

## Apport de la collocation par points dans l'homogénéisation micromécanique

Samir CHOUARFIA<sup>1</sup>, Lakhdar SEDIRA<sup>1</sup>, Kamel MEFTAH<sup>2</sup>,  
Wahid KADDOURI<sup>3</sup>, Toufik KANIT<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Génie Mécanique/ Université de Biskra, Algeria

<sup>2</sup> Laboratoire de Génie Energétique et Matériaux/ Université de Biskra, Algeria

<sup>3</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures & Matériaux/ Université Batna 2, Algeria

<sup>4</sup> Laboratoire de Mécanique de Lille/ Université Lille Nord de France, France

---

**Résumé :** Dans le cadre de la caractérisation micromécanique par la technique des éléments multi-phases, un élément fini à quatre nœuds FRQ4 (Fiber Rotation Quadrilatéral) a été développé. La technique consiste à superposer un maillage éléments finis sur l'image de la microstructure étudiée où l'attribution des propriétés mécaniques de chaque phase se fait sur les points d'intégration des éléments. Le fait que la variation de ces propriétés élastiques (module de Young et le coefficient de Poisson) n'est plus constante, les termes de la matrice de rigidité auraient dû être d'ordre encore élevé. Le recours dans le présent travail à des points d'intégration de plus dans la formule de quadrature de Gauss constitue une collocation par points atténuée. L'approche a été testée vis à vis un élément Q4 standard, l'élément biquadratique Q8 et l'élément avec rotation autour de la normale FRQ4. Les tests d'homogénéisation micromécanique sont réalisés sur un matériau composite Polypropylène/Chanvre à renfort aléatoire. Les résultats obtenus sont confrontés avec ceux obtenus par l'approche analytique de champs moyens (MF) : Mori-Tanaka. Les tests de validation ont montré un accord exact avec ceux de deux matériaux constitutifs et un bon accord avec les valeurs de référence.

**Keywords** - élément fini, composites, homogénéisation micromécanique, multi-phases, Quadrature de Gauss.

---

### 1. INTRODUCTION

La prévision des propriétés mécanique effectives de matériaux hétérogènes est un axe de recherche très riche, puisque les propriétés structurales des matériaux multi-phases affectent sensiblement le comportement et les performances des matériaux. La mécanique des matériaux hétérogènes s'est longtemps limitée aux approches analytiques. Plusieurs modèles analytiques sont encore utilisés citant par exemple le modèle de Mori-Tanaka [1], auto-cohérent et les bornes de Voigt et Reuss. L'inconvénient majeur de ces modèles est qu'ils ne prennent pas en compte l'influence de la morphologie des phases et également leurs dispositions réelles dans la structure sur le calcul des propriétés effectives des matériaux composites.

Afin de remédier à cette insuffisance, plusieurs chercheurs ont fait recours aux méthodes numériques, entre autre, la méthode des éléments finis (FEM) pour décrire le comportement et la caractérisation mécanique des matériaux composites. Cette méthode est basée sur la discrétisation de l'équation différentielle d'équilibre sur un volume continu, le principe des travaux virtuels ou de la minimisation de l'énergie potentielle totale sont largement utilisés. Parallèlement, la non homogénéité matérielle du domaine au niveau microscopique a révélé le concept de VER (Volume élémentaire Représentatif), qui est utilisé dans la caractérisation micromécanique des structures étudiées.

Basant sur le concept traditionnel de la méthode des éléments finis, la discrétisation de différents constituants de VER se fait par le même type élément fini (plan, volumique,...), que ce soit pour le renfort ou pour la matrice. chaque phase peut contenir un ou plusieurs éléments. Le fait que les renforts sont généralement de forme cylindriques ou ellipsoïdales, une autre technique FEM été récemment développée et utilisée par plusieurs chercheurs [2, 3], les fibres sont modélisés par des éléments finis de type barre ou poutre avec une distribution aléatoire dans un VER surfacique ou volumique.

Dans le présent travail, l'approche élément multi-phases [4-6] basée sur la modélisation sur les images des microstructures a été utilisée. Cette technique est développée par Lippmann et al. [7] et utilisée également par plusieurs scientifiques, entre autres : El Moumen et al. [6], pour l'homogénéisation de microstructures composites réelles et virtuelles, Kanit et al. [4] pour des microstructures avec une génération de renfort de type mosaïque de Voronoi. La modélisation numérique multi-phases consiste à superposer un maillage éléments finis sur l'image de la microstructure étudiée ou l'attribution des propriétés mécaniques de chaque phase se fait sur les points d'intégration des éléments. Rappelons que la première simulation et modélisation de la microstructure ont été réalisées par [8] pour la modélisation par image numérique des tissus osseux.

Du point de vue FEM, le fait que la variation des propriétés élastiques (module de Young et le coefficient de poisson) n'est plus constant dans le VER, les termes de la matrice de rigidité élémentaire auraient dû être d'ordre encore élevé. Donc, le choix d'élément fini joue un rôle très important pour la technique multi phases. Cependant, le recours à des points d'intégration de plus dans la formule de quadrature de Gauss constitue une

collocation par points atténuée. La nouvelle thématique consiste à exploiter la technique élément multi-phases par une nouvelle approche basée sur la collocation par points: en premier lieu, un nouvel élément fini quadrilatère basé sur le concept de la rotation d'une fibre dans le plan, baptisé 'FRQ4', développé par Ayad [9] avec un champ de déplacement quadrilatère a été formulé et testé.

## 2. FORMULATION ELEMENT FINI

L'élément FRQ4 [9] est un élément de membrane quadrilatère à quatre nœuds avec rotation autour de la normale au plan moyen. Sa géométrie est présentée sur la figure.1

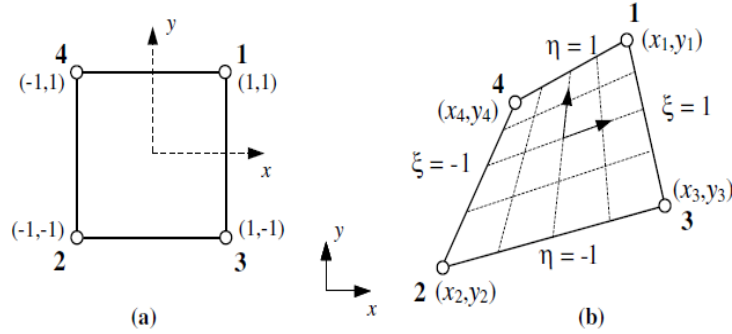


Fig.1: Géométrie de l'élément FRQ4

Les coordonnées d'un point situé à l'intérieur de cet élément sont définies par la relation:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i X_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i Y_i \quad (1)$$

Dans laquelle  $X_i$  et  $Y_i$  sont les coordonnées des nœuds situés dans les quatre coins et les fonctions de forme sont données par:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (2)$$

Les déplacements d'un point quelconque sont interpolés à partir des degrés de liberté nodaux en utilisant les mêmes fonctions de forme. Le champ de déplacement est défini par :

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \bar{\theta}_{z_i} \wedge (\bar{x} - \bar{x}_i) \quad (3)$$

donc

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{Bmatrix} N_i u_i - N_i (y - y_i) \theta_{z_i} \\ N_i v_i + N_i (x - x_i) \theta_{z_i} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Les déformations sont liés aux déplacements par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

sous forme matricielle :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B] \{U_n\} \quad (6)$$

La forme intégrale faible avec l'hypothèse de Galerkin pour la plus part des problèmes d'élasticité correspond en fait aux théorèmes des travaux virtuels dans sa formulation en déplacement virtuels :

$$w = - \int_v \langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{\sigma\} \cdot dv + \int_v \langle \delta U \rangle \cdot \{F_v\} \cdot dv + \int_{S_f} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_s\} \cdot ds = 0 \quad (7)$$

$$\text{Avec } \{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \text{ et } [C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Le module de Young et le coefficient de Poisson sont supposés fonctions de la forme  $P(x,y)$ , avec

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^{n\_gauss} N(\xi_i, \eta_i) P_i \quad (9)$$

avec :  $n\_gauss$ : nombre de points de Gauss dans l'élément.

$P_i$  : sont les valeurs des propriétés mécaniques aux points de Gauss

Finalement, la matrice de rigidité est obtenue à partir du terme lié à la variation virtuel du travail interne. Elle s'écrit

$$[k^e] = \int_A [B]^T [C] [B] h dA \quad (10)$$

Une intégration numérique par quadratique de Gauss est utilisée. La matrice  $[k^e]$  se calcule ainsi :

$$[k^e] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j [B(\xi_i, \eta_j)]^T [C(\xi_i, \eta_j)] [B(\xi_i, \eta_j)] h \det[J(\xi_i, \eta_j)] \quad (11)$$

### 3. MICROSTRUCTURE, GENERATION ET CALCUL D'HOMOGENEISATION

#### 3.1 CHOIX DE LA MICROSTRUCTURE

Le calcul d'homogénéisation micromécanique est réalisé sur un matériau composite Polypropylène/Chanvre à renfort aléatoire, élaboré et étudié par Elouaer [10]. La taille de VER est de  $5 \times 5 \times 1$  mm, conformément à celle utilisé par Kebbir et Ayad, [3]. Les propriétés élastiques et géométriques sont récapitulées sur le tableau 1.

Matrix (polypropylène)		Fibre(Chanvre)		Fraction volumique	Longueur (mm)	Diamètre (mm)
$E_m$ (GPa)	$\nu_m$	$E_f$ (GPa)	$\nu_f$	$\nu_f$	$L_f$	$D_f$
1.7346	0.4	44.52	0.12	0.206	0.786	0.042

Table 1 propriété de PP/chanvre

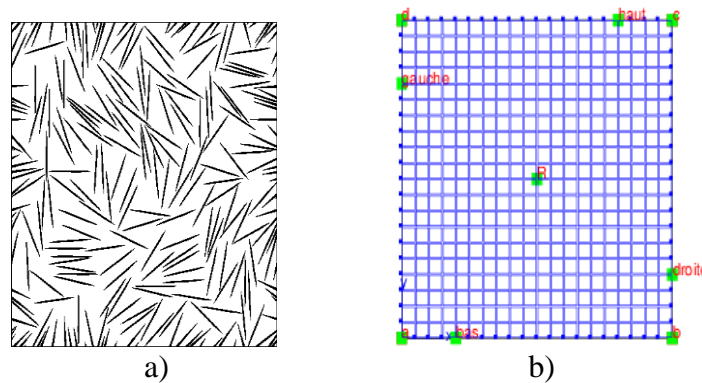


Fig. 2. Technique du maillage : a) image (VER) Polypropylène/Chanvre et, b) maillage éléments finis.

Le VER de la microstructure considérée dans cette étude est généré par une distribution aléatoire des fibres prises sous forme ellipsoïdale, figure2-a, L'image est fournie par le code de calcul Digimat 5.1. Le maillage est réalisé sur une géométrie de la même taille que celle de l'image (2D) de la microstructure. Les propriétés géométriques (coordonnées, connectivité) et les propriétés mécaniques sont déduites par la suite par un traitement par pixel de l'image utilisée (812×812 pixels). La figure 2.b montre un exemple d'un maillage régulier avec une grille de 20×20 éléments finis. Trois types d'éléments finis quadrilatères sont utilisées pour l'extraction des points de d'intégration et les propriétés mécaniques qui les correspondent : l'élément bilinéaire à quatre nœuds et biquadratique à huit nœuds, c2d4 et c2d8, et le présent élément FRQ4, respectivement, Fig. 3.

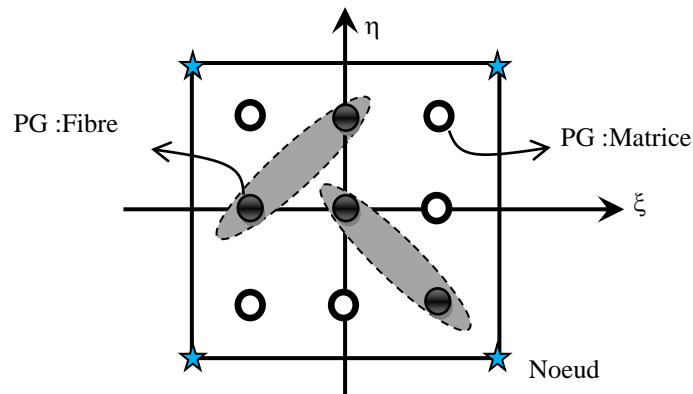


Fig.3 Propriétés mécaniques des points d'intégration Q4 (3×3 points d'intégration)

### 3.1 CONDITIONS AUX LIMITES

La microstructure est soumise à une charge de traction uniaxiale  $U1=1$  à travers le côté droit dans la direction (x). Les conditions aux limites sont présentés sur figure 4.

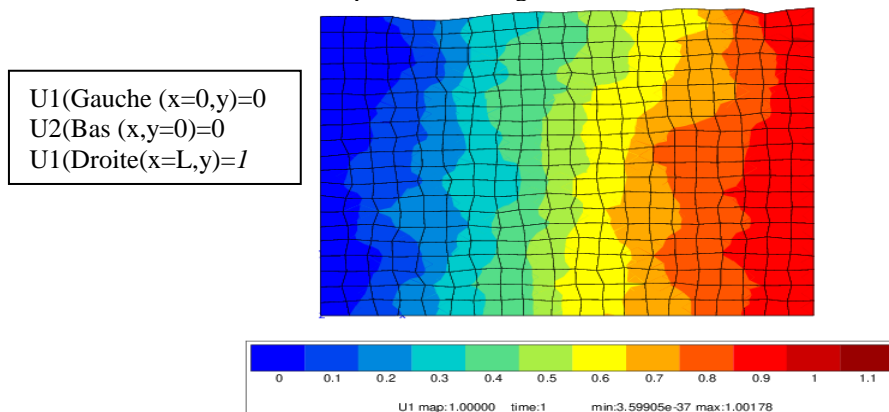


Fig.4 champ de déplacement dans la direction x

## 4. RESULTATS ET DISCUSSIONS

L'élément multi-phases bilinéaire à quatre nœuds FRQ4 qui tient en compte -au niveau local- les propriétés mécaniques de différents phases de composite a été développé (Intel(R) Fortran Compiler 10.1, Visual Studio 2008). Le programme développé fait une interface avec le code de calcul Zebulon 8.4 (Multiscale). L'élément est testé dans un premier temps pour les deux cas références: fibres seules ou matrice pure. La Figure 4 illustre la cinématique de la structure présentée par le champ du déplacement ( $U_1$ ) dans la direction (x). Les résultats obtenus (module de Young) sont en accord exacte avec ceux de deux matériaux constitutifs. Dans l'objectif d'évaluer la précision de la nouvelle formulation, une analyse de convergence est réalisée par maillage raffiné d'une façon croissant, Figure 5. Dans cette figure la convergence de module de Young (E) en fonction de nombre de degré de liberté (DLL) est représentée utilisant les trois éléments quadrilatéraux : les deux éléments standards à 4 et 8 nœuds (Q4 et Q8) et l'élément avec ddl de rotation FRQ4. Du point de vue qualitatif, lié au balayage de toutes les fibres dans le VER, les résultats obtenus pour des maillages grossier (<math>15 \times 15</math> éléments) sont généralement insignifiants et contournables. Seuls modules de Young à communiquer est ceux des maillages supérieurs de  $20 \times 20$  éléments. D'après la figure 5, nous remarquons que l'élément FRQ4 donne des résultats du même ordre de grandeur que ceux de l'élément Q8. Des valeurs pratiquement proches à la valeur expérimentale (3.328 GPa). L'écart remarqué est expliqué par la faible densité de l'image utilisée dans le calcul en matière de fibre, et qui a montré finalement une fraction de pixels relatifs aux fibres de l'ordre de 16%, une valeur inférieure à la valeur réelle ( $V_f=20.6\%$ ). Or, selon le travail analytique par Mori-Tanaka, détaillé par [10] et les auteurs, un écart supérieur à 30 % apparaît toujours entre les résultats 2D et ceux de 3D. L'approche de Mori-Tanka [1] dans le modèle 3D semble plus proche aux résultats obtenus par la présente technique et ceux par essai de traction [10].

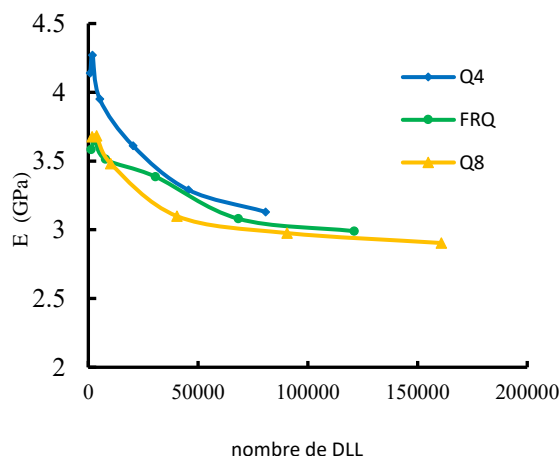


Fig.5 Convergence du module Young (E) en fonction du nombre de degré de liberté (DLL)

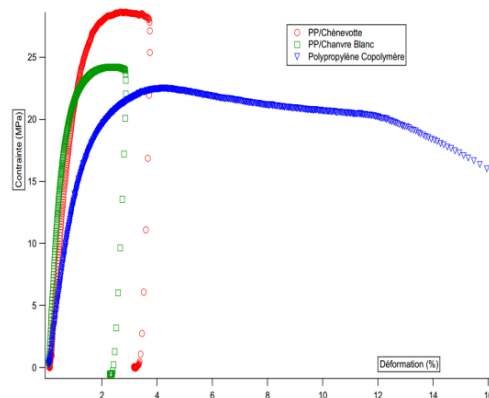


Fig.6 Courbes de traction de Polypropylène, Propylène/chanvre, Propylène/chènevotte

## 5. CONCLUSION

Le présent travail constitue un nouvel développement éléments multi-phases. L'élément bilinéaire à quatre nœuds avec rotation autour de la normale FRQ4 a été développé pour des propriétés élastiques variables sur le plan élémentaire. On peut conclure que l'élément FRQ4 apporte une précision tout à fait satisfaisante et beaucoup plus efficace que l'élément classique du premier ordre Q4. A cet effet, un nombre de nœuds très réduit peut être utilisé (avec 2x2 points de Gauss uniquement) afin d'aboutir à une convergence pareille à celle de l'élément Q8 un peu coûteux (8 nœuds et 3x3 points de Gauss). Les résultats sont fortement encourageants et une analyse plus approfondie avec (i) une prise d'image plus réaliste et (ii) avec un schéma d'intégration spécial est en cours de développement.

## 6. REFERENCES

- [1] Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*. 1973;21:571-4.
- [2] Cunha VMCF, Barros JAO, Sena-Cruz JM. A finite element model with discrete embedded elements for fibre reinforced composites. *Computers & Structures*. 2012;94-95:22-33.
- [3] Kebir H, Ayad R. A specific finite element procedure for the analysis of elastic behaviour of short fibre reinforced composites. The Projected Fibre approach. *Composite Structures*. 2014;118:580-8.
- [4] Kanit T, Forest S, Galliet I, Mounoury V, Jeulin D. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*. 2003;40:3647-79.
- [5] Kaddouri W. Construction d'un modèle unique pour les milieux hétérogènes à morphologies aléatoires et périodiques-Application aux matériaux composites: Université de Batna 2; 2016.
- [6] El Moumen A, Kanit T, Imad A, El Minor H. Effect of reinforcement shape on physical properties and representative volume element of particles-reinforced composites: statistical and numerical approaches. *Mechanics of materials*. 2015;83:1-16.
- [7] Lippmann N, Steinkopff T, Schmauder S, Gumbsch P. 3D-finite-element-modelling of microstructures with the method of multiphase elements. *Computational Materials Science*. 1997;9:28-35.
- [8] Hollister SJ, Kikuchi N. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Computational Mechanics*. 1992;10:73-95.
- [9] Ayad R. Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement [Ph.D Thesis]: University of Technology of Compiègne, France; 1993.
- [10] Elouaer A. Contribution à la compréhension et à la modélisation du comportement mécanique de matériaux composites à renfort en fibres végétales [Thèse de Doctorat]: Université de Reims Champagne Ardenne; 2011.