat{l}\int_{0}^{t}\|u^{\varepsilon}(s)\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}\,ds\leq A \tag{3.20}$$

avec

$$\begin{aligned}A= \quad & 4\left(\|\widehat{u_0}\|_{0,\Omega}^{2}+\frac{3}{2}\left\|\widehat{G}\right\|_{L^{\infty}(0,T,L^{2}(\Omega)^{3})}^{2}+\frac{5}{4}T\mu\left\|\nabla\widehat{G}\right\|_{L^{\infty}(0,T,L^{2}(\Omega)^{3})}^{2}\right.\\ & +\frac{9}{4}T\hat{l}\,C_{0}\left(\Omega,h\right)\left\|\widehat{G}\right\|_{L^{\infty}(0,T,H^{1}(\Omega)^{3})}^{2}+T\tilde{C}_{1}\left(\Omega,\hat{k},\hat{\alpha}\right)\left\|\widehat{G}\right\|_{L^{\infty}(0,T,H^{1}(\Omega)^{3})}\\ & \left.+\left(\frac{6\overline{h}}{\widehat{l}}+\frac{4\overline{h}^{2}}{\mu}\right)\left\|\widehat{f^{\varepsilon}}\right\|_{L^{2}(0,T,L^{2}(\Omega)^{3})}^{2}\right),\end{aligned}$$

où $\tilde{C}_1\left(\Omega,\hat{k},\hat{\alpha}\right) = |\omega|^{1/2}\left\|\hat{k}\right\|_{\infty,\omega} M(\Omega)+\sqrt{2}\hat{\alpha}\,|\Omega|^{1/2}$ est la constante de lipschitizienne de $\widehat{F}$.

Donc (3.4) découle à partir de (3.20).

Maintenant, nous appliquons l'inégalité de Poincaré (3.14) dans l'estimation (3.20), on trouve

$$\varepsilon^{-1}\int_{0}^{t}\|u^{\varepsilon}(s)\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}\,ds\leq B,$$
$$B=\frac{2}{\min(\widehat{l},\mu)}\left(\overline{h}+\overline{h}^{2}\right)A.$$

Ce qui nous donne (3.5).

Pour montrer l'estimation (3.6), en dérivant (2.23) en t et on prend $\phi=\dfrac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^{2}u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(t),\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)+\breve{a}\left(\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t),\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)+\\ +\left\langle\left(F_{\zeta}^{\varepsilon}\right)''\left(u_{\zeta}^{\varepsilon}(t)\right),\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\rangle=\left(\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial t}(t),\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)\end{gathered}$$

et comme $\left\langle\left(F_{\zeta}^{\varepsilon}\right)''\left(u_{\zeta}^{\varepsilon}(t)\right),\dfrac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\rangle\geq 0$, en intégrant en temps pour $s\in[0,t]$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\int_{0}^{t}a\left(\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(s),\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right)ds+l^{\varepsilon}\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}ds\leq\\ \tfrac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\int_{0}^{t}\left(\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial t}(s),\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right)ds\end{gathered}$$

Majorant la deuxième terme de deuxième member de (3.21) en utilisant l'inégalité de Poincaré pour $\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}$ et l'inégalité de Young ,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds\right| &\leq \int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} ds \\
&\leq \int_0^t \left(\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left(2\overline{h}^2\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}\right) ds + \\
&+ \int_0^t \left(\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left(2\overline{h}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}\right) ds \\
&\leq \frac{\mu}{8}\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{4\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \\
&\frac{3l^\varepsilon}{4}\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds + \frac{2\overline{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds,
\end{aligned}$$

donc, il résulte de (3.21) que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds + \frac{l^\varepsilon}{4}\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \leq \\
&\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\mu}{8}\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{4\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{2\overline{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds
\end{aligned}$$

En effet, par l'écriture $\dfrac{l^\varepsilon}{4} = \dfrac{l^\varepsilon}{16} + \dfrac{3l^\varepsilon}{16}$ et on reserve du terme $\frac{l^\varepsilon}{16}\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds$ dans le member de gauche, puis utilisant l'inégalité de Korn, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{3\mu}{16}\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{l^\varepsilon}{16}\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \leq \\
&\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\mu}{8}\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{4\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{2\overline{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\mu}{16}\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{l^\varepsilon}{16}\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \leq \\
&\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{4\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{2\overline{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Nous devons estimer $\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)$. A partir de (2.23), on a pour tout $\phi \in K_{\text{div}}^\varepsilon$:

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \phi\right) = (f^\varepsilon(0), \phi) - a(u_\zeta^\varepsilon(0), \phi) - l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u_\zeta^\varepsilon(0) .\phi d\tau - \left(\left(\mathit{F}_\zeta^\varepsilon\right)' \left(u_\zeta^\varepsilon(0)\right), \phi\right),$$

mais (2.19) d'après (3.3) ; $u_0^\varepsilon = 0$ sur Γ^ε, il vient

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \phi\right) = (f^\varepsilon(0), \phi) - a(u_\zeta^\varepsilon(0), \phi) - \left(\left(P_\zeta^\varepsilon\right)' \left(u_\zeta^\varepsilon(0)\right), \phi\right), \ \forall \phi \in K_{\text{div}}^\varepsilon. \tag{3.23}$$

Nous majorons le premier terme de deuxième membre, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et de Poincaré puis le lemme 3.1, respectivement, comme suit

$$\begin{aligned}
(f^\varepsilon(0), \phi) &\leq \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon} \\
&\leq \sqrt{2}\varepsilon\overline{h} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon} + \sqrt{2\varepsilon\overline{h}} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon} \\
&\leq \sqrt{2}\varepsilon\overline{h} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon} + \sqrt{2\overline{h}} C_0(\Omega, h) \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon}
\end{aligned}$$

On fait quelques calculs sur la relation $\gamma^\varepsilon = \sqrt{6}\alpha^\varepsilon \left(1 + (\eta^\varepsilon)^{\zeta-1}\right)$, qui est déjà obtenue dans la preuve du lemme 2.3, on a

$$\begin{aligned}
\gamma^\varepsilon &= \sqrt{6}\alpha^\varepsilon \left(1 + (\eta^\varepsilon)^{\zeta-1}\right) = \sqrt{6}\varepsilon^{-1}\hat{\alpha} \left(1 + \left(\varepsilon^{-1}\hat{\eta}\right)^{\zeta-1}\right) \\
&= \sqrt{6}\varepsilon^{-1}\hat{\alpha} \left(1 + \varepsilon^{1-\zeta} (\hat{\eta})^{\zeta-1}\right) \leq \varepsilon^{-1}\hat{\gamma} \quad \forall \zeta \in]0, 1[,
\end{aligned}$$

où $\hat{\gamma} = \sqrt{6}\hat{\alpha} \left(1 + (\hat{\eta})^{\zeta-1}\right)$ est une constante ne dépend de ε.
Donc, (2.33) implique que

$$\left(\left(P_\zeta^\varepsilon\right)' \left(u_\zeta^\varepsilon(0)\right), \phi\right) \leq \varepsilon^{-1}\hat{\gamma} \left\|u_\zeta^\varepsilon(0)\right\|_{2,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}.$$

De mème que

$$a(u_\zeta^\varepsilon(0), \phi) \quad \leq 2\mu \left\|u_\zeta^\varepsilon(0)\right\|_{2,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \in]0, 1]$, on voit que

$$\varepsilon^3 \|u_0^\varepsilon\|_{2,\Omega^\varepsilon}^2 \leq \|\widehat{u}_0\|_{2,\Omega}^2 \quad .$$

Donc il résulte de (3.23) que

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \phi\right)\right| \leq\ & \left(\sqrt{2}\varepsilon\overline{h} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} + C_0(\Omega, h) \sqrt{2\overline{h}} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} + \right. \\
& \left. +2\mu \left\|u_\zeta^\varepsilon(0)\right\|_{2,\Omega^\varepsilon} + \varepsilon^{-1}\hat{\gamma} \left\|\left(u_\zeta^\varepsilon(0)\right)\right\|_{2,\Omega^\varepsilon}\right) \|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon}
\end{aligned}$$

si en multipliant cette inégalité par $\varepsilon^{\frac{5}{2}}$, on obtient

$$\varepsilon^{\frac{5}{2}} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq c_0 \tag{3.24}$$

où

$$c_0 = \sqrt{2\overline{h}} \left\| \widehat{f}^\varepsilon(0) \right\|_{0,\Omega} + C_0(\Omega, h) \sqrt{2\overline{h}} \left\| \widehat{f}^\varepsilon(0) \right\|_{0,\Omega} + 2\mu \left\| \widehat{u}_0 \right\|_{2,\Omega} + \hat{\gamma} \left\| \widehat{u}_0 \right\|_{2,\Omega}$$

(ne dépend pas de ε).

En passant à la limte inférieure en ζ à guuche dans (3.22), alors

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\mu}{16} \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{l^\varepsilon}{16} \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \leq \\
\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{4\varepsilon^2 \overline{h}^2}{\mu} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{2\overline{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds
\end{gathered} \tag{3.25}$$

En multipliant maintenant (3.25) par $2\varepsilon^5$ on obtient

$$\begin{gathered}
\varepsilon^5 \left[\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\mu}{8} \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds \right] + \varepsilon^5 \frac{l^\varepsilon}{8} \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \leq \\
\varepsilon^5 \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{8\varepsilon^7 \overline{h}^2}{\mu} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{4\overline{h}\varepsilon^6}{3l^\varepsilon} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds.
\end{gathered}$$

Cela montre que l'existence d'une constante C ne dépond de ε, telle que

$$\varepsilon^5 \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \varepsilon^5 \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \varepsilon^4 \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \leq C \tag{3.26}$$

où

$$\begin{aligned}
&c = \min(1, \frac{\mu}{8}, \frac{\hat{l}}{8}), \\
&Q =]0, T[\times \Omega, \\
&C = \frac{1}{c} \left((c_0)^2 + \frac{8\overline{h}^2}{\mu} \left\| \frac{\partial \widehat{f}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{4\overline{h}}{3\hat{l}} \left\| \frac{\partial \widehat{f}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right) .
\end{aligned}$$

En particulier de (3.26) on a

$$\varepsilon^5 \left(\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds \right) \leq C$$

Cela signifie également que l'estimation (3.6). Pour démontrer (3.7), nous appliquons l'inégalité de Poincaré ;

$$\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2} \leq 2\overline{h}^{2}\varepsilon^{2}\left\|\nabla\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2} + 2\overline{h}\varepsilon\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}\left|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right|^{2}d\tau \tag{3.27}$$

De (3.26) et (3.27), on déduit que

$$\varepsilon^{3}\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds \leq 2\max\left(\overline{h}^{2},\overline{h}\right)C$$

En passant de cette estimation au domaine fixe Ω on obtient

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{0}^{t}\left\|\varepsilon^{2}\frac{\partial\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega}^{2}ds + \int_{0}^{t}\left\|\varepsilon^{3}\frac{\partial\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega}^{2}ds \leq D$$

d'où le résultat.

Preuve de la théorème 3.2.

• Pour obtenir la première estimation de (3.8), on choisit dans (3.2) $\hat{\phi} = \hat{u}^{\varepsilon}(t) + \xi$, $\xi \equiv (\xi, 0, 0) \in H_0^1(\Omega)^3$ on obtient

$$\begin{gathered}\int_{\Omega}\frac{\partial\hat{p}^{\varepsilon}}{\partial x_1}\xi dx'dz \leq \varepsilon^{2}\left(\frac{\partial\widehat{u}_{1}^{\varepsilon}}{\partial t}(t),\xi\right) + \\ \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\left[\varepsilon^{2}\mu\left(\frac{\partial\hat{u}_{1}^{\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial\hat{u}_{j}^{\varepsilon}}{\partial x_1}\right)(t)\right]\frac{\partial\xi}{\partial x_j}dx'dz + \int_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial\hat{u}_{1}^{\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_1}\right)(t)\frac{\partial\xi}{\partial z}dx'dz + \\ +\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left(\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^{\varepsilon}+\xi\right)\right| - \left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^{\varepsilon}\right)\right|\right)dx'dz - \left(\widehat{f}^{\varepsilon}(t),\xi\right), \quad \forall t \in [0,T]\end{gathered}$$

En intégrant cette l'inéquation en temps pour $s \in [0,t]$ et en utilisant l'inégalité de Hölder , on trouve

$$\begin{gathered}\int_{0}^{t}\left(\int_{\Omega}\frac{\partial\hat{p}^{\varepsilon}}{\partial x_1}(x,s)\xi(x,s)dx\right)ds \leq \varepsilon^{2}\left(\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega}^{2}ds\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_{0}^{t}\|\xi(s)\|_{1,\Omega}^{2}ds\right)^{\frac{1}{2}} + \\ \sum_{j=1}^{2}\varepsilon^{2}\mu\left[\left(\int_{0}^{t}\|\frac{\partial\hat{u}_{1}^{\varepsilon}}{\partial x_j}(s)\|_{0,\Omega}^{2}ds\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{0}^{t}\|\frac{\partial\hat{u}_{j}^{\varepsilon}}{\partial x_1}(s)\|_{0,\Omega}^{2}ds\right)^{\frac{1}{2}}\right].\left(\int_{0}^{t}\|\frac{\partial\xi}{\partial x_j}(s)\|_{0,\Omega}^{2}ds\right)^{\frac{1}{2}} + \\ +\mu\left[\left(\int_{0}^{t}\|\frac{\partial\hat{u}_{1}^{\varepsilon}}{\partial z}(s)\|_{0,\Omega}^{2}ds\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{2}\left(\int_{0}^{t}\|\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_1}(s)\|_{0,\Omega}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].\left(\int_{0}^{t}\|\frac{\partial\xi}{\partial z}\|_{0,\Omega}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} +\end{gathered}$$

$$\sqrt{2}\hat{\alpha}\sqrt{|\Omega|}\sqrt{t}\left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^t \|\widehat{f}^{\varepsilon}(t)\|_{0,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'après les etimations (3.4) et (3.7), il vient que

$$\int_0^t \left(\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}(x,s)\xi(x,s)dx\right) ds \leq C' \left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\sum_{j=1}^{2} \mu C. \left(\int_0^t \|\frac{\partial \xi}{\partial x_j}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \mu C \left(\int_0^t \|\frac{\partial \xi}{\partial z}\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\sqrt{2}\hat{\alpha}\sqrt{|\Omega|}\sqrt{t}\left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + c\left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En remplaçant dans cette l'inéquation ξ par $-\xi$, on obtient

$$\left|\int_0^t \left(\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}(x,s)\xi(x,s)dx\right) ds\right| \leq C' \left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\sum_{j=1}^{2} \mu C. \left(\int_0^t \|\frac{\partial \xi}{\partial x_j}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \mu C \left(\int_0^t \|\frac{\partial \xi}{\partial z}\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\sqrt{2}\hat{\alpha}\sqrt{|\Omega|}\sqrt{t}\left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + c\left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

on déduit que l'application :

$$\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}; \quad L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$\xi \longrightarrow \int_0^t \left(\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}(x,s)\xi(x,s)dx\right) ds$$

est linéaire et continue, donc $\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}$ est une fonction dans le dual de l'espace $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$. Ce qui prouve (3.8) pour $i = 1$. Nous choisissons $\hat{\phi} = \hat{u}^\varepsilon(t) \pm \xi, \xi \equiv (0,\xi,0)$ pour prouver le cas $i = 2$.

De même pour obtenir (3.9), on choisit $\hat{\phi} = \hat{u}^\varepsilon(t) + \xi, \xi \equiv (0,0,\xi)$, puis en intégrant en temps pour $s \in [0,t]$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega}\frac{\partial\hat{p}^{\varepsilon}}{\partial z}\xi dx'dz \leq \varepsilon^{4}\left(\frac{\partial\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}(t),\xi\right)+$$
$$+\int_{\Omega}2\mu\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z}dx'dz+\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\mu\varepsilon^{2}\left(\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{j}}+\frac{\partial\hat{u}_{j}^{\varepsilon}}{\partial z}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x_{j}}dx'dz+$$
$$+\sqrt{2}\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left(\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^{\varepsilon}+\xi\right)\right|-\left|\widetilde{D}\left(\hat{u}^{\varepsilon}\right)\right|\right)dx'dz-\left(\widehat{f}^{\varepsilon}(t),\xi\right),\qquad\forall t\in[0,T]$$

de (3.4) et (3.7), on déduit que

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{t}\left(\int_{\Omega}\frac{\partial\hat{p}^{\varepsilon}}{\partial z}(x,s)\xi(x,s)dx\right)ds\right|=\left|\int_{0}^{t}\frac{1}{\varepsilon}\left\langle\frac{\partial\hat{p}^{\varepsilon}}{\partial z}(s),\xi(s)\right\rangle ds\right|\leq C'\|\xi\|_{L^{2}(0,T,H^{1}(\Omega))}+$$
$$\mu C\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial\xi}{\partial x_{j}}\right\|_{L^{2}(Q)}+\left\|\frac{\partial\xi}{\partial z}\right\|_{L^{2}(Q)}\right)+$$
$$\sqrt{2}\hat{\alpha}\sqrt{|\Omega|}\sqrt{t}\|\xi\|_{L^{2}(0,T,H^{1}(\Omega))}+c\|\xi\|_{L^{2}(0,T,H^{1}(\Omega))}.$$

3.4 Résultats de convergence

Théorème 3.3. *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.2, il existe* $u^{\star}=(u_{1}^{\star},u_{2}^{\star})\in L^{2}(0,T,V_{z})$ *et* $p^{\star}\in L^{2}(0,T,L_{0}^{2}(\Omega))$ *tels que*

$$\hat{u}_{i}\rightharpoonup u_{i}^{\star},\ \varepsilon^{2}\frac{\partial\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\rightharpoonup 0,\quad i=1,2 \ \textit{dans}\ L^{2}(0,T,V_{z}),\tag{3.28}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial x_{j}}\rightharpoonup 0,\ \varepsilon^{3}\frac{\partial^{2}\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial x_{j}\partial t}\rightharpoonup 0,\ i,j=1,2\ \textit{dans}\ \ L^{2}(0,T,L^{2}(\Omega)),\tag{3.29}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial z}\rightharpoonup 0\ \textit{dans}\ \ L^{2}(0,T,L^{2}(\Omega)),\tag{3.30}$$

$$\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\rightharpoonup 0,\ \varepsilon^{4}\frac{\partial^{2}\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}\partial t}\rightharpoonup 0,\ i=1,2\ \textit{dans}\ \ L^{2}(0,T,L^{2}(\Omega)),\tag{3.31}$$

$$\varepsilon\hat{u}_{3}^{\varepsilon}\rightharpoonup 0,\ \varepsilon^{3}\frac{\partial\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\rightharpoonup 0\ \textit{dans}\ \ L^{2}(0,T,L^{2}(\Omega)),\tag{3.32}$$

$$\hat{p}^{\varepsilon}\rightharpoonup p^{\star},\ \textit{dans}\ L^{2}(0,T,L^{2}(\Omega))\ \text{et}\ \ p^{\star}\textit{ne dépendent que de } x'.\tag{3.33}$$

Preuve.

On déduit de (3.5) que la suite $(\widehat{u}_{1}^{\varepsilon},\widehat{u}_{2}^{\varepsilon})_{\varepsilon}$ est borné dans $L^{2}(0.T,V_{z})$, donc le résultat de convergence faible.

De même d'après (3.7), on déduit que $\left(\varepsilon^2\frac{\partial\widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial t},\varepsilon^2\frac{\partial\widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon$ est borné dans $L^2\left(0.T,V_z\right)$ et par suite converge vers une limite (l_1,l_2), d'autre par il vient de (3.5) que la suite $(\varepsilon^2\widehat{u}_1^\varepsilon,\varepsilon^2\widehat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ converge fort vers $(0,0)$ dans $L^2\left(0.T,V_z\right)$, donc $(l_1,l_2)=(0,0)$.

De (3.5), (3.7) et (3.28), on obtient (3.29).

De (3.29) et comme $\operatorname{div}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)=0$, on trouve la premiere convergence dans (3.30).

De (3.5) on trouve $\|\varepsilon\widehat{u}_3^\varepsilon\|_{0,\Omega}\leq C$, et d'après (3.4) on obtient la premiere convergence dans (3.31), aussi la deuxième convergence découle à partir de (3.6) et (3.7) .

Pour d'obtenir (3.32), on utilise l'estimation $\|\varepsilon\widehat{u}_3^\varepsilon\|_{0,\Omega}\leq C$ et le fait que $\operatorname{div}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)=0$, on trouve la convergence faible de $\left(\varepsilon\widehat{u}_3^\varepsilon\right)_\varepsilon$ vers 0, et la deuxième convergence est clair à partir de (3.7).

Il vient de (3.7) que la suite $\left(\varepsilon^3\frac{\partial\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2\left(0.T,V_z\right)$, et par suite converge vers une limite θ, d'autre par on a $\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon\rightharpoonup 0$, cela implique que $\varepsilon^3\hat{u}_3^\varepsilon\to 0$, on trouve donc $\theta=0$. Pour (3.33) , on utilise l'analogue de [26, 27] .

□

En passant tous les termes non linéaires sur le droit et les termes linéaires sur la gauche dans l'inégalité variationnelle (3.1). Ensuite, on applique $\underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{lim\,inf}$ sur la gauche et $\underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{lim}$ la droite, en utilisant les résultats de convergence du théorème 3.3, on en déduit

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\mu\int_\Omega\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t)\,\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-u_i^\star(t))dx'dz-\int_\omega p^\star(x',t)\left(\hat{\phi}_1(x',h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_1}+\hat{\phi}_2(x',h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)dx'\\ -\int_\Omega p^\star(x',t)\left(\frac{\partial\hat{\phi}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\hat{\phi}_2}{\partial x_2}\right)dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega u_i^\star(x',h(x'),t)\left[\hat{\phi}_i(x',h(x'))-u_i^\star(x',h(x'),t))\right]dx'\\ +\hat{\alpha}\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial z}\right|-\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\right|\right)dx'dz+\hat{k}\int_\omega(|\hat{\phi}|-|u^\star(t)|)dx'\geq(\hat{f}(t),\hat{\phi}-u^\star(t)),\\ \forall\hat{\phi}\in\Pi(K),\forall t\in]0,T[,\\ u_i^\star(x',z,0)=\widehat{u}_{0,i},\quad i=1,2\end{gathered}\tag{3.34}$$

où

$$\Pi(K)=\left\{\overline{\phi}=\left(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2\right)\in H^1(\Omega)^2:\exists\hat{\phi}_3\text{ such that }\phi=\left(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2,\hat{\phi}_3\right)\in K\right\}.$$

On peut montrer à partir de (3.28), (3.33) et comme $\operatorname{div}(\hat{u}^{\varepsilon}) = 0$ que les solutions limites$\{u^{\star},\ p^{\star}\}$ vérifie l'équation [11] :

$$\begin{aligned} &\int_{\omega} p^{\star}(x',t)\left(u_1^{\star}(x',h(x'),t)\frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2^{\star}(x',h(x'),t)\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)dx' \\ &+\int_{\Omega} p^{\star}(x',t)\left(\frac{\partial u_1^{\star}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^{\star}}{\partial x_2}\right)(t)\,dx'dz = 0,\ \forall t\in\,]0,T[\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

3.5 Propriétés des solutions limites

Dans cette section, nous donnons les équations satisfaites $\{u^{\star},\ p^{\star}\}$ en Ω et les inégalités pour la trace de la vitesse $u^{\star}(x',0,t)$ et la contrainte $(\partial u^{\star}/\partial z)(x',0,t)$ sur ω.

Lemme 3.2. *Sous les hypothèses que le théorème précédent. On a*

$$-\frac{\partial}{\partial z}\,\widetilde{\varrho}_i^{\star}(t) = \hat{f}_i(t) - \frac{\partial}{\partial x_i}p^{\star}(t)\,,\ i=1,2,\ \textit{dans}\ L^2(\Omega), \tag{3.36}$$

où $\widetilde{\varrho}^{\star} = (\widetilde{\varrho}_1^{\star},\widetilde{\varrho}_2^{\star})$ *vérifie la loi*

$$\left\{\begin{array}{ll} \widetilde{\varrho}^{\star} = \mu\dfrac{\partial u^{\star}}{\partial z}+\hat{\alpha}\dfrac{\partial u^{\star}/\partial z}{|\partial u^{\star}/\partial z|}, & si\ \left|\dfrac{\partial u^{\star}}{\partial z}\right| \neq 0, \\ |\widetilde{\varrho}^{\star}| \leq \hat{\alpha}, & si\ \left|\dfrac{\partial u^{\star}}{\partial z}\right| = 0 \end{array}\right. \quad \textit{dans}\ \Omega\times\,]0,T[\tag{3.37}$$

et $\varrho^{\star} = -\nabla p^{\star} + \widetilde{\varrho}^{\star}$ *son déviateur.*

Aussi les traces $\pi^{\star}, s^{\star}$ *et* $\widetilde{\tau}^{\star}$ *tels que*

$$s^{\star}(t) = u^{\star}(x',0,t)\quad,\quad \pi^{\star}(t) = \frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(x',0,t)\,,$$

et

$$\left\{\begin{array}{ll} \widetilde{\tau}^{\star} = \mu\pi^{\star}+\hat{\alpha}\dfrac{\pi^{\star}}{|\pi^{\star}|}, & si\ \ |\pi^{\star}|\neq 0 \\ |\widetilde{\tau}^{\star}| \leq \hat{\alpha}, & si\ \ |\pi^{\star}| = 0 \end{array}\right. \quad sur\ \omega\times\,]0,T[\,, \tag{3.38}$$

et sa loi d'inverse

$$\mu\pi^{\star} = \left\{\begin{array}{ll} 0, & si\ \ |\widetilde{\tau}^{\star}| \leq \hat{\alpha} \\ \widetilde{\tau}^{\star} - \hat{\alpha}\dfrac{\pi^{\star}}{|\pi^{\star}|}, & si\ \ |\widetilde{\tau}^{\star}| > \hat{\alpha} \end{array}\right. \quad sur\ \omega\times\,]0,T[\,,$$

vérifient

$$\int_{\omega}\hat{k}\left(|\psi + s^{\star}(t)| - |s^{\star}(t)|\right)dx' - \int_{\omega}\widetilde{\tau}^{\star}(t)\,.\psi dx' \geq 0,\ \forall\psi\in L^2(\omega)^2\ \forall t\in\,]0,T[\,, \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} &|\ \widetilde{\tau}^{\star}| < \widehat{k} \Rightarrow s^{\star} = 0 \\ &|\ \widetilde{\tau}^{\star}| = \widehat{k} \Rightarrow \exists\ \lambda \geq 0\ \textit{tel que}\ s^{\star} = \lambda \widetilde{\tau}^{\star} \end{aligned} \qquad p.p\ sur \quad \omega \times]0, T[\,. \tag{3.40}$$

Preuve.

$\triangleright$ En effet, remplaçons dans (3.34) $\hat{\phi}$ par $u^{\star}(t) + \lambda\hat{\psi}$ où $\hat{\psi} = \left(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2\right) \in H_0^1(\Omega)^2$ et $\lambda > 0$, divisons l'inéquation obtenue par λ puis faisons tendre λ vers 0, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}\mu\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial z}(t)\frac{\partial}{\partial z}\hat{\psi}dx'dz - \int_{\Omega}p^{\star}(x',t)\left(\frac{\partial u_1^{\star}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{\star}}{\partial x_2}\right)(t)\,dx'dz \\ - \int_{\omega}p^{\star}(x',t)\left(u_1^{\star}(x',h(x'),t)\frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2^{\star}(x',h(x'),t)\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)dx' \\ - \int_{\Omega}p^{\star}(x',t)\left(\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial x_2}\right)dx'dz + \sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_{\omega}u_i^{\star}(x',h(x'),t)\hat{\psi}_i(x',h(x'))dx' \\ +\hat{\alpha}\lim_{\lambda\to 0}\int_{\Omega}\lambda^{-1}\left(\left|\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t) + \lambda\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\right| - \left|\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t)\right|\right)dx'dz \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i(t), \hat{\psi}_i),\ \forall t \in]0, T[\end{aligned} \tag{3.41}$$

de (3.35) et (3.41), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}\mu\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial z}(t)\frac{\partial}{\partial z}\hat{\psi}dx'dz - \int_{\Omega}p^{\star}(x',t)\left(\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial x_2}\right)dx'dz \\ +\hat{\alpha}\lim_{\lambda\to 0}\int_{\Omega}\lambda^{-1}\left(\left|\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t) + \lambda\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\right| - \left|\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t)\right|\right)dx'dz \\ \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i(t), \hat{\psi}_i), \quad \forall t \in]0, T[\end{aligned}$$

Lorsque $\left|\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t)\right| \neq 0$, est telle que la fonctionelle $v \to \int_{\Omega}|v|\,dx'dz$ est dérivable. On trouve donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}\mu\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial z}(t)\frac{\partial}{\partial z}\hat{\psi}dx'dz - \int_{\Omega}p^{\star}(x',t)\left(\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial x_2}\right)dx'dz + \\ +\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t)\right|^{-1}\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dx'dz \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i(t), \hat{\psi}_i), \quad \forall t \in]0, T[\end{aligned}$$

en remplaçant $\hat{\psi}$ par $\left(-\hat{\psi}\right)$, on obtient l'inégalité inverse. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}\mu\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial z}(t)\frac{\partial}{\partial z}\hat{\psi}dx'dz - \int_{\Omega}p^{\star}(x',t)\left(\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial x_2}\right)dx'dz + \\ +\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t)\right|^{-1}\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dx'dz = \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i(t), \hat{\psi}_i), \quad \forall t \in]0, T[\end{aligned}$$

par la formule de Green, il vient que

$$-\sum_{i=1}^{2}\mu\int_{\Omega}\frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2}(t)\,\hat{\psi}_i dx' + \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}(x',t)\hat{\psi}_i dx'dz$$
$$-\hat{\alpha}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\right|^{-1}\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\right\}.\hat{\psi}dx'dz = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(t)\,\hat{\psi}_i dx'dz. \tag{3.42}$$

Par conséquent (3.42) équivaut à (3.36). Par [12] on retrouve le second cas de (3.37).

$\triangleright$ On va approcher la fonctionelle $\hat{\jmath}\left(\hat{\phi}\right) = \hat{k}\int_{\omega}|\hat{\phi}|dx'$ par la famille régularisante $\left(\hat{\jmath}_\epsilon\left(\hat{\phi}\right)\right)_{\epsilon\succ 0}$, et choisit dans (3.1) , $\hat{\phi} = u^\star(t) + \hat{\psi}$ avec $\hat{\psi} = \left(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2\right) \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)^2$. Donc on aura l'équation variationnelle

$$\sum_{i=1}^{2}\mu\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t)\,\frac{\partial}{\partial z}\hat{\psi}dx'dz - \int_{\Omega}p^\star(x',t)\left(\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial x_2}\right)dx'dz +$$
$$+\hat{\alpha}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\right|^{-1}\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dx'dz + \left\langle \hat{\jmath}'_\epsilon(u^\star(t)),\hat{\psi}\right\rangle = (\hat{f}(t),\hat{\psi}),\quad \forall\hat{\phi}\in\Pi(K),$$

lorsque

$$\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\right| \neq 0.$$

Par la formule de Green, on trouve

$$-\sum_{i=1}^{2}\mu\int_{\Omega}\frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2}(t)\,\hat{\psi}_i dx' - \sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\mu\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(x',0,t)\,\hat{\psi}_i dx' +$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}(x',t)\hat{\psi}_i dx'dz - \hat{\alpha}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\right|^{-1}\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\right\}.\hat{\psi}dx'dz \tag{3.43}$$
$$-\hat{\alpha}\int_{\omega}\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\right|^{-1}\frac{\partial u^\star}{\partial z}(t)\,.\hat{\psi}dx'dz + \left\langle \hat{\jmath}'_\epsilon(u^\star(t)),\hat{\psi}\right\rangle = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(t)\,\hat{\psi}_i dx'dz.$$

De (3.42) et (3.43), on trouve

$$\left\langle \hat{\jmath}'_\epsilon(u^\star(t)),\hat{\psi}\right\rangle = \int_{\omega}\mu\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0,t)\,.\hat{\psi}dx' + \hat{\alpha}\int_{\omega}\left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0,t)\right|^{-1}\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0,t)\,.\hat{\psi}dx'.$$

Utilisons la monotonie de la différentielle $\hat{\jmath}'_\epsilon$, on déduit que

$$\hat{\jmath}_\epsilon\left(\hat{\psi}+u^\star(t)\right) - \hat{\jmath}_\epsilon(u^\star(t)) \geq \int_{\omega}\mu\left(\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right)_\tau(t)\,.\hat{\psi}dx' + \hat{\alpha}\int_{\omega}\left|\left(\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right)_\tau(t)\right|^{-1}\left(\frac{\partial u^\star}{\partial z}\right)_\tau(t)\,.\hat{\psi}dx'. \tag{3.44}$$

Par un passage à la limite dans l'inéquation (3.44) lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$, on trouve

$$\int_{\omega} \hat{k}\left(|\hat{\psi}+u^{\star}(x',0,t)|-|u^{\star}(x',0,t)|\right)dx'-$$
$$\int_{\omega}\left\{\mu\left(\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}\right)_{\tau}(t)+\hat{\alpha}\left|\left(\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}\right)_{\tau}(t)\right|^{-1}\left(\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}\right)_{\tau}(t)\right\}.\hat{\psi}dx' \geq 0.$$

Donc

$$\int_{\omega} \hat{k}\left(|\psi+s^{\star}(t)|-|s^{\star}(t)|\right)dx' - \int_{\omega} \widetilde{\tau}^{\star}(t).\hat{\psi}dx' \geq 0, \tag{3.45}$$

telle que

$$\widetilde{\tau}^{\star}(t) = \mu\pi^{\star}(t) + \hat{\alpha}\frac{\pi^{\star}}{|\pi^{\star}|}(t), \quad \text{si } |\pi^{\star}(t)| \neq 0,$$

et on retrouve ainsi l'inégalité (3.45) si on pose $\left|\frac{\partial u^{\star}}{\partial z}(t)\right| = 0$ avec que $|\widetilde{\varrho}^{\star}| \leq \hat{\alpha}$. Alors que l'inégalité (3.45) est valable pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\omega)^2$, la densité de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$ donne (3.39). Pour (3.40), on utilisons l'analogue de [1] .

□

Lemme 3.3. *La solution $u^{\star}$ de l'inégalité variationnelle (3.34) est unique dans* $L^{\infty}(0,T,V_z)$.

Preuve. Soit $u^{\star,1}$, $u^{\star,2}$ deux solutions de (3.34). Prenant $\hat{\phi} = u^{\star,2}$ et $\hat{\phi} = u^{\star,1}$ respectivement, comme des fonctions de test dans (3.34) nous obtenons

$$-\mu\int_{\Omega}\left|\frac{\partial}{\partial z}(u^{\star,1}-u^{\star,2})(t)\right|^2 dx'dz - \hat{l}\int_{\omega}\left|(u^{\star,1}-u^{\star,2})(x',h(x'),t)\right|^2 dx' \geq 0,$$

donc

$$\mu\left\|\frac{\partial}{\partial z}(u^{\star,1}-u^{\star,2})(t)\right\|^2_{0,\Omega} = 0 \text{ et } \hat{l}\left\|u^{\star,1}-u^{\star,2}(t)\right\|^2_{0,\omega} = 0, \ \forall t \in \left]0,T\right[.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on déduit l'unicité dans $L^{\infty}(0,T,V_z)$. □

Jusqu'ici, nous avons apporté les paramètres essentiels du modèle limite de notre problème, nous avons récupéré la loi de comportement de Bingham (2d) et la condition de frotement de Tresca, qui nous avons dejà mis dans le problème initial. Il ne nous reste donc qu'à chercher un équation de type Reynolds d'une autre formule de l'équation (3.36).

3.6 L'équation généralisée de Reynolds

Théorème 3.4. *Sous les hypothèses des théorèmes précédents, les traces* $s^\star, \pi^\star$ *satisfont l'équation généralisée de Reynolds suivante*

$$\int_\omega \left(\frac{h^3}{12}\nabla p^\star(t) + \widetilde{F} - \frac{h}{2}s^\star(t) + \mu \int_0^h u^\star(x',y,t)\,dy + \hat{\alpha}\int_0^h\int_0^y \frac{\partial u^\star/\partial\xi}{|\partial u^\star/\partial\xi|}(x',\xi,t)\,d\xi dy - \right.$$
$$\left. -\frac{h}{2}\mu u^\star(x',h,t) - \frac{\hat{\alpha}h}{2}\int_0^h \frac{\partial u^\star/\partial\xi}{|\partial u^\star/\partial\xi|}(x',\xi,t)\,d\xi \right).\nabla\phi(x')\,dx' = 0, \forall\phi \in H^1(\omega), \forall t\in\left]0,T\right[, \tag{3.46}$$

où

$$\widetilde{F}(x',t) = \int_0^h F(x',y,t)\,dy - \frac{h}{2}F(x',h,t),$$
$$F(x',y,t) = \int_0^y\int_0^\xi \widehat{f}^\varepsilon(x',\theta,t)\,d\theta d\xi.$$

Preuve. Nous intégrons deux fois (3.36) entre 0 et z, on obtient

$$-\mu u^\star(x',z;t) + \mu s^\star(t) - \hat{\alpha}\int_0^z \frac{\partial u^\star/\partial\xi}{|\partial u^\star/\partial\xi|}(x',\xi,t)\,d\xi + \mu\,\pi^\star(t)\,z + \hat{\alpha}\left\{\frac{\pi^\star}{|\pi^\star|}\right\}(t)\,z$$
$$= \int_0^z\int_0^\xi \hat{f}(x',y,t)\,dyd\xi - \nabla p^\star(x',t)\frac{z^2}{2},$$

en particulier pour $z = h$ on obtient

$$\begin{aligned} -\mu u^\star(x',h,t) + \mu s^\star(t) - \hat{\alpha}\int_0^h \frac{\partial u^\star/\partial\xi}{|\partial u^\star/\partial\xi|}(x',\xi,t)\,d\xi + \mu\,\pi^\star(t)\,h + \hat{\alpha}\left\{\frac{\pi^\star}{|\pi^\star|}\right\}(t)\,h \\ = \int_0^h\int_0^\xi \hat{f}(x',y,t)\,dyd\xi - \nabla p^\star(x',t)\frac{h^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Intégrant (3.47) entre 0 et h, on obtient

$$\begin{aligned} -\mu\int_0^h u^\star(x',y,t)\,dy + \mu s^\star(t)\,h - \hat{\alpha}\int_0^h\int_0^y \frac{\partial u^\star/\partial\xi}{|\partial u^\star/\partial\xi|}(x',\xi,t)\,d\xi dy + \mu\,\pi^\star(t)\frac{h^2}{2} + \hat{\alpha}\left\{\frac{\pi^\star}{|\pi^\star|}\right\}(t)\frac{h^2}{2} \\ = \int_0^h\int_0^y\int_0^\xi \hat{f}(x',\theta,t)\,d\theta d\xi dy - \nabla p^\star(x',t)\frac{h^3}{6}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

De (3.47) - (3.48), on en déduit (3.46). $\square$

Bibliographie

[1] G. Bayada, M. Boukrouche, *On a free boundary problem for the Reynolds equation derived from the Stokes systems with Tresca boundary conditions,* J. Math. Anal. Appl. **282** (2003), 212-231.

[2] H. Benseridi, Y. Letoufa, M. Dilmi, *On the Asymptotic Behavior of an interface Problem in a Thin Domain,* M. Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci. **89** (2019), no. 2, 1-10.

[3] D. Benterki, H. Benseridi, M. Dilmi, *On a non-stationary, non-Newtonian lubrication problem with Tresca fluid-solid law*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems. **27** (2019) no. 5, 719–730.

[4] Bingham, E. C, *An Investigation of the Laws of Plastic Flow*, U.S. Bureau of Standards Bulletin. **13** (1916), 309–353.

[5] M. Boukrouche, R. El mir, *Asymptotic analysis of non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law,* Nonlinear analysis, Theory Methods and applications. **59** (2004), 85–105.

[6] M. Boukrouche, F. Boughanim, H. Smaoui, *Asymptotic behavior of a non-Newtonian flow with stick- stip condition*, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 11, (2004), 71–80,

[7] M. Boukrouche, G. ukaszewicz, *On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions*, Math Mod and Meth in Applied Sciences. **14** (2004), no. 6, 913–941.

[8] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1983.

[9] R. Bunoui, S. Kesavan, *Asymptotic behavior of a Bingham fluid in thin layers*, J. Math. Anal. Appl. **293** (2004), no. 2, 405–418.

[10] J. C. De Los Reyes and S. Gonz alez, *Path following methods for steady laminar Bingham flow in cylindrical pipes*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **43** (2009), no. 1, 81–117.

[11] M. Dilmi, H. Benseridi, A. Saadallah, *Asymptotic analysis of a Bingham fluid in a thin domain with Fourier and Tresca boundary conditions*, Adv. Appl. Math. MEch. **6** (2014), 797–810.

[12] G. Duvant, J.L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod Paris 1972.

[13] H. T. Gab. *Asymptotic Stability of the Viscoelastic Equation with Variable Coefficients and the Balakrishnan-Taylor Damping*. Taiwanese J. Math. **22** (2018), no. 4, 931–948.

[14] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, New York, 1984.

[15] B. O. Jacobson and B. J. Hamrock, *Non-Newtonian Fluid Model Incorporated Into Elastohydrodynamic Lubrication of Rectangular Contacts*, J. Tribol. **106** (1984), no. 2, 275–282.

[16] Y. Letoufa, H. Benseridi, M. Dilmi, *Study of Stokes dynamical system in a thin domain with Fourier and Tresca boundary conditions,* Asian-European Journal of Mathematics. (2019), doi : abs/10.1142/S1793557121500078 .

[17] R. Pit, *Mesure locale de la vitesse à l'interface solide-liquide simple: Glissement et rôle des interactions*. Thèse Physique Université Paris XI, 1999.

[18] R. Pit, H. Hervet, L. Léger, *Direct experimental evidences for flow with slip at hexadecane solid interfaces*. La revue de Métallurgie-CIT/Science, 2001.

[19] A. Strozzi, *Formulation of three lubrication problems in term of complementarity*. Wear. **104** (1985), 103–119.

[20] R. Temam, I. Ekeland, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Gauthier-Villars Paris, 1974.

[21] JL. Tevaarwerk, *The shear of hydrodynamic oil films*. Phd Thesis: Cambridge, England, 1976.

[22] M. Fuchs, J.F. Grotowski, and J. Reuling, *On variational model for quasi-static Bingham fluids*, Math Meth and Meth in Applied Sciences. 19 (1996), 991-1015.

[23] M. Fuchs, G. Seregin, *Regularity results for the quasi-static Bingham variational inequality in dimensions two and three*, Mathematische Zeitschrift. 227 (1998), 525-541.

[24] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Volume (1), Dunod, Paris (1968).

[25] L. Chupin, *Modélisation et Analyse mathématique en films minces*, Institut Camille Jordan - INSA de Lyon, (2009). (math.univ-lyon1.fr/˜chupin/FICHIERS.../chupin-hdr-soutenance.pdf).

[26] R. El Mir, *Etude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides non-newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2005).

[27] F. Saidi, *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Etude mathématique et numérique*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2004).

Résumé

Le but de ce mémoire est l'analyse asymptotique d'un problème dynamique pour un fluide de Bingham dans un domaine borné à trois dimensions avec des condition aux limites de Fourier et Tresca. Nous prouvons d'abord les résultats d'existence et d'unicité pour la solution faible, puis nous étudions l'analyse asymptotique lorsqu'une dimension du domaine fluide tendent vers zéro. La convergence forte de la vitesse est prouvée. L'équation limite de Reynolds et la condition au limite de Tresca sont obtenu.

Mots-clés : *Problèmes aux limites, fluide de Bingham, approche asymptotique, Loi de Tresca,*

AMS Classification : *35R35, 76F10, 78M35.*

Abstract

In this thesis we consider the dynamic system for Bingham fluid in a three-dimensional thin domain with Fourier and Tresca boundary condition. We study the existence and uniqueness results for the weak solution, then we establish its asymptotic behavior, when the depth of the thin domain tends to zero. This study yields a mechanical laws that give a new description of the behavior this system.

Keywords : *Free boundary problems, Bingham fluid, Asymptotic approach, Tresca law, Reynolds equation.*

AMS Subject Classification : *35R35, 76F10, 78M35.*

ملخـــــــــــــــــــــــــص

في هذه المذكرة، نثبت أولاً وجود ووحدانية الحل للمعادلات الثابتة لسائل بينغهام في مجال ثلاثي الابعاد بشروط حدية لفوريه وتريسكا؛ ثم ندرس التحليل المقارب للمشكلة عندما يؤول السمك نحو الصفر تم إثبات التقارب القوي لنهاية معادلة رينولدز وفق شروط حدية لتريسكا المتحصل عليها من المسألة.

كلمات المفاتيح : الشروط الحدية، سائل بينغهام ، قانون تريسكا، معادلة رينولدز.