



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

Introduction à la théorie des
opérateurs

Présenté par:

HABITA Ibtissam

SALHI Aouatef

Sous la supervision de :

HABITA Khaled

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier notre Dieu le tout puissant pour nous avoir donné la force pour accomplir ce travail.

Nous tenons à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation de mathématique, en particulier, notre encadreur pédagogique Mr

"HABITA Khaled".

Nous tenons à remercier tous les étudiants de la promotion 2014/2015 de Math de l'université d'**El-Oued**.

Sans oublier un grand merci à tous les membres de l'Association de l'**Alkhawayrismia** pour la science à son soutien permanent.

Nous tenons aussi à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur, qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

En fin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

Notations générales

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels.
Ω	Ensemble des ouverts.
ϕ	Ensemble vide.
$\overline{T}$	Adhérence de T .
$\overset{\circ}{T}$	Intérieurs de T .
T^*	Adjoint d'opérateur T .
$\text{Im}(T)$	Image d'un opérateur T .
$D(T)$	Domaine d'un opérateur T .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	Forme bilinéaire de dualité.
$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$	"Bracket" de semi-dualité.
$B_F(a, r)$	La boule fermée de centre a et de rayon r .
$B(x)$	Espace des fonctions bornées.
$\ \cdot\ _p$	Norme dans l'espace L^p .
$L(X, Y)$	L'espace des applications linéaires.
$\mathcal{L}(X, Y)$	L'espace des applications linéaires et continues.

Table des matières

Notations générales	ii
Introduction générale	1
1 Espaces de Banach et espaces de Hilbert	2
1.1 Espaces vectoriels normés	2
1.1.1 Continuité	3
1.2 Espaces de Banach	3
1.3 Espaces de Hilbert	4
2 Les opérateurs linéaires bornés et non-bornés	5
2.1 L'espace $L(X,Y)$	5
2.2 L'espace $\mathcal{L}(X,Y)$	6
2.3 Théorème du prolongement par continuité	12
2.4 Opérateurs linéaires bornés dans un espace Hilbert	14
2.4.1 Inverse d'un opérateur	14
2.4.2 Adjoint d'un opérateur	15
2.4.3 Opérateur auto-adjoint	17
2.4.4 Opérateur normal	20
2.4.5 Opérateur positif	22
2.4.6 Opérateur compact	23
2.5 Décomposition du spectre d'un opérateur borné	24
2.6 Opérateur linéaire non borné	26

3	Théorèmes fondamentaux et applications	28
3.1	Théorèmes fondamentaux sur les applications linéaires	28
3.1.1	Théorème du graphe fermé	28
3.1.2	Théorème de l'application ouverte	29
3.1.3	Théorème de Banach-Steinhaus	32
	Bibliographie	36

Introduction générale

Dans ce mémoire on a présenté une introduction générale sur la théorie, très vaste, des opérateurs.

Le premier chapitre est introductif : On y donne des rappels sur les espaces vectoriels normés, les espaces de Banach et les espaces de Hilbert qui sont nécessaires pour aborder notre sujet.

Dans le second chapitre on a étudié, en générale, les opérateurs linéaires bornés ou non bornés, définis sur des espaces de Banach ou des espaces de Hilbert et leurs propriétés.

Puis on a consacré à chaque type de ces opérateurs une étude dans un paragraphe :

- Inverse d'un opérateur.
- Adjoint d'un opérateur.
- Opérateur auto-adjoint.
- Opérateur compact.
- Opérateur positive.
- Opérateur normal.

Dans le troisième chapitre on exposé quelques théorèmes fondamentaux qui sont en relation avec la théorie des opérateurs :

- Prolongement par continuité d'un opérateur à domaine dense.
- Théorème de l'application ouverte.
- Théorème du graphe fermé.
- Théorème de Banach-Steinhaus.

Chapitre 1

Espaces de Banach et espaces de Hilbert

1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.1 [8] Soit X un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur X une application

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \|x\|\end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Pour $x \in X$: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$. (séparation)
- (ii) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{k} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. (homogénéité)
- (iii) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (inégalité triangulaire)

Exemple 1.1.1 Si $p \in [1; \infty[$, on définit une norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{K}^n$ en posant

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.2 [3] Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel X sont équivalentes s'il existe des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \forall x \in X.$$

Définition 1.1.3 [8] Soit X un espace vectoriel, on dit que X est un espace vectoriel normé si on muni par une norme quelconque, noté $(X, \|\cdot\|_X)$.

Exemple 1.1.2 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 1.1.1 Pour $p = 2$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ s'appelle la norme euclidienne.

1.1.1 Continuité

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sont deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés et A est une partie non vide de X .

Définition 1.1.4 [8] (continuité en un point a)

Soit a un élément de A , f de A dans Y . On dit que f est continue au point SSI

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$$

i.e, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in A : \|x - a\|_X < \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

Définition 1.1.5 [8] (continuité globale)

Une application f de A dans Y est continue sur A si f est continue en tout point de A .

Exemple 1.1.3 (important) Toute fonction polynômiale de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

1.2 Espaces de Banach

Tous les espaces vectoriels considérés ici ont pour corps de base $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, sauf mention du contraire.

Définition 1.2.1 [3] Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Théorème 1.2.1 [2] *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 1.2.1 [5] *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Exemple 1.2.1 *L'espace $B(X)$ des fonctions bornées sur un ensemble quelconque X est de Banach pour la norme :*

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.3.1 [3] *Un espace de Hilbert $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Banach dans lequel la norme provient d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}$ ou hermitien sur $\mathbb{C}$.*

Théorème 1.3.1 *La norme associée par un produit scalaire, c-à-d*

$$\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

satisfait l'égalité

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Exemple 1.3.1 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ avec $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace de Hilbert (espace euclidien).

$(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ avec $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert (espace hermitien).

Chapitre 2

Les opérateurs linéaires bornés et non-bornés

2.1 L'espace $L(X, Y)$

Soit X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$.

Définition 2.1.1 (*applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre*)

Une application f de X dans Y est dite linéaire si :

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{k}, \begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

On note $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires de X dans Y et $L(X)$ l'ensemble des applications linéaires de X dans X .

Remarque 2.1.1 · Un endomorphisme d'un espace vectoriel X est une application linéaire de X dans X .

- Un isomorphisme de X sur Y est une application linéaire bijective.
- On dit qu'un isomorphisme de X dans lui-même est un automorphisme de X .
- On dit qu'une application linéaire de X dans $\mathbb{k}$ est une forme linéaire.

Proposition 2.1.1 [2] $L(X, Y)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$.

Exemple 2.1.1 Soit $X = C([a, b], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

L'application $f \rightarrow \varphi(f) = \int_a^b f(t) dt$ est une forme linéaire sur l'espace $X = C([a, b], \mathbb{K})$.

2.2 L'espace $\mathcal{L}(X, Y)$

Si $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les applications linéaires continues de X dans Y . Lorsque $X = Y$, on écrit $\mathcal{L}(X)$ au lieu de $\mathcal{L}(X, X)$.

Théorème 2.2.1 [2] Soit f une application linéaire de X dans Y , alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est continue sur X .
2. f est continue en 0.
3. f est bornée sur la boule unité fermée.
4. f est bornée sur la sphère unité fermée.
5. Il existe $C > 0$ tq pour tout $x \in X$, on a

$$\|f(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$$

6. f est lipschitzienne.
7. f est uniformément continue sur X .

Démonstration. $[1 \Rightarrow 2]$ $f \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow f$ est continue sur X .

$\Leftrightarrow f$ est continue en x_0 , $\forall x_0 \in X$.

$\Rightarrow f$ est continue en 0.

$[2 \Rightarrow 3]$ f est continue en 0, donc et par définition on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in X : \|x\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x)\|_Y < \varepsilon. \quad (2.2.1)$$

On choisi un certain $\varepsilon_0 > 0$ pour le quel il existe un certain $\delta_0 > 0$ telque :

$$\forall x \in X : \|x\|_X < \delta_0 \implies \|f(x)\|_Y < \varepsilon_0 .$$

La boule d'unité fermée est l'ensemble des points

$$B_F(0, 1) = \{x : \|x\|_X \leq 1\} .$$

On remarque que pour tous $x \in B_F(0, 1)$, on a :

$$\left\| \frac{\delta_0}{2} x \right\|_X = \frac{\delta_0}{2} \|x\|_X \leq \frac{\delta_0}{2} < \delta_0 (\text{car } \|x\|_X \leq 1) .$$

Donc nous obtenons d'après (2.2.1)

$$\begin{aligned} \left\| f\left(\frac{\delta_0}{2}x\right) \right\|_Y &= \left\| \frac{\delta_0}{2} f(x) \right\|_Y = \frac{\delta_0}{2} \|f(x)\|_Y \leq \varepsilon_0, \quad \forall x \in B_F(0, 1) \\ \implies \forall x \in B_F(0, 1) : \|f(x)\|_Y &\leq \frac{2\varepsilon_0}{\delta_0} \leq C_0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est bornée sur la boule unité fermée.

[3 $\implies$ 4] On sait, en général, que :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est bornée sur } A \\ B \subset A \end{array} \right\} \implies f \text{ est bornée sur } B. \text{ En effet, } \exists C_0 > 0 \text{ telque :}$$

$$\forall x \in A : \|f(x)\|_Y \leq C.$$

Donc

$$\forall x \in B \subset A : \|f(x)\|_Y \leq C_0.$$

f est bornée sur $B_F(0, 1)$.

Mais on a $S(0, 1) \subset B_F(0, 1)$. Donc

f est bornée sur $B_F(0, 1) \implies f$ est bornée sur $S(0, 1)$.

[4 $\implies$ 5] On a f est bornée sur la sphère unité fermée, donc

$$\forall x \in S(0, 1) \text{ (i.e : } \|x\| = 1) : \|f(x)\| \leq C_0.$$

On montre que

$$\forall x \in X \rightarrow \|f(x)\|_Y \leq C_0 \|x\|_X .$$

Dans le cas ou $x = 0$ l'inégalité est clair.

Dans le cas ou $x \neq 0$ on pose $y = \frac{x}{\|x\|_X} \in S(0, 1)$, puisque

$$\|y\|_X = \left\| \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = \left\| \frac{1}{\|x\|_X} x \right\|_X = \frac{1}{\|x\|_X} \|x\|_X = 1$$

et selon 4 on a :

$$\begin{aligned} \left\| f \left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y &= \left\| f \left(\frac{1}{\|x\|_X} x \right) \right\|_Y = \left\| \frac{1}{\|x\|_X} f(x) \right\|_Y \leq C_0 \\ &\implies \frac{1}{\|x\|_X} \|f(x)\|_Y \leq C_0. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in X$ on a :

$$\|f(x)\|_Y \leq C_0 \|x\|_X.$$

[5 $\implies$ 6] D'après l'hypothèse on a :

$$\forall x, y \in X : \|f(x - y)\|_Y \leq C_0 \|x - y\|_X$$

et comme f est linéaire on a donc

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq C_0 \|x - y\|_X.$$

C'est-à-dire que f est lipschitzienne.

[6 $\implies$ 7]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C_0} \text{ telque } \forall x, y \in X : \|x - y\|_X < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon.$$

C'est-à-dire que f est uniformément continue.

[7 $\implies$ 1]

f est borné $\Leftrightarrow \exists M > 0 : \|f(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X.$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_X = 0,$$

on a :

$$\begin{aligned} \|f(x_n - x)\|_Y &= \|f(x_n) - f(x)\|_Y \quad (\text{car } f \in L(X, Y)) \\ &\leq M \|x_n - x\|_X \\ &\implies 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(x_n) - f(x)\|_Y \leq M \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_X = 0. \end{aligned}$$

Donc

$f(x_n) \rightarrow f(x)$ dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Ce qui montre que f est continue sur X donc $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. ■

Proposition 2.2.1 *Si X est un espace vectoriel normé de dimension finie et si Y est un espace vectoriel normé, alors toute application linéaire $f : X \rightarrow Y$ est continue.*

Preuve. Par équivalence des normes, on peut se ramener au cas où $X = (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty)$.

Notons $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{K}^d$. Si $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \in X$, alors

$$\|f(x)\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^d x_i f(e_i) \right\|_Y \leq \sum_{i=1}^d |x_i| \|f(e_i)\|_Y \leq \left(\left\| \sum_{i=1}^d f(e_i) \right\|_Y \right) \times \|\cdot\|_\infty.$$

Par conséquent, le critère de continuité est satisfait avec $C = \sum_{i=1}^d \|f(e_i)\|_Y$. ■

Proposition 2.2.2 [2] *L'application définie de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ de $\mathcal{L}(X, Y)$ dans $\mathbb{R}_+$ par :*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|_Y, \quad \forall f \in \mathcal{L}(X, Y)$$

est une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$, donc $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)})$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration. On va montrer les conditions de la norme : (i), (ii), (iii).

C'est claire que $\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \geq 0$ (car on sait que $\|f(x)\|_Y \geq 0, \forall x \in X$)

On remarque que :

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = 0 \iff \sup_{\|x\| \geq 1} \|f(x)\| = 0 \iff \forall x \in B_F(0, 1) : \|f(x)\|_Y = 0,$$

donc

$$\forall x \in B_F(0, 1) : f(x) = 0 \tag{2.2.2}$$

On démontre maintenant que pour $x \notin B_F(0, 1)$ (c'est à dire $\|x\|_X > 1$). On a aussi $f(x) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} x \notin B_F(0, 1) &\implies \frac{x}{\|x\|} \in B_F(0, 1) \\ \stackrel{2.2.2}{\implies} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) &= 0 \implies \frac{1}{\|x\|} f(x) = 0 \implies f(x) = 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\forall x \in B_F(0, 1) : f(x) = 0 \quad (2.2.3)$$

Donc, d'après (2.2.2) et (2.2.3) on a pour tout $x \in X$, $f(x) = 0$. Ce qui montre que : $f = 0 \iff \|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = 0$, ce qui prouve (i).

On remarque que :

$$\|\lambda f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda f(x)\|_Y = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda| \|f(x)\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|_Y = |\lambda| \|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$$

ce qui prouve (ii).

On remarque que :

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\mathcal{L}(X, Y)} &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(f + g)(x)\|_Y = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x) + g(x)\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|f(x)\|_Y + \|g(x)\|_Y) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|_Y + \sup_{\|x\| \leq 1} \|g(x)\|_Y \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} + \|g\|_{\mathcal{L}(X, Y)}, \end{aligned}$$

ce qui prouve (iii).

Donc, $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)})$ est un espace vectoriel normé. ■

Corollaire 2.2.1 Si $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors :

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in X}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in X}} \|f(y)\|_Y = \inf \{c / \|f(x)\|_Y \leq c \|x\|_X, x \in X\}.$$

$$\forall x \in X \rightarrow \|f(x)\|_Y \leq \|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|x\|_X.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X / \|f(x_\varepsilon)\|_Y > (\|f\| - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|_X.$$

Proposition 2.2.3 [5] Si $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace vectoriel normé et si $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)})$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall p, q \geq N_\varepsilon \implies \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \varepsilon.$$

Donc, par définition de la norme $\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall p, q \geq N_\varepsilon \implies \|f_p(x) - f_q(x)\|_Y < \varepsilon \|x\|_X, \forall x \in X.$$

Donc, pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$ qui est supposé complet.

Donc, elle converge et il existe f telle que :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \forall x \in X.$$

On peut vérifier que l'application f ainsi définie est linéaire de X dans Y . Il reste à montrer que f est continue. Pour cela, montrons que f est bornée. On rappelle que :

$$\left| \|f_p\|_{\mathcal{L}(X, Y)} - \|f_q\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \right| \leq \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}(X, Y)}.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall p, q \geq N_\varepsilon \implies \left| \|f_p\|_{\mathcal{L}(X, Y)} - \|f_q\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \right| < \varepsilon.$$

La suite $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc bornée, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|f_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\|f_n(x)\|_Y \leq \|f_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|x\|_X \leq C \|x\|_X, \forall x \in X.$$

Donc, en passant à la limite sur n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(x)\|_Y = \|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|x\|_X \leq C \|x\|_X, \forall x \in X.$$

Ceci démontre la bornitude de l'application linéaire f et donc $f \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Il reste à montrer que f_n converge vers f dans $\mathcal{L}(X, Y)$.

On sait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall p, q \geq N_\varepsilon \implies \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \varepsilon.$$

Donc, par définition de la norme $\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall p, q \geq N_\varepsilon \implies \|f_p(x) - f_q(x)\|_Y < \varepsilon \|x\|_X, \forall x \in X.$$

Donc en passant à la limite sur q et en tenant compte que pour tout $x \in X$:

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \|f_p(x) - f_q(x)\|_Y = \|f_p(x) - f(x)\|_Y.$$

On en déduit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall p \geq N_\varepsilon \implies \|f_p(x) - f(x)\|_Y < \varepsilon \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Donc, par définition de la norme de f

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall p \geq N_\varepsilon \implies \|f_p - f\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon.$$

Ce qui démontre la convergence de la suite f_n vers f . ■

Proposition 2.2.4 [7] Si X, Y et Z des espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(X, Z)$ et on a :

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|g\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}.$$

Démonstration. Soit x un vecteur de X ; on peut écrire

$$\|(g \circ f)(x)\|_Z = \|g(f(x))\|_Z \leq \|g\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|f(x)\|_Y \leq \|g\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|f\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X,$$

ce qui entraîne l'inégalité voulue. ■

2.3 Théorème du prolongement par continuité

Soit X un e.v.n et Y un espace de Banach.

Théorème 2.3.1 [2] Chaque application f de $(D(f), Y)$, où $\overline{D(f)} = X$, sa prolongation f^* à X , atteindre $\|f^*\| = \|f\|$.

$$\exists f^* \in \mathcal{L}(X, Y) ; f^*(x) = f(x), x \in D(f), \quad \|f^*\| = \|f\|.$$

Démonstration. On a $f \in (D(f), Y)$, signifie que f uniformément continue.

Comme X un espace métrique et Y un espace métrique complet et selon le théorème 2 dans § 2.7 du ([2]) il existe une extension de f uniformément continue sur X .

Donc, il suffit de montrer que f^* est linéaire et $\|f^*\| = \|f\|$. On a comme $\overline{D(f)} = X$,
 van $x_1, x_2, x \in X \implies \exists (x_n^1)_{n \geq 1}, (x_n^2)_{n \geq 1}, (x_n)_{n \geq 1} \subset D(f) ; x_n^1 \rightarrow x_1, x_n^2 \rightarrow x_2, x_n \rightarrow x,$
 $\lambda x_n \rightarrow \lambda x ; (n \rightarrow \infty)$

avis

$$\begin{aligned} f^*(x_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^*(x_n^1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^1) \\ f^*(x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^*(x_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^2) \\ f^*(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^*(\lambda x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\lambda x_n) \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} f^*(x_1 + x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^1 + x_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^1) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^2) = f^*(x_1) + f^*(x_2) \\ f^*(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\lambda x_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda f^*(x) \end{aligned}$$

Donc : $f^* \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Démontrons que : $\|f^*\| = \|f\|$.

On a

$$\|f^*\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} \|f^*(x)\| \geq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in D(f)}} \|f^*(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \|f\|$$

Autrement dit

$$\|f^*\| \geq \|f\| \quad (2.3.1)$$

D'autre part, nous avons

$$\forall x \in D(f) \rightarrow f(x) = f^*(x)$$

nous avons que $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$, donc : $\|f^*(x)\| \leq \|f\| \|x\|$,

et de la définition de $\|f^*\|$, on a le résultat:

$$\|f^*\| \leq \|f\| \quad (2.3.2)$$

(2.3.1) et (2.3.2) donnent : $\|f^*\| = \|f\|$. ■

2.4 Opérateurs linéaires bornés dans un espace Hilbert

Dans toute cette section, H est un espace de Hilbert.

Théorème 2.4.1 *Si T est un opérateur linéaire borné ayant pour domaine $D(T)$ dense dans un espace de Hilbert H , alors il existe un prolongement par continuité de T c'est à dire qu'il existe un opérateur linéaire borné $\widehat{T}$ dont le domaine est H tout entier et tel que*

$$(\forall x \in D(T)) \quad \widehat{T}x = Tx \quad \text{et} \quad \|\widehat{T}\| = \|T\|.$$

Définition 2.4.1 *Un opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert H est dit hermitien ou symétrique si, quels que soient x et y appartenant à H ,*

$$\langle x | Ty \rangle = \langle Tx | y \rangle.$$

2.4.1 Inverse d'un opérateur

Soient H et H' deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H, H')$ un opérateur.

Définition 2.4.2 *On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(H', H)$ tel que*

$$A \circ B = I_{H'}, \quad \text{et} \quad B \circ A = I_H,$$

où I_H (resp. $I_{H'}$) est l'opérateur identité de H (resp. de H'). Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B := A^{-1}$.

Théorème 2.4.2 [4] *Si $\dim H < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- T est inversible .
- T est injectif.
- T est surjectif.
- T admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in \mathcal{L}(H, H)$ tel que $T \circ U = I_H$).
- T admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in \mathcal{L}(H, H)$ tel que $V \circ T = I_H$).

Théorème 2.4.3 [4] Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est tel que $\|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(H, H)$, l'opérateur $I - T$ est inversible et

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n.$$

Remarque 2.4.1 Le résultat précédent est vrai aussi si H est remplacé par un espace de Banach quelconque.

Remarque 2.4.2 Il convient de savoir utiliser le résultat du théorème sous la forme suivante :

Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est tel que $\|I - T\|_{\mathcal{L}(H, H)} < 1$, alors T est inversible et on a $T^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (I - T)^n$.

2.4.2 Adjoint d'un opérateur

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ telle que pour tous $x \in H_1, y \in H_2$, on ait :

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

est appelée adjoint de T .

Théorème 2.4.4 Etant donné un opérateur linéaire borné T sur un espace de Hilbert H , il existe un opérateur linéaire borné T^* et un seul, appelé adjoint de T , tel que, quels que soient x et y appartenant à H on ait :

$$\langle y \mid Tx \rangle = \langle T^*y \mid x \rangle.$$

T et T^* ont même norme.

Théorème 2.4.5 [2] Soit T un opérateur borné de H_1 dans H_2 . Il existe un et un seul opérateur borné T^* de H_2 dans H_1 vérifiant

$$\forall x, y \in H_1 \times H_2, \langle T(x), y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*(y) \rangle_{H_1}.$$

L'opérateur T^* est appelé opérateur adjoint de T , et l'on a $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$

Preuve. À $y \in H_2$ fixé, considérons la forme linéaire $\mathcal{L}$ sur H_1 définie par $\mathcal{L}(x) = \langle T(x), y \rangle$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans H_2 ,

$$|\mathcal{L}(x)| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \|y\|_{H_2} \|x\|_{H_1}$$

Donc $\mathcal{L}$ est continue. Le théorème de représentation de Riez-Frécht assure donc l'existence d'un unique élément $T^*(y)$ de H_1 tel que :

$$\forall x \in H, \langle T(x), y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*(y) \rangle_{H_1}$$

De plus, ce même théorème donne

$$\|T^*(y)\|_{H_1} = \|\mathcal{L}\|_{H'_1} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \|y\|_{H_2}$$

Vérifions la linéarité de l'application $y \rightarrow T^*(y)$.

Pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(y_1, y_2) \in H_2^2$, on a par définition de T^* , $\forall x \in H_1$,

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle_{H_1} &= \langle T(x), \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle_{H_2} \\ &= \overline{\lambda_1} \langle T(x), y_1 \rangle_{H_2} + \overline{\lambda_2} \langle T(x), y_2 \rangle_{H_2} \\ &= \overline{\lambda_1} \langle x, T^*(y_1) \rangle_{H_1} + \overline{\lambda_2} \langle x, T^*(y_2) \rangle_{H_1} \\ &= \langle x, \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2) \rangle_{H_1} \end{aligned}$$

Donc

$$T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2)$$

Reste à montrer que T et T^* ont la même norme. On a déjà vu que :

$$\forall y \in H_2, \|T^*(y)\|_{H_1} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \|y\|_{H_2}$$

Donc

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}.$$

Mais en utilisant le fait que :

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2, \langle T(x), y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*(y) \rangle_{H_1}$$

pour tout $y \in H_2$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|T\|_{H_2}^2 = |\langle T(x), T(x) \rangle_{H_2}| \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \|x\|_{H_1} \|T(x)\|_{H_2}$$

ce qui assure visiblement que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}. \quad \blacksquare$$

Proposition 2.4.1 · Pour tout $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, on a :

$$(T^*)^* = T \quad \text{et} \quad \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}.$$

· Si $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $S \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, alors :

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

· Pour tout $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :

$$(\lambda T_1 + \mu T_2)^* = \bar{\lambda} T_1^* + \bar{\mu} T_2^*.$$

· Si l'existe T^{-1} alors $(T^*)^{-1}$, est vérifié $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Exemple 2.4.1 Soit $H = \mathcal{L}^2([a, b])$ ($a < b$) l'espace des classes de fonctions $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de carré sommable avec le produit scalaire $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue fixée. L'application T qui à la fonction $x \in H$ fait correspondre la fonction Tx définie sur $[a, b]$ par

$$(Tx)(t) = f(t) x(t)$$

est un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H)$ appelé opérateur de multiplication par f . L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H, H)$ est alors l'opérateur de multiplication par la fonction $\bar{f}$.

2.4.3 Opérateur auto-adjoint

Définition 2.4.3 Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que T est auto-adjoint si : $T^* = T$, ou bien

$$\forall x, y \in H : \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

et on dit aussi que T est symétrique ou que T est hermitien.

Définition 2.4.4 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ alors : T est un isométrie $\iff \forall x \in H, \|Tx\| = \|x\|$ ou bien :

$$\forall x, y \in H : \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Définition 2.4.5 Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit :

- 1) T normal si $T^*T = TT^*$.
- 2) T auto-adjoint si $T = T^*$.
- 3) T unitaire si $TT^* = T^*T = I$.
- 4) T une projection si $T^2 = T$.

Remarque 2.4.3 Il est clair que les opérateurs auto-adjoints et unitaires sont normaux.

Théorème 2.4.6 [1] Si T auto-adjoint alors

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Démonstration. On pose $\alpha_T = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$.

Selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\|$$

donc

$$\alpha_T \leq \|T\| \tag{2.4.1}$$

pour tout x , ($\|x\| \leq 1$) on a

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \alpha_T$$

cas $x \neq 0$ on a

$$\left| \left\langle T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \alpha_T,$$

c-à-d

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \alpha_T \|x\|^2 \tag{2.4.2}$$

d'autre part pour tout $x, y \in H$ on a

$$\begin{aligned}\langle T(x+y), x+y \rangle &= \langle Tx, x \rangle + \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle + \langle Ty, y \rangle \\ &= \langle Tx, x \rangle + \langle Tx, y \rangle + \langle y, Tx \rangle + \langle Ty, y \rangle \\ &= \langle Tx, x \rangle + \langle Tx, y \rangle + \overline{\langle Tx, y \rangle} + \langle Ty, y \rangle \\ &= \langle Tx, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, y \rangle\end{aligned}$$

il existe même méthode

$$\langle T(x-y), x-y \rangle = \langle Tx, x \rangle - 2 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, y \rangle$$

ci donner

$$4 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle$$

Selon (2.4.2) et en utilisant la loi du parallélogramme, on a

$$\begin{aligned}4 |\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle| &= |\langle T(x+y), x+y \rangle| + |\langle T(x-y), x-y \rangle| \\ &\leq \alpha_T (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2\alpha_T (\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

pour tout $x, y \in H$, on a

$$|\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle| = \alpha_{\frac{T}{2}} (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

on prend x d'où être $Tx \neq 0$ et on pose $y = \frac{\|x\|}{\|Tx\|} Tx$

d'où chois être $\|x\| = \|y\|$ et

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left\langle Tx, \frac{\|x\|}{\|Tx\|} Tx \right\rangle &= \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \operatorname{Re} \langle Tx, Tx \rangle = \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \langle Tx, Tx \rangle \\ &= \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \|Tx\|^2 \leq \alpha_T \|x\|^2\end{aligned}$$

c-à-d

$$\|Tx\| \leq \alpha_T \|x\|^2$$

on induit

$$\|T\| \leq \alpha_T \tag{2.4.3}$$

d'après (2.4.1) et (2.4.3) il existe

$$\|T\| = \alpha_T = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|. \blacksquare$$

Proposition 2.4.2 · Si T, S autos-adjoints et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors l'opérateur $\alpha T + \beta S$ est aussi

- Si T, S autos-adjoints et $ST = TS$, alors TS aussi
- Si T auto-adjoint alors le nombre $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$
- Si T auto-adjoint et pour tout $x \in H$, $\langle Tx, x \rangle = 0$ alors $T = 0$
- Si T auto-adjoint, alors

$$\|T\| = \max(|M_T|, |m_T|)$$

Selon

$$M_T = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| \text{ et } m_T = \inf_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Exemple 2.4.2 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $T \circ T^* = T^* \circ T$ sont des opérateur auto-adjoints.

En effet $(T \circ T^*)^* = (T^*)^* \circ T^* = T \circ T^*$ et $(T^* \circ T)^* = T^* \circ (T^*)^* = T^* \circ T$.

2.4.4 Opérateur normal

Définition 2.4.6 [6] On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal si T commute avec son adjoint,

$$T^*T = TT^*.$$

Théorème 2.4.7 [6] Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors

$$\|T \circ T^*\| = \|T^* \circ T\| = \|T\|^2.$$

Théorème 2.4.8 [6] Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal si et seulement si

$$\|Tx\| = \|T^*x\|, \text{ pour } x \in H.$$

Démonstration. Pour tout $x \in H$, nous avons

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle (T^* \circ T)x, x \rangle$$

et

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle (T \circ T^*)x, x \rangle.$$

Parce que $T \circ T^*, T^* \circ T \in A(H)$ (vois 7.3.4 [6]), nous avons $\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2$ si seulement si $T \circ T^* = T^* \circ T$. ■

Théorème 2.4.9 [6] *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, l'opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal si et seulement s'il existe deux opérateurs $T_1, T_2 \in A(H)$ tels que :*

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 \text{ et } T = T_1 + iT_2, T^* = T_1 - iT_2.$$

Démonstration. Si T_1 et $T_2 \in A(H)$ tels que $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, alors

$$\begin{aligned} T \circ T^* &= (T_1 + iT_2) \circ (T_1 - iT_2) \\ &= T_1^2 + T_2^2 = (T_1 - iT_2) \circ (T_1 + iT_2) \\ &= T^* \circ T. \end{aligned}$$

Si T est normal, alors $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ et $T_2 = \frac{1}{2}(T - T^*)$ satisfait à l'énoncé du théorème.

■

Théorème 2.4.10 [6] *L'ensemble des opérateurs normaux est un sous-espace linéaire fermé de $\mathcal{L}(H)$.*

Démonstration. Si T_1 et T_2 sont des opérateurs normaux, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, l'opérateur $\alpha T_1 + \beta T_2$ est normal.

Soit $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'opérateurs normaux telle que $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

Alors pour tout $x \in H$

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n^* x\| = \|T^* x\|. \quad \blacksquare$$

Théorème 2.4.11 [6] *Si T est un opérateur normal, alors $\|T\|^2 = \|T^2\|$.*

Démonstration. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, nous avons $\|T\|^2 = \|T^* \circ T\|$ (vois 7.3.13 [6]). Soit T normal. D'après théorème 2.4.8, nous obtenons pour tout $x \in H$,

$$\|T^2 x\| = \|T(Tx)\| = \|T^*(Tx)\| = \|(T^* \circ T)x\|,$$

ce qui montre que :

$$\|T^2\| = \|T^* \circ T\| = \|T\|^2. \quad \blacksquare$$

2.4.5 Opérateur positif

Définition 2.4.7 On dit qu'un opérateur T sur un Hilbert H est positif s'il vérifie $(x, Tx) \geq 0$ pour tout $x \in H$. On écrit $T \geq S$ si $T - S$ est positif.

En utilisant l'identité de polarisation on voit qu'un opérateur positif est nécessairement auto-adjoint.

Lemme 2.4.1 La série entière en 0 de $\sqrt{1-z}$ est absolument convergente sur le disque $|z| \leq 1$.

Théorème 2.4.12 Tout opérateur positif T admet un unique opérateur positif S tel que $T = S^2$. De plus, S commute avec tout opérateur qui commute avec T . On appelle S la racine carrée de T et on note par $\sqrt{T}$.

Preuve. *Unicité* : Soit $S_1, S_2 \geq 0$ tel que $S_1^2 = S_2^2 = T$ alors pour $i = 1, 2$

$$S_i T = S_i^3 = T S_i.$$

Un calcul direct donne

$$0 = (S_1^2 - S_2^2)(S_1 - S_2) = \underbrace{(S_1 - S_2) S_1 (S_1 - S_2)}_{(1) \geq 0} + \underbrace{(S_1 - S_2) S_2 (S_1 - S_2)}_{(2) \geq 0}.$$

On en déduit alors que $(1) - (2) = (S_1 - S_2)^3 = 0$. En particulier, on a

$$0 = \|(S_1 - S_2)^4\| = \|(S_1 - S_2)^2\|^2 = \|S_1 - S_2\|^4.$$

Existence : Il suffit de le montrer pour $T \geq 0$, $\|T\| = 1$. Dans ce cas, on a $\mathbf{1} - T \geq 0$ et

$$\|\mathbf{1} - T\| = \sup_{\|x\|=1} (x, (\mathbf{1} - T)x) \leq 1.$$

La série $S = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\mathbf{1} - T)^k$ est donc absolument convergente grâce au Lemme 2.4.1 avec

$\sqrt{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ et $c_k < 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On vérifie que

$$S = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\mathbf{1} - T)^k \geq \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1} \geq 0.$$

Enfin, on a

$$S^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+k'=n} c_k c_{k'} \right) (1-A)^n$$

Comme $\sum_{k+k'=n} c_k c_{k'} = 0$ pour tout $n \geq 2$, on en conclut que $S^2 = T$. ■

Exemple 2.4.3 · Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T^*T \in \mathcal{L}(X)$ est hermitien car $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$ d'après la proposition.

De plus $T^*T \geq 0$ car, pour tout $x \in X$, $\langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. En particulier $T^2 \geq 0$ dès que $T = T^*$.

2.4.6 Opérateur compact

Dans toute cette section, H_1 et H_2 sont deux espace de Hilbert, et l'on note $\overline{B}_{H_1}$ et $\overline{B}_{H_2}$ leurs boules unitées.

Définition 2.4.8 Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.

On dit qu'une application linéaire T de H_1 dans H_2 est compacte si l'image de la boule unité de H_1 par T est relativement compacte dans H_2 .

Notation 2.4.1 On note $K(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compact de H_1 dans H_2 .

Dans le cas $H_1 = H_2 = H$, on adopte la notation condensée $K(H)$.

Retenons la caractérisation suivante, forte utile, des applications linéaires compactes (appelées aussi opérateurs compacts).

Proposition 2.4.3 Un opérateur linéaire T de H_1 dans H_2 est compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H_1 , la suite $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence dans H_2 .

Proposition 2.4.4 L'ensemble $K(H_1, H_2)$ est une Sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$.

Proposition 2.4.5 La composée d'un opérateur compact et d'une application linéaire et continue (dans un sens ou dans l'autre) est encore un opérateur compact.

Définition 2.4.9 Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est dit rang fini si $\text{Im } T$ est de dimension finie ; son rang est la dimension de $\text{Im } T$.

Proposition 2.4.6 Un opérateur de rang fini est compact.

Théorème 2.4.13 Une application linéaire entre les espaces de Hilbert est compacte si et seulement si elle est la limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Exemple 2.4.4 Soient x, y et z éléments fixé dans espace de Hilbert H .

On définit

$$Tx = \langle x, y \rangle .z$$

Soit $\{x_n\}$ une suite bornée, c-à-d.

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \|x_n\| \leq M$$

d'autre part, on a

$$\|\langle x_n, y \rangle\| \leq \|x_n\| \|y\| \leq M \|y\|$$

donc on peut extraire une sous suite $\langle x_{p_n}, y \rangle$ de $\langle x_n, y \rangle$ convergente

Alors

$$Tx_{p_n} = \langle x_{p_n}, y \rangle z \rightarrow \alpha z \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

D'où T est un opérateur compact.

2.5 Décomposition du spectre d'un opérateur borné

Proposition 2.5.1 [7] Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$; les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) l'application T est injective d'image fermée.
- (ii) il existe un nombre $c > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on ait $\|T(x)\|_Y \geq c \|x\|_X$.
- (iii) il n'existe pas de suite (x_n) dans X telle que $\|x_n\|_X = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T(x_n)\|_Y = 0$.

Démonstration. Si (i) est satisfaite, T détermine une application continue bijective T_1 de X sur l'espace de Banach $\text{im}(T)$. Par le théorème des isomorphismes [7], T_1 est un isomorphisme : obtient (ii) avec $c = \|T_1^{-1}\|^{-1}$. Il est évident que (ii) implique (iii); montrons que (iii) $\implies$ (ii) : si (ii) n'est pas satisfaite, il existe pour tout entier $n \geq 1$ un

vecteur $y_n \in X$ tel que $n^{-1} \|y_n\| > \|T(y_n)\|$; si on pose $x_n = \|y_n\|^{-1} y_n$, on a $\|x_n\| = 1$ et $\|T(x_n)\| < \frac{1}{n}$, donc (iii) n'est pas satisfaite.

Si (ii) est satisfaite, il est clair que T est injective; si (y_n) est une suite dans $\text{im}(T)$ qui converge vers $y \in Y$, écrivons $y_n = T(x_n)$ avec $x_n \in X$; on a $\|x_n - x_m\| \leq c^{-1} \|y_n - y_m\|$, donc la suite (x_n) est de Cauchy, donc convergente vers $x \in X$ puisque X est complet; alors la suite $y_n = T(x_n)$ converge vers $T(x)$, donc $y = T(x)$ est dans $\text{im}(T)$, qui est donc fermée dans l'espace Y .

Si un opérateur borné T de X dans Y est inversible, il possède les deux propriétés suivantes :

A. Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geq c \|x\|$ pour tout $x \in X$.

B. On a $\overline{T(X)} = Y$.

La deuxième propriété est une forme faible de surjectivité : l'image de T est dense dans Y ; c'est évidemment vrai quand T est inversible, puisqu'alors T est surjectif. De plus, lorsque T est inversible, la propriété A est vraie avec $c = \|T^{-1}\|^{-1} > 0$: en effet, on a pour tout $x \in X$, lorsque T^{-1} existe dans $\mathcal{L}(Y, X)$ $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\| \|T(x)\|$. ■

Lemme 2.5.1 [7] Soient X et Y deux espaces de Banach, un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est inversible si et seulement s'il vérifie A et B.

Proposition 2.5.2 [7] Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$; l'opérateur transposé ${}^tT \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ est inversible si et seulement T est inversible.

Corollaire 2.5.1 [7] Soient X un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$; on a

$$Sp({}^tT) = Sp(T).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que ${}^t(T - \lambda Id_X) = {}^tT - \lambda Id_{X^*}$ pour tout nombre complexe λ .

Dans le cas hilbertien, on préfère le plus souvent exprimer le résultat précédent en utilisant l'adjoint $T^* \in \mathcal{L}(H)$ plutôt que la transposée ${}^tT \in \mathcal{L}(H^*)$. Le seul petit piège à éviter est que $(T - \lambda Id_H)^* = T^* - \bar{\lambda} Id_H$ (il y a une barre de conjugaison !). ■

Définition 2.5.1 [7] Soient X un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$; on appelle spectre ponctuel de T l'ensemble $Sp_p(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda Id_X$ ne soit pas injectif (c'est l'ensemble des valeurs propres de T).

On appelle spectre résiduel de T l'ensemble $Sp_r(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda Id_X$ soit injectif, mais son image ne soit pas dense.

On appelle spectre continu de T l'ensemble $Sp_c(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda Id_X$ soit injectif, à image dense mais pas fermée.

On voit que l'on a $\lambda \in Sp_c(T)$ si et seulement si : $\lambda \in Sp(T)$ et $T - \lambda Id_X$ est injectif à image dense ; en effet, l'image de $T - \lambda Id_X$ n'est alors pas fermée : si elle était fermée, elle serait égale à X , l'opérateur $T - \lambda Id_X$ serait un isomorphisme et λ ne serait pas dans le spectre de T .

Proposition 2.5.3 [7] Soient X un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$; on a

$$Sp_r(T) = Sp_p({}^tT) \setminus Sp_p(T) \text{ et } Sp_c({}^tT) \subset Sp_c(T).$$

Si X est réflexif, on a l'égalité $Sp_c({}^tT) = Sp_c(T)$.

Proposition 2.5.4 [7] Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal; pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, $T_\lambda = T - \lambda Id_H$ est normal, si λ est dans le spectre, ou bien T_λ n'est pas injectif et $\lambda \in Sp_p(T)$, ou bien T est injectif, donc à image dense et $\lambda \in Sp_c(T)$. ■

2.6 Opérateur linéaire non borné

Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur dans H , c'est-à-dire, une application linéaire définie sur un espace vectoriel $D(T) \subset H$ à valeurs dans H .

Dans la suite, on suppose que $D(T)$ est dense dans H . (Si $D(T)$ est dense dans H on dit que T est densément défini).

Exemple 2.6.1 Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $D(T) = \{u \in H : xu \in H\}$. On définit T par

$$(Tu)(x) = xu(x) \quad \text{pour } u \in D(T).$$

Alors T est un opérateur linéaire non borné avec un domaine de définition dense.

Le graphe d'un opérateur $T : D(T) \rightarrow H$ est un sous-espace vectoriel dans $H \times H$ défini par

$$\Gamma(T) = \{[u, f] \in H \times H : u \in D(T), f = Tu\}.$$

L'opérateur T est un fermé si $\Gamma(T)$ est fermé dans l'espace $H \times H$ muni du produit scalaire

$$([u_1, u_2], [v_1, v_2]) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$$

et de la norme correspondante. Si T_1 est un autre opérateur dans H tel que $\Gamma(T) \subset \Gamma(T_1)$, alors T_1 est appelé extension de T . Dans ce cas, on écrit $T \subset T_1$.

Il est claire que T_1 est une extension de T si et seulement si $D(T) \subset D(T_1)$ et $Tu = T_1u$ pour $u \in D(T)$. L'opérateur T est dit fermable s'il existe une extension fermée de T .

Proposition 2.6.1 Soit T un opérateur fermable. Alors il existe une extension $\bar{T}$ de T telle que $\bar{T} \subset T_1$ pour toute autre extension fermée T_1 . De plus, $\Gamma(\bar{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.

Définition 2.6.1 Soit T un opérateur fermé dans H . L'ensemble résolvant de T , noté $\rho(T)$, est constitué de tous les nombres $\lambda \in \rho(T)$, l'opérateur $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ est appelé la résolvante de T au point λ .

Chapitre 3

Théorèmes fondamentaux et applications

3.1 Théorèmes fondamentaux sur les applications linéaires

3.1.1 Théorème du graphe fermé

Soient X, Y des espaces de Banach. Une application linéaire f de X dans Y est continue si et seulement si son graphe

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) | x \in E\}$$

est fermé dans $X \times Y$.

Démonstration. Soit f une application linéaire de X dans Y continue. Alors naturellement, son graphe est fermé. En effet si $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\Gamma(f)$ qui converge dans $X \times Y$ vers (x, y) , alors par continuité de f , on a $y = f(x)$ et $(x, y) \in \Gamma(f)$.

Réciproquement, supposons que $\Gamma(f)$ est fermé. Alors, comme X, Y sont des Banach, $X \times Y$ est aussi un Banach et $\Gamma(f)$ également en tant que sous-espace fermé de $X \times Y$. Notant $p : \Gamma(f) \rightarrow X$ et $q : \Gamma(f) \rightarrow Y$, les restrictions des applications projections $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ à $\Gamma(f)$.

Alors, on a par construction même :

$$p \text{ est bijective et } f = q \circ p^{-1}$$

Comme les projections sur X et Y sont continues (par définition même de la topologie produit sur $X \times Y$), les restrictions à $\Gamma(f)$ que sont p et q le sont aussi et par le théorème d'homéomorphisme de Banach précédent, p^{-1} l'est aussi. Par composition, on en conclut donc $f = q \circ p^{-1}$ est continue. ■

3.1.2 Théorème de l'application ouverte

Théorème 3.1.1 [2] *Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjective. Alors, T est ouverte.*

Pour simplifier la démonstration du théorème, commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 [2] *T est ouverte si et seulement si l'image par T de tout voisinage ouvert de 0 est un voisinage ouvert de 0.*

Démonstration. Supposons que T est ouverte. Si V est un voisinage ouvert de 0, alors $T(V)$ est un ouvert contenant $T(0) = 0$, donc un voisinage ouvert de 0.

Inversement, soit Ω un ouvert de X et montrons que $T(\Omega)$ est un ouvert de Y . Pour ce faire, il suffit de prouver que $T(\Omega)$ est voisinage de chacun de ces points. Soit $x \in \Omega$, puisque Ω est ouvert :

$$\exists r > 0, B(x, r) \subset \Omega \Rightarrow B(0, r) \subset \Omega - x = \{y - x \mid y \in \Omega\}.$$

En effet, $\|z\| < r \Rightarrow \|(z + x) - x\| < r$ et $z + x \in B(x, r) \subset \Omega$, ainsi $z + x = y \in \Omega$ et donc $z = y - x \in \Omega - x$.

Alors $\Omega - x$ est un voisinage de 0 et $T(\Omega - x) = T(\Omega) - T(x)$ (par linéarité de T) est un voisinage ouvert de 0 (par hypothèse).

Ainsi, $T(\Omega) = T(\Omega - x) + T(x)$ est un voisinage ouvert de $T(x)$, ce qui finit de montrer que $T(\Omega)$ est ouvert dans Y . ■

Passons à la démonstration du théorème :

Méthode 1 : Soit U un voisinage ouvert de 0, il s'agit de montrer que $T(U)$ est encore un voisinage ouvert de 0. Or, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset U$ et $T(B(0, r)) \subset T(U)$, il suffit alors de montrer que $T(B(0, r))$ est un voisinage ouvert de 0.

Etape 1 : Montrons que $\overline{T(B(0, r))}$ est un voisinage de 0. Comme $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(0, nr)$, par surjectivité de T on a :

$$Y = T(X) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} T(B(0, nr)) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{T(B(0, nr))}$$

Ainsi, notant $Y_n = \overline{T(B(0, nr))}$, on a $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n$ et la suite des $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant une suite de fermés, par le théorème de Baire, il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overset{\circ}{Y}_n \neq \emptyset$ et Y_n étant d'intérieur non vide, il existe $x \in Y_n$ et $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho) \subset Y_n$.

Objectif 1 : Montrons que $B(x, \rho) - x = B(0, \rho) \subset Y_{2n} = \overline{T(B(0, 2nr))}$.

Soit $y \in B(x, \rho) \subset Y_n$, par définition de Y_n , il existe une suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $B(0, nr)$ telle que $\lim_{p \rightarrow +\infty} T(y_p) = y$.

De même, $x \in B(x, \rho) \subset Y_n$, alors il existe $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $B(0, nr)$ telle que $\lim_{p \rightarrow +\infty} T(x_p) = x$.

Par linéarité et continuité de T :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} T(y_p - x_p) = y - x \text{ où } \|y_p - x_p\| \leq \|y_p\| + \|x_p\| \leq 2nr.$$

et donc pour tout $y \in B(x, \rho)$, $y - x \in Y_{2n}$. On en déduit alors

$$B(x, \rho) - x = B(0, \rho) \subset Y_{2n}.$$

Objectif 2 : Montrons que $B(0, \frac{\rho}{2n}) \subset \overline{T(B(0, r))} = Y_1$.

Par la propriété d'homogénéité de la norme $\|\cdot\|$, on a d'abord $B(0, \frac{\rho}{2n}) = \frac{1}{2n} B(0, \rho)$, puis d'après ce qui précède $\frac{1}{2n} B(0, \rho) \subset \frac{1}{2n} Y_{2n}$.

De plus, on a aussi $\frac{1}{2n} Y_{2n} = \overline{T(B(0, r))}$. En effet, si $x \in \frac{1}{2n} Y_{2n}$, alors :

$$\exists (y_p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ dans } B(0, 2nr), x = \frac{1}{2n} \lim_{p \rightarrow +\infty} T(y_p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} T\left(\frac{1}{2n} y_p\right)$$

avec $\frac{1}{2n} y_p \in B(0, r)$ et $x \in \overline{T(B(0, r))}$. Réciproquement, si $x \in \overline{T(B(0, r))}$, alors $x = \lim_{p \rightarrow +\infty} T(x_p)$ où $x_p \in B(0, r)$ et $x = \frac{1}{2n} \lim_{p \rightarrow +\infty} T(2nx_p)$ où $2nx_p \in B(0, 2nr) \Rightarrow x \in \frac{1}{2n} Y_{2n}$.

Etape 2 : Montrons que $T(B(0, r))$ est un voisinage de 0.

Notant $B = B(0, 1)$ la boule unité ouverte de X et $\lambda = \frac{\rho}{2n}$, on a :

$$B(0, \lambda) \subset \overline{T(B(0, r))} \Rightarrow B \subset \overline{T\left(B\left(0, \frac{r}{\lambda}\right)\right)}$$

Objectif 3 : Soit $z \in B$. Construisons $(x_k)_{k \geq 1}$ tq $x_k \in B(0, \frac{r}{2^{k-1}\lambda})$ et $\|z - T(x_1 + \dots + x_k)\| < \frac{1}{2^k}$.

Montrer alors que $x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k < \infty$ et que $x \in B_F(0, \frac{2r}{\lambda}) \subset B(0, \frac{3r}{\lambda})$ vérifie $z = T(x)$.

Soit $z \in B \subset \overline{T(B(0, \frac{r}{\lambda}))}$. En particulier $B(z, \frac{1}{2}) \cap T(B(0, \frac{r}{\lambda})) \neq \emptyset$ et il existe $x_1 \in B(0, \frac{r}{\lambda})$ tel que

$$\|z - T(x_1)\| < \frac{1}{2}.$$

De même, $z - T(x_1) \in B(0, \frac{1}{2}) \subset \overline{T(B(0, \frac{r}{2\lambda}))}$ et $B(z - T(x_1), \frac{1}{4}) \cap T(B(0, \frac{r}{2\lambda})) \neq \emptyset$. D'où il existe $x_2 \in B(0, \frac{r}{2\lambda})$ tel que :

$$\|(z - T(x_1)) - T(x_2)\| = \|z - T(x_1 + x_2)\| < \frac{1}{4}.$$

Ainsi, on construit de proche en proche, une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$x_k \in B(0, \frac{r}{2^{k-1}\lambda}) \text{ et } \|z - T(x_1 + \dots + x_k)\| < \frac{1}{2^k}.$$

Alors $\|x_k\| < \frac{r}{2^{k-1}\lambda}$ et $\sum_{k \geq 1} (\frac{1}{2})^{k-1}$ étant convergente, on en déduit que $\sum_{k \geq 1} \|x_k\|$ l'est aussi.

Dans un espace de Banach, l'absolue convergence impliquant la convergence, $\sum_{k \geq 1} x_k$ con-

verge et on note $x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, sa limite. De plus :

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| \leq \frac{r}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{2r}{\lambda} \Rightarrow x \in B_F\left(0, \frac{2r}{\lambda}\right) \subset B\left(0, \frac{3r}{\lambda}\right)$$

Alors, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|z - T(x_1 + \dots + x_p)\| = 0$ et par continuité de T et de $\|\cdot\|$, il vient :

$$\|z - T(x)\| = 0 \text{ et } z = T(x) \in B\left(0, \frac{3r}{\lambda}\right).$$

Conclusion 3.1.1

$$B \subset T\left(B\left(0, \frac{3r}{\lambda}\right)\right) \Rightarrow B\left(0, \frac{\lambda}{3}\right) = \frac{\lambda}{3}B(0, 1) \subset T(B(0, r)).$$

et $T(B(0, r))$ est un voisinage de 0, car en contient un, ce qui achève la démonstration du théorème.

3.1.3 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 3.1.2 Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace vectoriel normé. Soit de plus, A une partie non vide de $\mathcal{L}_c(X, Y)$. Alors :

1. Ou bien $(\|f\|_{\mathcal{L}})_{f \in A}$ est borné.
2. Ou bien il existe $x \in X$ tel que

$$\sup_{f \in A} \|f(x)\|_Y = +\infty.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $O_k = \left\{ x \in X \mid \sup_{f \in A} \|f(x)\|_Y > k \right\}$.

Afin d'appliquer le théorème de Baire, montrons que O_k est un ouvert de X . Pour $g \in A$, définissons $V_g^k = \{x \in X \mid \|g(x)\|_Y > k\}$. Il est clair que $\bigcup_{g \in A} V_g^k \subset O_k$.

De plus, si $x \in O_k$, il existe $g \in A$ tel que $\|g(x)\|_Y > k$, car sinon, pour tout $f \in A$, on aurait $\|f(x)\|_Y \leq k$ et donc

$$\sup_{f \in A} \|f(x)\|_Y \leq k.$$

Ainsi $O_k \subset \bigcup_{g \in A} V_g^k$, et finalement,

$$O_k = \bigcup_{g \in A} V_g^k \tag{3.1.1}$$

Pour $g \in A$, posons $\varphi_g : \begin{matrix} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|g(x)\|_Y \end{matrix}$. L'application g et l'application $y \mapsto \|y\|_Y$ étant continues, il en est donc de même de φ_g .

Ainsi, comme $V_g^k = \varphi_g^{-1}(]k, +\infty[)$, V_g^k est un ouvert de X .

Finalement, l'égalité (3.1.1) prouve que O_k est un ouvert de X . ■

1er cas : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ouvert O_k est dense dans X .

L'espace X étant complet, le théorème de Baire prouve alors que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} O_k$ est dense dans

X . En particulier, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} O_k \neq \emptyset$.

Soit donc $x_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} O_k$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sup_{f \in A} \|f(x_0)\|_Y > k$. A la limite sur k , il vient ainsi que $\sup_{f \in A} \|f(x_0)\|_Y = +\infty$.

·**2^{ème} cas** : Il existe un entier k_0 tel que O_{k_0} ne soit pas dense dans X . (O_{k_0} peut même être vide).

Il existe donc $x_1 \in X$ et $r_1 > 0$ tels que $B(x_1, r_1) \cap O_{k_0} = \emptyset$, où

$$B(x_1, r_1) = \{x \in E / \|x - x_1\| < r_1\}$$

Ainsi,

$$\forall y \in B(x_1, r_1), \forall f \in A, \|f(x)\|_Y \leq k \quad (3.1.2)$$

Soit alors $x \in X$ tel que $\|x\|_X = 1$. Soit de plus $f \in A$.

Comme $\frac{r_1}{2}x + x_1 \in B(x_1, r_1)$, d'après (3.1.2), on a $\|f(\frac{r_1}{2}x + x_1)\|_Y \leq k_0$.

Mais la linéarité de f donne

$$f(x) = \frac{2}{r_1}f\left(\frac{r_1}{2}x + x_1\right) - \frac{2}{r_1}f(x_1).$$

De plus, $x_1 \in B(x_1, r_1)$, ainsi $\|f(x_1)\| \leq k_0$.

Finalement, $\|f(x)\|_Y \leq \frac{2}{r_1}k_0 + \frac{2}{r_1}k_0 = \frac{4k_0}{r_1} = M$ et donc $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq M$. Bref, pour tout $f \in A$, $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq M$.

Finalement, $(\|f\|_{\mathcal{L}})_{f \in A}$ est borné.

Application 1 : Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace vectoriel normé.

Soit de plus (f_n) une suite de $\mathcal{L}_c(X, Y)$ convergeant simplement vers $f : X \rightarrow Y$. Alors $f \in \mathcal{L}_c(X, Y)$.

En effet, l'application f , limite simple d'applications linéaires, est elle aussi linéaire.

La seule difficulté réside dans la continuité de f .

· Soit $A = \{f_n / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}_c(X, Y)$. Soit de plus $x \in X$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_Y = 0$, la suite $(\|f_n(x)\|_Y)$ est donc bornée et ainsi, $\sup_{g \in A} \|g(x)\|_Y < +\infty$.

D'après le théorème précédent, $(\|g\|_{\mathcal{L}})_{g \in A}$ est borné : Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout entier n , $\|f_n\|_{\mathcal{L}} \leq M$.

Finalement, pour tout $x \in X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$. A la limite sur n , il vient, pour tout x de X ,

$$\|f(x)\|_Y \leq M \|x\|_X.$$

Ainsi, f est continue et $f \in \mathcal{L}_c(X, Y)$.

Application 2 : Il existe des fonctions continues différentes de la somme de leur série de Fourier.

· Soit X l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π -périodiques. Munissons X de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\forall f \in X, \|f\|_\infty = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, posons $c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt$.

$$X \rightarrow \mathbb{C}$$

· Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $\varphi_n : f \mapsto \sum_{p=-n}^n c_p(f)$.

Pour $f \in X$, $\varphi_n(f)$ représente donc la somme partielle de la série de Fourier associée à f , prise au point 0. Il est clair que $\varphi_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$. Par ailleurs, pour $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, on a

$$\sum_{p=-n}^n e^{-ipt} = e^{int} \frac{1 - e^{-i(2n+1)t}}{1 - e^{-it}} = e^{int} \frac{e^{-i(\frac{2n+1}{2}t)} \sin(\frac{(2n+1)}{2}t)}{e^{-i\frac{t}{2}} \sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin(\frac{(2n+1)}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

Définissons alors $h_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(\frac{(2n+1)}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \neq 0 \\ 2n+1 & \text{sinon} \end{cases}$. Notons que h_n est continue. Pour

$f \in X$, on a donc $\varphi_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_n(t) f(t) dt$, soit

$$|\varphi_n(f)| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h_n(t)| dt \right) \|f\|_\infty$$

Ainsi, φ_n est continue et $\|\varphi_n\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h_n(t)| dt$.

Soit alors $q \in \mathbb{N}$. Soit f_q l'application 2π -périodique définie par : Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$f_q(t) = \frac{h_n(t)}{|h_n(t)| + \frac{1}{q}}.$$

On vérifie sans peine que $f_q \in X$.

$$\text{Posons } \delta_q = \left| \varphi_n(f_q) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h_n(t)| dt \right|.$$

Alors

$$\delta_q \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{h_n^2(t) - |h_n(t)|^2 - \frac{1}{q} |h_n(t)|}{|h_n(t)| + \frac{1}{q}} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi q} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|h_n(t)|}{|h_n(t)| + \frac{1}{q}} dt \leq \frac{1}{q}$$

Ainsi,

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \varphi_n(f_q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h_n(t)| dt \quad (3.1.3)$$

Mais $\varphi_n(f_q) = |\varphi_n(f_q)| \leq \|\varphi_n\|_{\mathcal{L}} \|f_q\|_{\infty} \leq \|\varphi_n\|_{\mathcal{L}}$ car $\|f_q\|_{\infty} \leq 1$. A la limite, avec (3.1.3), on obtient donc

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h_n(t)| dt$$

$$\text{Finalement, } \|\varphi_n\|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h_n(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right| dt.$$

· Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$, on a donc

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}t)|}{|\frac{t}{2}|} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}t)|}{t} dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \quad (3.1.4)$$

Or, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{|\sin u|}{u} du = +\infty$.

D'après (3.1.4), on obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n\|_{\mathcal{L}} = +\infty \quad (3.1.5)$$

· Mais $(X, \|\cdot\|_{\infty})$ est un espace de Banach, aussi le théorème de Banach-Steinhaus s'applique-t-il. D'après (3.1.5), $(\|\varphi_n\|_{\mathcal{L}})$ n'est pas borné : aussi existe-t-il $f_0 \in X$ tel que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f_0)| = +\infty$. La série de Fourier de f_0 diverge donc en 0, car sinon, la suite $(\varphi_n(f_0))$ serait convergente et a fortiori bornée. Par conséquent, f_0 diffère de la somme de sa série de Fourier.

Bibliographie

- [1] *E. Albrecht, P. G. Spain* , *When Products of self-adjoints Are Normal*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128/8 (2000) 2509-2511.
- [2] *M. Assila*, *Topologie et analyse fonctionnelle Cours de licence*, *Université de Ouargla*, 2004.
- [3] *C. Berger*¹, *Topologie pour la licence cours et exercice*, 24 janvier 2004.
- [4] *M. L. Gallardo*, *Notes du cours sur les espaces de Hilbert*, année 2007-2008.
- [5] *F. Golse, Y. Laszlo, C. Villerbo* ; *analyse réelle et complexe*, 29 juin 2010.
- [6] *W. Hangartner et M. Lambert et C. Reischer*, *Introduction à L'Analyse fonctionnelle*, 1981.
- [7] *V. Longue*, *Analyse fonctionnelle et théorie spectrale*, *MT404*, année 2001-2002.
- [8] *C. Milliet*, *Topologie des espaces vectoriels normés, cours de troisième année de licence université Galatasaray*, année 2011-2012.

Résumé

Dans ce mémoire on a étudié les espaces topologiques selon leurs degré de séparabilité.

Dans le premier chapitre on a exposé et détaillé les notions générales des espaces topologiques.

Dans le second chapitre on a étudié les axiomes de séparations qui classifient ces espaces avec de nombreux exemples illustratifs.

Finalement on a présenté les théorèmes qui relient ces différents espaces avec leurs démonstrations.

Mots-clés: Espaces de Banach-Espaces de Hilbert-Les Opérateurs linéaires.

Abstract

In these memory topological spaces was studied according to their degree of separability.

In the first chapter presented and detailed the basic concepts of topological spaces.

In the second chapter we studied the axioms of separations which classify these spaces with numerous illustrative examples.

Finally we presented the theorems that connect these spaces with their demonstrations .

Key-Words: Banach Spaces-Hilbert Spaces-Linear Operators.

ملخص

في هذه المذكرة درسنا الفضاءات الطوبولوجية حسب درجة انفصالها.

في الفصل الأول عرضنا و فصلنا المفاهيم العامة للفضاءات الطوبولوجية.

في الفصل الثاني درسنا مسلمات الفصل التي تصنف هذه الفضاءات مع كثير من الأمثلة التوضيحية.

وفي الأخير عرضنا النظريات التي تربط مختلف هذه الفضاءات مع براهينها .

كلمات مفتاحية : فضاءات بناخ – فضاءات هيلبرت – المؤثرات الخطية .