



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



*UNIVERSITE HAMMA LAKHDAR D'ELOUED*

*FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE*

*Département Génie Mécanique*

*Option : Energétique*

*Thème*

*Simulation Numérique d'un Ecoulement  
Tournant par Logiciel Fluent*

**Présenté par :**

- BEN ALI ABDELLATIF
- MECEGUM ABDELKAMEL

**Mr:**

**\* A. BOUGHEZALA HAMAD**

Année université 2014/2015

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail : A ma très chère  
mère.*

*A mon très cher père.*

*A mes frère et mes sœurs.*

*A tous Les professeurs*

*A Mr: A. BOUGHÉALA HAMD*

*A tous mes amis.*

*A tous ceux qui m'aiment.*

*A toute ma famille*

*A toute personne qui m'apprécie... Je dédie ce  
mémoire*

*B. Abdellatif*

*M. Abdelkamel*

# Remerciements

*En premier lieu nous remercions Dieu tout puissant qui nous a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.*

*Nos sincères et chaleureux remerciements à Mr. Bouhexala Hamd pour son aide, son appui moral et ses qualités humaines.*

*Nous tenons à remercier nos parents car ce travail représente un petit fruit de leur souffrance et qui sans eux nous ne pouvons traverser ces longues années d'études et de travail.*

*J'adresse mes vifs remerciements à tous les professeurs ayant contribué à notre formation trouvent ici notre profonde reconnaissance pour ses conseils, ses encouragements et ses qualités humaines.*

*Enfin nous remercions tous ce qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*



# SOMMAIRE

Dédicace.....	I
Remerciements.....	II
SOMMAIRE.....	III
Listes des figures.....	VI

## INTRODUCTION GENERALE

1-1 Introduction.....	1
-----------------------	---

## CHAPTER I : MODELE MATHEMATIQUE

I.1-Introduction.....	2
I.2-Définitions.....	2
I.3-Géométrie du problème.....	7
I.4- Hypothèses.....	8
I.5- Les équations gouvernant l'écoulement.....	9
I.5.1- L'équation de continuité.....	9
I.5.2- L'équation de quantité du mouvement.....	10
I.5.3-L'équation d'énergie.....	10
I.6- Formulation des équations de transport en coordonnées cylindriques.....	11
I.7-Les équations sous forme adimensionnelle.....	11
I.8-Les conditions initiales et les conditions limites.....	13
I.8.1-Les conditions initiales.....	13
I.8.2- Les conditions aux limites.....	13
I.9- Paramètre d'analyse.....	14
I.9-1. La fonction de courant .....	15

I.9-2. Le nombre de Nusselt.....	15
----------------------------------	----

## **CHAPTER II : SOLUTION NUMERIQUE**

II.1-Introduction .....	16
II.2-Les Principales méthodes de discrétisation.....	16
II .2.1-Méthode de différence finis (MDF) .....	16
II .2.2-Méthode de l'élément finis (FEM).....	17
II .2.3. Méthode des volumes finis (MVF).....	17
II.3-L'équation général de transport.....	18
II.4-Le maillage.....	19
II. 5-Discretisation des équations générales de transport.....	21
II.6. Schémas de discrétisation.....	22
II .6.1- Schéma des différences centrées.....	24
II .6.2- Schema Upwind.....	24
II .6.3- Schema Hybride.....	24
II.6.4- Schéma Exponentiel.....	25
II.6.5- Schéma de la loi de Puissance « Power law ».....	25
II.7- Equations discrétisées sous forme indicielle.....	25
II.8- Résolution des équations algébriques.....	30
II.9 - Présentation d'un code CFD Fluent.....	33
II.9.1 - Première étape: créer la géométrie et le maillage dans Logiciel Gambit.....	34
II.9.2 - Deuxième étape: Modélisation et solution numérique par logiciel Fluent.....	35

II.9-3- Facteurs de relaxation.....	37
-------------------------------------	----

## **CHAPTER III: RESULTATSET DISCUSSIONS**

III.1-Introduction .....	39
III.2-Résultats et discussion .....	40
III.2.1-Cas des disques en Co-rotation .....	40
A- Champs d'écoulement .....	40
B- Champs thermique .....	43
III.2-2- Cas de disques en contre-rotation.....	45
A- Champs d'écoulement .....	45
B- Champs thermique .....	48
III.3- Taux de transfert de chaleur (Nombre moyen de Nusselt) .....	50
<i>Conclusion et perspectives</i> .....	51
<i>Bibliographique</i> .....	52

## Listes des figures

<i>Figure.1.1- Principales étapes du processus de Czochralski[1].....</i>	<i>2</i>
<i>Figure.1.2- Géométrie d'un écoulement plan de Couette (écoulement de cisaillement simple).....</i>	<i>2</i>
<i>Figure.1.3-Écoulement laminaire [1].....</i>	<i>3</i>
<i>Figure. 1.4- Vue de l'écoulement turbulent [1].....</i>	<i>3</i>
<i>Figure. 1.5- Types de flux rotatifs [2].....</i>	<i>4</i>
<i>Figure.1.6- Dessin deux forces centrifuge et centripète [1]... ..</i>	<i>4</i>
<i>Figure.1.6- Dessin deux forces centrifuge et centripète [1]... ..</i>	<i>5</i>
<i>Figure. I-1: Géométrie du problème considéré.....</i>	<i>7</i>
<i>Figure. I-2: schéma des conditions aux limites pour le problème adimensionnel.....</i>	<i>14</i>
<i>Figure. II-1: Description du maillage.....</i>	<i>20</i>
<i>Figure. II-2 : Volumes de contrôle typique.....</i>	<i>20</i>
<i>Figure. II-3.a : Volume de contrôle décalé vers la droite.....</i>	<i>21</i>
<i>Figure. II-3.b : Volume de contrôle décalé vers le haut.....</i>	<i>21</i>
<i>Figure. II-4 : volume de contrôle de l'équation de continuité.....</i>	<i>32</i>
<i>Figure. II-5: Les trois types de maillages utilisées par logiciel Gambit.....</i>	<i>33</i>
<i>Fig. III-1: Lignes de courant pour <math>Gr = 10^6</math>, et pour différentes valeurs du nombre de Richardson (cas des disques en Co-rotation).....</i>	<i>41</i>
<i>Fig. III-2: Profils de la composante de vitesse axiale (a), radiale (b), tangentielle (c) et de température (d) à <math>R = 0.5</math>, pour <math>Gr = 10^6</math>, et pour différents nombres de Richardson, (cas des disques en Co-rotation).....</i>	<i>42</i>
<i>Fig. III-3: Lignes isothermes pour <math>Gr = 10^6</math>, et pour différentes valeurs du nombre de Richardson, (cas des disques en Co-rotation).....</i>	<i>44</i>

*Fig. III-4: Lignes de courant pour  $Gr = 10^6$ , et pour différentes valeurs du nombre de Richardson (cas des disques en Contre-rotation).....46*

*Fig. III-5: Profils de la composante de vitesse axiale (a), radiale (b), tangentielle (c) et de température (d) à  $R = 0.5$ , pour  $Gr = 10^6$ , et pour différents nombres de Richardson, (cas des disques en Contre-rotation).....47*

*Fig. III-6: Lignes isothermes pour  $Gr = 10^6$ , et pour différentes valeurs du nombre de Richardson, (cas des disques en Contre-rotation).....49*

*Fig.III -7: Variation du nombre de Nusselt moyenne en fonction du nombre du Nombre de Richardson pour  $Gr = 10^6$  (Cas de disques en Co/Contre-rotation).....50*

# INTRODUCTION GENERALE

### **1-1 Introduction :**

L'étude de l'écoulement créé par un fond tournant d'un cylindre a attiré un intérêt croissant au cours des dernières décennies. Cet intérêt est dicté par le rôle joué par une telle configuration dans plusieurs domaines industriels tels que la viscosité, les machines centrifuges, le pompage des métaux liquides avec point de fusion élevé, la production de cristaux par la méthode de tirage de Czochralski ... etc.

Depuis plus d'un siècle, l'écoulement du fluide en rotation, en particulier ceux qui sont confinés entre un disque tournant (rotor) et un disque fixe (stator) sont l'objet de nombreuses études expérimentales, numériques et théoriques, il ya plusieurs raisons de cet intérêt. Sur le plan académique, ces écoulements sont très instables et présentent de nombreux modèles d'écoulement et les mécanismes de transition vers la turbulence. Ils possèdent également un des géométries simples pour étudier l'influence de la rotation sur la structure de la turbulence.

Ces flux sont, d'autre part, de nombreuses applications dans des domaines très variés comme l'astrophysique, la géophysique, l'informatique, la météorologie, l'océanographie et particulièrement dans le domaine de turbomachines.

# **CHAPITRE I**

## **MODELE MATHEMATIQUE**

# CHAPTER I

## MODELE MATHEMATIQUE

### I.1-Introduction:

Le transfert de chaleur par convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu : elle s'applique uniquement aux fluides (liquides et gaz). Contrairement à la conduction où le transfert de chaleur est sans déplacement de matière, nous avons juste le déplacement de l'énergie en raison de la transmission des vibrations des atomes. Il existe trois types de convection:

Tout d'abord, l'écoulement est naturel: l'écoulement est dû à la différence de densité des différentes régions de fluide (en raison de la différence de la température). Ce phénomène est très fréquent et est appelé convection naturelle.

La seconde, l'écoulement est due à des forces extérieures (pompes, ventilateurs ...), alors nous sommes dans des conditions de convection forcée. Ce mode est appliqué lorsque l'on veut améliorer, c'est-à-dire d'augmenter l'échange de chaleur.

Si les deux phénomènes (convection naturelle et forcée) existent en même temps, nous appelons cela une convection mixte.

Dans ce chapitre, nous présentons, la modélisation mathématique des phénomènes de la convection mixte correspondant le cas d'écoulement tournant causée par la Co-rotation ou la contre-rotation des disques inférieur et supérieur.

## I.2-Géométrie du problème:

Le système physique considéré est une enceinte cylindrique de rayon  $R$  et hauteur  $H$ , dont le rapport d'aspect est fixe  $A = H / R = 2$ . L'enceinte contient du silicium liquide caractérisé par un faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0,011$ ). Le couvercle (disque inférieur) est en rotation à la vitesse angulaire constante et maintenu à la température chaude  $T_H$ , l'autre extrémité (disque supérieur) en Co/contre-rotation et maintenu à la température froide  $T_C$  ( $T_H \succ T_C$ ) (on appelle Co-rotation l'écoulement obtenu lorsque les deux disques tournent dans le même sens avec la même vitesse de rotation, l'écoulement contre-rotation, lorsque les deux disques tournent en sens opposé à la même vitesse de rotation). La paroi latérale est adiabatique. L'approximation de Boussinesq pour l'écoulement de flottabilité est adoptée. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolées.

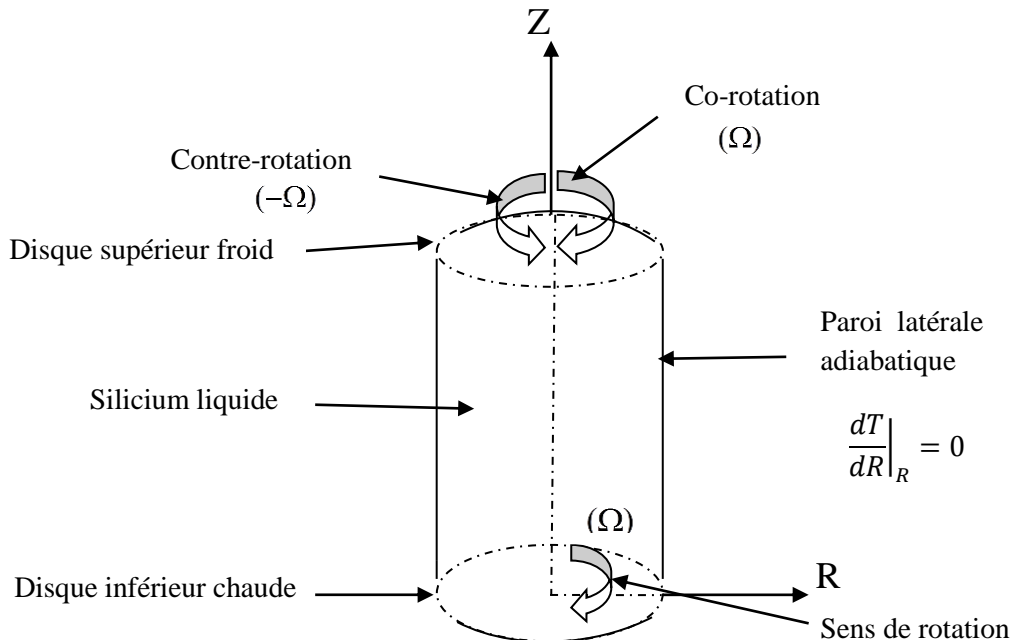


Fig. I.1- Géométrie du problème considéré.

## I.3- Hypothèses:

Pour modéliser le problème physique décrit dans la figure (Fig.I.1), nous adapterons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- 1-L'écoulement est laminaire et axisymétrique avec tourbillon (swirel).
- 2-Pas source de chaleur ( $q = 0$ ).
- 3-L'état d'équilibre ( $\partial / \partial t$ ).
- 4-La dissipation thermique visqueuse est négligeable ( $\Phi = 0$ ).

5-Les propriétés physiques du fluide ( $\rho$ ,  $\nu$ ,  $C_p$  et  $K$ ) sont supposées constantes, et l'approximation de Boussinesq est valide. Il s'agit de tenir compte les variations de densité sont négligeable à tous les termes de l'équation de quantité de mouvement ( $\rho = \rho_0$ ), Sauf au niveau des conditions de gravité, où il changeant comme en fonction de la température de l'équation:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad (I.1)$$

$\rho_0$ : La masse volumique du fluide à la température de référence  $T_0$ .

$\beta$ : Le coefficient de dilatation à pression constante.

- **Les propriétés des fluides**

Le fluide utilisé pour la simulation est un métallique de newtonien; incompressible, nous définissons simplement les propriétés des fluides qui sont donnés dans le tableau.

*Tableau I-1: Propriétés physiques de silicium liquide (Si) [1].*

Paramètre	Symbole	valeur	Unité
Densité	$\rho$	2570	Kg/m <sup>3</sup>
viscosité dynamique	$\mu$	$10^{-4} \times 7.75$	Kg/(ms)
viscosité cinétique	$\nu$	$\times 10^{-7} 3.02$	m <sup>2</sup> /s
Coefficient de dilatation thermique	$\beta$	$\times 10^{-4} 1.4$	K <sup>-1</sup>
conductivité thermique	$\lambda$	66.9	w/(m.k)
chaleur spécifique	$C_p$	915	w/(m.k)
nombre de Prandtl	$Pr$	0.011	J/(Kg.K)

#### **I.4- Les équations gouvernant l'écoulement :**

Les démonstrations nécessaires pour obtenir les équations décrivant la dynamique de l'écoulement de fluide laminaire avec le transfert de chaleur ont expliquée set illustrés dans de nombreux ouvrages de la mécanique des fluides et le transfert de chaleur par exemple la référence [2]. Les systèmes d'équations gouvernent les phénomènes de convection mixte et sont :

##### ***I.4.1- L'équation de continuité :***

Il reflète la conservation de la masse dans le volume de contrôle:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{I.2})$$

Pour un fluide newtonien incompressible l'équation sera venue:

$$\text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{I.3})$$

qui peut être exprimer mathématiquement sous forme tensorielle comme suit:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0, \quad i = 1:3$$

#### ***1.4.2- L'équation de quantité du mouvement:***

Elles sont obtenues par l'application de la deuxième loi de la dynamique dans une particule fluide passant à travers un volume de contrôle infinitésimal. Elles sont écrites sous forme tensorielle comme suit :

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{f} - \overline{\text{grad}}(p) + \mu \Delta \vec{U} \quad (\text{I.4})$$

où :

$\frac{d\vec{U}}{dt}$  : La dérivée totale de la vitesse.

$\rho$  : La densité du fluide.

$\mu$  : La viscosité dynamique du fluide.

$\vec{f} = \rho \vec{g}$  : Volume des forces.

$p$  : La pression.

$\mu \Delta \vec{U}$  : Tenseur de contraintes.

Cette équation représente la conservation de la quantité du mouvement (Navier-Stokes) d'un liquide visqueux, incompressible en régime laminaire instable.

**I.4.3-L'équation d'énergie :**

Elle est obtenue en appliquant la première loi de la thermodynamique. Cette équation pour un fluide newtonien incompressible peut être écrite comme suit:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \text{div} (\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}) \quad (\text{I.5})$$

où :

$\lambda$  : La conductivité thermique.

$C_p$  : La chaleur spécifique à pression constante.

**I.5- Formulation des équations de transport en coordonnées cylindriques :**

L'équation de transport dans les coordonnées cylindriques écrit comme suit [2]:

**• L'équation de continuité :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial Z} = 0 \quad (\text{I.6})$$

**• L'équation de quantité du mouvement le long de r :**

$$\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} \rho \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r^2) + \frac{\partial}{\partial r} (u_r u_z) + \frac{u_\theta^2}{r} \right] = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial Z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right] \quad (\text{I.7})$$

**• L'équation de quantité du mouvement selon z :**

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} \rho \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r u_z) + \frac{\partial}{\partial Z} (u_z^2) \right] = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial Z^2} \right] + \rho g \beta (T - T_c) \quad (\text{I.8})$$

**• L'équation de quantité du mouvement le long  $\theta$  :**

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \rho \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r u_\theta) + \frac{\partial}{\partial Z} (u_z u_\theta) + \frac{u_z u_\theta}{r} \right] = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial Z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \quad (\text{I.9})$$

- L'équation de l'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r T) + \frac{\partial}{\partial Z} (u_z T) = \alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right] \quad (\text{I.10})$$

$u_r, u_z, u_\theta$  : sont respectivement les composantes de la vitesse radiale, axiale et azimutale selon les directions  $(r, z, \theta)$ .

$g$  : L'accélération de la pesanteur.

### I.6-Les équations sous forme adimensionnelle :

L'utilisation de la variable adimensionnelle sert à exprimer la réalité des phénomènes physique indépendamment de systèmes de mesure, pour permettre d'avoir des informations généralisées à une variété des problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes, d'une part, et d'autre part, de réduire le nombre de paramètres d'un problème. En effet, pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, il est nécessaire d'introduire les variables de référence [3].

- Les paramètres caractéristiques du problème sont les suivantes:

$\frac{1}{\Omega}$  : Temps caractéristique [s].

$r_c$  : Rayon caractéristiques [m].

$\Omega r_c$  : Vitesse caractéristique [ $\text{m.s}^{-1}$ ].

$\rho(\Omega r_c)^2$  : Pression caractéristique [ $\text{N.m}^{-2}$ ].

$T_H - T_C$  : Température caractéristique[k].

- Les variables adimensionnelles sont [3] :

$$\tau = \frac{t}{\frac{1}{\Omega}}, \text{ temps} \qquad R = \frac{r}{r_c}, \text{ distance radiale} \qquad Z = \frac{z}{r_c}, \text{ distance axiale}$$

$$U_r = \frac{u_r}{\Omega r_c}, \text{ composante de vitesse radiale} \qquad U_z = \frac{u_z}{\Omega r_c}, \text{ composante de vitesse axiale}$$

$$U_\theta = \frac{u_\theta}{\Omega r_c}, \text{ composante de vitesse azimutale} \quad P = \frac{p}{\rho(\Omega r_c)^2}, \text{ pression}$$

$$\Theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C}, \text{ température}$$

- Les équations adimensionnelles qui régissent le système peuvent être écrites comme:

• **Equation de continuité**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial Z} = 0 \quad (\text{I.11})$$

• **L'équation de l'élan le long r :**

$$\frac{\partial U_r}{\partial \tau} + \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_r^2) + \frac{\partial}{\partial Z} (U_r U_z) + \frac{U_\theta^2}{R} \right] = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U_r}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U_r}{\partial Z^2} - \frac{U_r}{R^2} \right] \quad (\text{I.12})$$

• **L'équation de l'élan long z :**

$$\frac{\partial U_z}{\partial \tau} + \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_r U_z) + \frac{\partial}{\partial Z} (U_z^2) \right] = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U_z}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U_z}{\partial Z^2} \right] + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \times \Theta \quad (\text{I.13})$$

• **L'équation de l'élan long  $\theta$  :**

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial \tau} + \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_r U_\theta) + \frac{\partial}{\partial Z} (U_z U_\theta) + \frac{U_z U_\theta}{R} \right] = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U_\theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial Z^2} - \frac{U_\theta}{R^2} \right] \quad (\text{I.14})$$

• **L'équation de l'énergie**

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_r \Theta) + \frac{\partial}{\partial Z} (U_z \Theta) = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right] \quad (\text{I.15})$$

avec:

• Le nombre de Prandtl:  $P_r = \frac{\nu}{\alpha}$ .

• Le nombre de Reynolds:  $\text{Re} = \frac{\Omega r_c}{\nu}$ .

• le nombre de Grashof :  $Gr = \frac{g \beta (T_H - T_C) r_c^3}{\nu^2}$ .

- Le nombre de Richardson :  $Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{g \beta (T_H - T_C)}{\Omega^2 r_c}$ .

## I.7-Les conditions initiales et les conditions limites:

### I.7.1-Les conditions initiales :

Les conditions initiales sont prises pour chaque lancement calculé comme la solution obtenue en calculant antécédent (les répartitions de  $U_r, U_z, U_\theta, P, \Theta$  dans le fluide). Pour le premier essai, on a supposé que le liquide est au repos et la distribution de température est égale à zéro, dans le volume de contrôle  $t = 0$ , alors on a:

$$0 < R < 1 \text{ et } 0 < Z < \frac{H}{r_c} = \gamma : U_r = 0, U_z = 0, U_\theta = 0, \Phi = 0 \quad (\text{I. 16})$$

Dans cette étude, nous avons considéré un état stable.

### I.7.2- Les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \text{à } R = 0 : U_r = U_\theta = \frac{\partial U_z}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0 \quad \text{Axe de symétrie} \\ \text{à } R = 1 : U_\theta = U_f = U_z = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0 \quad \text{Paroi latérale adiabatique} \\ \text{à } Z = 0 : U_f = U_z = 0, U_\theta = R, \quad \Theta = 1 \quad \text{Disque inférieur chaud} \\ \text{à } Z = \frac{H}{r_c} : U_f = U_z = 0, \theta = 0, U_\theta = \begin{cases} R \text{ si le disque supérieure en Co-rotation} \\ -R \text{ si le disque supérieur en contre rotation} \end{cases} \end{aligned} \right\} (\text{I.17})$$

En récapitulation, ces conditions aux limites sont affichées schématiquement à la figure I-2.

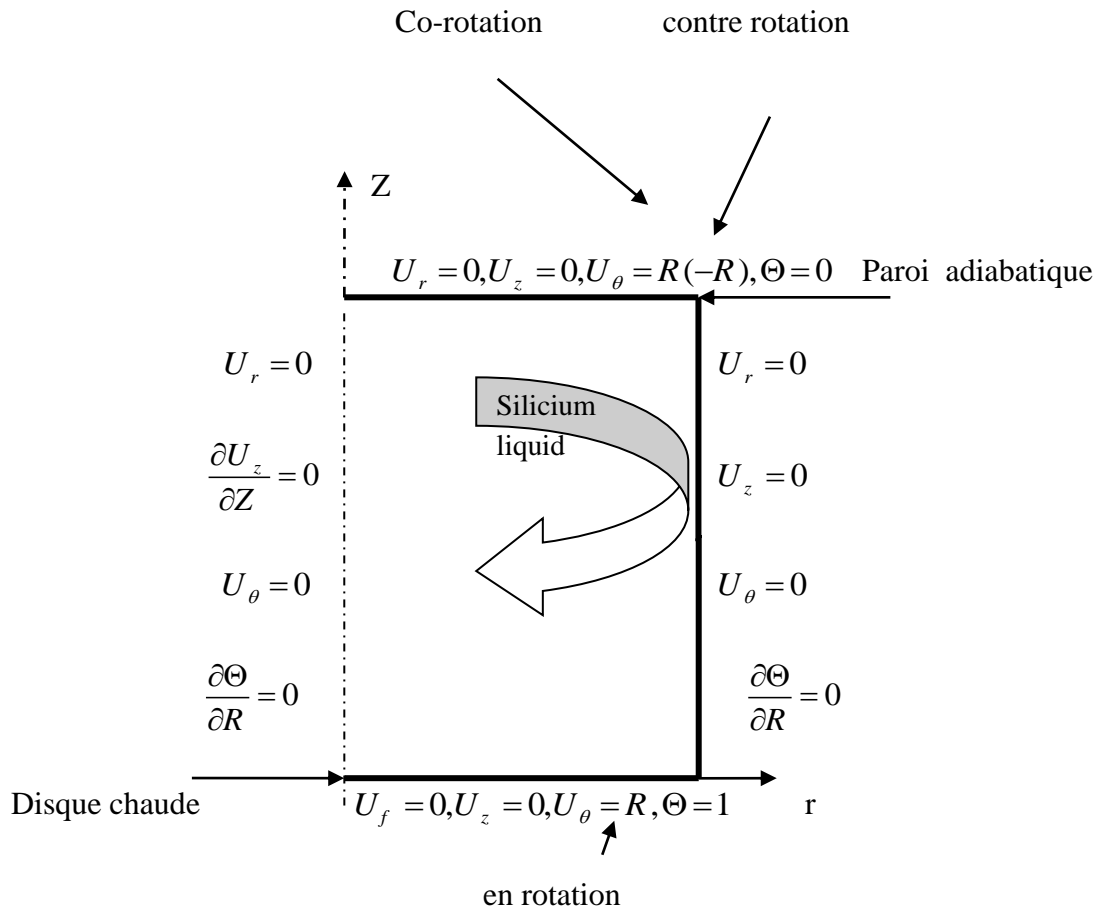


Fig. I.2-schéma des conditions aux limites pour le problème adimensionnel.

### I.8- Paramètre d'analyse:

Après la résolution des équations régissant la convection mixte de la cavité cylindrique remplie du métal liquide considéré, les inconnues  $U_r, U_z, U_\theta, P, \Theta$  donnent quantitativement une vue sur le phénomène étudié mais, ils existent d'autres paramètres qui peuvent attribuer aux solutions plus de clarté et substantialité quantitativement et qualitativement, et facilitent l'analyse du phénomène étudié. Quelque paramètres dont la nature peut différer (critère adimensionnel, fonction mathématique, ... etc.), sont utilisés dans ce travail pour éclaircir la vision physique du problème.

**I.8.1. La fonction de courant :**

Nous utilisons cette fonction seulement pour identifier les lignes de courant hydrodynamique. La fonction de courant  $\Psi$  (dite de Stokes) est définie en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible, axisymétrique  $\partial/\partial\theta=0$  par :

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (\text{I. 18})$$

$\Psi(r, z) = Cste$  (la fonction  $\Psi$  reste constante le long d'une ligne de courant).

**I.8.2. Le nombre de Nusselt :**

Cet outil est un nombre adimensionnel, aide à analyser les transferts thermiques par convection aux frontières, puisque il est inversement proportionnel à l'épaisseur  $\delta_t$  de la couche limite thermique, et défini localement comme:

$$hs(T_H - T_C) = -\lambda s \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} \quad (\text{I. 19.a})$$

$$\frac{hs}{\lambda s} = \frac{hr}{\lambda r} = -\frac{\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0}}{(T_H - T_C)} \quad (\text{I.19 .b})$$

$$\frac{hr}{\lambda} = Nu(r) = -\frac{\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0}}{(T_H - T_C)} = -\frac{d\Theta}{dZ} \Big|_{Z=0} \quad (\text{I.19.c})$$

$r$

Le nombre de Nusselt moyen calculé pour chaque disque d'extrémité de l'enceinte cylindrique :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Nu(r) r d\theta dr \quad (\text{I.20.a})$$

Alors

$$\overline{Nu} = 2 \int_0^1 Nu(r) r dr \quad (\text{I.20.b})$$

# **CHAPITRE II**

## **SOLUTION NUMERIQUE**

*Chapitre II****SOLUTION NUMERIQUE*****II.1-Introduction :**

Les équations de conservation de la quantité du mouvement et de l'énergie qui régit le phénomène de convection mixte et la convection naturelle dans un cylindre sont des équations différentielles aux dérivées partielles, elliptiques et non linéaires d'une part, et complexes et couplé d'autre part. Vu la complexité de les résoudre analytiquement, on fait appel aux méthodes numériques.

Pour obtenir une solution numérique, le problème étudié doit être discrétisées en transformant les équations différentielles en un système d'équations algébriques. Il existe plusieurs méthodes de discrétisation telles que : la méthode des volumes finis, des différences finies et des éléments finis, .... etc. Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode des volumes finis.

Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations de transport sur un ensemble discret de volumes finis jointifs couvrant le domaine physique. Le résultat de la discrétisation en un point est une équation algébrique liant la valeur d'une variable aux valeurs des variables des points voisins, et d'autre considérée constante. Sa simplicité, sa facilité de linéarité les termes sources et son garantit de conserver la quantité de masse, de mouvement et d'énergie dans tout le domaine étudiée donne un choix judicieux d'adopter cette méthode.

**II.2-Les Principales méthodes de discrétisation :*****II.2.1-Méthode de différence finis (MDF):***

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

- Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

- Inconvénients : le principe de conservation n'est pas assuré après la discrétisation, limitation de la géométrie des domaines de calcul, difficultés de prise en compte des conditions aux limites portant sur les dérivées ou les gradients de l'inconnue et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

### ***II.2.2-Méthode de l'élément finis (FEM) :***

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les nœuds du maillage).

- Avantages : traitement possible de géométries complexes, détermination plus naturelle des conditions aux limites, possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs.
- Inconvénients : complexité de mise en œuvre et coût en temps de calcul.

### ***II.2.3. Méthode des volumes finis (MVF) :***

La méthode des volumes finis a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar [4].

**Le principe :** La méthode des volumes finis baser sur une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. Le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volume de contrôle, Chacun de ces derniers englobe un nœud dit nœud principal. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle.

Les différentes étapes de la méthode des volumes finis sont :

1/Le maillage : la transformation d'un domaine physique continu (la géométrie) en un domaine de calcul discret constitué d'un certain nombre de points et de mailles (volumes finis).

2/ Tous les termes des équations modélisantes sont intégrés un par un sur chaque volume de contrôle.

3/ Des profils ou des lois d'interpolation, entre des nœuds voisins, sont utilisées pour approcher la variation de  $\phi$  (variable générale d'écoulement).

4/ Obtention des équations algébriques en fonction des valeurs de  $\phi$  aux nœuds des maillages.

5/ La résolution du système d'équations algébriques.

Un avantage attirant de la méthode des volumes finis est qu'elle satisfait le bilan intégral de  $\phi$  exactement sur chaque volume fini et donc sur tout le domaine. Cette méthode peut accommoder n'importe quel type de maillage, même pour les géométries complexes. Le maillage définit seulement les frontières de volume de contrôle et n'a pas besoin d'être rapporté à un système de coordonnées. L'approche par volumes finis est peut-être la plus simple à comprendre et à programmer. Tous les termes qui doivent être approchés ont la signification physique c'est pourquoi cette méthode est choisie.

### II.3-L'équation général de transport :

L'équation générale du transport d'un variable  $\phi$  pour un écoulement incompressible axisymétrique est écrite dans le système cylindrique comme suit:

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_1 + \underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_r \phi) + \frac{\partial}{\partial Z} (U_z \phi)}_2 = \underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R}) + \frac{\partial}{\partial Z} (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z})}_3 + S_\phi \quad (\text{II.1})$$

où

- 1: Représente le terme transitoire.
- 2: Représente le terme de transport par convection.
- 3: Représente le terme de transport par diffusion.
- 4: Représente le terme source.

$U_r$  : Composante radiale adimensionnelle de la vitesse.

$U_z$  : Composante axiale adimensionnelle de la vitesse.

$\Gamma$  : Coefficient de diffusion.

Le tableau suivant rassemble les expressions de la variable dépendante  $\phi$ , du coefficient de diffusion  $\Gamma_\phi$  et du terme source  $S_\phi$  concernant les équations adimensionnelles qui régissent notre problème général.

*Tableau II-1: Différentes quantités transportées et leurs termes de transport.*

Equation	$\phi$	$\Gamma$	$S_\phi$
Continuité	1	0	$-\frac{U_r}{R}$
Quantité du mouvement radiale	$U_r$	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial P}{\partial R} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{U_r}{R^2} + \frac{U_\theta}{R^2}$
Quantité du mouvement axiale	$U_z$	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \Theta$
Quantité du mouvement azimutale	$U_\theta$	$\frac{\lambda_1}{\text{Re.Pr}}$	$-\frac{1}{\text{Re}} \frac{U_\theta}{R^2} - \frac{U_r U_\theta}{R}$
L'énergie	$\Theta$	1	0

#### II.4-Le maillage :

Le domaine physique est divisé en un certain nombre de volumes finis. Sur la figure II-1, on montre un ensemble de volumes de contrôle bidimensionnels typiques 2D avec la notation que nous emploierons. La surface de VC consiste en quatre plans, notés par des lettres minuscules correspondant à leur direction( n, w, e et s ) en ce qui concerne le nœud central (P).E, W, N et S sont les centres des volumes de contrôles adjacents situés respectivement à l'Est, Ouest, Nord et Sud de celui contenant P. L'idée est d'évaluer les quantités scalaires  $\phi$  : composante de vitesse azimutale  $U_\theta$ , pression  $P$ , et température  $\Theta$  stockées aux centres des volumes finis, mais calculer les deux composantes de la vitesse  $U_z$  et  $U_r$  sont localisées aux faces des volumes finis.

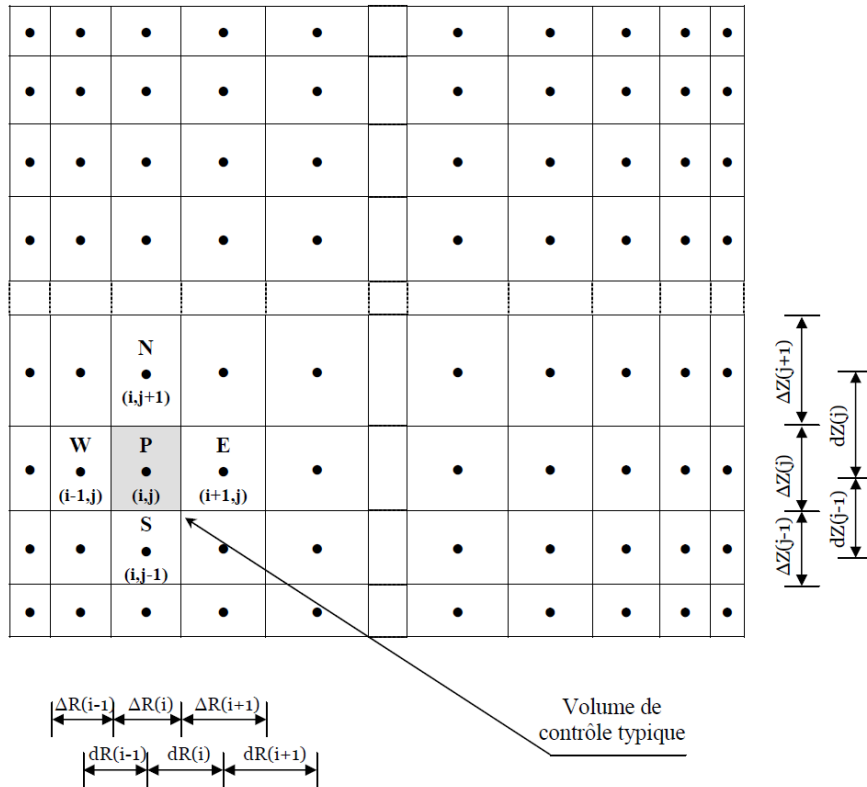


Fig. II-1: Description du maillage.

Ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires, appelé volume de contrôle typique (Fig.II-2), et pour l'expression des grandeurs vectorielles, on utilise un volume de contrôle décalé (Fig.II-3.a et b).

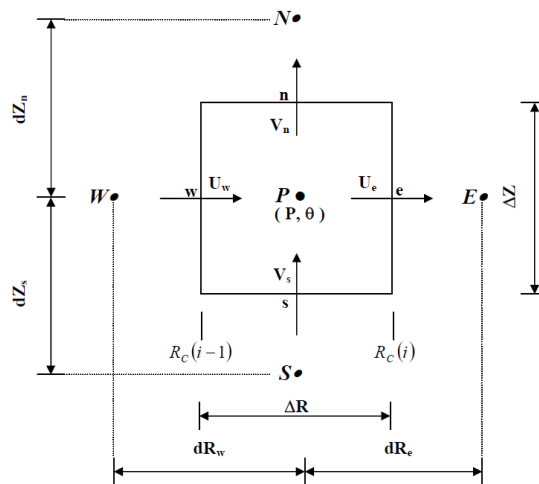


Fig. II-2 : Volumes de contrôle typique.

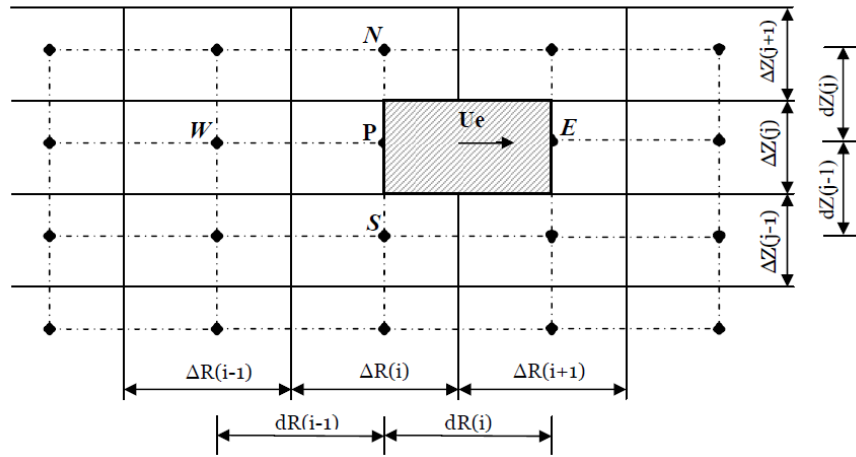


Fig. II-3.a : Volume de contrôle décalé vers la droite.

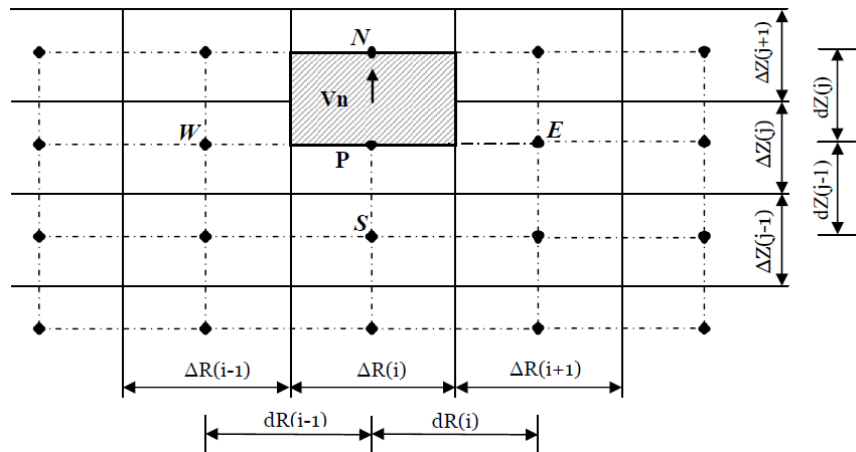


Fig. II-3.b : Volume de contrôle décalé vers le haut.

**II. 5-Discretisation des équations générales de transport :**

L'équation est intégrée sur le volume de contrôle typique (Fig. II-2) de la variable  $\phi$  :

L'expression du volume de contrôle est :  $dV = RdRdZ$

Puisque nous avons considéré un état stable. L'intégration de l'équation (II.1), nous donne:

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU_r \phi) RdRdZ + \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} (U_z \phi) RdRdZ =$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R}) + \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R}) RdRdZ + \int_s^e \int_w^e S_\phi RdRdZ \tag{II.2}$$

Le terme convectif:

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_r \phi) R dR dZ = \int_s^n [R U_r \phi]_w^e dZ = [(R U_r \phi)_e - (R U_r \phi)_w] \Delta Z \quad (\text{II.3})$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} (U_z \phi) R dR dZ = \int_w^e [U_z \phi]_s^n R dR = [(U_z \phi)_n - (U_z \phi)_s] R_p \Delta R \quad (\text{II.4})$$

Le terme diffusif:

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) R dR dZ = \int_s^n \left[ R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right]_w^e dZ = \left[ \left( R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_e - \left( R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_w \right] \Delta Z \quad (\text{II.5})$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) R dR dZ = \int_w^e \left[ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right]_s^n R dR = \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_s \right] R_p \Delta R \quad (\text{II.6})$$

Le terme source:

$$\int_s^e \int_w^e S_\phi R dR dZ = \bar{S}_\phi R_p \Delta R \Delta Z \quad (\text{II.7})$$

L'équation (II.2) s'écrira alors:

$$\begin{aligned} & [(R U_r \phi)_e - (R U_r \phi)_w] \Delta Z + [(U_z \phi)_n - (U_z \phi)_s] R_p \Delta R = \\ & \left[ \left( R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_e - \left( R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_w \right] \Delta Z + \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_s \right] R_p \Delta R + \bar{S}_\phi R_p \Delta R \Delta Z \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

En arrivant à ce stade, il faudra exprimer les termes de flux convectifs et diffusifs aux interfaces des volumes de contrôle.

Afin de surmonter à ce problème, on fait appel aux schémas de discrétisation (différences centrées, exponentiel, Power-Law, hybride, ...). Ces schémas diffèrent par la façon avec laquelle on prend en compte les termes de convection et de diffusion.

## II.6. Schémas de discrétisation :

La présentation de la forme générale de l'équation algébrique discrétisée s'écrit comme suit:

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad (\text{II.9})$$

où:

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.10})$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 \quad (\text{II.11})$$

$$b = \bar{S}_\phi R_p \Delta R \Delta Z \quad (\text{II.12})$$

$$A_P^0 = 0 \quad (\text{II.13})$$

Et

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_e R_e \Delta Z \\ F_w &= U_w R_w \Delta Z \\ F_n &= U_n R_p \Delta R \\ F_s &= U_s R_p \Delta R \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.14})$$

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e}{dR_e} R_e \Delta Z \\ D_w &= \frac{\Gamma_w}{dR_w} R_w \Delta Z \\ D_n &= \frac{\Gamma_n}{dR_n} R_p \Delta Z \\ D_s &= \frac{\Gamma_s}{dR_s} R_p \Delta Z \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.15})$$

$$\left. \begin{aligned} P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \\ P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.16})$$

avec:

$A_E, A_W, A_N, A_S$  et  $A_P$ : sont les coefficients correspondants, respectivement, aux nœuds Est, Ouest, Nord, Sud et centre du volume.

$A_P^0$ : est le coefficient de la variable à calculer au point  $P$ , et à un instant précédent.

$b$ : est un terme source supposée être constante dans le volume de contrôle.

$F_e, F_w, F_n, F_s$  et  $D_e, D_w, D_n, D_s$ : sont respectivement les termes convectifs et diffusifs aux faces Est, Ouest, Nord et Sud.

$P_e, P_w, P_n, P_s$ : désignent le rapport du flux convectif au flux diffusif (nombre de Peclet) aux différents faces du volume de contrôle.

Les différents schémas proposés par Patankar [5] peuvent exprimer la fonction  $A(|P|)$  sont :

### ***II.6.1- Schéma des différences centrées :***

Le schéma des différences centrées est basé sur une interpolation linéaire des valeurs de  $\phi$  sur les interfaces. La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'expression suivante:

$$A(|P|) = 1 - 0.5|P| \quad (\text{II.17})$$

### ***II.6.2- Schéma Upwind:***

Ce Schéma est appliqué pour les écoulements à dominance convective suivant le sens d'écoulement, le schéma Upwind affecte à la variable  $\phi$  sur la face du volume de contrôle sa valeur sur le nœud en amont.

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'équation:

$$A(|P|) = 1 \quad (\text{II. 18})$$

### ***II.6.3- Schéma Hybride:***

Ce schéma est la combinaison des deux schémas précédents rassemblant ainsi leurs caractéristiques. Donc dans ce cas si l'écoulement est à dominance convective, les termes convectifs sont approximés par le schéma Upwind, autrement ils sont approximés par le schéma des différences centrées. En appliquant ce schéma on aura un compromis entre stabilité et précision de la méthode numérique.

La fonction  $A(|P|)$  est exprimée comme suit:

$$A(|P|) = \max(0, 1 - 0.5|P|) \quad (\text{II.19})$$

#### ***II.6.4- Schéma Exponentiel:***

Ce régime vient de la solution analytique (exacte) problème unidimensionnel de la constante de convection-diffusion sans la source. Malgré cette caractéristique, l'utilisation de ce système est moins répandu dans la pratique, parce que le calcul de l'exponentielle est coûteuse en temps machine.

Ce schéma est issu de la résolution analytique (exacte) d'un problème unidimensionnel permanent de convection - diffusion sans source. Malgré cette caractéristique, l'utilisation de ce schéma est moins répandue dans la pratique, car le calcul des exponentielles est coûteux en temps de machine.

$$A(|P|) = \frac{|P|}{e^{|P|} - 1} \quad (\text{II.20})$$

#### ***II.6.5- Schéma de la loi de Puissance « Power law » :***

Il est dérivé du schéma exponentiel par interpolation polynomiale entre deux nœuds adjacents, ce schéma s'approche mieux de la solution exacte avec l'augmentation du nombre d'intervalles d'approximation.

$$A(|P|) = \max\left[0, (1 - 0.1|P|)^{0.5}\right] \quad (\text{II.21})$$

### **II.7- Equations discrétisées sous forme indicielle :**

En appliquant le schéma de la loi de puissance au volume de contrôle dans chaque nœud, on obtient les équations suivantes :

- **Equation de continuité :**

$$\begin{aligned} \left[ (R(i)U_r(i+1, j)) - (R(i)U_r(i-1, j)) \right] \Delta Z(j) + \left[ (U_z(i, j-1) - U_z(i, j+1)) \right] \Delta R(i) = \\ - \frac{U_r}{R(i)} \Delta R(i) \Delta Z(j) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

- **Equation de quantité du mouvement suivant la direction radiale R :**

$$\begin{aligned} A_p(i, j)U_r(i, j) = A_E(i, j)U_r(i+1, j) + A_W(i-1, j)U_r(i+1, j) + A_N(i, j)U_r(i, j+1) \\ + A_S(i, j)U_r(i, j-1) + b(i, j) \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Avec:

$$\left. \begin{aligned} A_E(i, j) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W(i, j) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N(i, j) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S(i, j) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.24})$$

$$b(i, j) = [P(i, j) - P(i+1, j)] R_C(i) \Delta Z(j) + \left( \frac{U_\theta^2}{R_C(i)} \right) R_C(i) dR(i) \Delta Z(j) \quad (\text{II.25})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{R_C(i) dR(i) \Delta Z(j)}{R_C^2(i)} \quad (\text{II.26})$$

Les flux convectifs :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= \frac{1}{2} [U_r(i+1, j) - U_r(i, j)] R_p(i+1) \Delta Z(j) \\ F_w &= \frac{1}{2} [U_r(i-1, j) - U_r(i, j)] R_p(i) \Delta Z(j) \\ F_n &= \frac{1}{2} [U_z(i, j) - U_z(i+1, j)] R_C(i+1) dR(i) \\ F_s &= \frac{1}{2} [U_z(i, j-1) - U_z(i+1, j-1)] R_C(i+1) dR(i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.27})$$

Les flux diffusifs :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_p(i+1) \Delta Z(j)}{\Delta R(i+1)} \\ D_w &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_p(i) \Delta Z(j)}{\Delta R(i)} \\ D_n &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_c(i) dR(i)}{dZ(j)} \\ D_s &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_c(i) dR(i)}{dZ(j-1)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.28})$$

- **Equation de quantité du mouvement suivant la direction tangentielle  $\theta$ :**

$$\begin{aligned} A_p(i, j) U_\theta(i, j) &= A_E(i, j) U_\theta(i+1, j) + A_W(i, j) U_\theta(i-1, j) + A_N(i, j) U_\theta(i, j+1) \\ &\quad + A_S(i, j) U_\theta(i, j-1) + b(i, j) \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Avec :

$$b(i, j) = \left( \frac{U_r U_\theta(i, j)}{R_p(i)} \right) R_p(i) \Delta R(i) \Delta Z(j) \quad (\text{II.30})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{R_p(i) \Delta R(i) \Delta Z(j)}{R_p^2(i)} \quad (\text{II.31})$$

Les flux convectifs :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_r(i, j) R_c(i) \Delta Z(j) \\ F_w &= U_r(i-1, j) R_c(i-1) \Delta Z(j) \\ F_n &= U_z(i, j) R_p(i) \Delta R(i) \\ F_s &= U_z(i, j-1) R_p(i) \Delta R(i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.32})$$

Les flux diffusifs :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_c(i) \Delta Z(j)}{dR(i)} \\ D_w &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_c(i-1) \Delta Z(j)}{dR(i-1)} \\ D_n &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{dZ(j)} \\ D_s &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{dZ(j-1)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.33})$$

- **Equation de quantité du mouvement suivant la direction axiale Z :**

$$\begin{aligned} A_p(i, j) U_z(i, j) &= A_E(i, j) U_z(i+1, j) + A_W(i, j) U_z(i-1, j) + A_N(i, j) U_z(i, j+1) \\ &\quad + A_S(i, j) U_z(i, j-1) + b(i, j) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Avec :

$$\begin{aligned} b(i, j) &= [P(i, j) - P(i, j+1)] R_p(i) \Delta R(j) \\ &\quad + \frac{1}{2} Ri [\Theta(i, j) - \Theta(i, j+1)] R_p(i) \Delta R(i) dZ(j) \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) \quad (\text{II.36})$$

Les flux convectifs :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= \frac{1}{2} [U_r(i, j) - U_r(i, j+1)] R_c(i) \Delta Z(j) \\ F_w &= \frac{1}{2} [U_r(i-1, j) - U_r(i-1, j+1)] R_c(i-1) \Delta Z(j) \\ F_n &= \frac{1}{2} [U_z(i, j+1) - U_z(i, j)] R_p(i) \Delta R(i) \\ F_s &= \frac{1}{2} [U_z(i, j-1) - U_z(i, j)] R_p(i) \Delta R(i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.37})$$

Les flux diffusifs :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_c(i) dZ(j)}{\Delta R(i)} \\ D_w &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_c(i-1) dZ(j)}{\Delta R(i-1)} \\ D_n &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{\Delta Z(j+1)} \\ D_s &= \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{\Delta Z(j)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.38})$$

• **Equation d'énergie  $\Theta$  :**

$$\begin{aligned} A_p(i, j) \Theta(i, j) &= A_E(i, j) \Theta(i+1, j) + A_W(i, j) \Theta(i-1, j) + A_N(i, j) \Theta(i, j+1) \\ &\quad + A_S(i, j) \Theta(i, j-1) + b(i, j) \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Avec :

$$b(i, j) = 0 \quad (\text{II.40})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) \quad (\text{II.41})$$

Les flux convectifs :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_r(i, j) R_c(i) \Delta Z(j) \\ F_w &= U_r(i-1, j) R_c(i-1) \Delta Z(j) \\ F_n &= U_z(i, j) R_p(i) \Delta R(i) \\ F_s &= U_z(i, j-1) R_p(i) \Delta R(i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.42})$$

Les flux diffusifs :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \left( \frac{1}{\text{RePr}} \right) \frac{R_c(i) \Delta Z(j)}{dR(i)} \\ D_w &= \left( \frac{1}{\text{RePr}} \right) \frac{R_c(i-1) \Delta Z(j)}{dR(i-1)} \\ D_n &= \left( \frac{1}{\text{RePr}} \right) \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{dZ(j)} \\ D_s &= \left( \frac{1}{\text{RePr}} \right) \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{dZ(j-1)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.43})$$

## II.8- Résolution des équations algébriques:

Lors de la discrétisation des équations de quantité de mouvement, un problème est survenu, à savoir :

- Les termes sources des équations de quantité de mouvement, impliquent des grandeurs de pression or nous ne disposons pas d'équation pour cette variable jusqu'à présent, ce qui rend la résolution directe de ces équations impossible.

Cette difficulté sera surmontée par l'utilisation d'une équation relative à la pression dérivée principalement de l'équation de continuité. Des méthodes indirectes sont alors utilisées pour obtenir le champ de pression. Parmi les algorithmes existants pour le traitement de la relation vitesse – pression, nous pouvons citer : "**SIMPLE**" (*acronyme Semi –Implicite Pressure Linked Equations*) [4].

### **Algorithme SIMPLE :**

La résolution des équations de quantité de mouvement et l'équation de continuité donne en principe le champ des vitesses et le champ de pression. La question est: comment peut-on obtenir les pressions de l'équation de continuité si les vitesses sont obtenues à partir des équations de quantité de mouvement ? L'algorithme SIMPLE (**Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equation**) est une méthode itérative qui permet justement le calcul des vitesses et la pression [4]. Après la convergence de la solution, les champs de vitesse et de pression doivent satisfaire simultanément l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement.

Après l'intégration sur un volume fini et la discrétisation des différents termes, on aboutit à la forme algébrique des équations de quantité de mouvement.

Afin de comprendre l'algorithme, nous minimisons les symboles en mettant  $U = U_r$  et  $V = V_r$

$$\left. \begin{aligned} a_e U_e &= \sum_{i=E,W,S,N} a_i U_i + b_U + (P_P - P_E) A_e \\ a_n V_n &= \sum_{i=E,W,S,N} a_i V_i + b_V + (P_P - P_N) A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.44})$$

Sur la base d'un champ de pression estimée  $P^*$ , ces équations donnent un champ de vitesse  $U^*, V^*$  qui ne satisfait pas l'équation de continuité. On a les relations:

$$\left. \begin{aligned} a_e U_e^* &= \sum_{i=E,W,S,N} a_i U_i^* + b_U + (P_P^* - P_E^*) A_e \\ a_n V_n^* &= \sum_{i=E,W,S,N} a_i V_i^* + b_V + (P_P^* - P_N^*) A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.45})$$

Pour aboutir à des champs corrects de vitesse et de pression  $U, V$  et  $P$ , il faut corriger  $U^*, V^*$  et  $P^*$  comme suit:

$$U = U^* + U' \qquad V = V^* + V' \qquad P = P^* + P'$$

Comment déterminer les corrections de vitesse  $U', V'$  et de la pression  $P'$ ?

Soustrayons (II.44) de (II.45) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} a_e U_e' &= \sum_{i=E,W,S,N} a_i U_i' + b_U + (P_P' - P_E') A_e \\ a_n V_n' &= \sum_{i=E,W,S,N} a_i V_i' + b_V + (P_P' - P_N') A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.46})$$

A ce stade les termes  $\sum_{i=E,W,N,S} a_i U_i'$  et  $\sum_{i=E,W,N,S} a_i V_i'$  sont omis. A noté que la solution finale de vitesse et de pression ne sera contiendra pas d'erreur due à cette omission puisque tous les termes de ces équations tendent vers zéro. On obtient donc, pour les 4 faces  $e, w, n, s$  du volume central.

$$\left. \begin{aligned} U_e &= U'_e + d_e (P'_P - P'_E) A_e, d_e = \frac{A_e}{a_e} \\ U_w &= U'_w + d_w (P'_P - P'_W) A_w, d_w = \frac{A_w}{a_w} \\ U_n &= U'_n + d_n (P'_P - P'_N) A_n, d_n = \frac{A_n}{a_n} \\ U_s &= U'_s + d_s (P'_P - P'_S) A_s, d_s = \frac{A_s}{a_s} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.47})$$

$$A_e = A_w : \text{surface}(\Delta Z \times 1) \quad A_n = A_s : \text{surface}(\Delta R \times 1)$$

En fait, les vitesses peuvent être corrigées à condition que l'on ait une estimation du champ des corrections de pressions. C'est l'équation de continuité qui va être transformé pour donner une équation des corrections de pression.

L'intégration et la discrétisation de l'équation de continuité par rapport à un volume de contrôle central (pour un fluide compressible) donne.

$$\left[ (\rho U)_e - (\rho U)_w \right] \Delta Z + \left[ (\rho V)_n - (\rho V)_s \right] \Delta R = 0 \quad (\text{II.48})$$

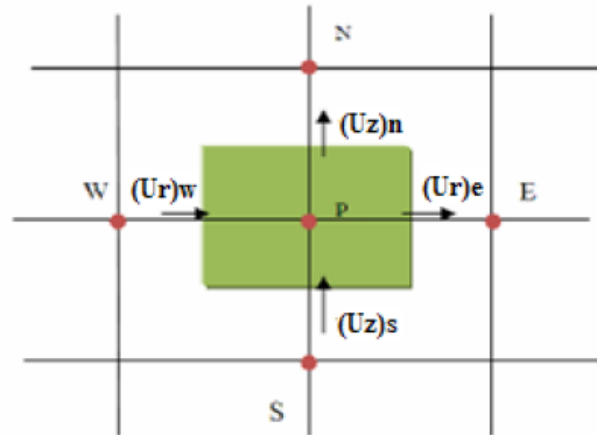
Substituons maintenant à la place des vitesses les expressions reliant les corrections de pression  $P'_P, P'_E, P'_W, P'_S, P'_N$  :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_S P'_S + a_N P'_N + b_m \quad (\text{II.49})$$

Où

$$a_E = \rho d_e \Delta Z, a_W = \rho d_w \Delta Z, a_S = \rho d_s \Delta Z, a_N = \rho d_n \Delta Z \quad (\text{II.50})$$

$$b_m = \left[ (\rho U^*)_e - (\rho U^*)_w \right] \Delta Z + \left[ (\rho V^*)_n - (\rho V^*)_s \right] \Delta R \quad (\text{II.51})$$



*Fig. II-4 : volume de contrôle de l'équation de continuité.*

Enfin, l'algorithme SIMPLER se résume comme suit:

La séquence des opérations essentielles constituant l'algorithme SIMPLER [4] est la suivante:

- 1 - Deviner un champ de pression initiale  $P^*$ .
- 2 - Résoudre les équations de transport (II.9) pour dériver un champ de vitesses  $U^*, V^*$ .
- 3 - Calculer le terme source de la masse  $b_m$  de l'équation (II.51) et par conséquent résoudre l'équation (II.49) de correction de la pression  $P'$ .
- 4 - Corriger les champs de pression et de vitesse dans les équations  $P = P^* + P'$  et (II.47) pour la vitesse.
- 5 - Résoudre les autres équations de transport de l'autre problème scalaire:
  - l'équation de swirl, et obtenir  $U_\theta$ .
  - l'équation de l'énergie, pour obtenir  $\Theta$ .
- 6 - Remplacer le champ de pression ancien par le nouveau et revenir à l'étape 2. Répétez les calculs jusqu'à la convergence de toutes les variables.

## **II-9 - Présentation d'un code CFD Fluent:**

CFD (Computational Fluid Dynamics), est une branche de la mécanique des fluides qui utilise des méthodes numériques et des algorithmes pour résoudre et analyser les problèmes

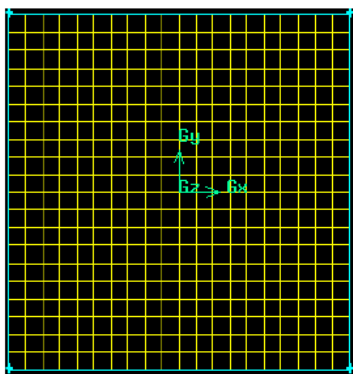
qui comportent les écoulements de fluide. Les ordinateurs sont utilisés pour effectuer les calculs nécessaires pour simuler l'interaction de liquides et de gaz avec des surfaces définies par des conditions aux limites. Les réalisations de simulations numériques sont effectuées en deux étapes :

### ***II.9.1 - Première étape: créer la géométrie et le maillage dans Logiciel Gambit***

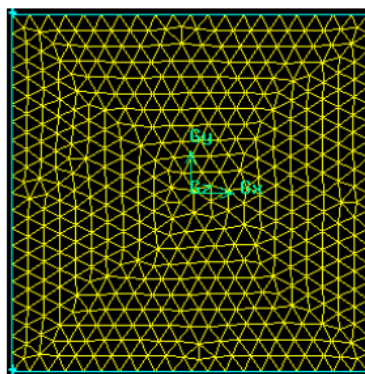
Au début, nous devons créer la géométrie puis créer un maillage et de définir certaines conditions aux limites. Ces opérations sont effectuées en utilisant un générateur de maillage, dans cette étude le générateur de maillage utilisé est Gambit.

Gambit peut être utilisé dans plusieurs types de mailles:

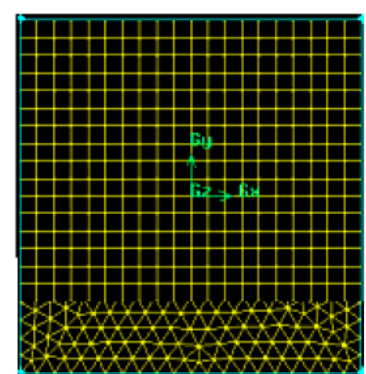
- **maillage structuré:** est généralement composée de mailles quadrilatérales en deux dimensions (2D ou maillage surfacique) et hexaédriques en trois dimensions (3D ou maillage volumique).
- **maillage non structuré:** va être composé de mailles quadrilatérales ou triangulaires en 2D et hexaédriques ou tétraédriques en 3D.
- **maillage hybride (mixte):** les mailles proches des parois sont des quadrilatères en 2D et des hexaèdres en 3D et les mailles du reste du domaine sont des triangles en 2D et des tétraèdres en 3D. Près de la paroi, il est nécessaire d'avoir des mailles de très petites tailles pour bien modéliser les écoulements. En 3D, les mailles qui font les liaisons entre les hexaèdres et les tétraèdres sont des prismes ou des pyramides. La Figure II-5 représente ces trois types de maillage.



maillage structuré



maillage non structuré



maillage hybride (mixte)

*Fig. II-5: Les trois types de maillages utilisées par logiciel Gambit.*

### ***II.9.1 - Deuxième étape: Modélisation et solution numérique par logiciel Fluent***

FLUENT est un logiciel de modélisation de l'écoulement du fluide et de transfert de chaleur dans des géométries complexes. FLUENT emploie la méthode des volumes finis comme une méthode de discrétisation des équations régissant l'écoulement, tels que les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie. En utilisant cette technique basée sur l'intégration des équations sur un volume de contrôle.

Fluent est capable de faire la modélisation suivante [6]:

- Ecoulement 2D ou 3D.
- Ecoulement stable et instable.
- Ecoulements compressible et incompressibles.
- Ecoulement visqueux, non visqueux, laminaire et turbulent.
- Fluide newtonien ou non.
- Le transfert de chaleur par conduction, convection, ou les deux (combiné) ou par radiation.
- Ecoulements avec des changements de phase.
- Ecoulement dans les milieux poreux.

Les différentes étapes pour résoudre le problème dans FLUENT:

➤ **Pour commencer la stimulation doit importer le fichier (\*.Msh) généré en GAMBIT :**

- Read → case.

➤ **Vérification du maillage :**

Cela permet de vérifier si le maillage importé ne contient pas d'erreurs ou de volumes négatifs.

- Grid → check.

➤ **Choisir le Solveur :**

- Define → models → solver...
- "Pressure based" utilisé pour les écoulements incompressibles à modérément compressible.
- " Axisymmetric Swirel" utilisé pour l'écoulement tournant symétrique.

➤ **Equation d'énergie :**

- Define → models → Energy ... parce que nous avons le transfert de chaleur.

➤ **Modèle d'écoulement :**

- Define → models → Viscous ... nous avons l'écoulement laminaire.

➤ **Définition des caractéristiques du fluide :**

- Define → materials ... et mettre vos propriétés des fluides.

➤ **Condition d'exploitation :**

- Define → Operating conditions.

Avant de choisir les conditions aux limites, nous devons d'abord sélectionner la valeur de la pression de référence «conditions d'exploitation», et la gravité  $g$  (la gravité  $g$ , est orienté à l'inverse de la direction  $y$ ).

➤ **Les conditions aux limites :**

- Define → Boundary conditions... pour les disques rotatifs, nous donnent la température et la vitesse de rotation.

➤ **Contrôle de la Solution :**

- Solve → control → solution...

➤ **Pour le schéma d'interpolation de la méthode des volumes finis nous avons choisi :**

- "Power law": il est plus précis et recommandé pour les problèmes de la convection-diffusion.

Pour le choix du schéma d'interpolation de la pression :

- "PRESTO" utilisé pour les écoulements très tourbillonnants, les écoulements impliquant de fortes gradient de pression (milieux poreux, modèle de ventilateur, etc...), ou dans des domaines fortement incurvées.

➤ **Le choix de la méthode de couplage pression-vitesse :**

La solution nécessite la définition de vitesses sur un grille décalée et l'utilisation d'algorithmes tels que "SIMPLE" pour résoudre ce lien ou couplage entre la pression et la vitesse. La famille d'algorithmes "SIMPLE" est essentiellement un procédé d'estimation et de correction pour le calcul de la pression sur la "grille décalée" de composantes de vitesse.

➤ **Choix des critères de convergence :**

- Solve → Monitors → Residuel...

➤ **Vérification pour les étapes :**

- Solve → case the check...

➤ **Enregistrer le fichier \*. Case :**

- File → Write → case...

➤ **Lancement de la simulation**

- Solve → iterate ... et mettre les nombres de l'itération.

➤ **Enregistrer le fichier \*. Dat**

- File → write → Data...

Les résultats obtenus sont affichés par un logiciel appelé *Tecplot 360*, supporté les fichiers Case et data.

### 9-3- Facteurs de relaxation

Afin de contrôler et de réduire le changement produit durant chaque itération d'une variable de l'écoulement,  $\phi$ , Fluent permet d'agir sur les facteurs de relaxation assignés à un nombre de variables comme suit :

$$\begin{cases} \phi = \phi_{old} - \alpha \cdot \Delta\phi \\ \Delta\phi = \phi_{comp} - \phi_{old} \end{cases} \quad (\text{II. 52})$$

Où:

$\phi_{old}$  : Ancienne valeur de  $\phi$ .

$\Delta\phi$  : Changement dans la valeur de  $\phi$ .

$\phi_{comp}$  : Valeur de  $\phi$  calculée.

$\alpha$  : facteur de relaxation.

Le code FLUENT offre les meilleures valeurs des facteurs de relaxation pour une large gamme d'écoulements et permet d'agir sur eux. Alors, nous avons utilisé ces facteurs:  $0.3 < \alpha < 1$  (recommandé par Fluent).

- Pression = 0.3.
- Vitesse radiale = 0.7.
- Vitesse axiale = 0.7.
- Vitesse de tourbillonnement = 0.9.
- Energie = 1.

# **CHAPITRE III**

## **RESULTATS ET DISCUSSIONS**

**CHAPTER III****RESULTATS ET DISCUSSIONS****III.1-Introduction :**

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux présentations et discussion des résultats obtenus en simulant numériquement la convection mixte en régime laminaire lors des processus de la croissance cristalline dans une cavité cylindrique axisymétrique similaire à celle utilisé dans configuration de Czochralski (Cz), dont l'importance dans les applications sera présentée dans l'introduction générale. Les résultats figurant dans ce qui suit, sont tous obtenus pour un rapport d'aspect  $\gamma = 2$  et  $Pr = 0.011$ , (cas des métaux liquides), et sont visualisés graphiquement sous plusieurs formes appropriées pour chaque paramètre sous forme adimensionnelle (des lignes de courant, des isothermes, des profils de vitesses radiales, axiales, et tangentielle ainsi que des profils de la température...etc.). Tous les résultats sont présentés dans le plan méridien (R-Z). Le maillage utilisé est non uniforme dans les directions radiale R et axiale Z, raffinée à proximité des parois latérales, supérieures et inférieures des disques. Ce maillage est composé de :

80: des points dans la direction radiale.

160: points dans la direction axiale.

Nous présentons nos résultats en situation de la convection mixte (naturelle et forcé) en absence du champ magnétique, dont l'ultime objectif est la détermination de l'influence de la rotation des deux disques des extrémités et leurs sens de rotation (Co/contre-rotation) sur la naissance des mouvements convectifs pour différentes valeurs des nombres de Richardson  $Ri$  ( $Ri = 0.1, 1, 0.5, \text{ et } 10$ ).

### III.2-Résultats et discussion :

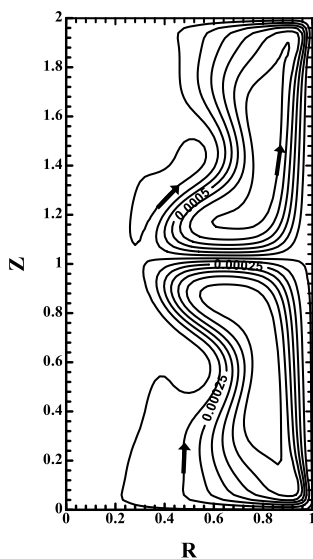
#### III.2.1- Cas des disques en Co-rotation :

##### A- Champs d'écoulement :

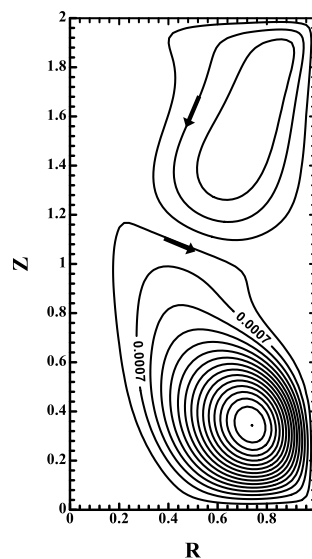
En examinant attentivement les résultats présentés dans les figures suivantes (Fig. III-1), nous pouvons remarquer qu'en raison de la symétrie géométrique, les contours sont symétriques par rapport au plan médian ( $Z = 1$ ) [6]. Lorsqu'on augmente le nombre de Richardson, on remarque que la cellule au fond augmente soit en taille, soit en intensité jusqu'à l'apparition d'une cellule secondaires qui tourne à l'intérieur de la circulation principale, par contre la cellule au haut est réduite jusqu'à l'apparition d'une autre zone de recirculation à coté de grande cellule au fur et à mesure que  $Ri$  augmente.

Nous pouvons constater à travers ces résultats, une couche d'Ekman ont lieu le long des deux disques rotatifs où la vitesse azimutale est plus élevée dans cette région par rapport à d'autres régions et d'une évolution de couche de Stewartson le long de la paroi latérale [7]. La rotation de la partie inférieure entraîne une couche inférieure du fluide à tourner. Cela crée une zone de haute pression au niveau du point ( $R = 1, Z = 0$ ). Cette haute pression décharge le liquide dans le reste de la cavité, où la pression est plus basse, en pompant le liquide au-dessus du disque en rotation: ce phénomène d'aspiration est connu comme le pompage d'Ekman. Ce phénomène est toujours présent dans ce type d'écoulement [8], Il est entraîné par la rotation des parois du cylindre quel que soit le régime d'écoulement stable ou transitoire. Ces particules sont données une quantité d'énergie cinétique à chaque passage des deux disques rotatifs. Cette quantité, les particules de fluide doit perdre dans leurs circulations méridiennes.

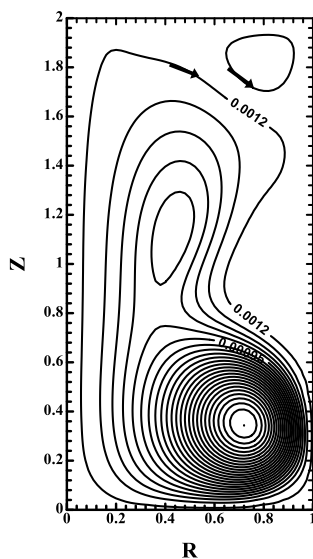
On montre les distributions axiales de composantes de vitesse le long de  $R = 0.5$  pour la Co-rotation sur la figure (Fig. III-2), l'écoulement axial est assez fort à proximité de disque inférieur en raison de leur température grande que le disque supérieur. Il est clair que la symétrie existe dans la distribution axiale de la vitesse azimutale  $U_\theta$  pour le cas de Co-rotation des disques d'extrémité, nous notons également que la distribution de vitesse radiale  $U_r$  est symétrique mais la répartition de vitesse axial  $U_z$  est antisymétrique. Pour les valeurs négatives ce qui montre que le sens de circulation est en sens inverse de  $Z$ .



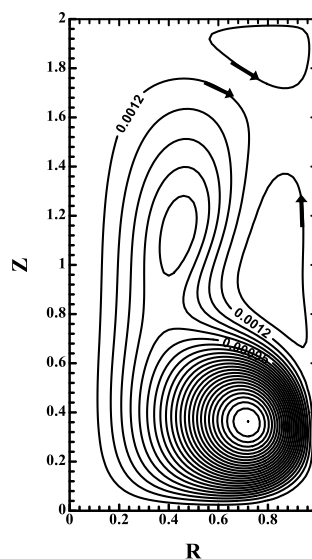
(a)  $Ri = 0.1$   
 $\psi_{\max} = 7 \times 10^{-4}$



(b)  $Ri = 1$   
 $\psi_{\max} = 9.5 \times 10^{-4}$

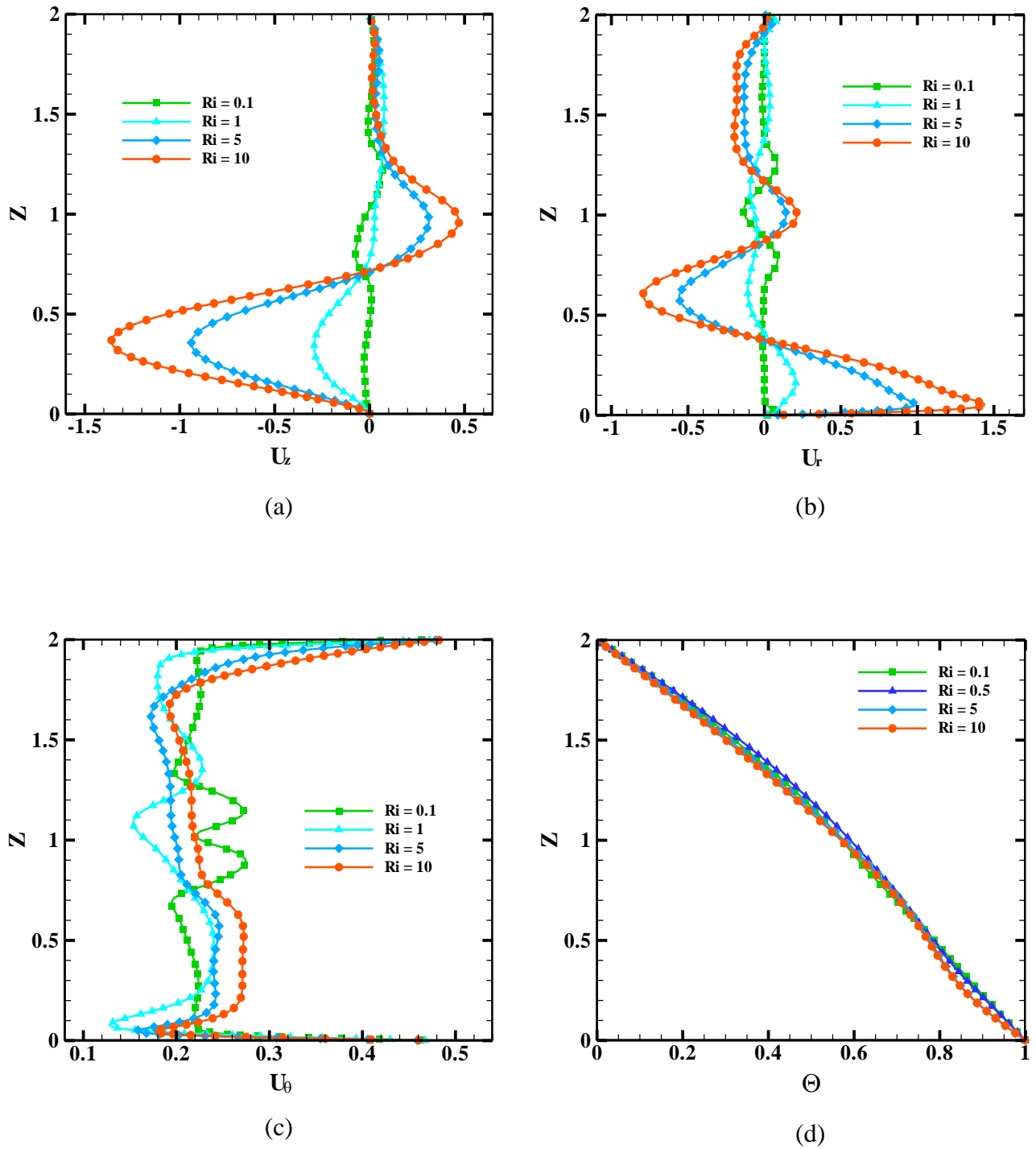


(c)  $Ri = 5$   
 $\psi_{\max} = 1.3 \times 10^{-3}$



(d)  $Ri = 10$   
 $\psi_{\max} = 1.3 \times 10^{-3}$

*Fig. III-1: Lignes de courant pour  $Gr = 10^6$ , et pour différentes valeurs du nombre de Richardson (cas des disques en Co-rotation).*



*Fig. III-2: Profils de la composante de vitesse axiale (a), radiale (b), tangentielle (c) et de température (d) à  $R = 0.5$ , pour  $Gr = 10^6$ , et pour différents nombres de Richardson, (cas des disques en Co-rotation).*

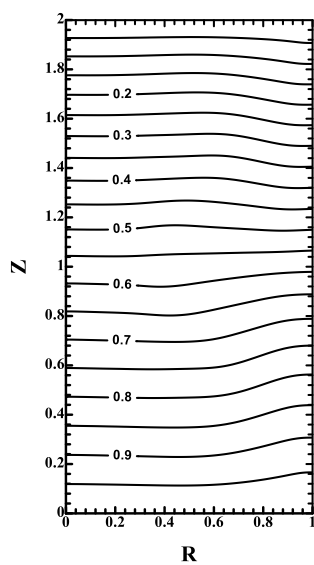
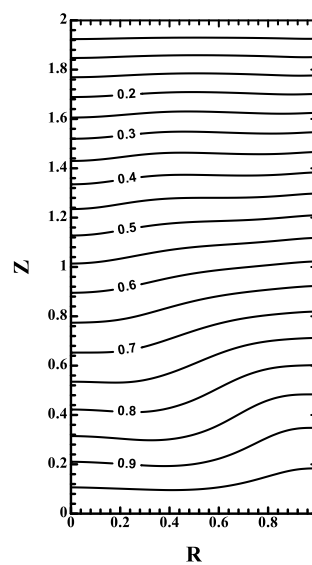
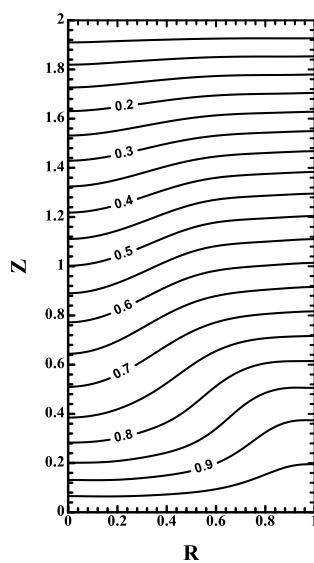
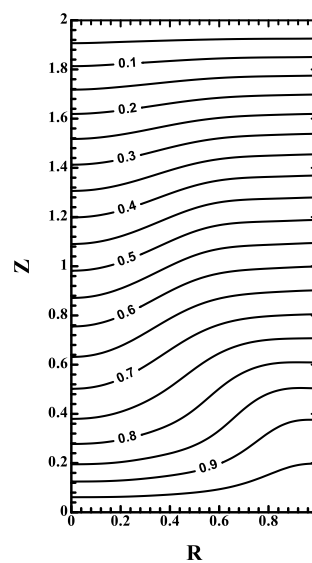
**B- Champs thermique :**

Pour la convection mixte en Co-rotation des disques d'extrémités, les profils de température représentent consistant en des schémas de hauteur adimensionnel ( $Z$ ) en fonction de la température sans dimension ( $\Theta$ ) (Fig. III-2 d), où nous pouvons observer que nous avons une température maximale ( $\Theta = 1$ ) à  $Z = 0$  (paroi chaude), et une température minimale ( $\Theta = 0$ ) à  $Z = 2$  (paroi froide).

Pour le gradient de température ( $\partial\Theta/\partial Z$ ) on remarque une petite déformation, ce qui signifie que le régime de convection commence dans le transfert de chaleur.

Pour donner la structure thermique de l'écoulement, nous avons présenté la ligne isotherme dans la cavité (Plan R-Z). Chaque ligne représente les emplacements qui ont une même température le long du rayon R.

En observant les lignes isothermes dans le plan (R-Z), on voit que l'échange de chaleur se produit lorsque la conduction domine le transfert de chaleur, une déviation remarquable des isothermes a lieu dans la zone de contact avec le fluide et sur le côté de paroi, les particules de fluide, reçoivent la chaleur et dans le même temps sont déplacées vers la paroi latérale. Le long de ce mur, ces particules se déplacent à la paroi supérieure du cylindre par la forme d'un jet chaud. La paroi supérieure est froide qui encourage l'échange de chaleur en refroidissant les particules. Le long de la paroi supérieure, le fluide est refroidi par convection radialement par rapport à l'axe de symétrie. L'examen de ces courbes montre que, à l'axe de symétrie, les isothermes sont plus déformées de plus où le nombre de Ri augmente.

(a)  $Ri = 0.1$ (b)  $Ri = 1$ (c)  $Ri = 5$ (d)  $Ri = 10$ 

*Fig. III-3: Lignes isothermes pour  $Gr = 10^6$ , et pour différentes valeurs du nombre de Richardson, (cas des disques en Co-rotation).*

**III-2-2- Cas de disques en contre-rotation:****A- Champs d'écoulement :**

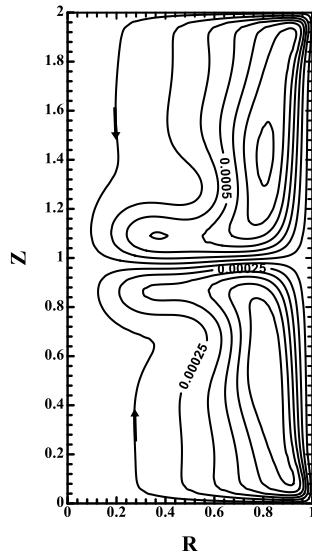
Pour donner la structure dynamique de l'écoulement, nous avons présenté les lignes de courant dans la cavité (Plan R-Z). Les lignes de courant est représenté dans les figures (Fig. III-4).

Presque le même commentaire que les disques tournent en Co-rotation, mais le cas où les deux disques tournent à la même vitesse angulaire  $\Omega$  dans l'opposé, la situation antisymétrique est obtenue où chaque disque tend à mener une moitié de l'épaisseur de fluide par rapport à la vitesse angulaire,  $+\Omega$  et  $-\Omega$ , un écoulement de cisaillement inter-disque est créé. Pour ce cas de contre-rotation, les contours sont antisymétriques par rapport au plan médian  $Z=1$ .

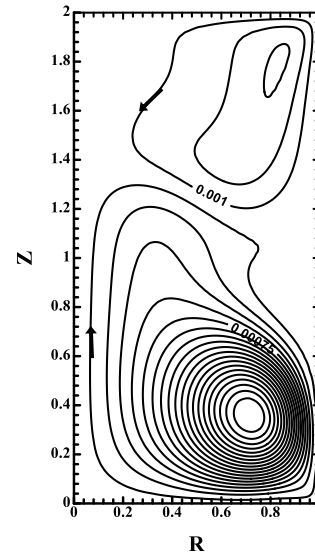
Lorsqu'on augmente le nombre de Richardson, on remarque que la cellule au fond augmente soit en taille, soit en intensité jusqu'à l'apparition d'une cellule secondaire (inter-cellule) qui tourne à l'intérieur de la circulation principale, par contre la cellule au haut est réduite jusqu'à l'apparition de zones de recirculations à côté de grande cellule au fur et à mesure que  $Ri$  augmente.

Afin de voir la distribution des vitesses ( $U_r, U_z, U_\theta$ ) le long de la hauteur  $Z$ , nous présentons sur les figures (Fig. III-5), la distribution axiale à  $R=0.5$ .

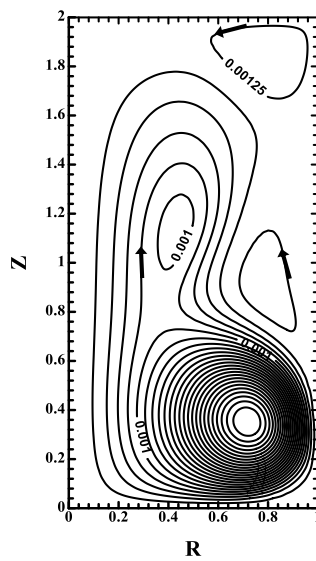
Nous montrons les distributions axiales des composantes de vitesse le long de  $R=0.5$  pour la contre-rotation, l'écoulement est assez fort près des disques supérieur et inférieur en raison de la rotation. Il est clair que la antisymétrie règne dans la distribution axiale de la vitesse azimutale  $U_\theta$  pour le cas de la contre-rotation des disques d'extrémités (les disques sont en rotation au sens inverse), nous notons également que la distribution de vitesse radiale  $U_r$  est symétrique mais la distribution de la vitesse axiale  $U_z$  est antisymétrique.



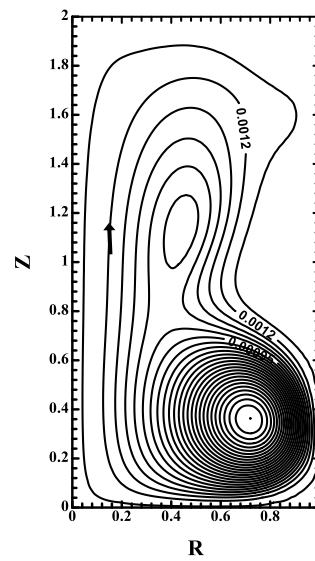
(a)  $Ri = 0.1$   
 $\psi_{\max} = 7 \times 10^{-4}$



(b)  $Ri = 1$   
 $\psi_{\max} = 1.15 \times 10^{-3}$

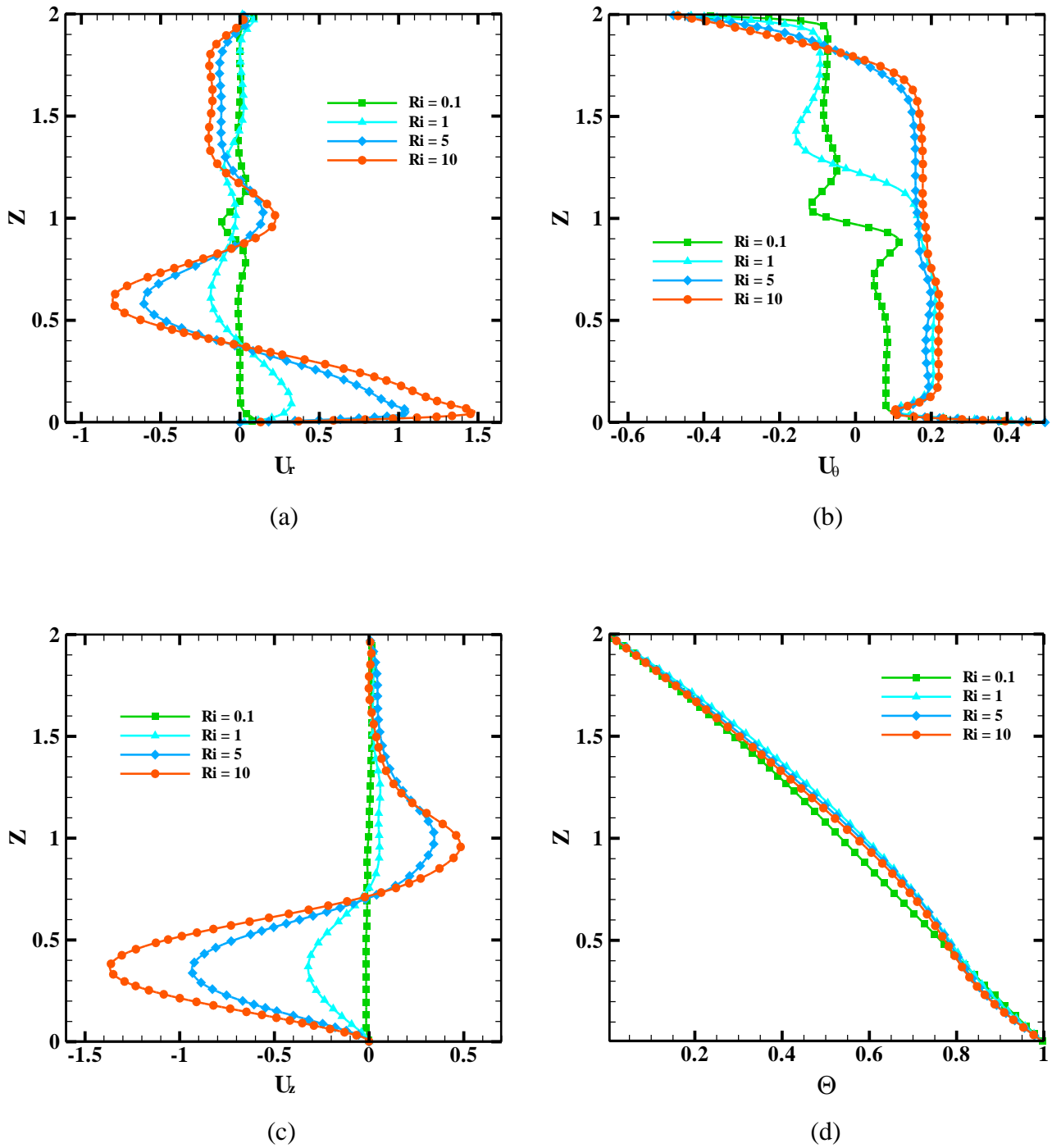


(c)  $Ri = 5$   
 $\psi_{\max} = 1.3 \times 10^{-3}$



(d)  $Ri = 10$   
 $\psi_{\max} = 1.3 \times 10^{-3}$

*Fig. III-4: Lignes de courant pour  $Gr = 10^6$ , et pour différentes valeurs du nombre de Richardson (cas des disques en Contre-rotation).*



*Fig. III-5: Profils de la composante de vitesse axiale (a), radiale (b), tangentielle (c) et de température (d) à  $R = 0.5$ , pour  $Gr = 10^6$ , et pour différents nombres de Richardson, (cas des disques en Contre-rotation).*

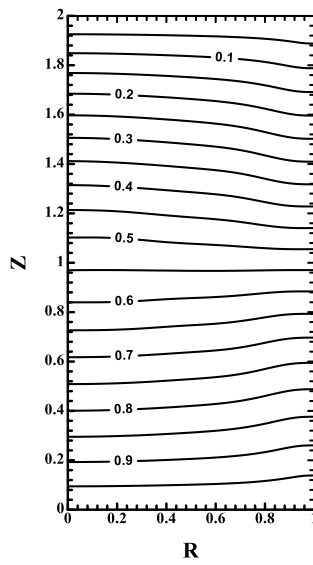
***B- Champs thermique :***

Pour le cas de contre-rotation, les profils de température représentent consister en des schémas de hauteur adimensionnelle ( $Z$ ) en fonction de la température sans dimension ( $\Theta$ ) (Fig. III-5. d), où nous pouvons observer que nous avons une température maximale ( $\Theta = 1$ ) à  $Z = 0$ , (paroi chaud), et une température minimale ( $\Theta = 0$ ) à  $Z = 2$ , (paroi froide).

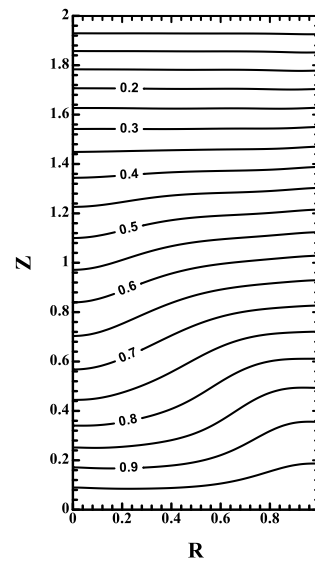
Pour le gradient de température ( $\partial\Theta / \partial Z$ ), nous constatons de plus en déformation, ce qui signifie que l'échange de chaleur à contre-rotation est meilleur que le cas de Co-rotation.

Pour donner la structure thermique de l'écoulement, nous avons présenté la ligne isotherme dans la cavité (Plan R-Z) sur la figure (Fig. III-5). Chaque ligne montre les emplacements qui ont une même température le long du rayon R.

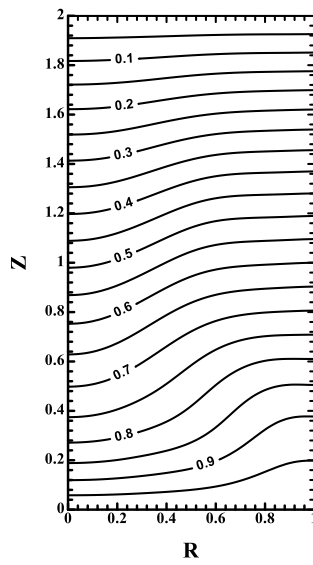
Même cas par la contre-rotation que l'échange de chaleur se produit (spécialement dans les régions près des deux disques inférieur et supérieur.) lorsque la conduction domine le transfert de chaleur, avec la déformation de lignes isothermes où le nombre de  $Ri$  est augmenté. Les particules de fluide recevoir de la chaleur et en même temps sont déplacés vers la paroi latérale. Le long de cette paroi, ces particules se déplacent à la paroi supérieure du cylindre par une forme à jet chaud. La paroi supérieure est froid qui favorise l'échange de chaleur par refroidissement des particules. Le long de la paroi supérieure, le fluide de refroidissement par convection est radialement à l'axe de symétrie. L'examen de ces courbes montre que sur l'axe de symétrie, les isothermes sont plus déformées plus où le nombre de  $Ri$  augmenté.



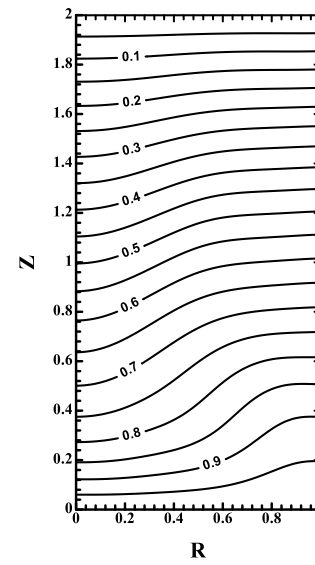
(a)  $Ri = 0.1$



(b)  $Ri = 1$



(c)  $Ri = 5$



(d)  $Ri = 10$

*Fig. III-6: Lignes isothermes pour  $Gr = 10^6$ , et pour différentes valeurs du nombre de Richardson, (cas des disques en Contre-rotation).*

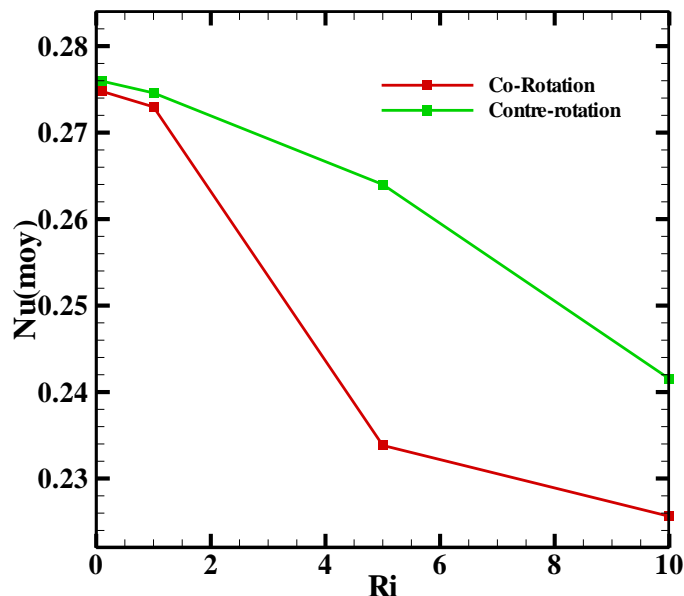
### III.3- Taux de transfert de chaleur (Nombre moyen de Nusselt) :

Le taux de transfert de chaleur et de masse à travers la cavité est obtenu en évaluant la moyenne des nombres de Nusselt sur la paroi chaude de la cavité (disque inférieur de la cavité). La figure (Fig. III-7) présente un schéma de nombre de Nusselt moyen  $Nu(\text{moy})$  en fonction du nombre de Richardson  $Ri$  dans les deux cas de rotation (Co/Contre-rotation).

Dans le cas de la Co-rotation, et pour le nombre de Nusselt moyen est clairement noté que l'augmentation de  $Ri$  correspond la réduite de nombre de Nusselt ( $Nu$ ), ce qui s'explique par la diminution du nombre de  $Re$  (diminution de la vitesse de rotation où la conduction domine le transfert de chaleur).

On remarque aussi une forte baisse lors de la convection forcée est dominant ( $1 \leq Ri \leq 5$ ). Toutefois, pour les grandes valeurs du nombre de Richardson ( $Ri \geq 5$ ), il diminue de façon monotone et linéaire (convection naturelle principalement).

Dans le cas de la Contre-rotation, et pour toutes les valeurs du nombre de Richardson, le nombre de Nusselt diminue de façon monotone et linéaire.



*Fig. III -7: Variation du nombre de Nusselt moyenne en fonction du nombre du Nombre de Richardson pour  $Gr = 10^6$  (Cas de disques en Co/Contre-rotation).*

## *Conclusion et perspectives*

Une étude numérique de l'écoulement de convection mixte engendré par deux disques rotatifs en Co / Contre-rotation, dans une cavité cylindrique rempli d'un fluide à faible nombre de Prandtl, et soumis à un gradient de température a été présenté. Un logiciel *FLEUNT* sur la base de la méthode des volumes finis a été utilisé pour résoudre numériquement les équations régissant les phénomènes.

- Nos résultats numériques pour le cas de la convection mixte ont montré que l'augmentation du nombre de Richardson  $Ri$  affecte directement dans la structure de l'écoulement et du champ thermique dans les deux cas de Co / Contre-rotation.

- L'augmentation du nombre de Richardson  $Ri$ , conduit à une diminution du nombre de Reynolds  $Re$  et le taux de transfert de chaleur ( $Nu$ ), dans le cas de Co-rotation.

- Le fluide dans la majorité du cylindre tourne quasi-rigidement avec une vitesse intermédiaire de disques d'extrémité et les champs d'écoulement et les isothermes sont symétriques par rapport au plan médian ( $Z=1$ ).

- Dans le cas de Contre- rotation, on obtient une situation antisymétrique où chaque disque tend à mener une moitié de l'épaisseur de fluide par rapport à la vitesse angulaire,  $+\Omega$  et  $-\Omega$ , un écoulement de cisaillement inter-disque est créé, à un certain nombre de  $Ri$ , l'écoulement perd sa symétrie en raison de la couche limite instable pour Co- rotation et une instabilité de cisaillement dans le cas de contre-rotation.

## *Bibliographique*

- [1] <http://en.wikipedia.org/wiki/>. (12-06-2012).
- [2] Rjucsh K. Kundu, Ira M. Cohen, Fluid Mechanics, Second Edition, ACADEMIC PRESS, C 2002. (USA).
- [3] F. Berrahil, R. Bessaih (Encadreur), Hydrodynamique, Transfert de chaleur d'un Ecoulement Tournant et Stabilité MHD, Thèse de Magister, Université Mentouri – Constantine, 2005.
- [4] Suhas V. Patankar. "Numerical heat transfer and fluid flow". Hemis [55]-R. Bessaih, Ph. Marty and M. Kadja,"Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure", Acta Mechanica, vol. 135, pp. 153-167, 1999. Washinton, DC, 1980.
- [5] Fluent Inc., Fluent 6.2 User's Guide. 2006.
- [6] C. C. Jahnke & D. T. Valentine, Boundary layer separation in a rotating container, Phys.of Fluids 8 (1996), 1408.
- [7] H. J. Lugt, Axisymmetric vortex breakdown with and without temperature effects in a container with a rotating lid, J. Fluid Mech. 179 (1987), 179–200.
- [8]-R. Bessaih, Ph. Marty and M. Kadja,"Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure", Acta Mechanica, vol. 135, pp. 153-167, 1999.

# Numerical Simulation of Rotating Flow

## Abstract

We present a numerical study of rotating flow generated by two rotating disks in Co/counter rotating, inside a fixed cylindrical enclosure having an aspect ratio  $H/R$  equal to 2, filled of a fluid with low Prandtl number ( $Pr=0.011$ ), which is submitted to a vertical temperature gradient. The finite volumes method has been used to resolve the equations numerically controlling the studied phenomenon. This flow are very unstable. We presented the Steady mode, let us make of it the comparison between the flow generated by the Co-rotating end disks and counter-rotating. Our numerical simulation were presented for various values of the Grashof number ( $Gr = 10^6$ ) in the case of natural convection and various values of the Richardson number ( $Ri = 0.1, 1, 5, 10$ ) in the case of mixed convection, contours and diagram was established according to the numerical results of this investigation. These diagrams put in evidence the dependence of the Grashof, Reynolds and Richardson number.

**Key words:** natural convection, Mixed Convection, Co-rotating, cons-rotating, cylinder.

## Simulation Numérique d'un Écoulement Tournant

### Résumé

Nous présentons une étude numérique d'un écoulement tournant engendré par deux disques tournants en Co/contre-rotation, à l'intérieur d'une enceinte cylindrique, dont le rapport d'aspect  $H/R=2$ , rempli d'un fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr=0.011$ ), soumise à un gradient de température. Un code de calcul (fleunt) basé sur la méthode des volumes finis a été utilisé pour résoudre numériquement les équations gouvernant le phénomène étudié. Cet écoulement est très instable. Nous avons présenté le cas stable, en faisons la comparaison entre l'écoulement engendré par la Co-rotation des disques d'extrémités et la contre rotation de ces derniers. Nos simulation numériques ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Grashof ( $Gr = 10^6$ ) pour le cas convection naturelle et différentes valeurs du nombre de Richardson ( $Ri = 0.1, 1, 5, 10$ ) pour le cas convection mixte. Des contours et diagrammes ont été établis pour mettre en évidence la dépendance du nombre de Grashouf, Reynolds et Richardson.

**Mots clés : convection naturelle, Convection Mixte, Co-rotation, contre-rotation, Cylindre.**

## محاكاة عددية لسريان دوراني

يمثل هذا العمل دراسة رقمية لسريان دوراني سائل معدني ناتج عن دوران الغطاء السفلي والعلوي لاسطوانة مملوءة حيث عدد برونديل يساوي ( $Pr = 0.011$ ) ونسبة الطول للعرض هي 2 توضع الأسطوانة تحت تأثير حمل حراري من أجل حل المعادلات التفاضلية التي تتحكم في الظاهرة استعملنا طريقة الأحجام المنتهية , تقديم المحاكاة من أجل قيم مختلفة لعدد غراتشوف ( $Gr = 10^6$ ) في حالة الحمل الطبيعي وقيم مختلفة ريتشارسون ( $Ri = 0.1, 1, 5, 10$ ) بالنسبة للحمل المزدوج تم تقديم النتائج على شكل مخططات ومنحنيات توازن لإبراز مدى تأثير أعداد غراتشوف رينولد وريتشارسون على بنية السريان .

كلمات مفتاحيه : حمل طبيعي , , , , .