

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la
Recherche Scientifique**



Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Projet de fin de cycle

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Technologies

Filière: Génie mécanique

Spécialité: Energétique

Thème

**Simulation numérique du comportement mécanique
d'une prothèse du genou sous chargement
thermomécanique**

Devant le jury composé de :

.....

.....

.....

DR.GHERBI MED TAHER

Président

Examinateur

Examinateur

Encadreur

Présenté par :

BAHI Mahmoud Abdelhakim

GHEDAYER Ahmed younes

GHERMIT Abdelraouf

Année Académique 2019/2020

Dédicace

Nous dédions ce travail :

Pour ma mère et mon père.

*A tous les professeurs de département génie
mécanique*

Surtout DR.GHERBI MOHAMMED TAHER

Chef Département génie mécanique

*À tous les membres du comité d'évaluation, les
professeurs et docteurs*

Très cher Amis

Et pour tous les collègues étudiants

REMERCIEMENTS

A cette bonne occasion Nous tenons à offrir un gentil mot de remerciement

*Tout d'abord, nous remercions Dieu pour ce travail de mémoire et Nous remercions les parents, le **père** et la **mère**, et les dédions à cette réussite Je désire aussi remercier les professeurs de l'UniversitéHamma – Lakhdar , qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires. Je tiens à remercier spécialement **DR.GHERBI Med taher** pour tout les information et bon dirigément pour création cette memoire.*

Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos profonds remerciements et nos profondes reconnaissances aux tout frères, et nos Chers amis.

Merci à tous ceux qui nous aider dans ce travail un peu ou beaucoup

*Tous mes remerciements et mon estime à tous les enseignants du département de **génie mécanique**.*

Résumé:

Ce travail basé a le comportement mécanique d'un genou. L'objectif principal de ces travaux de recherche est de mettre en oeuvre un modèle permettant de simuler le comportement mécanique d'une genou, Une étude de chargement thermomécanique et la comportement mécanique de genou a été faite pour la détermination des charges (2 poids – 2 cas) 80 kg et 110 kg appliquées sur la genou . Ce qui a permis de développer un modèle d'éléments finis de la genou et d'en déduire leurs fréquences et les modes. L'analyse des réactions agissant sur la géométrie de genou , a été faite. Les calculs de la différente déformation et de la contrainte normale de la charge genou ont été développés

Mot clé : comportement, mécanique, genou, thermomécanique, deformation, charge, contrainte

Abstract :

This based work has the mechanical behavior of a knee. The main objective of this research is to implement a model to simulate the mechanical behavior of a knee,. A study of thermomechanical loading and the mechanical behavior of the knee was made to determine the loads (2 weight - 2 cases) 80 kg and 110 kg applied to the knee. This made it possible to develop a finite element model of the knee and to deduce their frequencies and modes. The analysis of the reactions acting on the knee geometry has been done. The calculations of the various deformation and normal stress of the knee load have been developed.

Key words: knee, mechanical, finite element, numerical, analyse, deformation.

ملخص:

هذا العمل القائم على أساس السلوك الميكانيكي للركبة. الهدف الرئيسي من هذا البحث هو تنفيذ نموذج لمحاكاة السلوك الميكانيكي للركبة. تمت دراسة الحمل الحراري الميكانيكي والسلوك الميكانيكي للركبة لتحديد الأحمال (2 وزن - حالتان) 80 (كجم) و (110) كجم مطبقة على الركبة. هذا جعل من الممكن تطوير نموذج محدد للركبة واستنتاج تردداتها وأنماطها. تم إجراء تحليل ردود الفعل التي تعمل على هندسة الركبة. تم تطوير حسابات التشوهات المختلفة والضغط الطبيعي لحمل الركبة.

الكلمات المفتاحية : السلوك الميكانيكي , الحمل الحراري, الركبة, تحليل , التشوهات , الضغط الطبيعي

Nomenclature:

F	Force unitaire
P	Le poids
M	la masse
\overline{M}_i	Moment d'inertie
\overline{F}_i	les forces d'inertie
I_{Ai}	tenseur d'inertie du tronçon
T_i	Modèle inertiel
GJ	module de torsion
Kp^2	rayon de giration pondéré
T	inerties de la section en traîné
μ_{ti}	respectivement la masse modale
ω_{ti}	pulsation propre
G	déformation en torsion
F(t)	la force externe
\bar{u}	Déplacement d'élément solide
[N]	la matrice d'interpolation reliant
[D]	matrice d'élasticité
$[M_e]$	Est la matrice de masse de l'élément
$[K_e]$	est la matrice de rigidité
$\{f_e\}$	est le vecteur des force nodales
γ	Capacités thermique massique
ε	Déformation
σ	Contrainte de flexion
V	Volume
δ	Vecteur des déplacements nodaux
ρ	Masse volumique
ψ	Angle de précession
θ	Angle de nutation
φ	Angel de torsion

Liste des figures :

Figure I.1. l'Articulation de genou	2
Figure I.2. surface articulaire de genou	3
Figure I.3. la rotule de genou	3
Figure I.4. les menisque de genou	4
Figure I.5. plateau de tibia de genou	5
Figure I.6. l'infirieur de femur	5
Figure I.7. piece de Remplacement de genou	6
Figure I.8. radioghrapique réel de prothese Uni	7
Figure I.9. diference de genou utilisé prothese Uni	7
Figure I.10. La prothese a glissement exemplaire	8
Figure I.11. les axes de genou	9
Figure I.12. Amplitude de rotation	10
Figure I.13: Mouvements de flexion extension du genou.....	11
Figure I.14: l'arthrose default de genou	11
Figure I.15: operation cas maladie réel	12
Figure III.1 image radiographique de la prothèse du genou position debout l'une face et l'autre profie.....	18
Figure III.2 Prothèse du genou sans fissure en 3D.....	19
Figure III.3 Prothèse du genou avec fissure en 3D.....	19
Figure III.4 (a) prothèse du genou en 3D étudié et (b) prothèse du genou en Réel.....	20
Figure III.5: Discrétisation par éléments triangulaires d'une digue.....	20
Figure. III.6: Discrétisation du solide.....	21
Figure III.7: Transformation du domaine physique (a) au domaine de calcul	22

Figure III.8 : Degrés de liberté et de nœuds de faisceau élément de genou.....	24
Figure IV.1: Maillage de genou isolé sans fissure.....	32
Figure IV.2: Maillage de genou isolé avec fissure.....	33
Figure IV.3 : la fréquence on fonction numéro de mode	34
Figure IV.4 : Mode de 1^{ere} déformée	35
Figure IV. 5 : Mode de 2^{ème} déformée	35
Figure IV.6 : Mode de 3^{ème} déformée	35
Figure IV.7 : Mode de 4^{ème} déformée	36
Figure IV.8 : Mode de 5^{ème} déformée	36
Figure IV.9 : Mode de 6^{ème} déformée	36
Figure IV.10: les Max déformation de prothèse de genou.....	37
Figure IV.11 : position de force de poids sur la prothèse de genou.....	38
Figures IV.12 : La contrainte Max de prothèse de genou	39
Figures IV.13 : la déformation Max de prothèse de genou.....	39
Figures IV.14 : L'énergie de déformation.....	40
Figures IV.15 : total Déplacement	41
Figures IV.16 : Déplacement suivant X.....	42
Figures IV.17 : Déplacement suivant Y.....	42
Figures IV.18 : Déplacement suivant Z.....	43

Liste des tableaux

Tableau II.1. : Caractéristiques mécaniques de l' Aciers Inoxydables	13
Tableau II.2. Caractéristiques mécaniques de L' Alumine Al ₂ O ₃	15
Tableau II.3. : Caractéristiques mécaniques de La Zircone ZrO ₂	17
Tableau IV.1 : matériaux de prothèse du genou.....	33
Tableau IV.2 : les fréquences naturelles de prothèse du genou.....	34
Tableau IV.3 : les déformations Max de prothèse de genou.....	37
Tableau IV.4 : valeur max de déformation.....	39
Tableau IV.5 : valeur max d'énergie de déformation	40
Tableau IV.6 : valeur max de total Déplacement.....	40
Tableau IV.7 : valeur max de déplacement suivant X.....	42
Tableau IV.8 : valeur max de déplacement suivant Y.....	42
Tableau IV.9 : valeur max de déplacement suivant Z.....	43

Sommaire

Chapitre I : Rappel anatomique et physiologie de genou

I. 1 Introduction	2
I.2. Rappel anatomique sur la P.T.G.	2
I.2.1 Généralité sur la P.T.G.	2
I.2.2 Surface artucilaire du genou	3
1.2.3. la Rotule	3
1.2. 4. les ménisques	4
I.2.5. plateau tibial	4
I.2.6. extrémité infirieur de genou	5
I.3. utilisation de P.T.G.	6
I.4. Remplacent d'un genou par P.T.G.	6
I.5. la prothese uni-compartmental	7
I.6. La prothése a glissement	8
I.7. Rappel physiologie de genou	9
I.7.1. physiologie de mouvement natirelle de genou	9
I.7.2. la rotaion axiale d'un genou	10
I.7.3. mouvement la flexion de genou	10
I.8. L'arthrose de genou	11
I.8.1. la chirurgie de genou et remplacé piece	12
I.9. conclusion	12

Chapitre II : le matériaux utilisés pour la fabrication des P.T.G

II. 1 Introduction	13
II.2. Materiaux conscaces aux P.T.G	13
II.3. acier inoxydable	13
II.3.1 les avantage et inconvinient de l'acier inoxydable	14
II.4. Les céramiques	14

II.4.1. les avantage et inconvinient de céramique	15
II.5. L'alminium	15
II.2.6. les avantage et inconvinient de l'alminuim	16
II.3. La zircone	16
II.4. les avantage et inconvinient de La zircone	17
II.5. conclusion	17

Chapitre III: modélisation par element finis

III. 1 Introduction	18
III.2. Reconstruction assistée par ordinateur de la prothèse du genou.....	18
II.2.1. Présentation de la capture radiographique	18
III.2.2. dessin de la prothèse du genou.....	19
III.3. La base de la méthode des éléments finis.....	20
III.3.1. La formulation élémentaire au niveau de l'élément finis.....	21
III.2.2. La formulation globale au niveau de la structure complète.....	21
III.4. Démarche de formulation éléments finis.....	21
III.4.1. Discrétisation de la structure en éléments finis.....	21
III.4.1.1 Le Maillage :.....	22
III.4.1.2 Problématique du maillage.....	22
III.4.2 Construction de nodale par sous domaine.....	23
III.4.3. Etablissement de la relation entre déformations et déplacement.....	23
III.4.4. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations.....	23
III.4.5. Calcul des matrices élémentaires	23
III.4.6. Assemblage des matrices élémentaires.....	24
III.5. les hypothèses de travail.....	24
III.5.1. Fonction de forme.....	24

III.5.2. Détermination de fonction d'interpolation Ni	25
III.5.3.champ des déplacements.....	25
III.5.4.Déformation.....	25
III.5.5. Champ des contraintes	27
III.5.6. L'énergie de déformation.....	28
III.5.7. L'énergie cinétique	28
III.5.8. Système d'équations	29
III.5.9. Discrétisation par éléments finis.....	29
III.5.10. Résolution des équations.....	30
III.6. Procédure de résolution	31
III.7. Conclusion.....	31

Chapitre IV : Résultats numérique et Interprétation

IV.1 Introduction	32
IV.2. SOLIDWORKS et M (Mechanical)	32
IV.2.1. Maillage	33
IV.3. Résultats et interprétation	33
IV.3.1. matériaux de prothèse de genou.....	33
IV.3.2. analyse modale	34
IV.3.2.1.les fréquences naturelles de prothèse du genou	34
IV.3.2.2 Les déformées modales	35
IV.3.3 Analyse statique	38
IV.3.3.1 Les contraintes de prothèse de genou.....	38
IV.3.3.2 Les déformation de prothèse de genou.....	39
IV.3.3.3 Déplacement de prothèse de genou.....	41
IV.4 conclusion	43

Introduction générale

Introduction générale :

Le genou est une articulation complexe sur le plan biomécanique impliquant , genou désigne la partie du corps humain ou la jambe se joint a la cuisse trois os sont mis en jeu au niveau du genou , il s'agit du fémur du tibia et de la patella

Exemple : je vais me faire opère du genou le DR.de chirurgien va poser une prothèse se pour remplacer ma genou par par le PTG , Au cours de la dernière décennie L'arthroplastie du genou est devenue indiscutablement un des grands succès donc La pose d'une prothèse total du genou correspond au replacements prothétique de l'ensemble des compartments fémoro-tibiaux et fémoro-patellaire, par une structure mécanique inerte pour lui permettre de retrouver mobilité et indolence afin de récupérer une certaine autonomie Le succès d'une arthroplastie totale de genou est déterminé par la suppression de la douleur, la récupération fonctionnelle et la survie de l'implant. Plusieurs facteurs peuvent intervenir dans la diminution de la durée de vie de l'implant: un mauvais positionnement de l'implant, l'usure, l'ostéolyse dont la consequence principal est le descellement de l'implant Par conséquent, les ingénieurs ont dû produire des conceptions entièrement compatibles avec la form exact de genou Est matier de production il faut qu'il soit plus fiable que les autre pour un long tempe de récupération est comportement mécanique normale est naturelle Avec des effets de thermomécanique personnalisés

Par conséquent, nous présentons la chose la plus importante dans ce mémore en quatre chapitres suivant

le **CHAPITRE I** Une Rappel anatomique et physiologie d'un geno ,et nous apportons les définitions nécessaires de les composant de genou , et pourquoi fait l'arthrose de genou et la soulition de remplacement genou .

le **CHAPITRE II** Nous donnerons une les matériaux utilisés pour la fabrication des PTG, ainsi que les avantages et l'inconvenient de chaque matière dans la détermination du comportement à court et à long terme.

le **CHAPITRE III** Modélisation par éléments finis du comportement biomécanique d'une prothèse totale du genou,

le **CHAPITRE IV** conception assistée par ordinateur (Solidworks) de la géométrie de genou en se basant sur des fichiers tomographiques du scanner.

Et Simulation numérique basé a M.E.F par logiciel ANSYS

Chapitre I

Rappelle Anatomique et Physiologie d'un Genou

I.1. Introduction

La destruction du cartilage est fréquente au niveau du genou qui est une articulation très sollicitée et soumise à tout le poids du corps. La conséquence de cette destruction est l'arthrose, associant douleurs, gonflements articulaires, raideur et impotence fonctionnelle gênant considérablement la marche

Lorsque les médicaments antalgiques ne parviennent plus à calmer cette douleur, l'implantation d'une prothèse de genou apporte un soulagement certain

Actuellement, 300.000 prothèses de genou sont posées annuellement aux Etats-Unis et en Europe de l'Ouest et 50.000 en France Six mois environ après l'intervention, lorsque l'état de l'articulation s'est stabilisé, la marche est normale, sans boiterie, et les douleurs sont améliorées de 80 à % 100 par rapport à ce qu'elles étaient avant l'intervention.

La prothèse de genou permet de mener une vie normale avec marche, vélo natation, voyage et bien évidemment continuer à travailler [1].

I.2. Rappel anatomique sur la P.T.G :

I.2.1. Généralités sur la P.T.G :

Les prothèses de genou sont de plus en plus utilisées du fait de leurs résultats fiables et de leur longévité. De nos jours, c'est une intervention bien maîtrisée qui nécessite cependant d'en peser les indications et d'en connaître parfaitement les techniques de pose adaptées à chaque cas. Une prothèse de genou est implantée lorsque les surfaces articulaires du genou sont très abîmées (par l'arthrose ou par l'arthrite rhumatoïdale). C'est alors la seule solution pour restaurer l'articulation et supprimer les douleurs responsables d'une invalidité, quand le traitement médical ne suffit plus. [2].

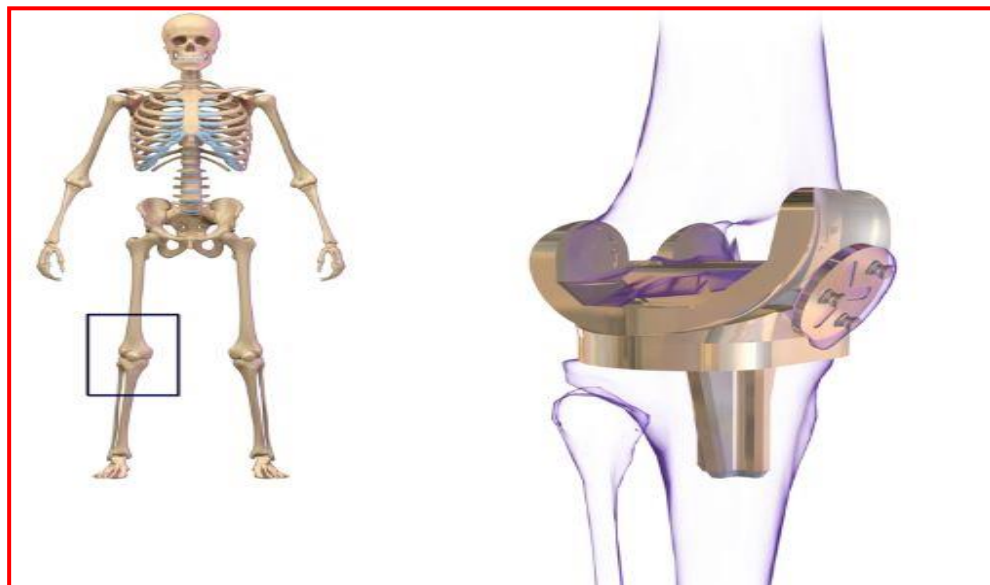


Figure I.1: l'Articulation de genou [1]

I .2.2. S urfaces articulaires du genou :

Les surfaces articulaires sont représentées par :

- * Rotule (Patella)
- * Extemité Inferieure du femur Plateau Tibial
- *Menisques

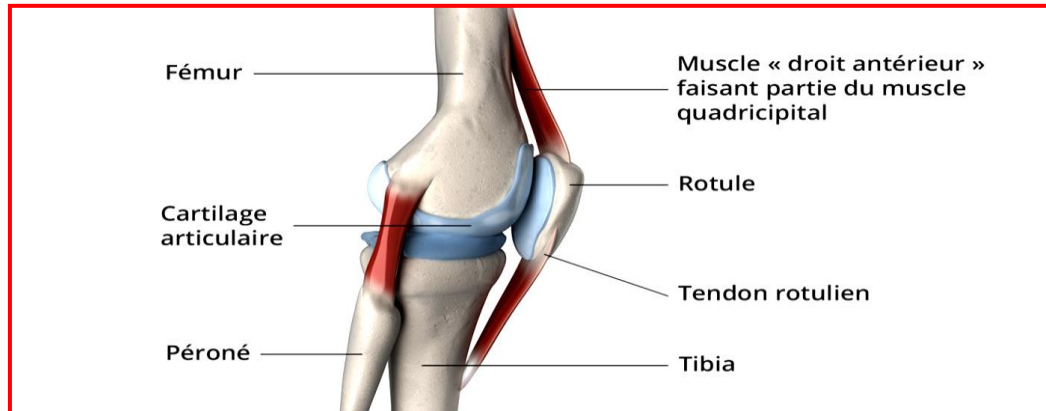


Figure I.2: surface articulaire de genou [2]

I .2.3. La Rotule :

La rotule est un os à forme triangulaire dont la pointe est dirigée vers le bas, vers le tibia ; elle est composée de deux faces, trois bords et un sommet ; on estime également qu'elle possède une face antérieure et une face postérieure. Sa face articulaire, qui correspond au sommet se compose de cartilage. Très importante, la rotule fait partie intégrante de l'ossature du genou, elle permet en effet de réaliser les mouvements de flexion-extension du genou. [3].

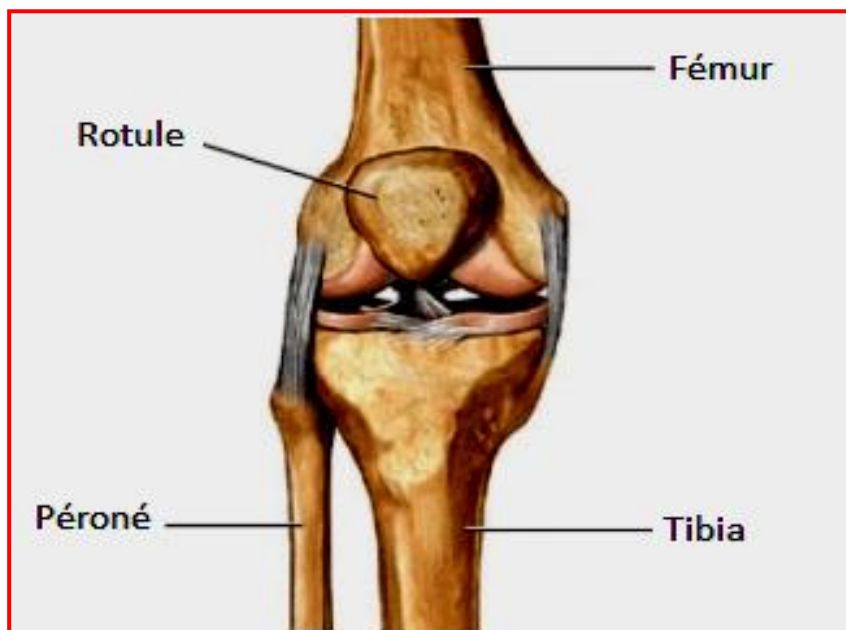


Figure I.3: la rotule de genou [2]

I .2.4. Les ménisques :

Si aucune structure n'augmente la congruence fémoro-patellaire, la congruence fémoro-tibiale est grandement améliorée par la présence de ces fibrocartilages. Le ménisque médial (interne) assez ouvert (en forme de C) accroît la concavité glénoïdienne médiale et le ménisque latéral (externe) (en forme de O) transforme en discrète concavité la convexité de la cavité glénoïdienne latérale . Les ménisques augmentent donc la stabilité du genou, répartissent la charge axiale et participent à l'amortissement des choc .

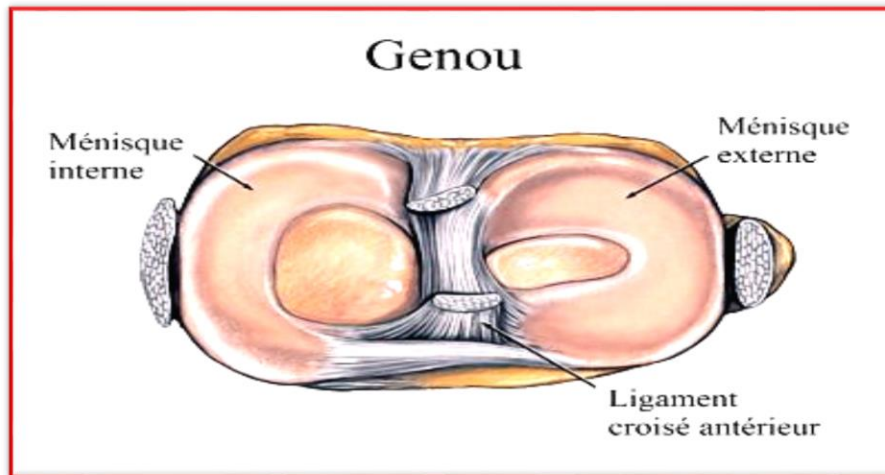


Figure I.4: les ménisque de genou

I .2.5. Plateau tibial :

Le tibia est un os long et massif comprenant une diaphyse et deux épiphyses. Il est relié à la fibula (péroné) par la membrane interosseuse. Le tibia est l'os interne de la jambe. Comme pour le fémur, à la coupe il présente trois faces : interne, externe et postérieure. La face interne de sa diaphyse est sous cutanée et libre d'insertions. Elle est palpable de haut en bas. L'épiphyse supérieure du tibia comprend trois faces : Face supérieure: Elle présente deux épines formées par le soulèvement médian des surfaces articulaires. En dehors de l'épine externe et en dedans de l'interne, se trouvent les glènes tibiales qui sont les lieux d'articulation avec la trochlée fémorale. Face antérieure (à la jonction avec la diaphyse) : Elle présente la tubérosité tibiale antérieure, où s'insère le tendon terminal de l'appareil extenseur du genou. Au-dessus et en dehors de cette terminaison, il existe une autre terminaison nommée le tubercule de Gerdy. Face postérieure: En dedans s'insère le muscle semi-membraneux, en dehors se trouve la zone d'articulation avec la fibula. L'épiphyse inférieure du tibia comprend le pilon tibial. Il se prolonge à sa partie interne par une saillie osseuse palpable, la malléole interne (médiale). 1 : Gorge trochléenne 2 : Joue Latérale 3

Joue médiale La face inférieure du pilon tibial et la face latérale de la malléole interne sont recouvertes de cartilage et s'articulent avec l'astragale (talus). En dehors, le pilon tibial s'articule avec l'épiphyse inférieure de la fibula (sans cartilage).



Figure I.5: plateau de tibia de genou

I .2.6. Extrémité Inférieur Du Femur:

Le fémur est l'os le plus long du membre inférieur, le plus gros (par son volume), et le plus solide. La partie postérieure de l'épiphyse distale du fémur supporte les deux condyles (**latéral**) et (**médial**). Ils sont proéminents et divergents vers l'arrière, présentant une double convexité transversale et sagittale . Les condyles sont séparés enarrière par Incisure (Echancrure) inter condyalaire



Figure I .6: l'inférieur de femur [3]

I .3. Utilisation de P.T.G

Une prothèse de genou est implantée lorsque les surfaces articulaires du genou sont très abîmées (par l'arthrose ou par l'arthrite rhumatoïdale). C'est alors la seule solution pour restaurer l'articulation et supprimer les douleurs responsables d'une invalidité, quand le traitement médical ne suffit plus

Les matériaux utilisés sont l'acier inoxydable pour la partie fémorale et le polyéthylène pour la partie rotulienne. L'implant tibial est en polyéthylène avec une embase métallique

La prothèse peut être totale ou uni-compartmentale interne ou externe. [11].

I .4. Remplacement d'un genou sur P.T.G :

Une prothèse totale remplace votre articulation du genou usée ou malade Elle est composée de trois pièces Une des pièces remplace la partie articulaire du fémur elle est en acier inoxydable 2.L'autre remplace la rotule, elle est en polyéthylène 3.La troisième remplace la partie articulaire du tibia, elle est en polyéthylène reposant sur une base métallique Ces trois pièces sont scellées dans l'os à l'aide d'une résine acrylique, ou parfois non cimentée.

Les prothèses du genou remplacent l'articulation du genou en cas d'arthrose du genou lorsque le cartilage articulaire a disparu. [6].

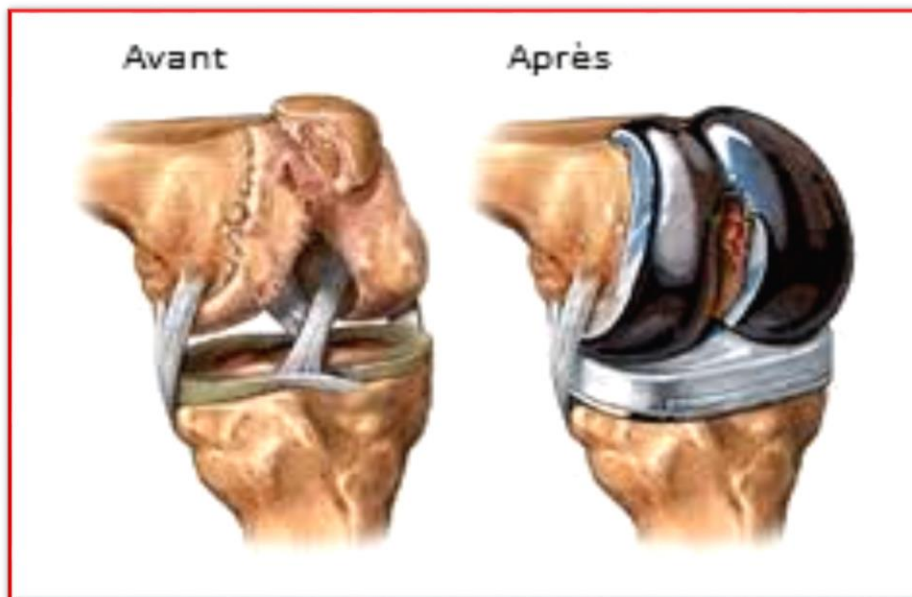


Figure I.7:pièce de Remplacement de genou [4]

I .5. La prothèse uni-compartmentale :

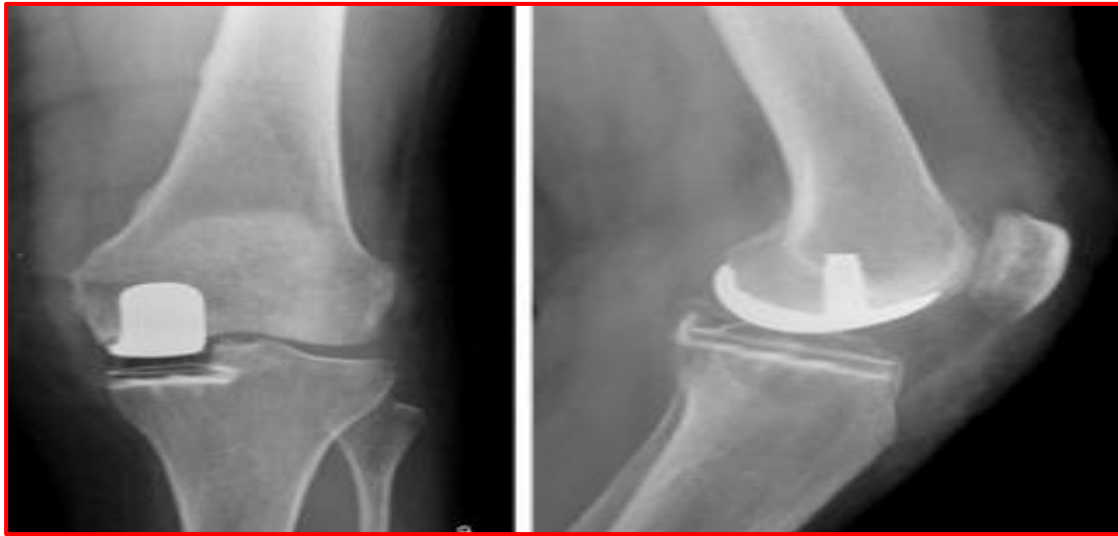


Figure I.8: radiographie réel de prothèse Uni [5]

cartilage du fémur Une pièce qui remplacera la moitié usée de votre tibia La prothèse partielle ne remplace que le compartiment usé, laisse les ligaments intra articulaire intact et permet donc d'avoir un genou beaucoup physiologique, naturel qu'avec une prothèse totale de genou, les résultats sont donc meilleur qu'avec une prothèse totale de genou .Les patients bénéficiant d'une prothèse partielle du genou sont plus à même d'oublier leur genou artificiel dans la vie de tous les jours et sont donc plus satisfait que ceux ayant une prothèse totale (figure)

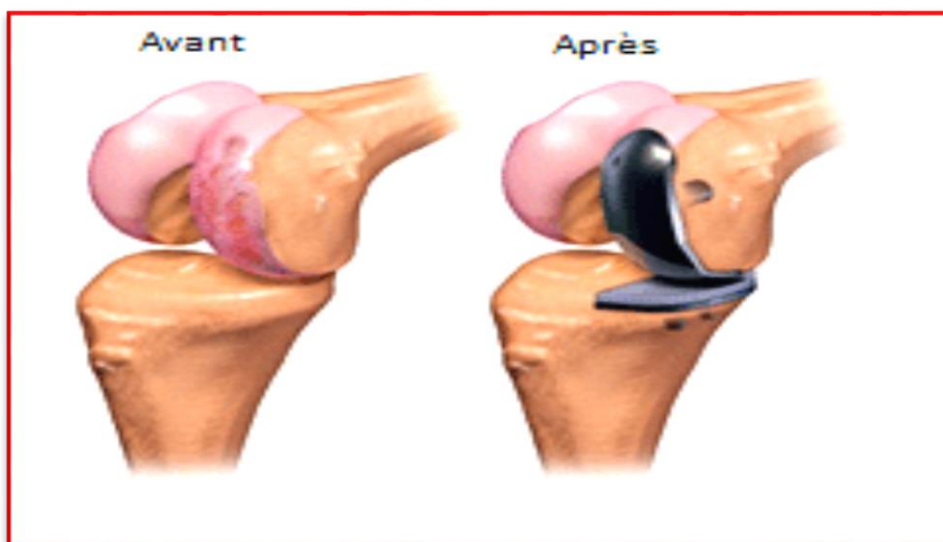


Figure I.9: difference de genou utilisé prothese Uni

I.6. La Prothèse à glissement :

Caractérisée par l'indépendance des pièces fémorale et tibiale.

Les prothèses actuellement posées en première intention (c'est la première fois que le genou reçoit une prothèse) sont des prothèses dite "à glissement" qui ne sont donc **pas** contraintes : il n'existe pas de "charnière" entre les deux pièces, le fémur glisse sur le tibia. Elles sont maintenues l'une contre l'autre par les ligaments latéraux interne et externe.

Certaines prothèses sont conçues pour fonctionner avec le ligament croisé postérieur tandis que d'autres sont "postéro-stabilisées", c'est-à-dire qu'elles sont stables même si le ligament croisé postérieur est absent ou enlevé. [8].

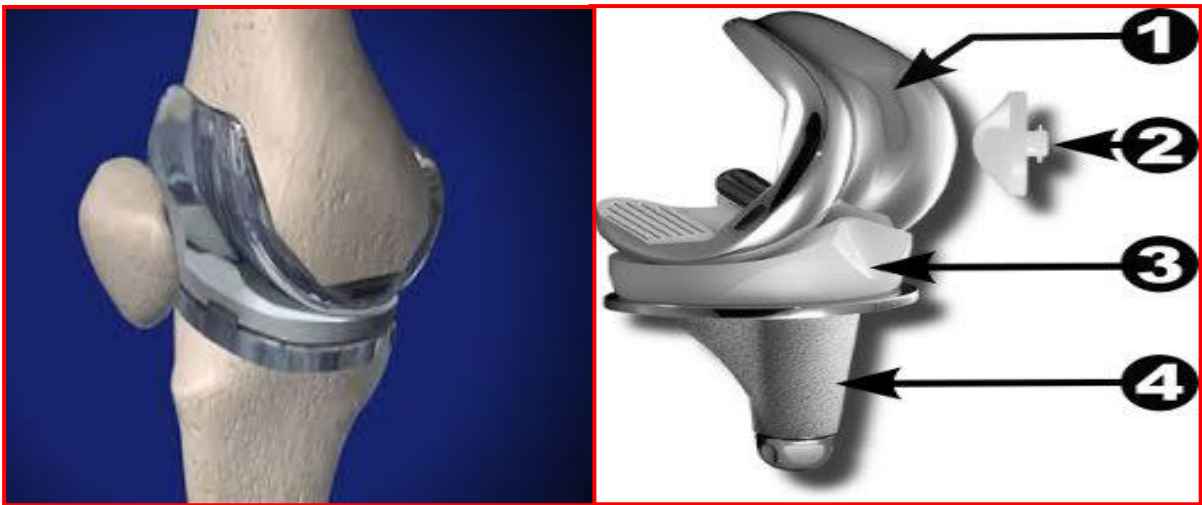


Figure I.10: élément de prothèse à glissement [6].

La Prothèse Totale du Genou est composée de 4 pièces :

- (1) l'implant fémoral en alliage Chrome-Cobalt non cimenté
- (2) le médaillon rotulien.
- (3) le plateau tibial rotatoire polyéthylène haute réticulation
- (4) l'embase tibiale toutes ces pièces tiennent sur les os sans ciment, du fait de leur conception mécanique et chimique leurs surfaces de contact osseuse sont granulées et recouvertes d'une molécule chimique stimulant l'accrolement osseux sur le métal (hydroxyapatite)

I-7 Rappelle physiologie sur la P.T.G :

I.7.1.physiologie de mouvement naturelle de genou

La gonométrie consiste à tracer directement sur le pangonogramme, quatre segments géométriques reliant différentes références anatomiques :

axe mécanique femoral

Est l'axe passant par le centre de la tête fémorale et le centre du genou,

axe mécanique tibial

Lie le centre cheville au centre du genou,

axe bicondylien distal

Passe par le sommet des deux condyles distaux fémoraux,

L'axe des fonds de plateaux ou axe biglénôidien

Joint les deux compartiments tibiaux. [9].

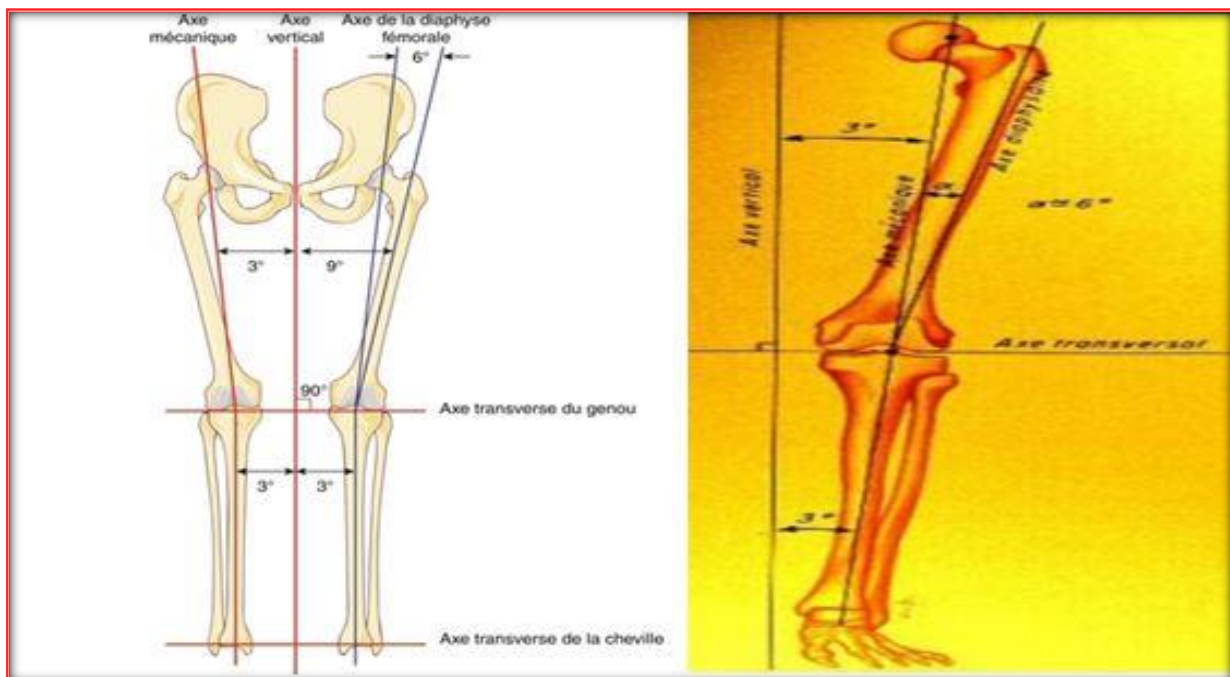


Figure I.11:les l'axes de genou [7].

I.7.2 La Rotation axiale de genou :

Les amplitudes de rotation axiale, elle en peut être effectuée que le genou fléchi. La rotation externe est d'environ 40° en actif, contre 30° pour la rotation interne. Il existe une rotation axiale automatique : Lors de l'extension, le genou se trouve porté en rotation externe.

(Extension, Rotation Externe) et inversement

C'est parce que le condyle externe recule plus que l'interne lors de la flexion du genou qu'apparaît une rotation interne du tibia et vice et versa. Ce recul différentiel des condyles est du à 3 facteurs :

- L'inégalité de développement du contour condylien : Celui de l'externe est plus grand que celui de l'interne.
- La forme des glènes : le condyle interne recule peu car il est contenu dans une glène concave, à l'inverse du condyle externe.
- L'orientation des ligaments latéraux : lorsque les condyles reculent sur les glènes, le ligament latéral interne se tend plus précocement que l'externe. [7]

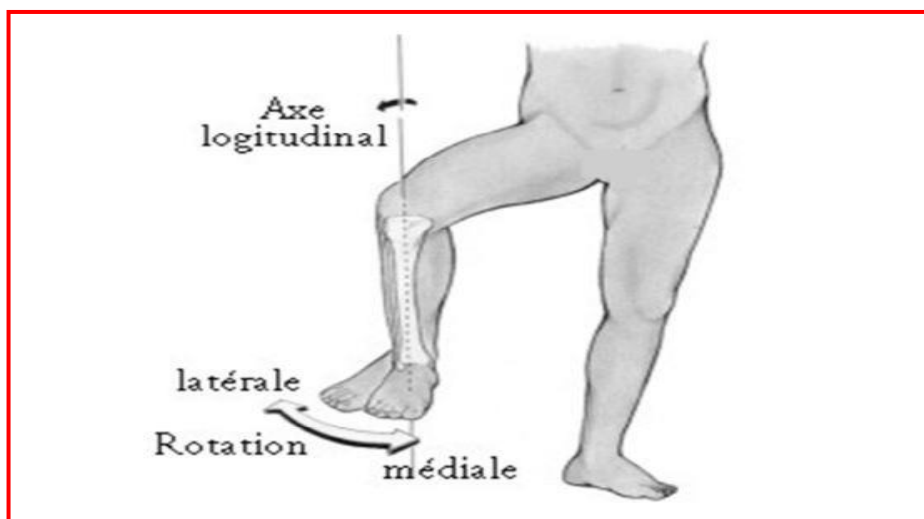


Figure I.12:: Amplitude de rotation [7]

I.7.3. Mouvement la Flexion de genou

La flexion-extension est le mouvement principal du genou. La position de référence est constituée lorsque la jambe est dans l'axe de la cuisse. L'extension éloigne la face postérieure de la cuisse de la face postérieure de la jambe. Elle est normalement de 0° . Un récurvatum est possible, surtout passivement, de 5 à 10° . La flexion rapproche la face postérieure de la cuisse de la face postérieure de la jambe. La flexion active atteint 140° si la hanche est fléchie. La flexion passive atteint 160° .

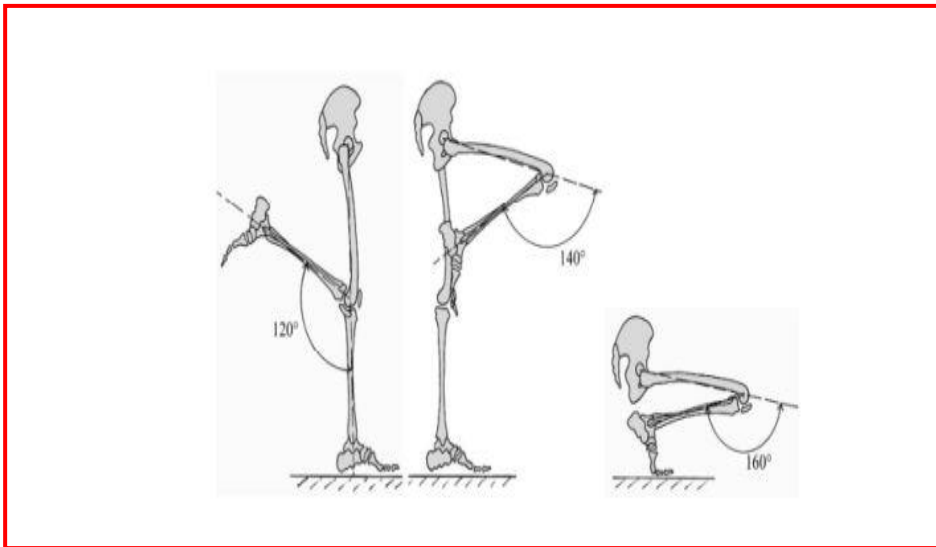


Figure I.13:: Mouvements de flexion extension du genou

I.8. L'arthrose du genou:

Qu'est-ce que l'arthrose du Genou ? Les symptômes de détérioration (O) des ménisques et du cartilage articulaire sont des signes d'altération naturels pouvant aboutir à une usure articulaire irréversible. Contrairement à d'autres types de tissu du corps humain (par exemple la peau), le cartilage articulaire n'est pas capable de se régénérer ou de se réparer. Un cartilage articulaire lésé ou usé est donc perdu pour toujours. Cette perte de la couche superficielle de l'articulation conduit rapidement à une restriction fonctionnelle douloureuse. Les principaux facteurs d'arthrose du genou sont mentionnés l'âge élevé ,l'origine ethnique les sujets originaires du nord de l'Europe y sont plus sensibles ,le sexe féminin ,les antécédents familiaux de fracture du col du fémur ,la consommation excessive de sel, d'alcool, de café, de tabac ,le faible indice de masse corporelle . [11]

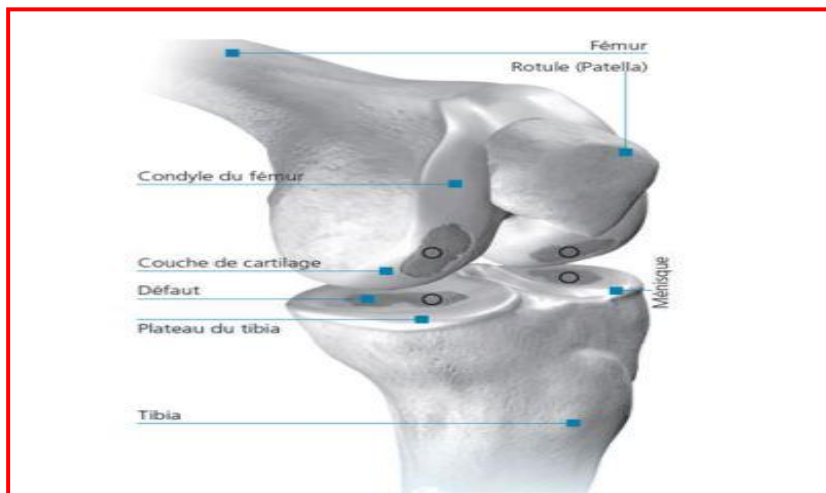


Figure I.14: l'arthrose défaut de genou

I .8.1. La chirurgie de genou et remplacé piece :

Grâce à la chirurgie, les surfaces de l'articulation touchée sont retirées et remplacées par une articulation artificielle. Cette chirurgie peut réduire la douleur et améliorer la mobilité de l'articulation du genou

Les objectifs assignés à la prothèse de genou (PTG) sont de trois ordres : soulagement des douleurs, restauration des axes du membre et restauration de l'amplitude des mouvements du genou.

Les contraintes techniques sont importantes : la PTG se doit tout particulièrement d'autoriser flexion et extension tout en résistant aux mouvements anormaux tels que varus, valgus ou translation excessive. [8].

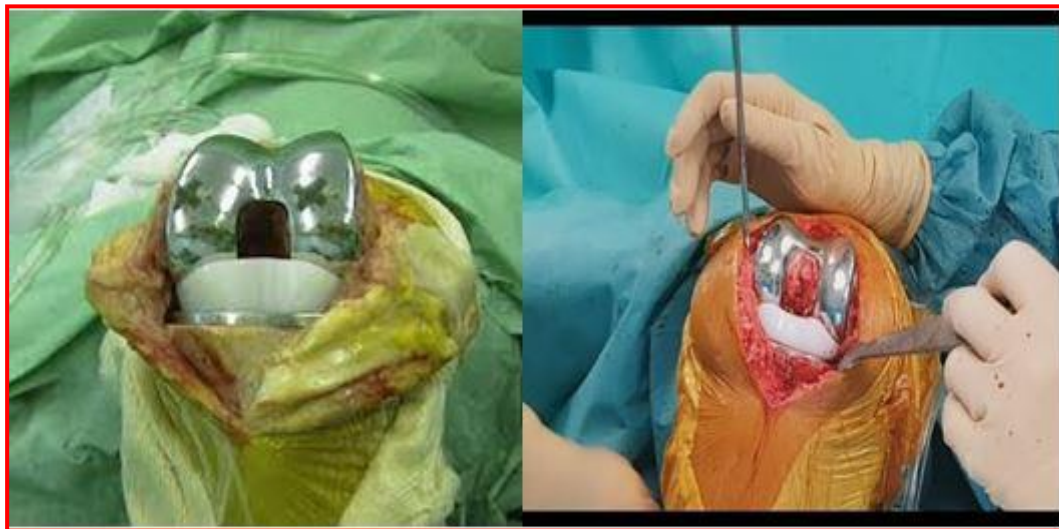


Figure I.15: operation cas maladie réel [8].

I .10.Conclusion :

Dans ce chapitre nous apportons les définitions nécessaires de composants principale d'un genou , et pourquoi fait l'arthrose de genou et la soulition de remplacement genou et les composant de la pièce de remplacement .

aussi dans ce chapitre que ce travail vient donner une étude globale de ce qui s'est fait jusqu'à lors, en tentant de comprendre les études menées, tout en s'appuyant sur leurs résultats pour proposer des alternatives aux conceptions existantes.

Chapitre II

lés matériaux utilisés pour la fabrication des P.T.G

II.1 Introduction :

Les matériaux utilisés sont le métal pour les composants du fémur et du tibia et le polyéthylène à la fois pour surface intermédiaire destinée à remplacer les ménisques et pour le resurfaçage de la rotule. Les prothèses de genou sont habituellement fixées à l'os par un ciment chirurgical. Parfois, le ciment est remplacé par un matériau recouvrant l'implant. Dans ce cas, il n'y a pas de stabilisation immédiate mais une stabilisation secondaire induite par la repousse osseuse autour de la prothèse. On parle alors de prothèse sans ciment. Les matériaux destinés à être en contact permanent ou provisoire avec les systèmes biologiques doivent obéir à des règles très strictes, notamment de biocompatibilité et de biocompétence, pour pouvoir être utilisés en pratique médicale. [9].

II.2. Matériaux Concrets aux P.T.G:

II.3. Aciers Inoxydables :

Seuls sont utilisés les aciers austénitiques (Glossaire) qui sont amagnétiques et résistants à la corrosion. L'alliage 316L contenant 0,03% de carbone constitue le meilleur acier orthopédique. Il est particulièrement destiné à la fabrication d'implants permanents comme les prothèses. Sa teneur en carbone améliore sa résistance à la corrosion en milieu biologique. Sa teneur en chrome, égale à 12% au minimum, assure une passivation par une couche d'oxyde de chrome. Ses propriétés mécaniques sont les suivantes : L'acier inoxydable reste cependant sensible à la corrosion et ce d'autant plus qu'il existera des micromouvements de l'implant. Il est également très rigide. Nous pouvons résumer les principaux problèmes avec les métaux et alliages métalliques en ces quelques points: Corrosion électrochimique et durabilité. Mécanismes de dégradation non électrochimiques incluant les Interactions protéine/métal. 3) Réactions immunitaires et d'hypersensibilité. Adaptation des propriétés mécanique Propriétés de frottements et problèmes de débris. [10].

TAB. 1 - Caractéristiques mécaniques de l' Aciers Inoxydables [10]

Caractéristiques mécaniques	
Le module de Young – E en [GPa]	200
La limite élastique – e en [MPa]	280
La contrainte à la rupture en traction - r en [MPa]	520
La résistance à la fatigue - f en [MPa]	250

II.3.1 Les avantages et inconvénients de l'acier inoxydable :

***les avantages :**

- Un bel aspect avec diverses possibilités de traitement postérieur
- Bonne capacité de transformation, la plupart des types d'inox sont faciles à découper, à plier, à déformer
- Une bonne résistance à la chaleur et aux variations de température.

*** les inconvénients :**

- les gens considèrent qu'il s'agit en fait d'un investissement plutôt que d'une dépense
- les traces et empreintes digitales sont plus susceptibles de se révéler (même si elles sont faciles à effacer)
- ils peuvent être deux fois plus cher que les autres appareils. Cependant, la plupart des propriétaires considèrent que le prix à payer pour leur durabilité et leurs autres avantages est juste.

II.4. Les Céramiques :

Depuis de nombreuses années, le matériel chirurgical évolue et actuellement, les matériaux les plus modernes permettent un allongement croissant de l'espérance de vie d'une prothèse de genou.

En effet, les céramiques, permettent de diminuer grandement les phénomènes d'usure des éléments de la prothèse, en permettant donc au composant fémoral de se mobiliser par rapport au tibia avec un couple de friction minimale.

Les céramiques se caractérisent par une température de fusion élevée et un comportement fragile, qui déterminent leurs domaines d'application. Elles incluent des oxydes, des sulfures, des borures, des nitrures, des carbures, des composés inter métalliques.

Ces céramiques de nouvelle génération, constituent une classe de matériaux aux propriétés remarquables : bonne résistance à la corrosion, haute résistance à l'usure et au frottement et bonnes résistances mécaniques.

Deux céramiques sont actuellement utilisées comme matériau des PTG : l'alumine Al_2O_3 et la Zircone ZrO_2 . Ils sont utilisés dans les prothèses totales de hanche et les prothèses totales du genou, ainsi qu'en odontologie pour les implants dentaires caractères «fragiles» des céramiques. Les céramiques ne peuvent pas s'adapter à une déformation de plus de quelques micromètres. Contrairement aux métaux, les céramiques ne présentent pas de plasticité (aptitude à la déformation). Elles se caractérisent par un comportement purement élastique, avec un module de Young élevé.

II.4.1 Les avantage et inconviniet de céramique :

***les avantage:**

- Haute résistance à l'usure, à chargement , à la pression de et aux attaques chimiques (gaz et liquides)
- Dureté élevée
- Matériau relativement léger

***les inconviniet :**

- Les céramiques ont généralement une faible conductivité thermique
- les céramique possèdent généralement une moyen ou faible résistance mécanique
- les céramique généralement opaques ou translucides.

II.5. L'Alumine Al_2O_3

Les composants en céramique d'alumine ont été utilisés pour la première fois dans les années 1970, d'abord en France, puis en Allemagne. Plusieurs études ont clairement démontré que le taux d'usure du polyéthylène face aux composantes du fémur en alumine était nettement inférieur au taux d'usure observé face à l'acier inoxydable ou aux alliages Co-Cr Ce matériau présente une excellente résistance à toutes les formes de corrosion, une bonne bio-tolérance sous forme massive et sous forme de particules, une densité élevée et une structure cristalline très fine permettant d'avoir un excellent état de surface après polissage, l'indice de rugosité R_a pouvant atteindre 0,01m, une mouillabilité et une dureté élevées. Ces propriétés lui confèrent les caractéristiques mécaniques suivantes :

TAB.2 - Caractéristiques mécaniques de L'Alumine Al_2O_3 [14]

Caractéristiques mécaniques	
Pureté en %	99,9
Résistance à la compression[MPa]	4000
Résistance à la flexion [MPa]	550 - 600
Module d'Young [GPa]	380
Coefficient de Poisson (ν)	0.18
Taille moyenne du grain [μm]	1.3
Masse volumique [g/mm^3]	3.9
Ténacité statique en traction, KIC [$MPa\sqrt{m}$]	3.5 - 6

II.5.1 Les avantages et inconvénients de l'aluminium AL_2O_3 :

***les avantages:**

- Léger : l'aluminium est un matériau léger et maniable. Pour réaliser, par exemple une porte d'entrée en alu, vous pouvez choisir la forme et le design que vous souhaitez, sans que le matériau ne soit un obstacle.
- Un matériau résistant : l'alu résiste aux intempéries (pluie, soleil,...). C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les fenêtres en aluminium sont privilégiées dans certaines régions.
- Esthétique : ce matériau s'adapte parfaitement à tous les intérieurs. Il est également possible de choisir une couleur adaptée au design d'une chambre ou d'une autre pièce. Grâce à la peinture thermo laquée, l'aluminium peut aussi adopter toutes couleurs que vous désirez.

***les inconvénients :**

- Bien qu'il offre un excellent rapport qualité/prix, l'aluminium reste un matériau plus onéreux que le P.T.G.
- L'aluminium est sensible aux vents et chocs violents. Lorsqu'il s'agit d'un portail en aluminium, on peut voir apparaître des bosses et autres déformations. Cependant, il est possible de combiner ce matériau avec le manganèse ou le cuivre pour que le portail soit plus solide.

II.6. La Zirconie ZrO_2

La céramique de zirconie ZrO_2 a été introduite avec succès en orthopédie, d'abord en Europe à partir de 1985, puis aux USA à partir de 1989. La céramique de zirconie se caractérise par un mécanisme de renforcement par transformation de phase, qui est à l'origine de ses propriétés mécaniques exceptionnelles. La résistance à la rupture peut atteindre 4 fois celle de l'alumine. La zirconie est considérée comme le meilleur matériau céramique pour la résistance à la rupture. Ainsi, les propriétés mécaniques de la zirconie, associées à une excellente biocompatibilité et résistance à l'usure, font de ce matériau le meilleur candidat pour les prothèses totales de hanche et les prothèses totales du genou, de nouvelle génération. Les composantes fémorales en zirconie sont maintenant couramment utilisées en orthopédie pour remplacer les composantes fémorales en alumine et surtout les composantes fémorales métalliques. [11]

Caractéristiques mécaniques	
Pureté en %	95.6
Résistance à la compression [MPa]	6000
Résistance à la flexion [MPa]	2200
Module d'Young [GPa]	220
Coefficient de Poisson (ν)	0.31
Taille moyenne du grain [µm]	0.35
Masse volumique [g/mm ³]	6.1
Ténacité statique en traction, KIC [MPa√m]	6 - 12

TAB. 3 - Caractéristiques mécaniques de La Zircone ZrO₂ [11]

II.6.1. Les avantages et inconvénients de Zircone :

***les avantages:**

- Ils sont très esthétiques, avec une plus grande durabilité que les couronnes de bande composite et couronnes avant plaquées.
- Ils ne sont pas comme technique sensible comme les couronnes bande composite comme la Couronne fabriquée est cimentée avec ciment résine autocollante au lieu du collage.
- Ils prennent un peu plus de temps à placer que les couronnes en acier inoxydable et couronnes de bande composite, environ le même que les couronnes avant plaqués, et inférieur ouvert face couronnes en acier inoxydable. [15].

***les inconvénients :**

- Ils ne sont pas recommandés chez les patients qui sont lourds bruxeurs

II.7. Conclusion :

Généralement, la prothèse est constituée de plusieurs matériaux pour la fabrication, Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions de base et les avantages et les inconvénients, de chaque matière et L'utilisation pour les pièces de la céramique d'alumine...les matériaux qui depuis longtemps font leurs preuves dans la chirurgie prothétique de genou. Cette orientation a été adoptée au beaucoup des pays après de nombreux tests mécaniques

Chapitre III

Modélisation par
éléments finis et
Reconstruction assistée
par ordinateur

III.1. Introduction

Le comportement mécanique d'une structure métallique formée de poutres sous les charges qui lui sont appliquées est correctement décrit par la théorie des poutres [30]. Cette dernière est entièrement définie par les caractéristiques géométriques de la section courante (aire, inertie, module d'inertie, etc.) et la géométrie de la poutre. Les efforts appliqués à la poutre sont schématisés comme charges ponctuelles ou charges réparties le long de la poutre. Les sollicitations résultantes sont obtenues sous la forme de torseurs d'efforts (trois forces et trois moments) en chaque point de la poutre. Des relations simples reliant les torseurs d'efforts aux caractéristiques géométriques de la section permettent de déduire les contraintes dans la section.

L'application de la théorie des poutres à des structures simples comme les poutres continues, les portiques et les treillis simples, conduit à des solutions analytiques complètes. En revanche, pour les structures plus complexes, le recours à une méthode numérique est nécessaire telle que la méthode aux éléments finis qui est systématiquement et aisément programmable.

III.2. Reconstruction assistée par ordinateur de la prothèse du genou

Dans cette étude de reconstruction assistée par ordinateur de la géométrie de l'articulation du genou en se basant sur des fichiers tomographiques du scanner et logiciel (CAO / DAO) de dessin assisté par ordinateur en (2D/3D), il s'agit du SolidWorks.

III.2.1. Présentation de la capture radiographique :

La prise radiographique appartient à un sujet âgé de Deux adultes pesant 80kg et 150 kg qui a subi une opération en chirurgie plastique ayant pour but d'implanter une prothèse totale du genou droit.

L'image ci-dessous (figure1) a été téléchargée directement de l'appareil de radiographie source afin de conserver l'intégralité de la photo ainsi que ses dimensions.[1]

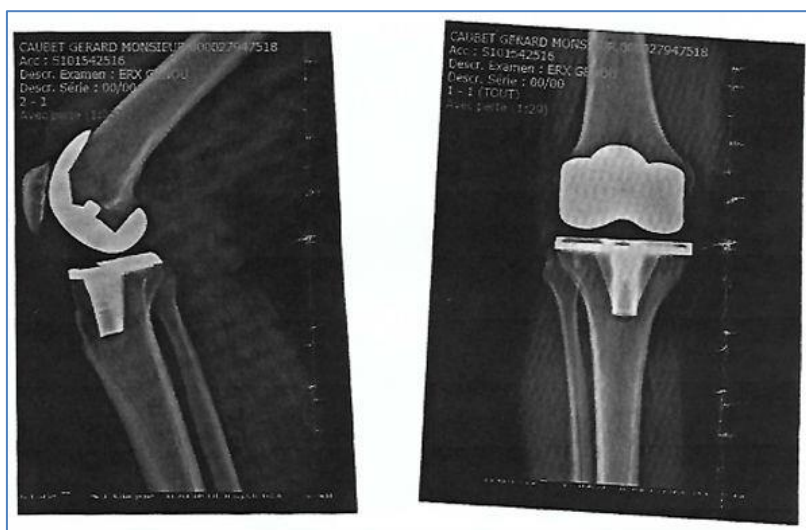


Figure III.1 image radiographique de la prothèse du genou position debout l'une face et l'autre profile.

III.2.2. dessin de la prothèse du genou

Afin de concevoir le Prothèse du genou, nous avons utilisé le programme SolidWorks, et après toutes les opérations effectuées dans le programme, nous avons obtenu la conception finale montrée dans l'image ci-dessous.

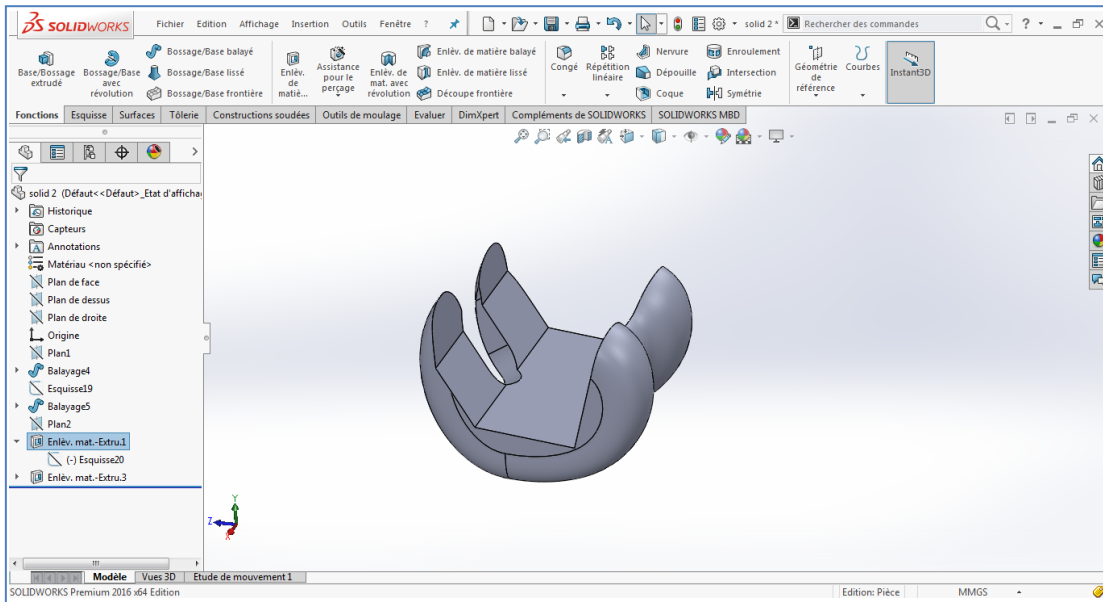


Figure III.2 Prothèse du genou sans fissure en 3D

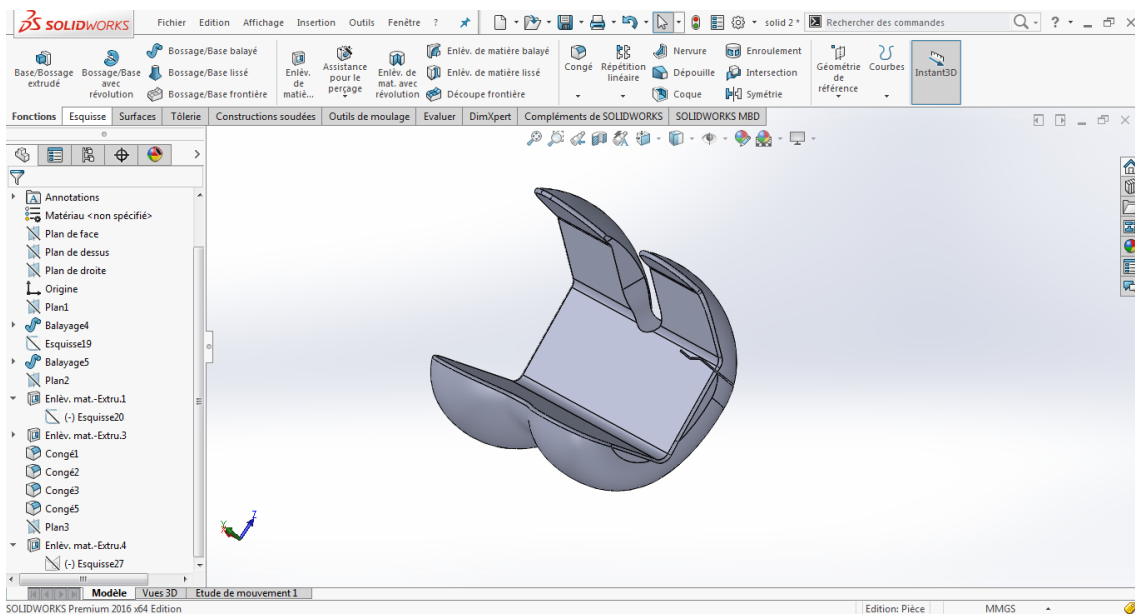


Figure III.3 Prothèse du genou avec fissure en 3D

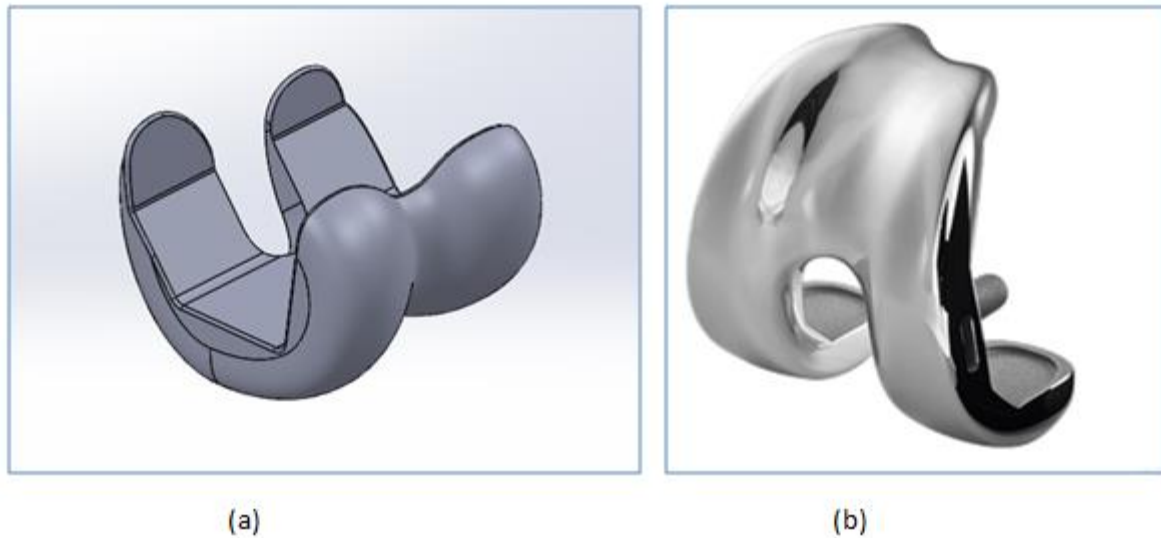


Figure III.4 (a) prothèse du genou en 3D étudié et (b) prothèse du genou en Réel

III.3. La base de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis, bien connue aujourd'hui, est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode réside principalement dans sa formulation: elle réunit les principes les plus forts de la méthode des différences finies et ceux de la méthode des équations intégrales : respectivement la discrétisation du domaine d'intégration et le principe de construction de l'approximation et sa formulation. [31]

La méthode des éléments finis améliore ces deux principes comme suit :

- Le domaine d'intégration n'est plus discrétisé par des points comme pour le cas de la méthode des différences finies, mais par des sous-domaines continus ou des 'continium', dont le nombre est fini, et qu'on appelle éléments finis (Figure. III.1). En utilisant ce découpage, (modélisation géométrique), la méthode fournit un modèle qui représente aussi fidèlement que possible le phénomène physique dans sa réalité. [13]

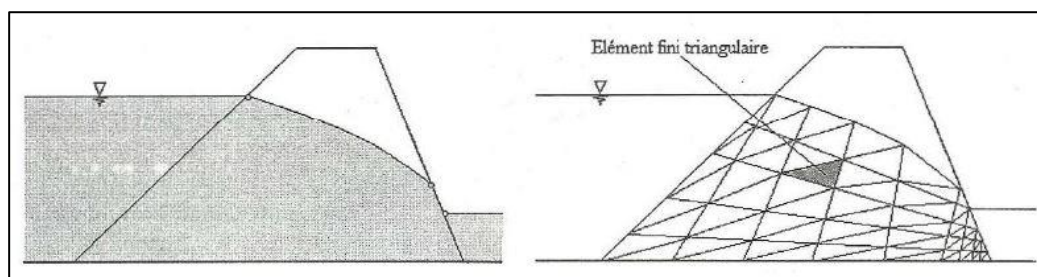


Figure III.5: Discretisation par éléments triangulaires d'une digue

b) La formulation intégrale, de type Galerkin, est appliquée non pas sur le domaine d'intégration global, mais sur des éléments finis standard, ayant des fonctions de formes normées, au lieu des fonctions de base de la méthode de Galerkin. La formulation devient unifiée pour les différents types de problèmes. Une bibliographie d'éléments est alors mise à jour. La méthode devient alors programmable par excellence. Possédant tous ces atouts, la

méthode ne cesse de se développer et de s'étendre de plus en plus à des domaines qui étaient jusque là du seul ressort des méthodes expérimentales.

III.3.1. La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini

Pour chaque élément et dans un repère local, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux. Puis, on calcule pour chaque élément ses matrices de rigidité et de masse ainsi que son vecteur des forces. Ces caractéristiques élémentaires sont transformées par la suite dans le repère global de la structure.[14]

III.2.2. La formulation globale au niveau de la structure complète

Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure.

Cette étape nécessite l'assemblage des matrices de rigidité et de masse et les vecteurs forces et déplacements de la structure à partir des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité et de masse et vecteurs forces et déplacements de chaque élément).

III.4. Démarche de formulation éléments finis

L'analyse des structures de type treillis ou portique peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque partie (élément barre ou poutre) indépendamment puis en assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

Dans la suite, toutes les grandeurs vectorielles et matricielles relatives à la base locale de l'élément sont surlignées d'une barre.[32]

III.4.1. Discrétisation de la structure en éléments finis

C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle. Pratiquement cette idéalisation consiste du point de vue topologique, à ramener la structure à une géométrie simple ; c'est ainsi qu'on réduit les éléments unidimensionnels à leur axe et on définit les conditions d'appuis et les charges.

Au point de vue rhéologique, elle consiste à choisir la loi constitutive du matériau et à déterminer les constantes qui définissent cette loi.

La méthode des éléments finis consiste à réduire le solide S à une structure composée d'éléments discrets interconnectés par des nœuds (Figure. III.2). Les déplacements de ces nœuds, qui sont des paramètres inconnus, caractérisent le comportement de cette structure.

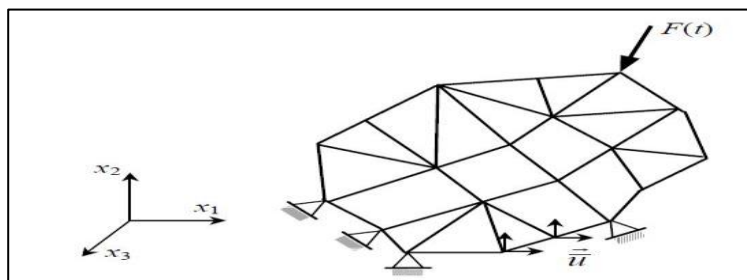


Figure. III.6: Discrétisation du solide

$F(t)$: la force externe

\bar{u} : Déplacement d'élément solide

III.4.1.1 Le Maillage :

Le premier pas de la chaîne de la simulation numérique du problème est le développement et l'adaptation du maillage autour du profil. Un maillage de bonne qualité est indispensable pour la procédure du calcul afin que les résultats soient acceptables et utilisables et ainsi recueillir des conclusions.

Les méthodes numériques de génération de maillages 2D, consistent à trouver une transformation ϕ permettant de faire correspondre le domaine physique (x, y) à un domaine de calcul (ξ, η) , afin de retrouver les qualités de régularité et de conformité aux frontières de ce dernier [33]. (Figure III.5).

Un nombre considérable de méthodes numériques utilisées actuellement dans le domaine d'aérodynamique pour générer des maillages, est basé sur l'équation de Poisson. En utilisant cette approche les lignes du maillage sont générées comme des lignes équipotentielles et des lignes de courant. L'avantage de cette méthode est la simplicité des équations de Poisson transformées qui peuvent être facilement résolues numériquement. Par contre son désavantage majeure est qu'elle présente des difficultés numériques pendant la résolution des problèmes qui ont besoin de conditions limites suivant la direction normale à la frontière du domaine de calcul.

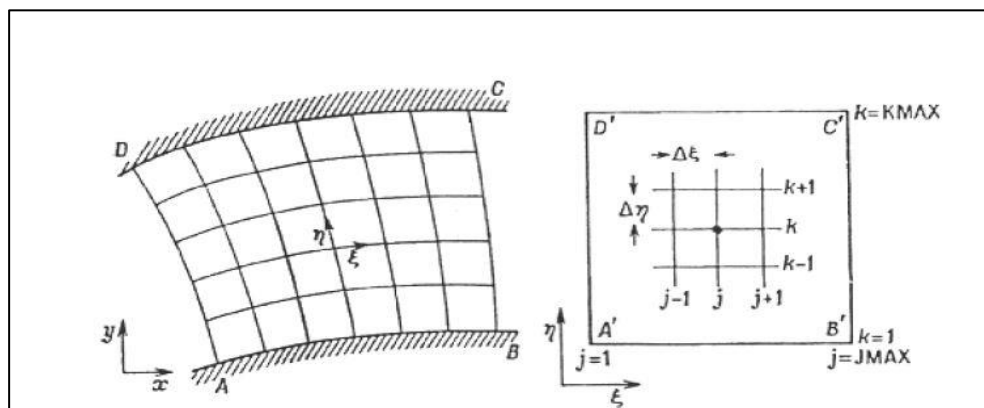


Figure III.7: Transformation du domaine physique (a) au domaine de calcul (b).

III.4.1.2 Problématique du maillage :

Le but de ce paragraphe n'est pas d'exposer les solutions envisagées pour la réalisation du maillage d'une pale, mais à partir d'un maillage type, d'évaluer les problèmes inhérents à la taille du modèle, dont découleront les choix de modélisation, notamment pour la prise en compte des phénomènes de décollement et d'endommagement des composites.

La figure III-6 présente ce que pourrait être la section maillée type d'un modèle d'impact sur pale arrière d'hélicoptère, sous éléments finis en dynamique rapide. Dans ce maillage, trois zones se distinguent :

- l'âme de genou, maillée grossièrement (éléments de 5*5 mm dans la section)
- le longeron principal, maillé en éléments 3D, plus finement (2*2 mm)
- les peaux et nervures, maillées en éléments coques

Tout cela revient à considérer un modèle à plus de 50000 éléments. La durée réelle de l'impact est estimée, d'après les premiers calculs, à plus d'1 ms. Le coût CPU d'un tel calcul est alors relativement important, même si les technologies actuelles permettent de faire un tel

calcul. Un tel maillage est pourtant un maillage de faible densité. Pour avoir une modélisation fine des phénomènes, notamment du décollement, il faudrait un maillage avec des éléments de taille bien inférieure au millimètre. Pour accéder à une telle précision, le nombre d'éléments dans le modèle atteindrait alors rapidement plusieurs millions. Les solutions de modélisation envisagées doivent donc prendre en compte le fait qu'il n'est pas possible de représenter avec finesse la structure.

Ces remarques sur le maillage montrent qu'il est nécessaire dans le cadre de cette étude d'avoir une approche globale pour la modélisation. Cela signifie qu'il est nécessaire de pouvoir proposer des modèles globaux, ou critères globaux, établis soit à partir d'essais sur structure, soit à partir de modélisations fines.

III.4.2 Construction de nodale par sous domaine

Pour chaque élément, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements $U^e(x, y, z)$ à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux U^e . Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale contenant un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté. Soit,

$$U^e(X, y, Z) = N^t U^e \quad (\text{III.5})$$

Où N est la matrice d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux déplacements nodaux.[32]

III.4.3. Etablissement de la relation entre déformations et déplacement

Il s'agit ici de trouver la matrice B reliant les déformations ε de l'élément à ses déplacements nodaux U^e . Cette relation est exprimée par :

$$\{\varepsilon\} = B U^e \quad (\text{III.2})$$

III.4.4. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations

Pour un matériau élastique linéaire, les contraintes σ sont des fonctions linéaires des déformations ε . Elles sont exprimées par l'expression :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (\text{III.6})$$

Où $[D]$ est la matrice d'élasticité.

III.4.5. Calcul des matrices élémentaires :

Cette étape constitue la partie la plus importante du problème. Les déplacements U^e aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur F^e , c'est-à-dire que :

$$\overline{K^e} U^e = \overline{F^e} \quad (\text{III.7})$$

K^e : est la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans le repère local. Elle est déduite de l'énergie de déformation de l'élément [30] et exprimée par :

$$\overline{K^e} = \int_0^V B^T D B dv \quad (\text{III.8})$$

Il faut aussi calculer la matrice de masse M^e de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément [30]. Dans le repère local de l'élément, cette matrice est donnée par l'expression :

$$\overline{M^e} = \int_0^V \rho N^T N dv \quad (\text{III.9})$$

Où ρ est la masse volumique du matériau constituant l'élément. Finalement, on exprime les matrices K^e , M^e , U^e et F^e dans le repère global défini pour toute la structure.

III.4.6. Assemblage des matrices élémentaires

La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices K, M et F de la structure complète à partir des matrices élémentaires K^e , M^e , U^e et F^e , exprimées dans le repère global, des différents éléments en sommant les énergies de déformation et cinétique de chaque élément.

Pour une structure formée de poutres, on ne peut pas sommer les matrices directement, car elles ne sont pas exprimées en fonction des mêmes variables. Pour chaque élément, il faut localiser la position des variables nodales dans le vecteur des déplacements de l'ensemble des nœuds de la structure. Cette opération consiste à ranger les termes des matrices élémentaires dans une matrice globale. La forme de cette matrice dépendra de l'ordre dans lequel sont définies les variables globales.

III.5. les hypothèses de travail

Pour décrire la variation du second degré de la force inertielle centrifuge dans la direction axiale, le l'interpolant fonction quadratique est L'élément 8 nœud (I.J.K.L.M.N.O.P) a cinq degrés de liberté à chaque nœud: trois translations dans $(U_x.U_y.U_z)$ suivants x, y, z, et deux rotations $(\theta_x. \theta_z)$ suivant x, z.

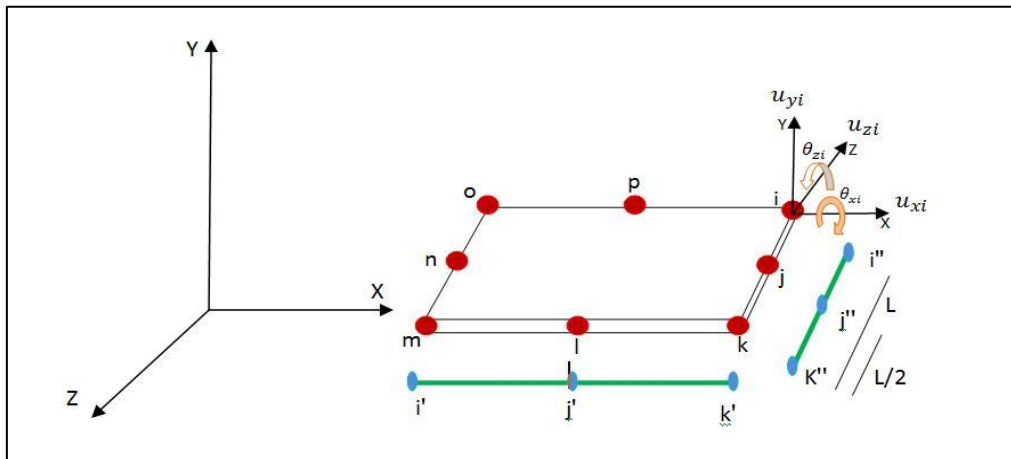


Figure III.9 : Degrés de liberté et de nœuds de faisceau élément de genou

III.5.1. Fonction de forme

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$U = [u_{0xi} u_{0yi} u_{0zi} \theta_{xi} \theta_{zi} \dots u_{0xp} u_{0yp} u_{0zp} \theta_{xp} \theta_{zp}]^T$$

$$\begin{bmatrix} u_{0x} \\ u_{0y} \\ u_{0z} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_p \end{bmatrix} * \quad (III.10)$$

$$[u_{0xi} u_{0yi} u_{0zi} \theta_{xi} \theta_{zi} \dots u_{0xp} u_{0yp} u_{0zp} \theta_{xp} \theta_{zp}]^T,$$

Avec u_{0x} est un déplacement suivant l'axe x, u_{0y} déplacement suivant y, u_{0z} déplacement suivant l'axe z, et $\theta_x \theta_z$ rotations autour les axes x et z respectivement.

III.5.2. Détermination de fonction d'interpolation Ni

La forme la plus efficace pour déterminer Ni est forme de Lagrange :

$$u_{ox} = N_i u_{0xi} + N_j u_{0xj} + N_k u_{0xk} + N_l u_{0xl} + N_m u_{0xm} + N_n u_{0xn} + N_o u_{0xo} + N_p u_{0xp} \quad (\text{III.11})$$

$$u_{oy} = N_i u_{0yi} + N_j u_{0yj} + N_k u_{0yk} + N_l u_{0yl} + N_m u_{0ym} + N_n u_{0yn} + N_o u_{0yo} + N_p u_{0yp} \quad (\text{III.12})$$

$$u_{oz} = N_i u_{0zi} + N_j u_{0zj} + N_k u_{0zk} + N_l u_{0zl} + N_m u_{0zm} + N_n u_{0zn} + N_o u_{0zo} + N_p u_{0zp} \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{aligned} \theta_x = \frac{\partial u_{oy}}{\partial z} = & N_{i,z} \theta_{xi} + N_{j,z} \theta_{xj} + N_{k,z} \theta_{xk} + N_{l,z} \theta_{xl} + N_{m,z} \theta_{xm} + N_{n,z} \theta_{xn} \\ & + N_{o,z} \theta_{xo} + N_{p,z} \theta_{xp} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{aligned} \theta_z = \frac{\partial u_{oy}}{\partial x} = & N_{i,x} \theta_{zi} + N_{j,x} \theta_{zj} + N_{k,x} \theta_{zk} + N_{l,x} \theta_{zl} + N_{m,x} \theta_{zm} + N_{n,x} \theta_{zn} \\ & + N_{o,x} \theta_{zo} + N_{p,x} \theta_{zp} \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Avec

$$\begin{aligned} N_i &= L_{xi}'(x) \cdot L_{zi}''(z), & N_j &= L_{xj}'(x) \cdot L_{zj}''(z), \\ N_k &= L_{xk}'(x) \cdot L_{zk}''(z), & N_l &= L_{xl}'(x) \cdot L_{zl}''(z), \\ N_m &= L_{xm}'(x) \cdot L_{zm}''(z), & N_n &= L_{xn}'(x) \cdot L_{zn}''(z), \\ N_o &= L_{xo}'(x) \cdot L_{zo}''(z), & N_p &= L_{xp}'(x) \cdot L_{zp}''(z), \\ L_{xi}'(x) &= \frac{2}{l^2} \left(x - \frac{l}{2} \right) (x - l), & L_{xj}'(x) &= \frac{2x}{l^2} (x - l), \\ L_{xk}'(x) &= \frac{2x}{l^2} \left(x - \frac{l}{2} \right), & L_{zi}''(z) &= \frac{2}{l^2} \left(z - \frac{l}{2} \right) (z - l), \\ L_{zj}''(z) &= \frac{2z}{l^2} (z - l), & L_{zk}''(z) &= \frac{2z}{l^2} \left(z - \frac{l}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Avec

Avec Li fonction d'interpolation de Lagrange et " les projections des nœuds sur l'axe z " les projections sur l'axe x

III.5.3.champ des déplacements

$$\theta_x(x, z) = - \frac{\partial u_{oy}}{\partial x} \quad (\text{IV.18})$$

$$\theta_z(x, z) = - \frac{\partial u_{oy}}{\partial z} \quad (\text{IV.19})$$

Le champ des déplacements s'écrit :

$$u_x(x, y, z) = u_{0x}(x, z) - y \frac{\partial u_{oy}}{\partial x}(x, z) \quad (\text{IV.20})$$

$$u_z(x, y, z) = u_{0z}(x, z) - y \frac{\partial u_{oy}}{\partial z}(x, z) \quad (\text{IV.21})$$

$$u_y(x, y, z) = u_{0y}(x, z) \quad (\text{IV.22})$$

III.5.4.Déformation

Le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_{0x}}{\partial x} - y \frac{\partial^2 u_{oy}}{\partial x^2} \quad (\text{IV.23})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_{0z}}{\partial z} - y \frac{\partial^2 u_{oy}}{\partial z^2} \quad (\text{IV.24})$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (\text{IV.25})$$

$$\varepsilon_{yz} = 0 \quad \varepsilon_{yx} = 0$$

$$\varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial z} + \frac{\partial u_{0z}}{\partial x} \right) - 2y \frac{\partial^2 u_{oy}}{\partial x \partial z} \quad (\text{IV.26})$$

Le tenseur des déformations

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} & 0 \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (IV.27)$$

La matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ k_{xz} \end{bmatrix} \quad (IV.28)$$

La déformation d'un élément plane est composé par deux termes l'une membrane et l'autre flexion comme la suite :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^m\} + y\{k\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} + y \begin{Bmatrix} k_x \\ k_z \\ k_{xz} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 & N_m & 0 & N_n & 0 & N_o & 0 & N_p & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 & N_m & 0 & N_n & 0 & N_o & 0 & N_p \end{bmatrix}^*$$

$$\begin{bmatrix} u_{0xi} & u_{0zi} & u_{0yi} & \theta_{xi} & \theta_{zi} & \dots & u_{0xp} & u_{0zp} & u_{0yp} & \theta_{xp} & \theta_{zp} \end{bmatrix}^T +$$

$$y \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k & N_l & N_m & N_n & N_o & N_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0yi} \\ u_{0yj} \\ \vdots \\ u_{0yp} \end{bmatrix} \quad (IV.29)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_o}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_o}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_o}{\partial x} & \frac{\partial N_o}{\partial z} & \frac{\partial N_p}{\partial x} & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix}^*$$

$$\begin{bmatrix} u_{0xi} & u_{0zi} & u_{0yi} & \theta_{xi} & \theta_{zi} & \dots & u_{0xp} & u_{0zp} & u_{0yp} & \theta_{xp} & \theta_{zp} \end{bmatrix}^T +$$

$$y \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial z} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial x \partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0yi} \\ u_{0yj} \\ \vdots \\ u_{0yp} \end{bmatrix} \quad (III.30)$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_o}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_o}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_o}{\partial x} & \frac{\partial N_o}{\partial z} & \frac{\partial N_p}{\partial x} & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$[B_f] = y \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial z} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial x \partial z} \end{bmatrix}, \quad (III.31)$$

III.5.5. Champ des contraintes

Le champ des contraintes d'une couche des stratifiés est donné par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \varrho'_{11} & \varrho'_{12} & \varrho'_{13} \\ \varrho'_{21} & \varrho'_{22} & \varrho'_{23} \\ \varrho'_{31} & \varrho'_{32} & \varrho'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{zz}^m \\ \varepsilon_{xz}^m \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \varrho'_{11} & \varrho'_{12} & \varrho'_{13} \\ \varrho'_{21} & \varrho'_{22} & \varrho'_{23} \\ \varrho'_{31} & \varrho'_{32} & \varrho'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_z \\ K_{xz} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.32})$$

$$\varrho_{ij} = C'_{ij} - \frac{c'_{i3}c'_{j3}}{c'_{33}}$$

Tel que C' est les tenseurs des rigidités hors les principaux

Les résultats en membrane, dans un stratifié donne par :

$$N(x, z) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\varrho'_k \varepsilon^m(x, z) + y \varrho'_k k(x, z)] dy, \quad (\text{III.33})$$

Ou en intégrant dans l'épaisseur :

$$(\text{III.34})$$

$$N(x, z) = [A_{ij}] \varepsilon^m(x, z) + [B_{ij}] K(x, z)$$

Avec

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (\varrho'_{ij})_k$$

Et

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (k_k^2 - k_{k-1}^2) \varrho'_k \quad (\text{III.35})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\varrho'_{ij})_k$$

$$B = [B_{ij}] \text{ avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\varrho'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\varrho'_{ij})_k e_k z_k \quad (\text{III.36})$$

L'expression développée des résultants en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_z \\ N_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{zz}^m \\ \gamma_{xz}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_z \\ k_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Les moments de flexion et de torsion :

$$M(x, z) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [y \varrho'_k \varepsilon^m(x, z) + y^2 \varrho'_k k(x, z)] dy, \quad (\text{III.38})$$

$$M(x, z) = [B_{ij}] \varepsilon^m(x, z) + [D_{ij}] k(x, z), \quad (\text{III.39})$$

$$D = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \varrho'_k \quad (\text{III.40})$$

$$D = [D_{ij}] \text{ avec } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\varrho'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \quad (\text{III.41})$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{zz} \\ M_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{zz}^m \\ \gamma_{xz}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_z \\ k_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée est :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^m \\ k \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix} [q] \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

III.5.6. L'énergie de déformation

L'énergie totale de déformation d'un solide s'écrit sous la forme suivant

$$U_e = \iiint \left(\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}^m \varepsilon_{ij} \right) dV - \iiint f_i^v u_i dV - \iint f_i^s u_i dS \quad (\text{III.44})$$

Ou V et S sont respectivement le volume et la surface extérieure de l'élément.

Cette expression peut être écrite sous une forme matricielle [29].

$$U_e = \iiint \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon^m \\ k \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^m \\ k \end{bmatrix} \right) dV - \iiint \{u\}^t \{f^v\} dV - \iint \{u\}^t \{f^s\} dS \quad (\text{III.45})$$

La variation virtuelle du champ de déplacement $\{\delta u\}$ donne :

$$\delta U_e = \iiint \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon^m \\ \delta k \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon^m \\ \delta k \end{bmatrix} \right) dV - \iiint \{\delta u\}^t \{f^v\} dV - \iint \{\delta u\}^t \{f^s\} dS \quad (\text{III.46})$$

La discrétisation de cette expression

$$\begin{aligned} U_e &= \iiint \left(\{\delta q_e\}^t \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix} \{q_e\} \right) dV - \iiint \{\delta q_e\}^t [N]^t \{f^v\} dV - \\ &\quad \iint [N]^t \{f^s\} dS \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Pour tout système stable, la stationnarité de l'énergie potentielle conduit à :

$\Pi = 0$ on peut simplifier l'expression ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{aligned} \iiint \left(\{\delta q_e\}^t \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix} \{q_e\} \right) dV = - \iiint \{\delta q_e\}^t [N]^t \{f^v\} dV - \\ \iint [N]^t \{f^s\} dS \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

L'expression ci-dessus définit complètement le comportement d'un élément par un système d'équations linéaire sous la forme :

$$[K_e] \{q_e\} = \{F_e\} \quad (\text{III.49})$$

Ou $[K_e]$ est la matrice de rigidité de l'élément, $\{q_e\}$ est le vecteur des déplacements nodaux.

Donc la matrice de rigidité élémentaire est :

$$\begin{aligned} [K]_e &= \iiint [B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] \\ &\quad + [B_f]^T [D] [B_f] dv \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

III.5.7. L'énergie cinétique

L'énergie cinétique de système s'écrit sous la forme suivant :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho V^2 dV \quad (\text{III.51})$$

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz, \quad (\text{III.52})$$

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho [\dot{q}]^t [N]^t [N] [\dot{q}] dV \quad (\text{III.53})$$

$$[M]_e = \iiint \rho [N]^t [N] dV \quad (\text{III.54})$$

$[M]_e$ Matrice de masse élémentaire.

III.5.8. Système d'équations

L'obtention du système d'équations se fera classiquement en appliquant le Principe de Hamilton.

Le principe de Hamilton est la base de l'étude énergétique des systèmes en dynamique. L'énergie total du système est la somme de l'énergie potentielle, de l'énergie de dissipation et l'énergie cinétique. [33]

$$\Pi = U + T + W_{diss} \quad (\text{III.55})$$

Si $\{\delta_U\}$ est champ virtuel cinématiquement admissible tel que $\{\delta_U\}(t_1) = 0$ et $\{\delta_U\}(t_2) = 0$, l'énergie totale du système est stationnaire, c'est-à-dire :

$$\delta \Pi(t) = 0 \quad (\text{III.56})$$

Ou bien

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi(t) dt = 0 \quad (\text{III.57})$$

III.5.9. Discrétisation par éléments finis

On pose l'hypothèse de séparation entre l'évolution spatiale et temporelle des champs

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(x, y) u_i(t) \quad (\text{III.58})$$

Il vient

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N] \{q_e\} \\ \{\dot{u}\} &= [N] \{\dot{q}_e\} \\ \{\ddot{u}\} &= [N] \{\ddot{q}_e\} \end{aligned}$$

La discrétisation du principe de Hamilton donne :

$$\begin{aligned} \{\delta q_e\}^t \int_v ([B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] \\ + \rho [N]^t [N] [\ddot{q}_e] - [N]^t \{f^u\}) dv - \{\delta q_e\} \int_s [N]^t \{f^u\} ds = 0 \end{aligned}$$

Le système d'équations général est :

$$[M_e] \{\ddot{q}_e\} + [k_e] \{q_e\} = \{f_e\} \quad (\text{III.59})$$

Avec

$$\begin{aligned} [M_e] &= \int_{V_e} \rho [N]^t [N] dV \\ [k_e] &= \iiint [B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] dv \\ \{f_e\} &= \int_{V_e} [N]^t \{f^u\} dV + \int_{S_e} [N]^t \{f^u\} ds \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

$[M_e]$ Est la matrice de masse de l'élément, $[K_e]$ est la matrice de rigidité et $\{f_e\}$ est le vecteur des force nodales dans le repère local.

Les matrices $[M_e]_g, [K_e]_g$ les vecteurs $\{f_e\}_g$ et $\{q_e\}_g$ dans le repère global sont :

$$\begin{aligned} [k_e^m]_g &= [T_e^m]^t [K_e^m]_l [T_e^m] \\ [M]_g &= [T_e^m]^t [M_e^m]_l [T_e^m] \\ \{q_e^m\}_g &= [T_e^m]^t \{q_e^m\}_l \\ \{F_e^m\}_g &= [T_e^m]^t \{F_e^m\}_l \end{aligned}$$

Avec g indiquant le repère global. La matrice de passage s'écrit :

$$[T] = \begin{bmatrix} [t^m] & 0 & 0 \\ 0 & [t^m] & 0 \\ 0 & 0 & [t^m] \end{bmatrix}$$

Avec

$$[t^m] = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}$$

III.5.10. Résolution des équations

Pour résoudre l'équation du mouvement on utilise la méthode de superposition.

Le principe de base est que la réponse de la pale est la combinaison de différents modes propres de vibration. La contribution de chacun des modes est donnée par un facteur d'amplitude directe.

$$\{q\} = Y_1\{\Phi_1\} + Y_2\{\Phi_2\} + \dots + Y_n\{\Phi_n\} \quad (III.61)$$

Avec Y_i amplitude du mode i et $\{\Phi_i\}$ le vecteur propre du même mode. On peut écrire :

$$\{q\} = [\Phi]\{Y\} \quad (III.62)$$

Avec

$$\begin{aligned} \{\Phi\} &= [\{\Phi_1\} \{\Phi_2\} \dots \dots \dots \{\Phi_n\}] \\ \{Y\}^t &= [Y_1 \ Y_2 \ \dots \dots \dots \ Y_n] \end{aligned} \quad (III.63)$$

L'équation du mouvement de la genou :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (III.64)$$

Est écrite sous la forme :

$$[M][\Phi]\{\ddot{Y}\} + [K][\Phi]\{Y\} = \{F\} \quad (III.65)$$

Cette expression est multipliée par le vecteur propre du mode i .

$$\{\Phi_i\}^t [M][\Phi]\{\ddot{Y}\} + \{\Phi_i\}^t [K][\Phi]\{Y\} = \{\Phi_i\}^t \{F\} \quad (III.66)$$

L'orthogonalité des modes propres réduit le système a une s'écrite d'équation découplée.

$$\{\Phi_i\}^t [M]\{\Phi_i\}\ddot{Y}_i + \{\Phi_i\}^t [K]\{\Phi_i\}Y_i = \{\Phi_i\}^t \{F\} \quad (III.67)$$

Ou bien

$$\hat{m}_i \ddot{Y}_i + \hat{K}_i Y_i = f_i \quad (III.68)$$

Avec

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{m}}_i &= \{\Phi_i\}^t [\mathbf{M}] \{\Phi_i\} \\ \hat{\mathbf{K}}_i &= \{\Phi_i\}^t [\mathbf{K}] \{\Phi_i\}\end{aligned}\quad (\text{III.69})$$

Il suffit donc de résoudre séparément chacune de ces équations pour déterminer l'amplitude associée $Y_i(t)$

III.6. Procédure de résolution

La procédure est la suivante :

- 1 évaluer les matrices $[M]$ et $[k]$
- 2 évaluer les fréquences propres du système : $|[M] - \omega^2[k]| = 0$
On en déduit ω_i et $\{\Phi_i\}$
- 3 pour chaque mode i
 - (a) calculer \hat{m}_i et f_i
 - (b) résoudre l'équation du mode : $\ddot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = f_i / \hat{m}_i$
4. déterminer la réponse de la structure $\{q(t)\} = [\Phi]\{Y(t)\}$

III.7. Conclusion

Le modèle obtenu à l'aide de la méthode des éléments finis est plus adapté pour modéliser les systèmes réels ou structure solide car il est plus précis et permet d'étudier l'ensemble des modes de vibration du genou. Il est également modulaire car chaque mode de genou possède ses propres caractéristiques. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou enlevés au gré de l'utilisateur qui peut également ajouter des raideurs, des amortissements ou des forces extérieures en chaque nœud

Chapitre IV
Résultats numérique
Et
Interprétation

IV.1 Introduction

Pour mener notre étude par simulation numérique, on a utilisé le code numérique ANSYS, qui est l'un des codes de calcul, basé sur la méthode d'éléments finis, parmi les plus utilisés dans le monde. Le code «ANSYS» comprend plusieurs composantes. Chaque composante est destinée à l'un des domaines d'ingénierie, et son choix met automatiquement à la disposition de l'utilisateur les processus adéquats (type d'élément, conditions aux limites, tracés» etc).

Dans cette étude pour désigne a la géométrie de chaque cas étudié on base au programme commercial **SolidWorks**, et pour la génération de son maillage et l'application de force et fixation et condition inertiel dans la composant **M** (Mechanical). Nous utilisons le logiciel ANSYS pour simuler chaque cas étudié avec différents poids de 80 kg ainsi que 150 kg pour simule de l'état statique et Modal.

IV.2. SOLIDWORKS et M (Mechanical)

SolidWorks est un logiciel propriétaire de conception assistée par ordinateur 3D fonctionnant sous Windows. Créé en 1993 par l'éditeur américain éponyme, SolidWorks a été acheté le 24 juin 1997 par la société Dassault Systèmes SolidWorks est un modeleur 3D utilisant la conception assistée par ordinateur. Il génère 3 types de fichiers relatifs à trois concepts de base : la pièce, l'assemblage et la mise en plan. Ces fichiers sont en relation. Toute modification à quelque niveau que ce soit est répercutée vers tous les fichiers concernés.

Les options de génération de maillage de **M** offrent une flexibilité de choix. La géométrie peut être décomposée en plusieurs parties pour générer un maillage structuré, sinon **M** génère automatiquement un maillage non structuré adapté au type de géométrie construite. Les défauts sont détectés à l'aide de son interface comportant plusieurs fenêtres d'outils de création, génération, vérification du maillage du modèle étudié et l'incorporation des conditions aux limites.

IV.2.1. Maillage

Avoir une meilleure précision des résultats par le solveur **M** (Mechanical) nécessite un maillage suffisamment raffiné de sorte que la solution soit indépendante du maillage. Un test de l'effet du maillage sur la solution a été effectué en utilisant différents nombres de cellules. Il a été opté pour un maillage quadrilatéral dans le cas du genou isolé 3D, Figure. (III.1). Les nombres de Maillage trilatéral genou isolé 3D est : pour le sans fissure **39496** cellules et **25933** éléments et pour le avec fissure **41635** et **27067** éléments

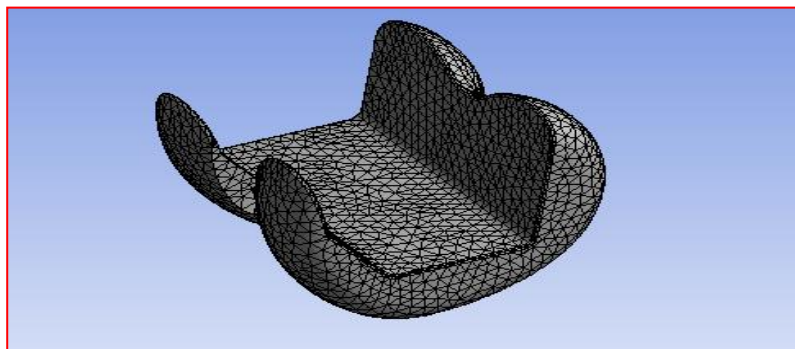


Figure IV.1: Maillage de genou isolé sans fissure en 3D

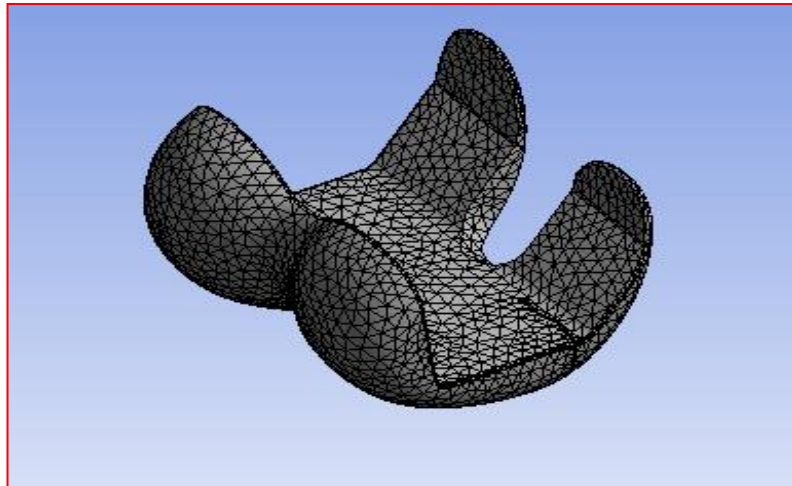


Figure IV.2: Maillage de genou isolé avec fissure en 3D

IV.3. Résultats et interprétation

L'objectif de cette étude est de déterminer les effets de poids sur la surface de genou et représente le déformé paramètre dans le cas statique, avec détermination des fréquences et les modes propre de prothèse du genou.

IV.3.1. matériaux de prothèse de genou

Les biocéramiques se caractérisent par un comportement purement élastique, avec un module d'Young élevé et ce jusqu'à ce que la contrainte à rupture soit atteinte (Tableau IV.1). Elles ne peuvent s'adapter au-delà de quelques microdéformations avant rupture. Bien que les biocéramiques présentent une rupture de type "fragile", certaines d'entre elles peuvent résister à des contraintes de compression très élevées.

Tableau IV.1 : matériaux de prothèse du genou.

Caractéristiques mécaniques	
Pureté en %	99,9
Résistance à la compression[MPa]	4000
Résistance à la flexion [MPa]	550 - 600
Module d'Young [GPa]	380
Coefficient de Poisson (ν)	0.18
Taille moyenne du grain [μm]	1.3
Masse volumique [g/mm ³]	3.9
Ténacité statique en traction, KIC [MPa√m]	3.5 - 6

IV.3.2. analyse modale

IV.3.2.1. les fréquences naturelles de prothèse du genou

Les fréquences de prothèse du genou sont présentées dans les tableaux ci-dessous:

Tableau IV.2 : les fréquences naturelles de prothèse du genou.

Numéro de mode	Fréquence [Hz]	
	Sans fissure #1	Avec fissure #2
1	1.3679e+005	1.3675e+005
2	1.4195e+005	1.4194e+005
3	1.499e+005	1.4981e+005
4	1.6359e+005	1.6097e+005
5	1.722e+005	1.6359e+005
6	1.7593e+005	1.7228e+005

La valeur de fréquences de prothèse avec fissure Moins de vibrations de sans fissure.

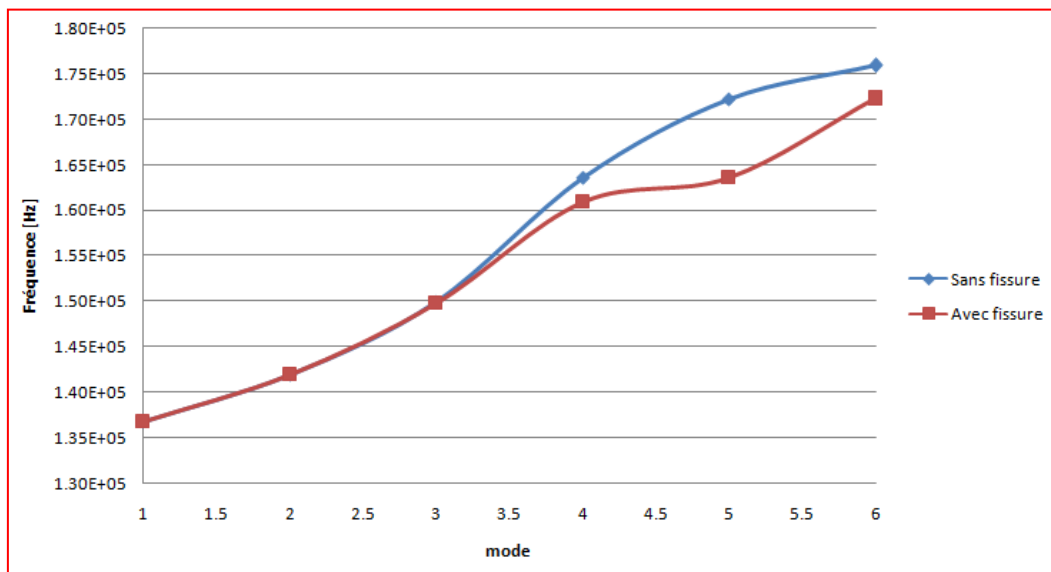
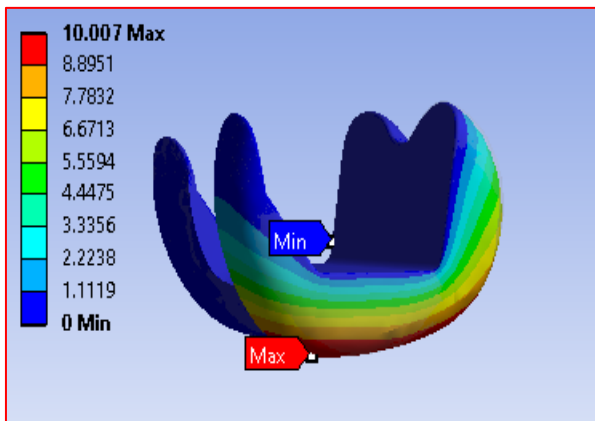
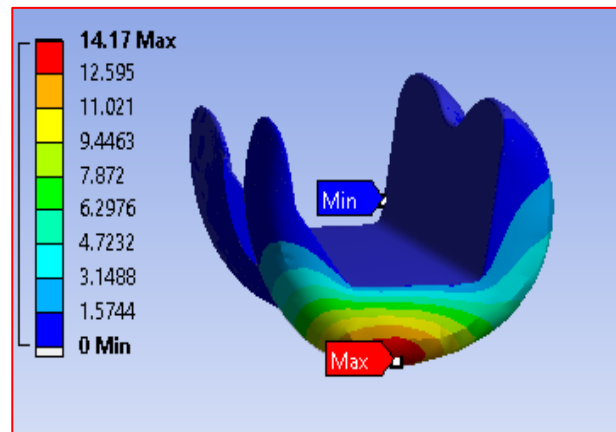


Figure IV.3 : la fréquence on fonction numéro de mode

IV.3.2.2 Les déformées modales :

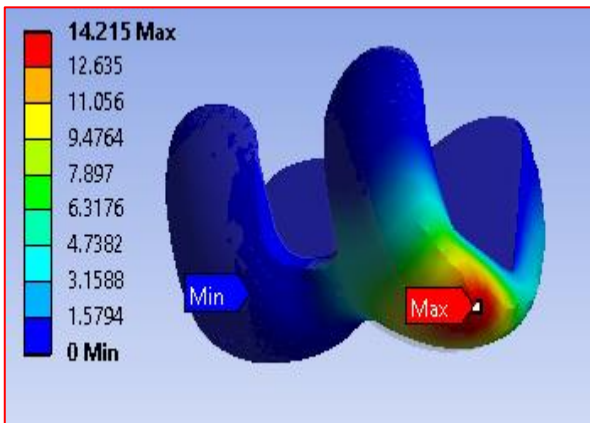


#1

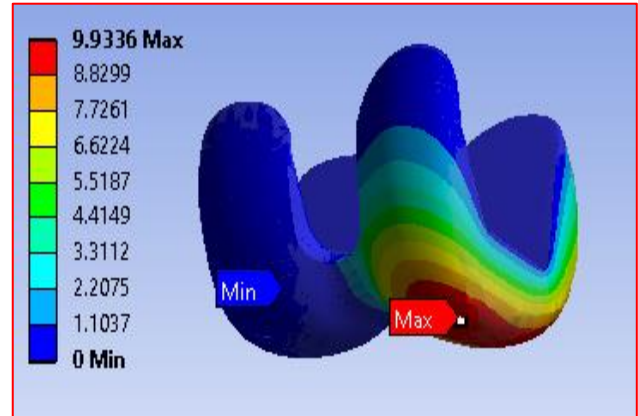


#2

Figure IV.4 : Mode de 1^{ère} déformée

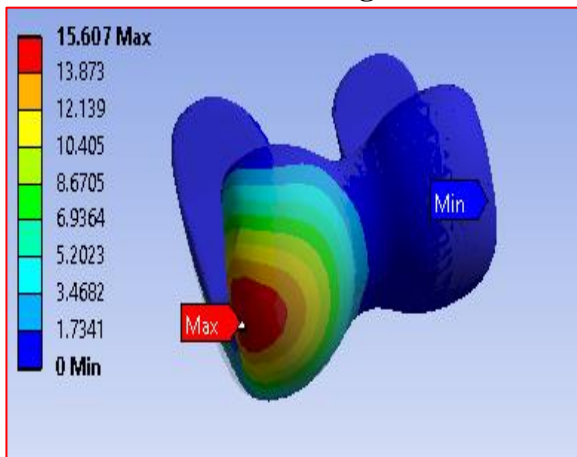


#1

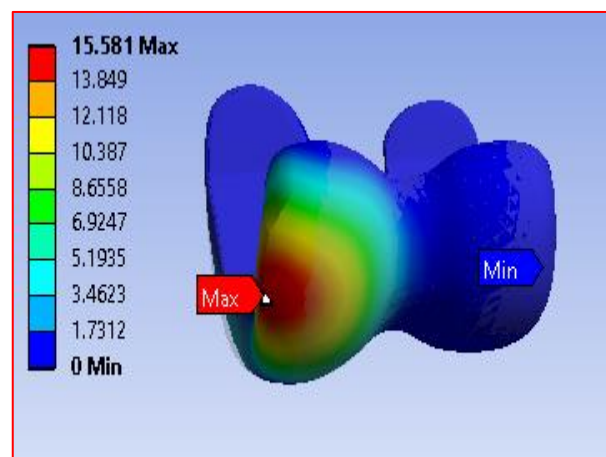


#2

Figure IV.5 : Mode de 2^{ème} déformée

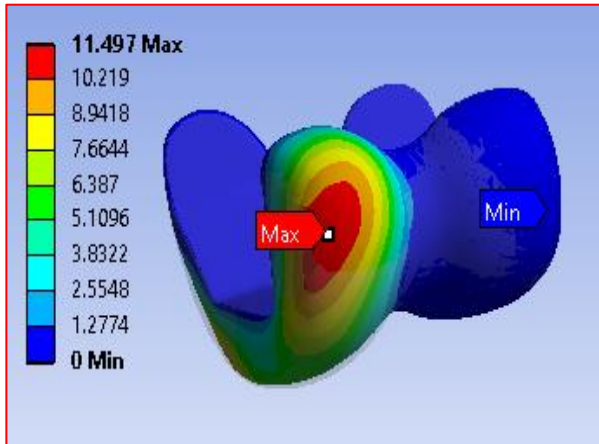


#1

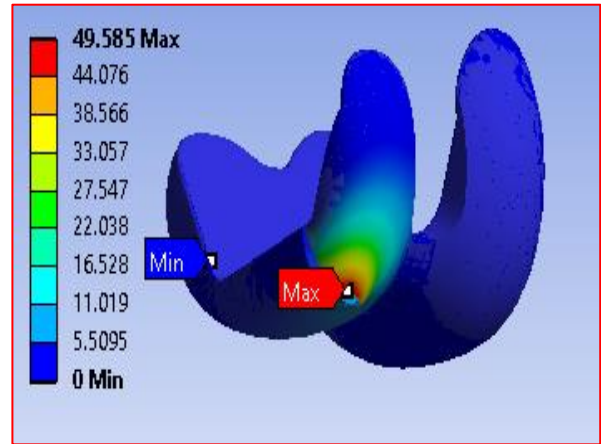


#2

Figure IV.6 : Mode de 3^{ème} déformée

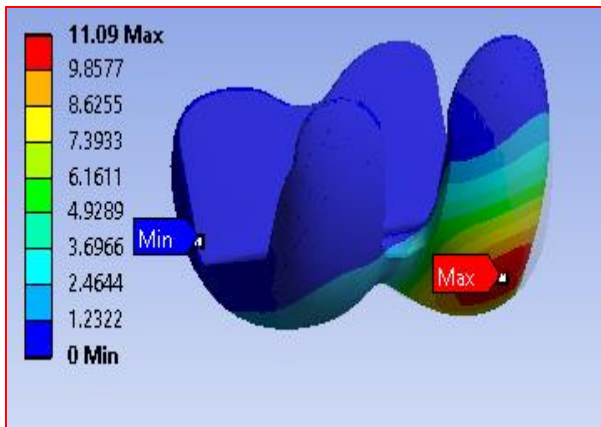


#1

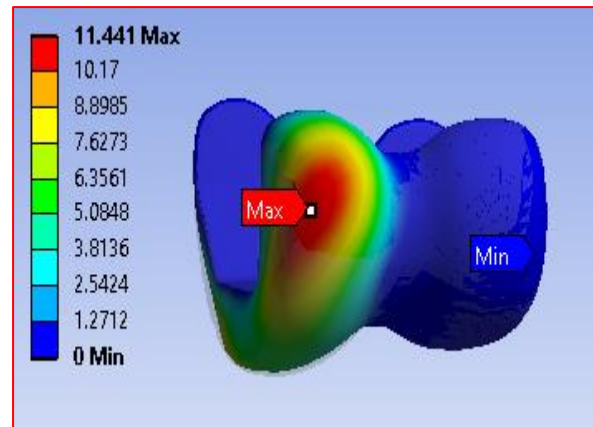


#2

Figure IV.7 : Mode de 4^{ème} déformée

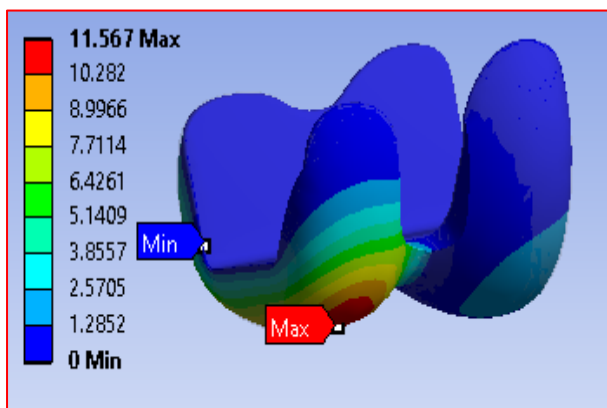


#1

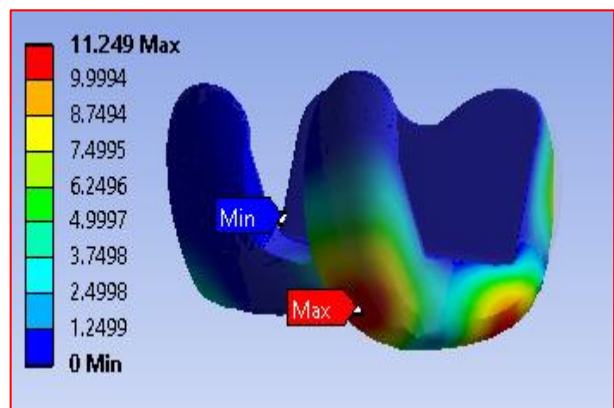


#2

Figure IV.8 : Mode de 5^{ème} déformée



#1



#2

Figure IV.9 : Mode de 6^{ème} déformée

Tableau IV.3 : les déformations Max de prothèse de genou

Numéro de mode	Déformation Max [mm]	
	Sans fissure	Avec fissure
1	10.007	14.17
2	14.215	9.933
3	15.607	15.581
4	11.497	49.585
5	11.09	11.441
6	11.567	11.249

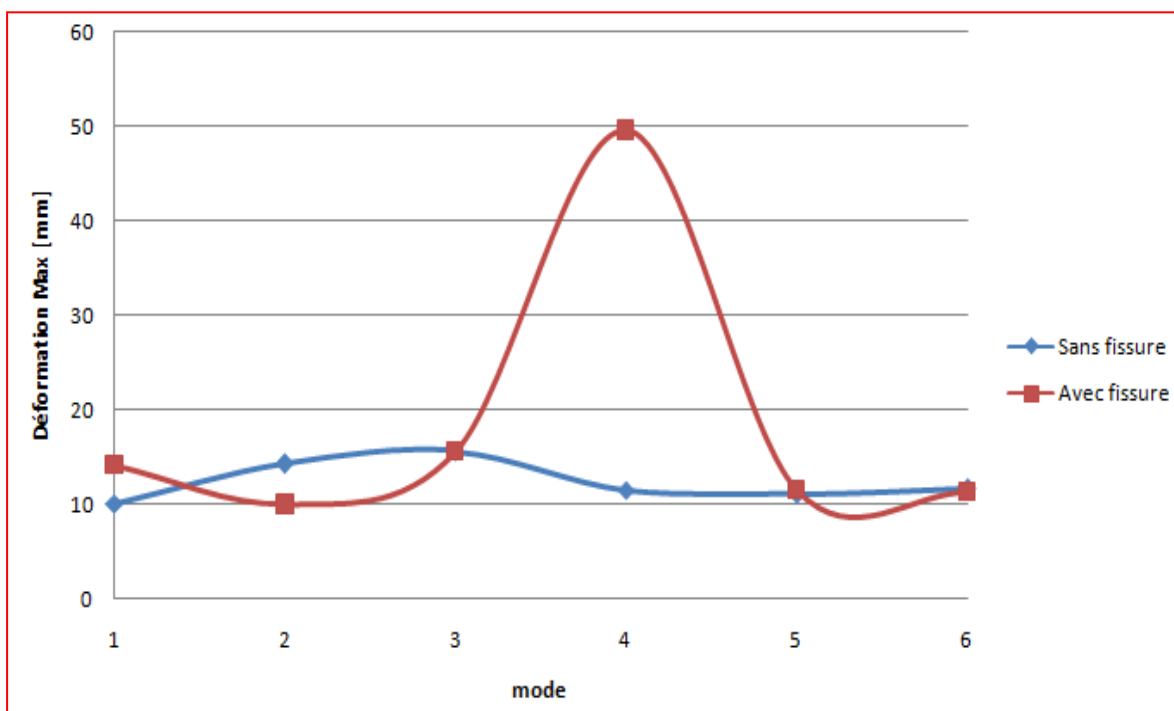


Figure IV.10: les Max déformation de prothèse de genou

IV.3.3 Analyse statique

La force de poids applique sur le surface prothèse de genou dans la direction de y Cela signifie qu'il est perpendiculaire à la surface du sentier pédestre.

Dans cette étude, nous avons appliqué deux forces différentes, la première pour une personne de 80 kg, soit environ P1egale 800 Newton, et la seconde pour une personne de 150 kg, soit environ P2 egale 1500 Newtons.Nous avons également créé une fissure dans les deux cas pour étudier les déformations et les contraintes appliquées à la prothèse de genou..

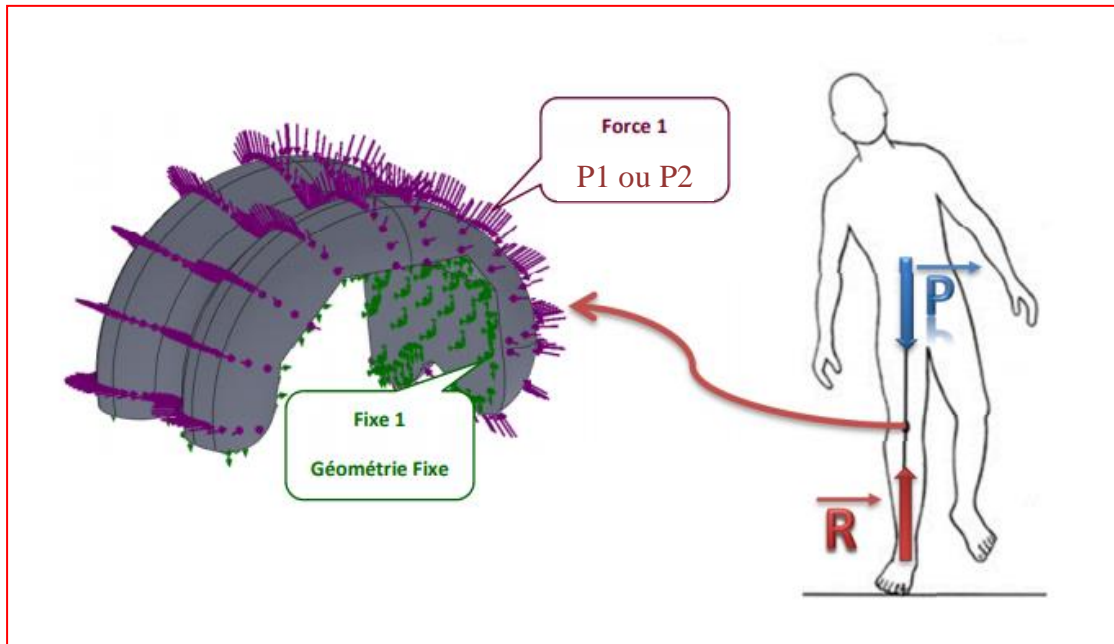
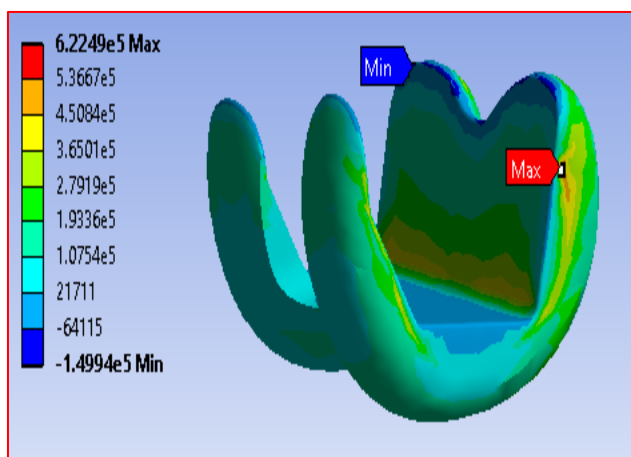
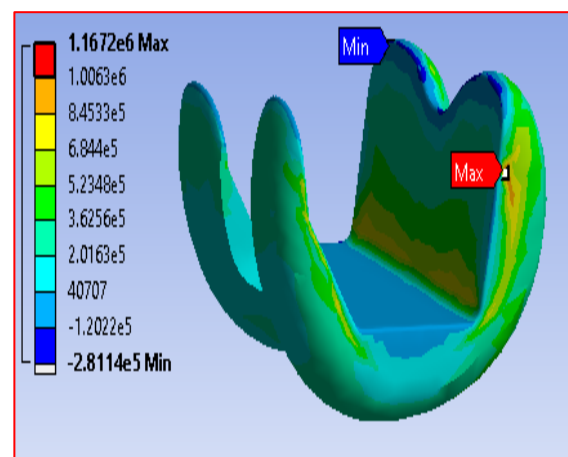


Figure IV.11 : position de force de poids sur la prothèse de genou

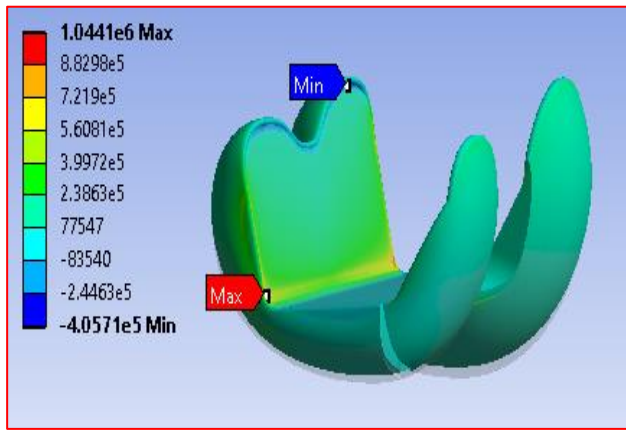
IV.3.3.1 Les contraintes de prothèse de genou



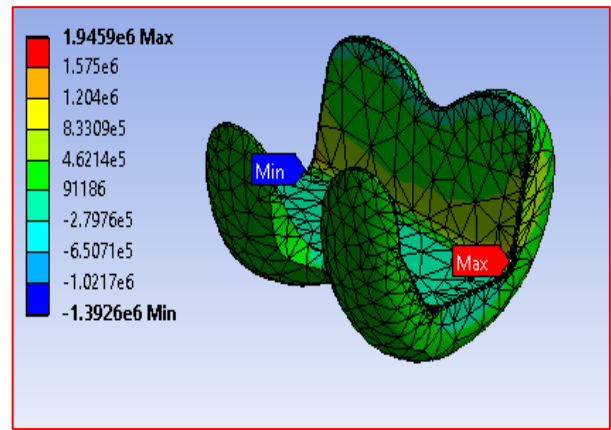
P1#1



P2#1



P1#2



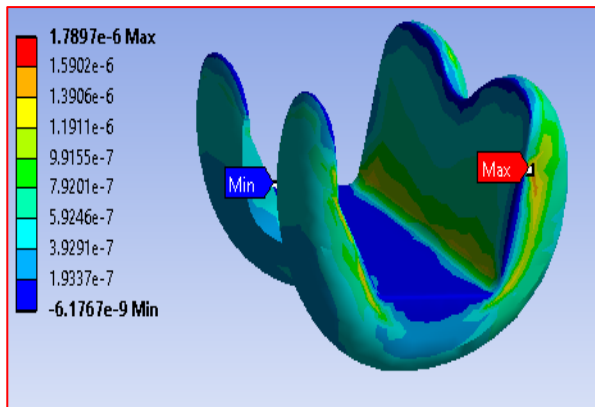
P2#2

Figures IV.12 : La contrainte Max de prothèse de genou

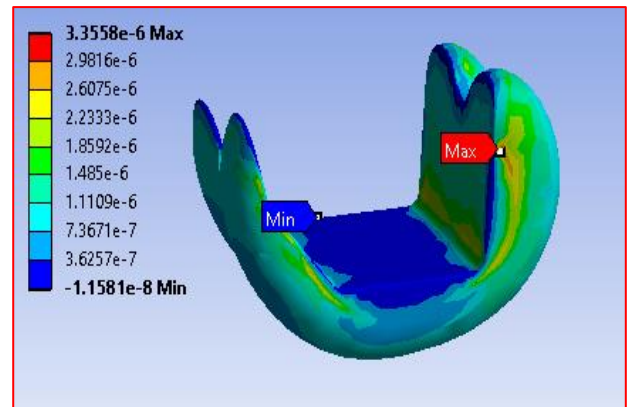
Tableau IV.4 : valeur max de contrainte

Force	La contrainte Max [Pa]	
	Sans fissure #1	Avec fissure #2
P1= 800 N	6.224e5	1.044e6
P2= 1500 N	1.167e6	1.945e6

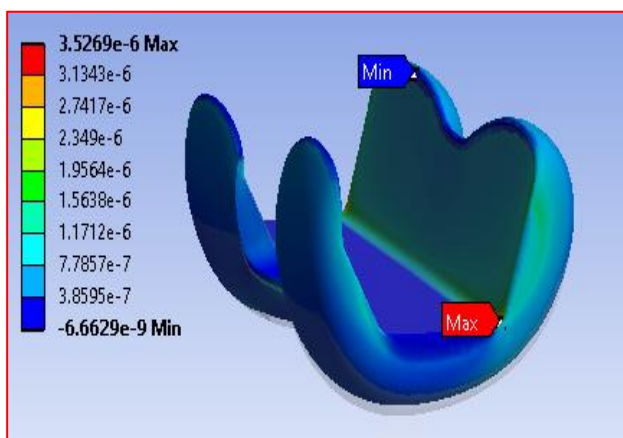
IV.3.3.2 Les déformation de prothèse de genou



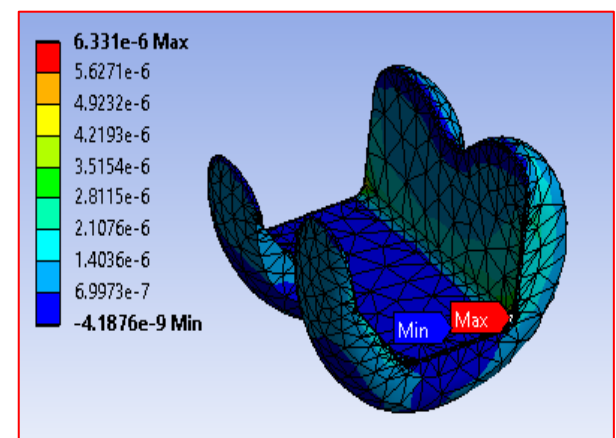
P1#1



P2#1



P1#2

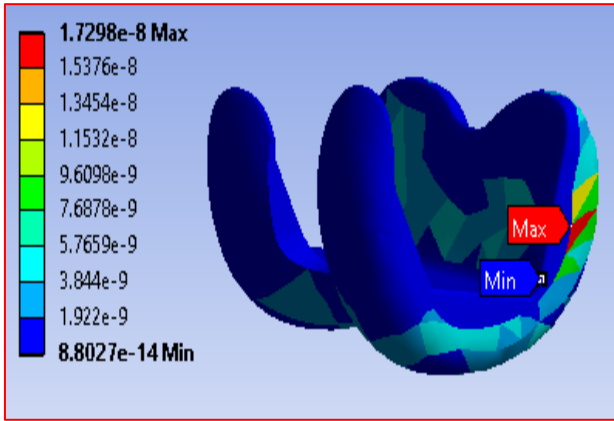


P2#2

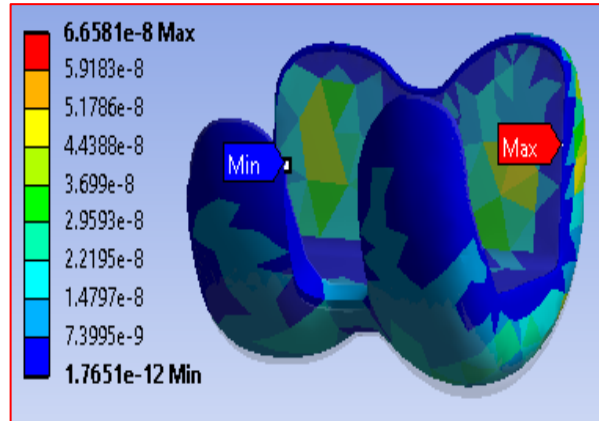
Figures IV.13 : la déformation Max de prothèse de genou

Tableau IV.5 : valeur max de déformation

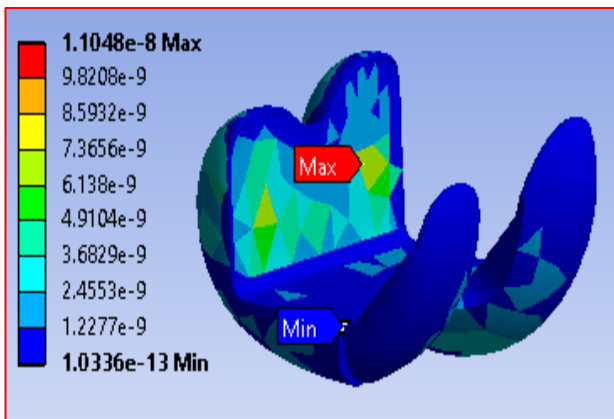
Force	la déformation Max [Pa]	
	Sans fissure #1	Avec fissure #2
P1= 800 N	1.789e-6	3.526e-6
P2= 1500 N	3.355e-6	6.331e-6



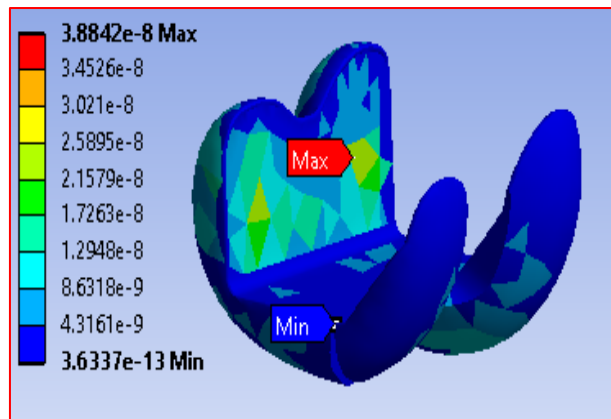
P1#1



P2#1



P1#2



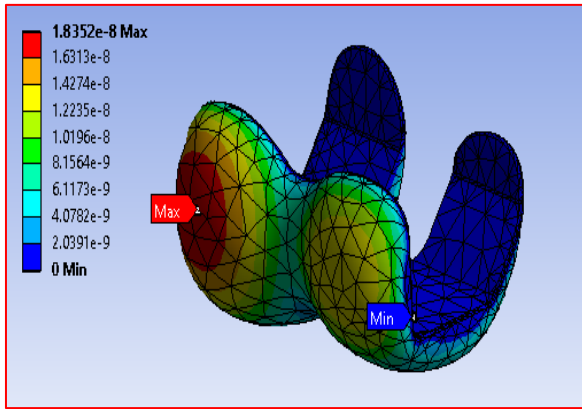
P2#2

Figures IV.14 : L'énergie de déformation

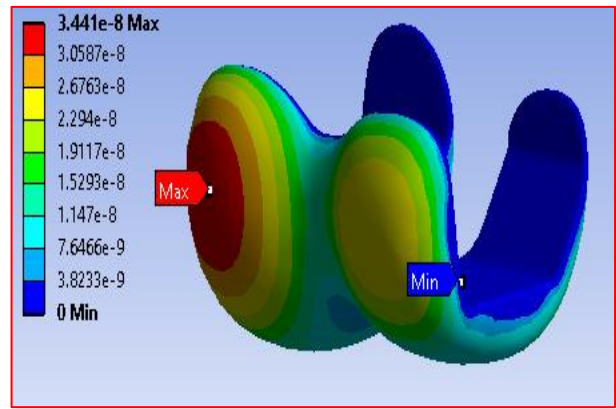
Tableau IV.6 : valeur max d'énergie de déformation

Force	l'énergie déformation Max [J]	
	Sans fissure #1	Avec fissure #2
P1= 800 N	1.729e-8	1.104e-8
P2= 1500 N	6.658e-8	3.884e-8

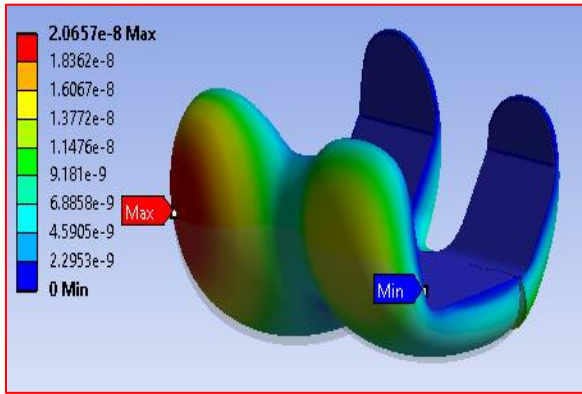
IV.3.3.3 Déplacement de prothèse de genou



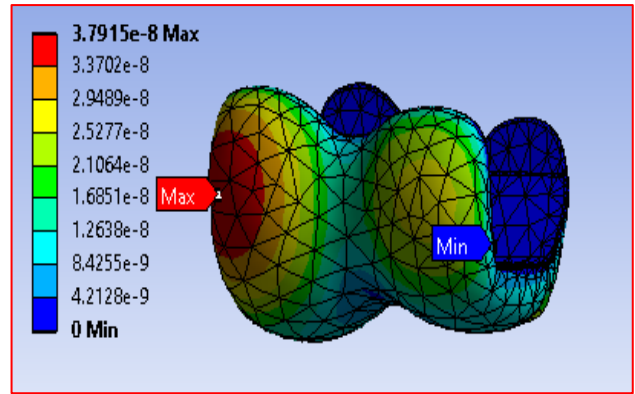
P1#1



P2#1



P1#2

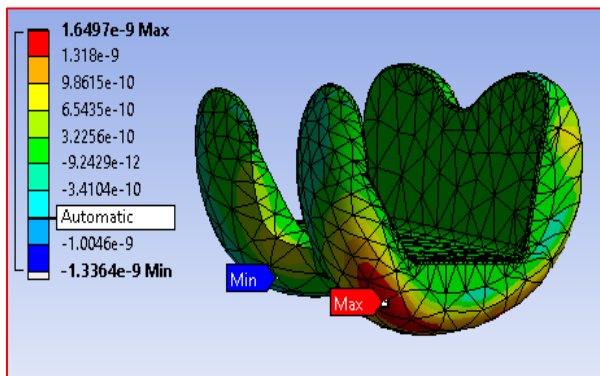


P2#2

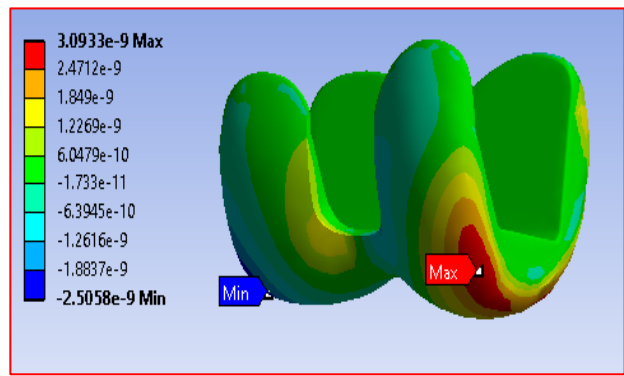
Figures IV.15 : total Déplacement

Tableau IV.6 : valeur max de total Déplacement

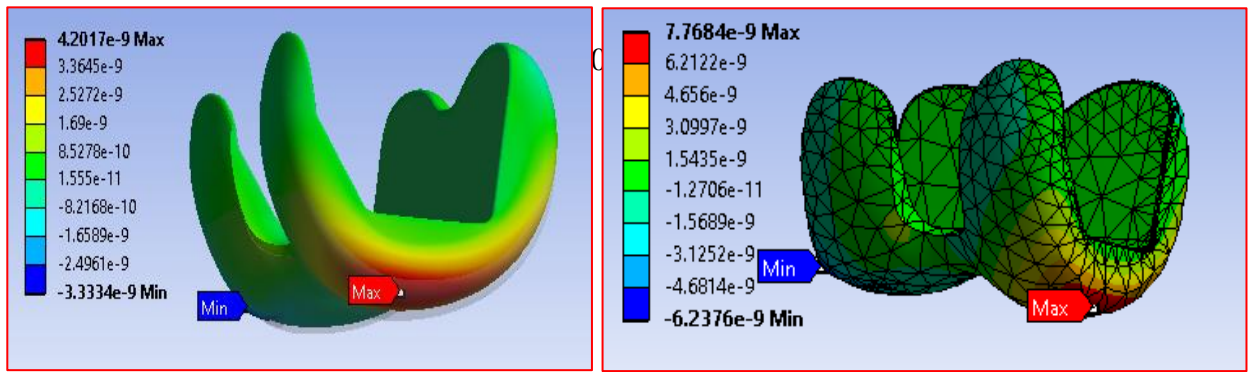
Force	Max de total Déplacement [m]	
	Sans fissure #1	Avec fissure #2
P1= 800 N	1.835e-8	2.065e-8
P2= 1500 N	3.441e-8	3.791e-8



P1#1



P2#1



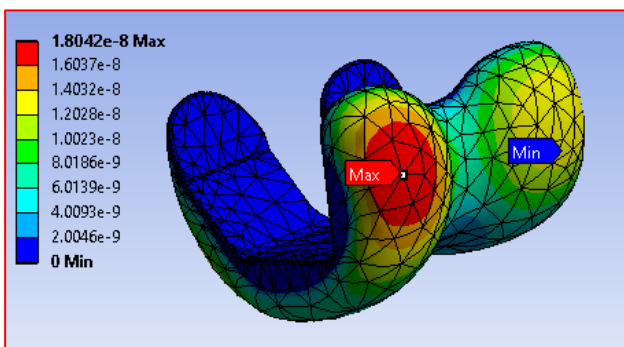
P1#2

P2#2

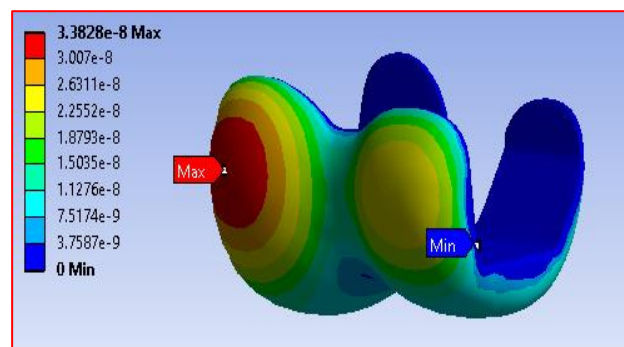
Figures IV.16 : Déplacement suivant x

Tableau IV.7 : valeur max de déplacement suivant X

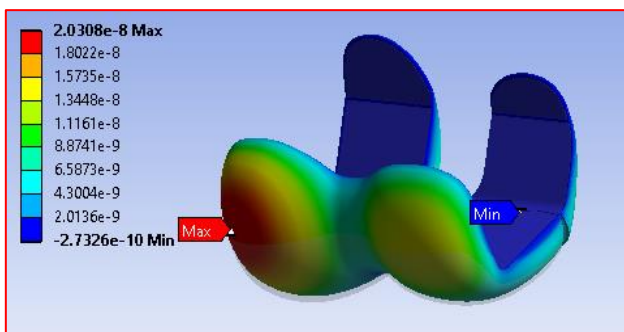
Force	Déplacement Max suivant X [m]	
	Sans fissure #1	Avec fissure #2
P1= 800 N	1.649e-9	4.201e-9
P2= 1500 N	3.093e-9	7.768e-9



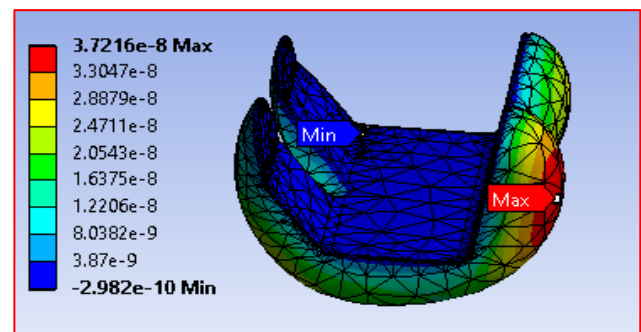
P1#1



P2#1



P1#2

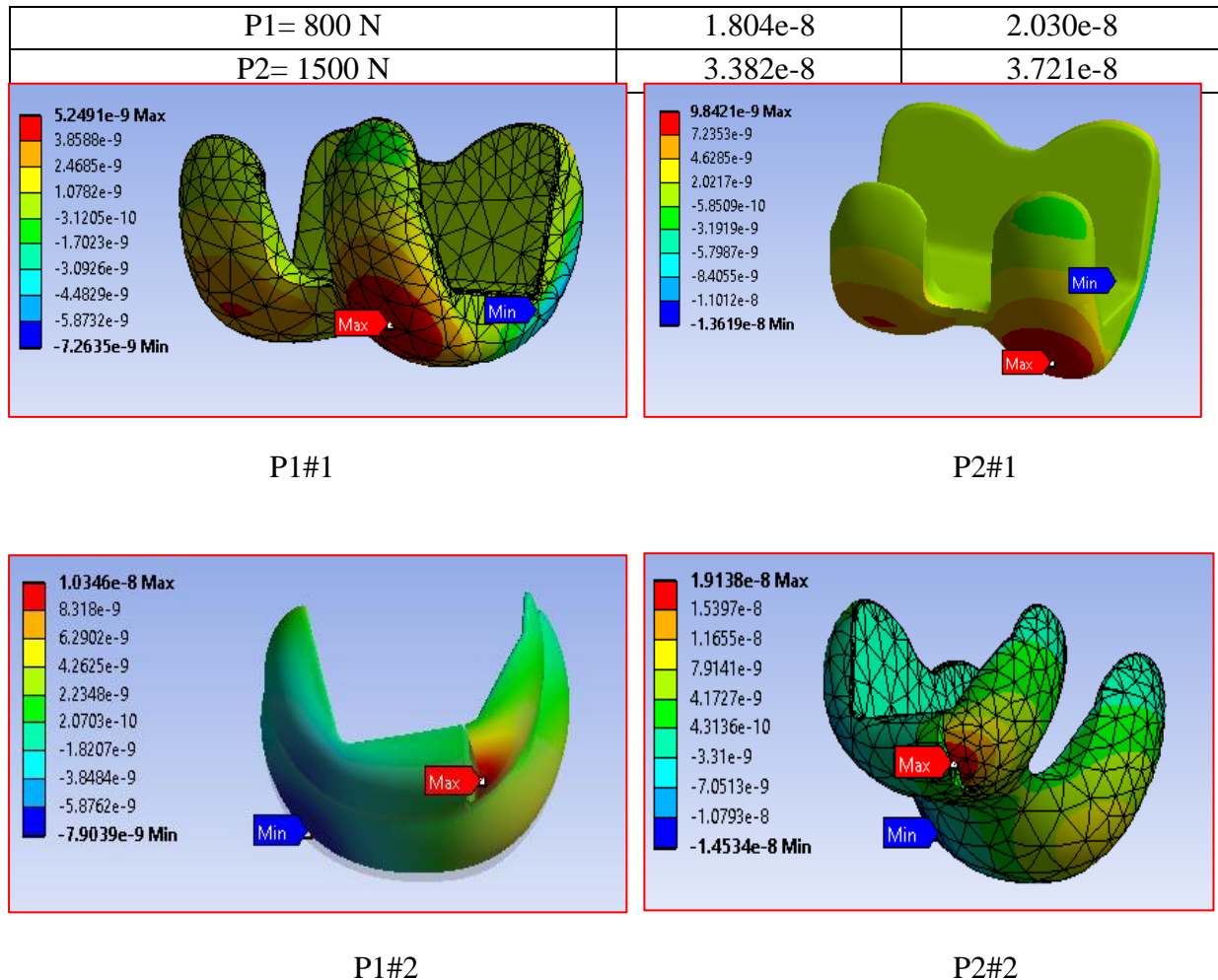


P2#2

Figures IV.17 : Déplacement suivant Y

Tableau IV.8 : valeur max de déplacement suivant Y

Force	Déplacement Max suivant Y [m]	
	Sans fissure #1	Avec fissure #2
P1= 800 N	1.649e-9	4.201e-9
P2= 1500 N	3.093e-9	7.768e-9



Figures IV.18 : Déplacement suivant Z

Tableau V.10 : valeur max de déplacement suivant Z

Force	Déplacement Max suivant Z [m]	
	Sans fissure #1	Avec fissure #2
P1= 800 N	5.249e-9	1.034e-8
P2= 1500 N	9.842e-9	1.913e-8

IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a représenté les résultats numériques de l'effet de poids sur la géométrie de prothèse de genou dans chacun des deux cas, 80 kg et 150 kg et en obtenus par la méthode des éléments finis. Les différents modes de la pale et distributions de contraintes dans le corps du genou sans fissure et avec fissure sont représentés dans le but de déterminer les zones de fonctionnement critique de prothèse de genou. Le modèle éléments finis de prothèse de genou a été conçu à partir d'une géométrie bien déterminée. Une extraction efficace des fréquences et des déformées modales du modèle a été effectuée de prothèse de genou.

Conclusion générale

Conclusion générale:

Le travail effectué dans ce mémoire se rapporte à la modélisation par la méthode des éléments finis d'un genou sous chargement thermomécanique.

L'étude thermomécanique dans lequel les forces de poids sont calculées. Afin de voir le comportement mécanique d'un genou on a développé un modèle éléments finis du genou pour extraire ses fréquences et modes propres, les résultats montrent que l'extrémité du genou est la zone la plus sollicitée par les déformations.

Pour mieux interpréter les phénomènes qui gèrent le comportement mécanique d'un genou, une modélisation est proposée via des approches analytiques et numériques, les calculs des différentes énergies et travaux virtuels du genou ont été développés. Aussi nous avons développé un modèle simple qui a été obtenu à l'aide de la méthode existante, il est utilisé pour mettre en évidence les phénomènes de base en raison de sa simplicité, mais l'inconvénient de ce modèle c'est qu'il considère la genou.

La méthode des éléments finis est employée pour modéliser les systèmes réels, car elle est précise, la précision de calcul augmente avec le raffinement de maillage, mais ce dernier entraîne des coûts de calculs additionnels très importants.

Pour mener notre étude par simulation numérique, on a utilisé le code numérique ANSYS, qui est l'un des codes de calcul basé sur la méthode des éléments finis.

Dans notre analyse, on a utilisé l'analyse Structural dans ANSYS Structural, qui permet de traiter la majorité des problèmes de mécanique des solides et Fluent qui permet de traiter la majorité des problèmes de mécanique de fluide. Il offre des outils puissants pour l'analyse en deux et en trois dimensions.

Au futur, on souhaite pour approfondir la recherche sur ce sujet à considérer la force Mécanique non linéaire distribuée sur la surface de la genou sans oublier poids et la Température, cela ouvre la voie à la continuation de cette recherche dans le domaine comportement mécanique et thermomécanique .

Références Bibliographiques

[1] Gray's Fiches d'anatomie par Richard L. Drake, A. Wayne Vogl, Adam W.M. Mitchell, Fabrice Duparc Édition ELSEVIER - 10/2010

[2] Anatomie du corps humain Atlas d'Imagerie par Jamie Weir, Peter H. Abrahams, Jonathan D. Spratt, Lonie R. Salkowski, Fabrice Duparc Édition ELSEVIER - 10/2010

[3]Quality of life and function after total knee arthroplasty D. Cherqaoui*, Y. El Anbari, Y. Abdelfattah, B. El Mabrouki, F. Lmidmani, A. El Fatimi Service de médecine physique et de réadaptationfonctionnelle, CHU Ibn-Rochd, Casablanca, Maroc

[4]Prothèses totales de genou © 2016, Elsevier Masson SAS

[5]Nakama GY, Peccin MS, Almeida GJ, et al. Cemented, cementless or hybrid fixation options in total knee arthroplasty for osteoarthritis and other nontraumatic diseases. Cochrane DatabaseSystRev 2012 ; 10. CD006193

[6] Prothèses. Genou. Groupe pour l'utilisation et l'étude des prothèses articulaires. Date de création : 27/12/2006.Date de publication : 01/03/2007.www.guepar.org.

[7] Distrimed.com 2000-2012. Le spécialiste du matériel médical informations légales. Genou. Ce que vous devez savoir sur les prothèses du genou.

[8] Biomet. Copyright 2012 Biomet, Inc. All rights reserved. Informations pour les professionnels du corps médical

[9] Walker, P. S.; Ranawat, C.; and Insall, J. : Fixation of the tibial components of condylar replacement knee prostheses. J Biomech, 9(4) : 269-75, 1976.

[10]Insall, J. N.; Ranawat, C. S.; Aglietti, P.; and Shine, J. : A comparison of four models of total knee-replacement prostheses. J Bone Joint Surg Am, 58(6) : 754-65,1976.

[11]El Otman .H Prothèses totales du genou (a propos de 92 cas) Thèse médecine Casablanca 318/2003.

[12]K. J. Bathe : Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall (1976)

[13] **Gherbi, M^{ed}. Taher**, Modélisation par éléments finis d'une pôle d'hélicoptère sous chargement aérodynamique, mémoire magister Université Boumerdès, Faculté des sciences de l'Ingénieur (2010).