



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Dérivée et intégrale fractionnaire
au sens de Riemann-Liouville

Présenté par: Fridjet Kheira
Soualah Safa

Soutenu le: 05/06/2018, devant le jury composé de

Guesba Messaoud
Guedda Lamine
Menacer Bekkar

M.A.A
M.C.A
M.A.A

Président
Rapporteur
Examineur

Univ. El Oued
Univ. El Oued
Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail :

A le père cher.

A la mère chère.

A les frères et sœurs.

A tous la famille.

A tous les amis.

Remerciements

En premier lieu, nous remercions **Allah** qui nous avoir donné le courage et la volonté afin d'accomplir ce modeste travail.

Nos plus vifs remerciements vont aussi à l'encadreur en ce travail **Dr. Guedda Lamine** pour son aide continue, ses précieux conseils et être patient avec nous.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Nous remercions à tous les enseignants du département mathématique pour toute l'aide apportée à nous durant notre trajet scolaire.

Nous remercions les parents généreux pour leur soutien et leur encouragement à atteindre les plus hauts rangs.

Et nous remercions les frères et sœurs chère.

Nous remercions les amis et les collègues en particulier collègue **Touil Fayçal**.

Enfin, nous adressons nos remerciements à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

Notations générales

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail :

ensembles

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels .
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	ensemble des nombres naturels à l'exclusion zéro.
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes.
$C^0([a, b]) \equiv C([a, b])$	l'espace des fonctions f continues sur $[a, b]$ à valeur réels.
$L^p([a, b])$	espace de fonctions u mesurables sur $[a, b]$ et vérifiant $\int_a^b u(t) ^p dt < \infty$.
$AC([a, b])$	espace de fonctions absolument continues sur $[a, b]$ ($= \{u \in C([a, b]); u' \in L^1([a, b])\}$).

Fonctions

$\Gamma(\alpha)$	La fonction Gamma.
$B(p, q)$	La fonction Bêta.
$E_\alpha(z)$	la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.
$E_{\alpha, \beta}(z)$	la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	La transformée de Laplace de la fonction f .
Δ	opérateur laplacien.

Dérivée et intégrale

$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$	dérivée ordinaire par rapport à t d'ordre entier n .
--------------------------	--

I_{a+}^{α}	intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .
D_{a+}^{α}	dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

Abréviations

R-L	Riemann-Liouville.
M-L	Mittag-Leffler.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Outils de base	4
1.1 Fonctions spéciales	4
1.1.1 La fonction Gamma	4
1.1.2 La fonction Bêta	7
1.1.3 La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta	7
1.1.4 Fonction de Mittag-Leffler	8
1.2 Formule de Dirichlet	9
1.3 Règle de dérivation de Leibniz	10
1.4 Transformée de Laplace	10
1.5 Espaces fonctionnels	11
1.5.1 Espaces des fonctions intégrables	11
1.5.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues	12
1.6 Outils d'analyse fonctionnelle	13
1.6.1 Théorème d'Arzela-Ascoli	13
1.6.2 Principe des applications contractantes	14
2 Dérivation et intégration fractionnaire	15
2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	15
2.1.1 Intégrales fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles	16
2.1.2 Propriétés principales de l'intégrale fractionnaire au sens de R-L	18

2.1.3	Composition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville avec la dérivée ordinaire	22
2.1.4	Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L	22
2.2	Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	23
2.2.1	Dérivées fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles	24
2.2.2	Compositions des dérivées fractionnaires	28
2.2.3	Compositions mixtes	28
2.2.4	Autres résultats concernant les dérivées fractionnaires	30
2.2.5	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L	31
2.3	Comparaison entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et la dérivée au sens de Caputo	31
3	Applications	33
3.1	Application 1 : Problème d'hypothèque	33
3.2	Application 2 : Existence de solution pour un problème aux limites d'ordre fractionnaire	37
3.2.1	Problème auxiliaire	37
3.2.2	Existence de solution pour le problème donné	39
3.2.3	Résultat d'unicité	42
	Conclusion	46
	Bibliographie	47

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est un champ d'étude mathématique qui sort du traditionnel définitions des opérateurs intégrales et dérivées : définir l'intégrale fractionnaire comme simple généralisation de l'intégrale d'ordre entier, et la dérivée fractionnaire comme l'opération inverse ; c'est un sujet presque aussi ancien que le calcul différentiel classique connu aujourd'hui. En 1695 L'Hôpital a posé la question quant à la signification de $\frac{dy^n}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$ c'est "et si n est fractionnaire?" ; Leibniz a répondu que " $d^{\frac{1}{2}}x$ sera égal à $x\sqrt{dx \div x}$ ". Cet événement a été aujourd'hui considéré comme le début de l'émergence et le développement de ce branche, et le fait que la question posée spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques. Des recherches ultérieures et d'autres développements, entre autres, ont conduit Riemann à la construction de l'opérateur intégral fractionnaire Riemann-Liouville, basé sur l'intégrale qui a été la pierre angulaire précieuse dans le calcul fractionnaire depuis lors. Avant Liouville et Riemann, Euler a fait le premier pas quand il a étudié le cas simple d'intégrales fractionnaires des monômes d'ordre réel arbitraire dans le mode heuristique de l'époque. Une première tentative de Liouville a été plus tard purifiée par le mathématicien suédois Holmgren [3], qui en 1865 a fait des contributions importantes à l'étude de ce thème. Mais c'est Riemann [9] qui l'a reconstruit pour l'adapter à l'équation intégrale d'Abel, et l'a donc rendu beaucoup plus utile. Aujourd'hui il existe de nombreuses formes d'opérateurs intégraux fractionnaires, mais l'opérateur de Riemann-Liouville est toujours le plus fréquemment utilisé.

On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques pures sans applications aux autre domaines, pourtant un exemple simple de mécanique de fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement

fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne.

Recentement un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie, où on a pu trouver un progrès signifiant de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans ces domaines([11], [7], [12], [8]). Par exemple,un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des caoutchouc et des gommess, en général toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique . Une autre théorie qui se développe en parallèle avec la dérivation fractionnaire c'est celle de systèmes dynamiques, qui a pour but l'étude des systèmes physiques qui évoluent au cours du temps.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de s'adapter avec le calcul fractionnaire grâce à une variété d'applications utilisant des définitions et des propriétés qui n'ont pas été étudiées auparavant et qui constituent un champ de recherche fertile pour d'autres problèmes aux limites.

Ce mémoire contient trois chapitres répartis comme suit :

Le premier chapitre est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : fonctions spéciales (les fonction Gamma, Bêta et celle de Mittag-Leffler), transformée de Laplace, espaces de fonctions (intégrables, continues et absolument continues) et quelques notions et résultats de la théorie d'analyse fonctionnelles (Théorème d'Arzela-Ascoli, principe de contraction de Banach et théorème de Schaefer, ...)

Dans le deuxième chapitre nous présentons les définitions de dérivations et intégrations fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et ses propriétés en les comparant avec celle de Caputo.

Le dernier chapitre est consacré à deux applications :

Dans la première, on modélisera le problème d'hypothèque par l'équation différentielle d'ordre factionnaire suivante :

$$D_{0+}^v y(t) - ry(t) = -a, \quad 0 < v < 1$$

Dans La deuxième application, on abordera la question d'existence et unicité de solution pour le problème aux limite à multi-point suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), & 1 < \alpha \leq 2, \quad t \in [0, T], \quad T > 0 \\ I_{0+}^{2-\alpha} u(t)|_{t=0} = 0, & D_{0+}^{\alpha-2} u(T) = \sum_{i=1}^m a_i I_{0+}^{\alpha-1} u(\xi_i) \end{cases}$$

où $0 < \xi_i < T$, $T > 0$, $a_i \in \mathbb{R}_+$, $m \geq 2$, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue .

D_{0+}^{α} et I_{0+}^{α} sont respectivement la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire α au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 1

Outils de base

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés que nous utiliserons dans la suite de ce travail. (voir [1], [6], [14], [10])

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma (ou fonction d'Euler de deuxième espèce) est fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles.

Définition 1.1.1. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma : \alpha \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (1.1)$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Propriété 1.1.1. *Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad \alpha > 0, \quad (1.2)$$

en effet, $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha+1-1} dt$.

Pour $0 < a < b$ et en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-t} t^{\alpha+1-1} dt &= \int_a^b e^{-t} t^{\alpha} dt \\ &= \left(-t^{\alpha} e^{-t} \right)_a^b + \alpha \int_a^b e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{a^{\alpha}}{e^a} - \frac{b^{\alpha}}{e^b} + \alpha \int_a^b e^{-t} t^{\alpha-1} dt.\end{aligned}$$

Si $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow +\infty$, on trouve :

$$\Gamma(\alpha + 1) = 0 - 0 + \alpha \Gamma(\alpha).$$

Propriété 1.1.2. *La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\Gamma(n + 1) = n!. \quad (1.3)$$

Raisonnons le par récurrence si $n = 0$, alors :

$$\Gamma(0 + 1) = \Gamma(1) = 1 = 0!.$$

Supposons que la formule est vrai pour $n - 1$, i.e

$$\Gamma((n - 1) + 1) = \Gamma(n) = (n - 1)!,$$

et montrons qu'elle est vrai pour n .

D'après l'équation (1.2), on trouve

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!.$$

On peut calculer aussi

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \left(-e^{-t} \right)_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1,\end{aligned}$$

et selon le dernier résultat on a

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma(4) = 6, \dots$$

Démontrons maintenant que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Par définitions, nous avons

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(1/2)-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt.$$

Pour $0 < a < b$, après un changement de variables

$$\int_a^b e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-x^2} 2dx,$$

où

$$\begin{cases} x = t^{1/2} \\ dx = (1/2)t^{-1/2} dt \end{cases}$$

Si $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow +\infty$, alors nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

il est clair que

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)^2} dx dy.$$

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{e^{-r^2}}{2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Comme $I > 0$ et ceci est vrai tout simplement parce que $e^{-(x)^2} > 0$, alors $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc ;

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

En se servant de ce important résultat et la relation fonctionnelle (1.2), on voit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Remarque 1.1.1. D'après le résultat (1.2), par récurrence on déduit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x.(x+1)\dots(x+n-1)},$$

cette relation permet de définir $\Gamma(x)$ pour x réel négatif tel que $-n < x < -n+1$. On a ainsi défini $\Gamma(x)$ pour tout nombre réel x .

Dans notre cas pour $n = [\alpha] + 1$ nous avons, $0 < n - \alpha < 1$, ce qui signifie que $-n < -\alpha < -n+1$ et selon la convention ci-dessus, on aura

$$\Gamma(-\alpha) = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{(-\alpha).(-\alpha+1)\dots(-\alpha+n-1)}.$$

1.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta(ou fonction d'Euler de premier espèce) est définie par :

$$B : (p, q) \longrightarrow \int_0^1 \tau^{p-1} (1-\tau)^{q-1} d\tau, \quad (1.4)$$

tels que : $p > 0$ et $q > 0$.

Propriétés 1.1.1. La fonction Bêta satisfait aux propriétés suivantes :

1. Dans sa définition sous forme d'intégrale, le changement de variable $s = 1 - \tau$ prouve que cette fonction est symétrique c'est-à-dire que

$$B(p, q) = B(q, p).$$

2. Il suffit d'effectuer une intégration par partie pour prouver que

$$pB(p, q+1) = qB(p+1, q).$$

3. $B(p, 1) = \frac{1}{p}$.

1.1.3 La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

La fonction Bêta est relié à de la fonction Gamma par :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (1.5)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy\end{aligned}$$

utilisons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x/(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1 - v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u, \text{ alors}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} | -u | du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p+q-1} du \right) \left(\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q).\end{aligned}$$

Ce qui entraine que $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ où $\Gamma(p+q) \neq 0$.

Si p, q sont des entiers naturels, on obtient :

$$B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

1.1.4 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.1.2. La fonction de Mittag-Leffler généralisée à deux paramètres est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par le développement en série entière :

$$E_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (1.6)$$

Pour $\beta = 1$, on obtient la fonction de M-L dite à un paramètre :

$$E_{\alpha}(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0). \quad (1.7)$$

De la formule (1.6), il en résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z).$$

En effet, par définition on a,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(z) &:= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{z z^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.1. Pour des valeurs spéciales de α et β on a :

1. $E_1(z) = E_{1,1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z$
2. $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$

1.2 Formule de Dirichlet

Soient $h(x, y)$ une fonction continue et α, β deux réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} h(x, y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} h(x, y) dx.$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier. Par exemple, si on prend

$$h(x, y) = g(x)f(y),$$

et

$$g(x) \equiv 1.$$

Alors ;

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = B(\alpha, \beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy,$$

où B est la fonction bêta.

1.3 Règle de dérivation de Leibniz

Définition 1.3.1. *règle de dérivation de Leibniz de définie par :*

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^{b(t)} f(t, x) dx \right] = f(t, b(t))b'(t) + \int_0^{b(t)} \frac{d}{dt} f(t, x) dx.$$

1.4 Transformée de Laplace

Définition 1.4.1. *Soit f une fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La transformée de Laplace de f notée $\mathcal{L}\{f(t)\}$ est alors donnée, lorsqu'elle existe, par la fonction de la variable complexe s définie par :*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1.8)$$

f est appelée l'originale de $\mathcal{L}\{f\}$.

La transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \operatorname{Re}(s)$$

- La transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier n de la fonction f est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \end{aligned}$$

Propriété 1.4.1. *La transformée de Laplace est linéaire :*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\sum_{j=0}^n c_j f_j(t)\right\}(s) = \sum_{j=0}^n c_j \mathcal{L}\{f_j\}(s).$$

Définition 1.4.2. *Lorsque le produit $f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, le produit de convolution de f et g est définie par :*

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt. \quad (1.9)$$

Propriété 1.4.2. *Si les transformées de Laplace de f et g existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifie :*

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s). \quad (1.10)$$

Le tableau suivant donne un bref résumé de certaines transformées de Laplace utiles. Nous allons souvent se référer à ce tableau le long de ce mémoire.

$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$	$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha + a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$

(a est une constante réel et $\alpha > 0$ arbitraire).

1.5 Espaces fonctionnels

1.5.1 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.5.1. *Soient $\Omega = (a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$.*

1. *Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f tel que f est mesurable et*

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty.$$

2. *Pour $p = +\infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions f tel que : f est mesurable et presque partout bornée sur Ω .*

Théorème 1.5.1. *Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.*

1. Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ définit par :

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach.

2. Pour $p = +\infty$, l'espace $(L^\infty(\Omega))$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définit par :

$$\|f\|_\infty := \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\},$$

est également un espace de Banach.

1.5.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.5.2. Soit $\Omega = [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_C.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C := \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Définition 1.5.3. Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) un intervalle.

On désigne par $AC([a, b])$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est à dire :

$$AC([a, b]) := \left\{ f / \exists \varphi \in L([a, b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt \right\},$$

et on appelle $AC([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

Définition 1.5.4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $AC^n([a, b])$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ continues sur $[a, b]$ telles que $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$ c'est à dire

$$AC^n([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ et } f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}.$$

En particulier $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$.

1.6 Outils d'analyse fonctionnelle

Soient E, F deux espaces de Banach, on désigne par $C(E, F)$ l'espace de toutes les fonctions $f : E \rightarrow F$ continues.

1.6.1 Théorème d'Arzela-Ascoli

Définition 1.6.1. Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$.

1. On dit que M est équicontinue en $u \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\|f(u) - f(v)\|_F < \epsilon,$$

et ceci pour tout $f \in M$ et pour tout $v \in E$ vérifiant :

$$\|u - v\|_E < \eta.$$

2. On dit que M est équicontinue sur E , si M est équicontinue en tout $u \in E$.

En particulier, si $E = [a, b]$ et $F = \mathbb{R}$. On dit que $M \subset C(E, F)$ est équicontinue sur E si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in M, \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Définition 1.6.2. Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$.

On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\|f\| \leq C \quad \forall f \in M.$$

Théorème 1.6.1. Soit M une partie de $C([a, b])$ muni de la norme de la convergence uniforme.

M est relativement compact dans $C([a, b])$ si et seulement si M est équicontinue et uniformément borné.

Définition 1.6.3. Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur. On dit que :

- A est compact si l'image par A de tout borné de E est relativement compact (c'est-à-dire que son adhérence est compact) dans F .

- A est dit complètement continu s'il est continu et compact.

Théorème 1.6.2. (Théorème d'Arzela-Ascoli)

Soient E un espace de Banach compact et F un espace de Banach quelconque.

Une partie M de $C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si :

1. M est équicontinue sur E .
2. Pour tout $x \in E$, l'espace $M(x)$ défini par :

$$M(x) = \{f(x) / f \in M\}$$

est relativement compact dans F .

1.6.2 Principe des applications contractantes

Définition 1.6.4. Soit E un espace Banach. On dit qu'une application

$T : E \longrightarrow E$ est contractante, s'il existe $0 < K < 1$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times E : \|T(x) - T(y)\|_E \leq K \|x - y\|_E.$$

Théorème 1.6.3. (Le théorème du point fixe de Banach)

Soit E un espace de Banach, et $T : E \longrightarrow E$ une application contractante, alors T admet un unique point fixe,

(i.e; il existe $a \in E$ unique tels que $T(a) = a$).

On introduit à présent un important théorème d'existence dont on aura besoin par la suite dans la deuxième application.

Théorème 1.6.4. (Théorème de Schaefer)

Soit E un espace de Banach. Supposons que $T : E \longrightarrow E$ est un opérateur complètement continu et l'ensemble $V = \{u \in E / u = \mu Tu, \quad 0 < \mu < 1\}$ est borné. Alors T a un point fixe dans E .

Chapitre 2

Dérivation et intégration fractionnaire

Dans ce chapitre nous présentons certaines des définitions, les résultats, les théories et principales les propriétés concernant l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. (voir [6], [13], [14])

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ on considère l'intégrale

$$I^{(1)} = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

$$I^{(2)} f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(\tau) d\tau,$$

d'après le théorème du Fubini on trouve ;

$$I^{(2)} f(t) = \frac{1}{1!} \int_a^t (t - \tau)^{2-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

En répétant la même opération n fois on obtient :

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_{n-1}} (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy et comme nous avons $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann

rendu compte que la dernière expression pourrait avoir un sens même quand n prenant des valeurs non-enters, alors c'était naturel de définir l'opérateur d'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 2.1.1. Soit $f \in L^1[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f de borne inférieure a est définie par :

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.3)$$

$$-\infty \leq a < t < +\infty$$

Cas particulier : $I_{a+}^0 f(t) = f(t)$ (i.e I_{a+}^0 est l'opérateur identité).

Remarque 2.1.1. Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I_{0+}^α par I^α .

Remarque 2.1.2. Par le simple changement de variable $s = t - \tau$, on remarque que I_{a+}^α peut être écrit sous la forme suivante :

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s) ds. \quad (2.4)$$

(autre définition de l'intégrale de R-L).

2.1.1 Intégrales fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles

1. Soit $f(t) = (t - a)^\beta$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\beta > -1$:

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau,$$

en utilisant le changement de variable $\tau = a + (t - a)s$ où s varie de 0 à 1 puis la fonction Bêta, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t - a - (t - a)s]^{\alpha-1} [s(t - a)]^\beta (t - a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 s^\beta (1 - s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+\beta} \beta(\beta + 1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (t - a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc ;

$$I_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (t - a)^{\alpha + \beta}. \quad (2.5)$$

Pour $a = 0$, on a

$$I_{0+}^{\alpha} t^{\beta} = I^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha + \beta}. \quad (2.6)$$

2. La fonction constante $f(t) = C$

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} C d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{-(t - \tau)^{\alpha}}{\alpha} \right) \Big|_a^t \\ &= \frac{C}{\alpha \Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha} \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^{\alpha}. \end{aligned}$$

D'où le résultat ;

$$I_{a+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^{\alpha}. \quad (2.7)$$

3. La fonction exponentielle $f(t) = \exp(kt)$ Pour $k > 0$, et $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$.

En utilisant la formule (2.4) de l'intégrale de R-L avec $a = -\infty$, on obtient ;

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} \exp(k(t - s)) ds \\ &= \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} \exp(-ks) ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Par le changement de variable $x = ks$, on déduit que,

par suite

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) &= \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{k} \right)^{\alpha-1} \exp(-x) \frac{dx}{k} \\ &= k^{-\alpha} \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx \\ &= k^{-\alpha} \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) \\ &= k^{-\alpha} \exp(kt). \end{aligned}$$

Donc ;

$$I_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) = k^{-\alpha} \exp(kt). \quad (2.9)$$

2.1.2 Propriétés principales de l'intégrale fractionnaire au sens de R-L

Théorème 2.1.1. *Pour $f \in C[a, b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe suivant :*

$$I_{a+}^{\alpha} (I_{a+}^{\beta} f)(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t),$$

pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Preuve : Soit $f \in C[a, b]$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors ;

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} (I_{a+}^{\beta} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (I_{a+}^{\beta} f)(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^{\tau} (\tau - s)^{\beta-1} f(s) ds \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left[\int_a^{\tau} (\tau - s)^{\beta-1} f(s) ds \right] d\tau. \end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet on trouve :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} (I_{a+}^{\beta} f)(t) &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

Remarque 2.1.3. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire sous forme de produit de convolution de la fonction puissance $h_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$*

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \int_a^t h_{\alpha}(t - \tau) f(\tau) d\tau = (h_{\alpha} * f)(t).$$

Proposition 2.1.1. *L'opérateur l'intégrale I_{a+}^α est linéaire.*

En effet, si f et g sont deux fonctions telles que $I_{a+}^\alpha f$ et $I_{a+}^\alpha g$ existent, alors pour c_1 et c_2 deux réels arbitraires on aura

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha (c_1 f + c_2 g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (c_1 f + c_2 g)(\tau) d\tau \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \\ &= c_1 I_{a+}^\alpha f(t) + c_2 I_{a+}^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Propositions 2.1.1. *Soit $f \in C^0([a, b))$. Alors on a*

1. $\frac{d}{dt}(I_{a+}^\alpha f)(t) = (I_{a+}^{\alpha-1} f)(t), \quad \alpha > 1.$
2. $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} (I_{a+}^\alpha f)(t) = f(t), \quad \alpha > 0.$

Preuve

1. Appliquons règle de dérivation de Leibniz 1.3.1, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I_{a+}^\alpha f)(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha - 1 + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau = (I_{a+}^{\alpha-1} f)(t). \end{aligned}$$

2. Pour la dernière identité, on considère la fonction $f \in C^0([a, b))$, nous avons

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

D'après la relation (2.5) on peut écrire :

$$I_{a+}^\alpha 1 = \frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \longrightarrow 1.$$

quand $\alpha \rightarrow 0^+$. Donc pour un certain $\delta > 0$, on aura

$$\begin{aligned}
\left| I_{a+}^{\alpha} f(t) - \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a; b]$ alors,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t, \tau \in [a, b] : |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \epsilon,$$

ce qui entraîne :

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \epsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\epsilon \delta^{\alpha}}{\alpha}. \tag{2.11}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} (|f(\tau)| + |f(t)|) d\tau \\
&\leq 2 \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)| \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad \forall t \in [a, b] \\
&= 2M \left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha} - \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} \right), \quad \forall t \in [a, b]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

où $M = \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)|$.

Une combinaison de (2.10), (2.11) et (2.12) nous donne :

$$\begin{aligned}
\left| I_{a+}^{\alpha} f(t) - \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\epsilon \delta^{\alpha} + 2M((t-a)^{\alpha} - \delta^{\alpha})] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\epsilon \delta^{\alpha} + 2M((t-a)^{\alpha} - \delta^{\alpha})],
\end{aligned}$$

faisons tendre α vers 0^+ , on obtient :

$$|I_{a+}^{\alpha} f(t) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \forall \epsilon > 0,$$

ce qui montre que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_{a+}^{\alpha} f(t) - f(t) = 0.$$

Théorème 2.1.2. Si $f \in L^1[a, b]$, et $\alpha > 0$ alors $I_{a+}^\alpha f(t)$ existe pour presque toute $t \in [a, b]$ et on a :

$$I_{a+}^\alpha f \in L^1[a, b].$$

Preuve : Soit $f \in L^1[a, b]$; on a :

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) h(\tau) d\tau,$$

avec $-\infty \leq a < t < +\infty$

tel que :

$$g(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 < u \leq b - a \\ 0, & u \in \mathbb{R} - (0, b - a] \end{cases}$$

et

$$h(u) = \begin{cases} f(u), & a \leq u \leq b \\ 0, & u \in \mathbb{R} - [a, b] \end{cases}$$

comme $g, h \in L^1(\mathbb{R})$, alors $I_{a+}^\alpha f \in L^1[a, b]$.

Théorème 2.1.3. Soit $\alpha > 0$ et soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite des fonctions continues uniformément convergente sur $[a, b]$, alors la suite $(I_{a+}^\alpha f_n)_{n=1}^\infty$ est uniformément convergente et on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la limite comme suit :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{a+}^\alpha f_n \right) (t) = \left(I_{a+}^\alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) (t).$$

Preuve Soit f la limite de la suite (f_n) , alors f est continue sur $[a, b]$ car la convergence est uniforme, alors :

$$\begin{aligned} |I_{a+}^\alpha f_n(t) - I_{a+}^\alpha f(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} [f_n(\tau) - f(\tau)] d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f_n(\tau) - f(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_n - f\|_\infty (b - a)^\alpha, \end{aligned}$$

d'où, la convergence uniforme de la suite $(I_{a+}^\alpha f_n)_{n=1}^\infty$ vers $I_{a+}^\alpha f$ sur $[a, b]$.

2.1.3 Composition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville avec la dérivée ordinaire

Théorème 2.1.4. Soient $\alpha > 0$ et f une fonction continue sur $J = [0, b]$. Si Df est continue alors pour tout $t > 0$ on a :

$$\frac{d}{dt}[I^\alpha f(t)] = I^\alpha \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}.$$

Preuve Par définition on a

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

En effectuant le changement de variable $\tau = t - s^\lambda$ avec $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ alors on obtient

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t^\alpha}^0 (s^\lambda)^{\alpha-1} f(t - s^\lambda) (-\lambda s^{\lambda-1}) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^{t^\alpha} f(t - s^\lambda) ds. \end{aligned}$$

En utilisant règle de dérivation de Leibniz 1.3.1, on obtient

$$\frac{d}{dt}[I^\alpha f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[f(0) \alpha t^{\alpha-1} + \int_0^{t^\alpha} \frac{d}{dt} f(t - s^\lambda) ds \right].$$

Maintenant, si on inverse le changement de variable, c'est à dire on pose $\tau = t - s^\lambda$, alors

$$ds = -\frac{1}{\lambda} s^{1-\lambda} d\tau,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[I^\alpha f(t)] &= \frac{f(0)}{\alpha \Gamma(\alpha)} \alpha t^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_t^0 \frac{d}{dt} f(\tau) \left(-\frac{1}{\lambda} s^{1-\lambda} \right) d\tau \\ &= \frac{f(0)}{\alpha \Gamma(\alpha)} \alpha t^{\alpha-1} + \frac{\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \frac{d}{dt} f(\tau) d\tau \\ &= I^\alpha [Df(t)] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

2.1.4 Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L

Lemme 2.1.1. Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in L^1[0, b]$ pour tout $b > 0$, alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L est formulée comme suit :

$$\mathcal{L}(I_{0+}^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s).$$

Preuve On peut écrire $I_{0+}^\alpha f$ sous la forme d'une convolution de deux fonctions $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $f(\tau)$

$$I_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(\tau),$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I_{0+}^\alpha f](s) &= \mathcal{L} \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f \right] (s) \\ &= \mathcal{L} \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] (s) \cdot \mathcal{L}[f(\tau)](s). \end{aligned}$$

On sait que

$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1}](s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}.$$

Donc

$$\mathcal{L}(I_{0+}^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s).$$

2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1. Soit $f \in L^1[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f de borne inférieure a est définie par :

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

$$= D^n \{ I_{a+}^{n-\alpha} f(t) \}, \quad (2.14)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ est dérivée d'ordre entier $n = [\alpha] + 1$.

Cas particuliers

1. $D_{a+}^0 f(t) = D^1 \{ I_{a+}^1 f(t) \} = f(t)$ (D_{a+}^0 est l'opérateur identité).
2. Pour $\alpha = n$ où n est un entier, l'opérateur donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre n .

$$D_{a+}^n f(t) = D^{n+1} I_{a+}^{n+1-n} f(t) = D^{n+1} I_{a+}^1 f(t) = D^n f(t)$$

Remarque 2.2.1. Si $\alpha < 0$, on convient de prendre $D_{a+}^\alpha f(t) = I_{a+}^{-\alpha} f(t)$.

Remarque 2.2.2. Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite D_{0+}^α par D^α .

Lemme 2.2.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \alpha$ alors ;

$$D_{a+}^\alpha = D^n I_{a+}^{n-\alpha}.$$

Preuve L'hypothèse sur n implique que $n \geq [\alpha] + 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} D^n I_{a+}^{n-\alpha} &= (D^{[\alpha]+1} D^{n-[\alpha]-1}) (I_{a+}^{n-[\alpha]-1} I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha}) \\ &= D^{[\alpha]+1} (D^{n-[\alpha]-1} I_{a+}^{n-[\alpha]-1}) I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha} \\ &= D^{[\alpha]+1} I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha} = D_{a+}^\alpha, \end{aligned}$$

car $D^{n-[\alpha]-1} I_{a+}^{n-[\alpha]-1} = I$ (l'opérateur identité).

Théorème 2.2.1. Soit f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ alors :

$D_{a+}^\alpha (c_1 f + c_2 g)$ existe, et on a :

$$D_{a+}^\alpha (c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 D_{a+}^\alpha f(t) + c_2 D_{a+}^\alpha g(t).$$

2.2.1 Dérivées fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles

1. Soit $f(t) = (t - a)^\beta$ avec $\beta > -1$.

Il suffit d'appliquer la définition 2.2.1 et le résultat (2.5)

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{d^n}{dt^n} (I_{a+}^{n-\alpha} (t - a)^\beta) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + n - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta+n-\alpha} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + n - \alpha + 1)} \frac{d^n}{dt^n} (t - a)^{\beta+n-\alpha}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

on sait que

$$\frac{d^n}{dt^n} (t - a)^{\beta+n-\alpha} = (\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)(t - a)^{\beta-\alpha}. \tag{2.16}$$

Et comme on a :

$$\Gamma(\beta + n - \alpha + 1) = (\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1). \quad (2.17)$$

Par substitution de (2.16) et (2.17) dans (2.15) on obtient :

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)(t - a)^{\beta - \alpha}}{(\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Donc ;

$$D_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \quad (2.18)$$

Dans le cas où $a = 0$ on a :

$$D_{0+}^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{\beta - \alpha}. \quad (2.19)$$

Un cas particulier très important à mentionner est que :

Corollaire 2.2.1. $D_{0+}^{\alpha} t^{\beta} = 0$, pour tout $\beta = \alpha - i$ avec $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (n est le plus petit entier $\geq \alpha$) ; en effet

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha} t^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - n + 1} \tau^{\beta} d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I_{0+}^{n - \alpha} t^{\beta}) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + n - \alpha + 1)} t^{\beta + n - \alpha} \right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + n - \alpha + 1)} t^{n - i} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + n - \alpha + 1)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n - i}) = 0. \end{aligned}$$

2. Le fonction constante $f(t) = C$

$$\begin{aligned}
 D_{a+}^{\alpha} C &= \frac{d^n}{dt^n} (I_{a+}^{n-\alpha} C) \\
 &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} (t-a)^{n-\alpha} \right) \\
 &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

On a ;

$$\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1) \dots (1-\alpha)(t-a)^{-\alpha}, \tag{2.21}$$

et comme on a ;

$$\Gamma(n-\alpha+1) = (n-\alpha)(n-\alpha-1) \dots (1-\alpha)\Gamma(1-\alpha). \tag{2.22}$$

Par substitution de (2.21) et (2.22) dans (2.20) on obtient :

$$\begin{aligned}
 D_{a+}^{\alpha} C &= \frac{C(n-\alpha)(n-\alpha-1) \dots (1-\alpha)(t-a)^{-\alpha}}{(n-\alpha)(n-\alpha-1) \dots (1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \\
 &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$D_{a+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \tag{2.23}$$

C'est-à-dire que la dérivée au sens de Riemann- Liouville d'une constante n'est pas nulle.

3. Fonction exponentielle $f(t) = \exp(kt)$, Pour $k > 0$, et $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$.

En utilisant la formule (2.14) en $a = -\infty$ et la résultat (2.9) a donne ;

$$\begin{aligned}
 D_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) &= \frac{d^n}{dt^n} I_{-\infty}^{n-\alpha} \exp(kt) \\
 &= \frac{d^n}{dt^n} (k^{\alpha-n} \exp(kt)) \\
 &= k^{\alpha-n} k^n \exp(kt) \\
 &= k^{\alpha} \exp(kt).
 \end{aligned}$$

Donc ;

$$D_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) = k^{\alpha} \exp(kt). \tag{2.24}$$

4. Fonctions $\sin bx$ et $\cos bx$

Les dérivés fractionnaires de ces fonctions trigonométriques seront déduites à l'aide de la formule précédente et des autres concepts de l'analyse complexe. On peut généraliser le dernier résultat pour $k = ib$

$$D_{-\infty}^{\alpha} e^{ibt} = (ib)^{\alpha} e^{ibt} = i^{\alpha} b^{\alpha} e^{ibt}. \quad (2.25)$$

Selon la formule de Moivre, on a

$$i^{\alpha} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{\alpha} = \cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (2.26)$$

Et avec la formule d'Euler, dans (2.25)

$$D_{-\infty}^{\alpha} e^{ibt} = b^{\alpha} \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) (\cos bt + i \sin bt). \quad (2.27)$$

Comme $D_{-\infty}^{\alpha}$ est linéaire, alors

$$D_{-\infty}^{\alpha} e^{ibt} = D_{-\infty}^{\alpha} \cos bt + i D_{-\infty}^{\alpha} \sin bt. \quad (2.28)$$

De (2.27) et (2.28), on trouve

$$\begin{aligned} D_{-\infty}^{\alpha} \cos bt + i D_{-\infty}^{\alpha} \sin bt &= b^{\alpha} \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) (\cos bt + i \sin bt) \\ &= b^{\alpha} \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} \cos bt - \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sin bt \right) \\ &\quad + i b^{\alpha} \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos bt + \cos \frac{\alpha\pi}{2} \sin bt \right) \\ &= b^{\alpha} \cos \left(\frac{\alpha\pi}{2} + bt \right) + i b^{\alpha} \sin \left(\frac{\alpha\pi}{2} + bt \right). \end{aligned}$$

Par l'application des deux membres on conclut que,

$$D_{-\infty}^{\alpha} \cos bt = b^{\alpha} \cos \left(\frac{\alpha\pi}{2} + bt \right), \quad (2.29)$$

et

$$D_{-\infty}^{\alpha} \sin bt = b^{\alpha} \sin \left(\frac{\alpha\pi}{2} + bt \right). \quad (2.30)$$

Lemme 2.2.2. Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a, b]$ alors l'égalité :

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t),$$

est vraie pour presque tout sur $[a, b]$.

Preuve En utilisant la définition [2.2.1](#) et le théorème [2.1.1](#) on aura :

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(t) &= D_{a+}^n I_{a+}^{n-\alpha} (I_{a+}^{\alpha} f(t)) \\ &= D_{a+}^n (I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^{\alpha}) f(t) \\ &= D_{a+}^n I_{a+}^n f(t) = f(t). \end{aligned}$$

2.2.2 Compositions des dérivées fractionnaires

Soient, $m - 1 \leq \alpha < m$ et $n - 1 \leq \beta < n$,

$$D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f(t) = D_{a+}^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^n [D_{a+}^{\beta-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)},$$

et

$$D_{a+}^{\beta} D_{a+}^{\alpha} f(t) = D_{a+}^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^m [D_{a+}^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}.$$

D'après les deux relations précédentes, nous pouvons conclure que les dérivées fractionnaires au sens de R-L ne commutent pas.

2.2.3 Compositions mixtes

Théorème 2.2.2. Soient α, β deux réels tels que $n - 1 \leq \alpha < n$, $m - 1 \leq \beta < m$ avec $(n, m \in \mathbb{N}^*)$ alors :

1. Si $0 < \beta < \alpha$, alors pour $f \in L^1[a, b]$ l'égalité :

$$D_{a+}^{\beta} (I_{a+}^{\alpha} f)(t) = I_{a+}^{\alpha-\beta} f(t),$$

est vrai presque partout sur $[a, b]$.

2. Si $0 < \alpha \leq \beta$ et la dérivée fractionnaire $D_{a+}^{\beta-\alpha} f$ existe alors :

$$D_{a+}^{\beta} (I_{a+}^{\alpha} f)(t) = D_{a+}^{\beta-\alpha} f(t).$$

3. S'il existe une fonction $g \in L^1[a, b]$ tel que $f = I_{a+}^{\alpha} g$ alors :

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t),$$

pour presque tout $t \in [a, b]$.

4. Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $D_{a+}^\alpha f$ et $D_{a+}^{k+\alpha} f$ existent, alors :

$$D^k (D_{a+}^\alpha f(t)) = D_{a+}^{k+\alpha} f(t).$$

Preuve En utilisant la définition 2.2.1 et la théorème 2.1.1 on obtient :

1. Pour $0 < \beta < \alpha$ on a :

$$\begin{aligned} D_{a+}^\beta (I_{a+}^\alpha f)(t) &= D^n I_{a+}^{n-\beta} (I_{a+}^\alpha f)(t) \\ &= D^n (I_{a+}^{n+\alpha-\beta} f)(t) \\ &= D^n I_{a+}^n (I_{a+}^{\alpha-\beta} f)(t) \\ &= I_{a+}^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

2. Pour $0 < \alpha \leq \beta$ on a :

$$\begin{aligned} D_{a+}^\beta (I_{a+}^\alpha f)(t) &= D^m I_{a+}^{m-\beta} (I_{a+}^\alpha f)(t) \\ &= D^m I_{a+}^{m-(\beta-\alpha)} f(t) \\ &= D_{a+}^{\beta-\alpha} f(t). \end{aligned}$$

3. D'après de lemme 2.2.2

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f(t) &= I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha (I_{a+}^\alpha g(t)) \\ &= I_{a+}^\alpha g(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} D^k (D_{a+}^\alpha f(t)) &= D^k D^n I_{a+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^{k+n} I_{a+}^{n-\alpha+k-k} f(t) \\ &= D^{k+n} I_{a+}^{k+n-(k+\alpha)} f(t) \\ &= D_{a+}^{k+\alpha} f(t). \end{aligned}$$

Lemme 2.2.3. Supposons que $h \in L^1(0, +\infty)$; $\alpha > 0$ et $D_{0+}^\alpha h(t) \in L^1(0, +\infty)$, alors $I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha h(t) = h(t) + \sum_{i=1}^n c_i t^{\alpha-i}$ où $c_i \in \mathbb{R}$ et $n = [\alpha] + 1$.

En effet, $D_{0+}^\alpha t^{\alpha-i} = 0$.

2.2.4 Autres résultats concernant les dérivées fractionnaires

Théorème 2.2.3. Soient $\alpha > 0$ et $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite des fonctions continues uniformément convergente sur $[a, b]$, et que $D_{a+}^{\alpha} f_k$ existe pour chaque k .

Si la suite $(D_{a+}^{\alpha} f_k)_{k=1}^{\infty}$ est uniformément convergente sur $]a, b]$. Alors, pour chaque $t \in [a, b]$, nous avons

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} D_{a+}^{\alpha} f_k \right) (t) = \left(D_{a+}^{\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) (t).$$

Propositions 2.2.1. Soit $f \in C[a, +\infty[$. Si $D_{a+}^{\alpha} f(t)$ existe en un point t_0 , il en est de même que D_{b+}^{α} quelque soit $b < t_0$. On a,

1. $I_{a+}^{n-\alpha} f(t) = I_{b+}^{n-\alpha} f(t) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$
2. $D_{a+}^{\alpha} f(t) = D_{b+}^{\alpha} f(t) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^b (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$

Preuve

1. On a par définition de l'opérateur d'intégration fractionnaire et ses propriétés

$$\begin{aligned} I_{a+}^{n-\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_a^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau + \int_b^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_b^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= I_{b+}^{n-\alpha} f(t) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

2. Utilisons le résultat (1), on trouve

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} f(t) &= D^n I_{a+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^n I_{b+}^{n-\alpha} f(t) + D^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= D_{b+}^{\alpha} f(t) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^b (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1. Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors la dérivée fractionnaire $D_{a+}^\alpha f$ existe presque partout sur $[a, b]$ et elle est donnée par

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j - \alpha + 1)} (t - a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

2.2.5 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L

Théorème 2.2.4. Si $f \in L^1[0, b]$, $b > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L de f est :

$$\mathcal{L}(D_{0+}^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_{0+}^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}.$$

avec $n - 1 < \alpha < n$, cette transformée de Laplace est bien connue .

Preuve Par la définition 2.2.1 et lemme 2.1.1, on trouve,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D_{0+}^\alpha f)(s) &= \mathcal{L}(D^n I_{0+}^{n-\alpha} f)(s) \\ &= s^n \mathcal{L}(I_{0+}^{n-\alpha} f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{n-k-1} (I_{0+}^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \\ &= s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_{0+}^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}. \end{aligned}$$

Intégrales et dérivées de quelques fonctions usuelles (résultats)

$f(t)$	$I_{a+}^\alpha f(t)$	$D_{a+}^\alpha f(t)$	Spécifications
$(t - a)^\beta$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t - a)^{\alpha+\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t - a)^{\beta-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > -1$
t^β	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}$	$a = 0, \alpha > 0, \beta > -1$
C	$\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t - a)^\alpha$	$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t - a)^{-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, C \in \mathbb{R}$
$\exp(kt)$	$k^{-\alpha} \exp(kt)$	$k^\alpha \exp(kt)$	$a = -\infty, \alpha > 0, k > 0$

2.3 Comparaison entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et la dérivée au sens de Caputo

Dans une modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de R-L mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires

à la borne inférieure de l'intervalle. Caputo a utilisé une approche pour éviter ce problème. Pour $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$, et une fonction f telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a, b]$; La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction f est donnée par :

$${}^c D_{a+}^\alpha f(t) = I_{a+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) d\tau,$$

avec $n-1 \leq \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Et la relation entre les dérivées de Riemann-Liouville et Caputo est donnée comme suit : supposons que f est fonction telle que $D_{a+}^\alpha f(t)$, ${}^c D_{a+}^\alpha f(t)$ existent, alors

$$D_{a+}^\alpha f(t) = {}^c D_{a+}^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a).$$

Les deux dérivées sont égales dans le cas où $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$

- L'avantage principale de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équation différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.
- Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est $\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$.
- Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville), c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $n-1 < \alpha < n$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(n-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m , mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $n-1 < \alpha < n$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(n-\alpha)$.

Chapitre 3

Applications

3.1 Application 1 : Problème d'hypothèque

(voir [5])

Supposons qu'un client prend un prêt de P dinars à un taux d'intérêt de $R\%$ par an, et veut rembourser le prêt en Z années. L'objectif immédiat est de savoir ce que les paiements annuels devraient être pour que le prêt est effectivement compensé en Z années. Supposons que chaque paiement annuel est de A dinars et la dette restante à la fin de T années est $y(T)$, on peut montrer que :

$$y(T) = P(1 + R)^T - \frac{A}{R}[(1 + R)^T - 1], \quad (3.1)$$

dans le cas où $T = Z$ on veut que la dette $y(Z) = 0$, alors comme P et R sont connus, on trouve

$$A = \frac{P(1 + R)^Z R}{(1 + R)^Z - 1}. \quad (3.2)$$

Cependant les clients sont généralement intéressés à connaître mensuel et non annuel paiement. Par conséquent, on peut transformer les deux équations (3.1) et (3.2) en

$$\begin{cases} y(t) = P(1 + r)^t - \frac{a}{r}[(1 + r)^t - 1] \\ a = \frac{P(1+r)^z r}{(1+r)^z - 1} \end{cases} \quad (3.3)$$

où $y(t)$ est la dette restante à la fin de la $t^{\text{ème}}$ mois, r est l'intérêt mensuel, a le paiement mensuel, z le nombre totale des mois. Le problème dont nous avons discuté peut être modélisé

en utilisant l'équation de différence suivante

$$\Delta y(t) - ry(t) = -a, \quad (3.4)$$

qui admet comme solution (3.3) notre objectif maintenant est d'approximer la solution de (3.4) en utilisant une équation différentielle d'ordre fractionnaire. Pour achever cet objectif on considère l'équation

$$D_{0+}^v y(t) - ry(t) = -a, \quad 0 < v < 1. \quad (3.5)$$

On va résoudre cette équation en utilisant la transformée de Laplace. Prenons la transformet du 2 nombres de l'équation (3.5), on obtient

$$\mathcal{L}\{D_{0+}^v y(t) - ry(t)\} = \mathcal{L}\{-a\}.$$

D'après de propriété 1.4.1, on obtient

$$\mathcal{L}\{D_{0+}^v y(t)\} - r\mathcal{L}\{y(t)\} = -\mathcal{L}\{a\}.$$

En utilisant le théorème 2.2.4 et la formule (1.8) on trouve :

$$s^v \mathcal{L}\{y(t)\} - D^{-(1-v)}y(0) - r\mathcal{L}\{y(t)\} = -\frac{a}{s}.$$

Par conséquent

$$s^v Y(s) - D^{-(1-v)}y(0) - rY(s) = -\frac{a}{s}, \quad (3.6)$$

si on pose $c = D^{-(1-v)}y(0)$, alors on trouve

$$Y(s) = \frac{c}{s^v - r} - \frac{a}{s(s^v - r)}.$$

En utilisant le tableau d'inverse de $Y(s)$ dans le premier chapitre

$$y_v(t) = ct^{v-1}E_{v,v}(rt^v) - at^v E_{v,v+1}(rt^v), \quad (3.7)$$

comme nous avons

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{v-1}E_{v,v}(rt^v) = 1,$$

on soit également que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^v E_{v,v+1}(rt^v) = 0,$$

dans ce cas, on peut considérer c comme la dette initiale, dont la valeur est P . Alors, l'équation (3.7) peut être écrit comme suit

$$y_v(t) = Pt^{v-1}E_{v,v}(rt^v) - at^v E_{v,v+1}(rt^v). \quad (3.8)$$

Exemple 3.1.1. Supposons qu'un client prend une hypothèque de 30 ans à 100,000 dinars d'intérêt annuel 7%.

Puis à l'aide de (3.3) nous notons que

$$P = 100,000; \quad r = \frac{0.07}{12}; \quad z = 360; \quad a = \frac{P(1+r)^z r}{(1+r)^z - 1} = 665. \quad (3.9)$$

Nous pouvons maintenant écrire spécifiquement (3.3) et (3.8), respectivement, comme

$$y_1(t) = 100,000(1 + 0.07/12)^t - \frac{665}{0.07/12}[(1 + 0.07/12)^t - 1], \quad (3.10)$$

et

$$y_v(t) = 100,000t^{v-1}E_{v,v}((0.07/12)t^v) - 665t^v E_{v,v+1}((0.07/12)t^v). \quad (3.11)$$

La figure 3.1 présente une comparaison sur le comportement de $y_1(t)$ et $y_v(t)$, pour $v = 0.99, 0.98$ et $t \in [0, 360]$.

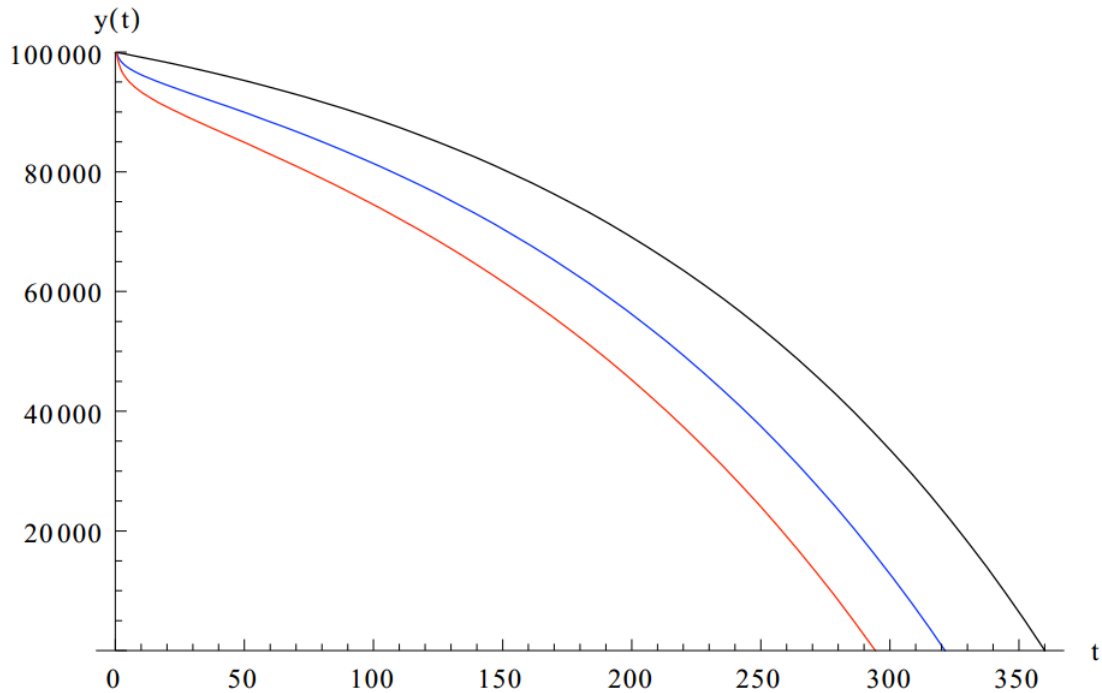


FIGURE 3.1 – Dans cette figure, y_1 est la plus haute courbe, et $y_{0.98}$ est la partie inférieure courbe. Notez que y_v s'approche y_1 comme $v \rightarrow 1$. Aussi, remarque que le client devrait payer au loin le prêt beaucoup plus vite si l'un des modèles de rapprochement (fractionnaire) a été utilisé. En fait, il semble que plus la valeur de v , plus vite qu'il faudra pour rembourser le prêt. nous pouvons conclure qu'une plus petite valeur de v , où $0 < v < 1$, est l'équivalent de raccourcir les intervalles entre les paiements, et donc d'abaisser le taux d'intérêt.

3.2 Application 2 : Existence de solution pour un problème aux limites d'ordre fractionnaire

(voir [13])

Soit le problème aux limites suivante :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), & 1 < \alpha \leq 2, \quad t \in [0, T], \quad T > 0 \\ I_{0+}^{2-\alpha} u(t)|_{t=0} = 0, & D_{0+}^{\alpha-2} u(T) = \sum_{i=1}^m a_i I_{0+}^{\alpha-1} u(\xi_i) \end{cases} \quad (3.12)$$

où $0 < \xi_i < T$, $T > 0$, $a_i \in \mathbb{R}_+$, $m \geq 2$, D_{0+}^{α} et I_{0+}^{α} sont respectivement la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire α au sens de Riemann-Liouville, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

3.2.1 Problème auxiliaire

Lemme 3.2.1. *Pour tout $y(t) \in C([0, T])$, le problème :*

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t) = y(t), & 1 < \alpha \leq 2, \quad t \in [0, T], \quad T > 0 \\ I_{0+}^{2-\alpha} u(t)|_{t=0} = 0, & D_{0+}^{\alpha-2} u(T) = \sum_{i=1}^m a_i I_{0+}^{\alpha-1} u(\xi_i) \end{cases} \quad (3.13)$$

admet une solution unique :

$$\begin{aligned} u(t) = & \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\tau) d\tau + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T-A)} \left[\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} y(\tau) d\tau \right. \\ & \left. - \int_0^T (T - \tau) y(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

tels que $A = \frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)}$ et $T \neq A$.

Preuve D'après le Lemme [2.2.3], le problème [3.13] est équivalent à :

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} y(\tau) d\tau.$$

Selon les résultats ([2.6]), ([2.19]) et le théorème [2.1.1] on a ;

•

$$\begin{aligned}
I_{0+}^{2-\alpha}u(t) &= c_1 (I_{0+}^{2-\alpha}t^{\alpha-1}) + c_2 (I_{0+}^{2-\alpha}t^{\alpha-2}) + I_{0+}^{2-\alpha} (I_{0+}^{\alpha}y)(t) \\
&= c_1 \Gamma(\alpha)t + c_2 \Gamma(\alpha-1) + I_{0+}^2 y(t).
\end{aligned}$$

À partir de la condition $I_{0+}^{2-\alpha}u(t)|_{t=0} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
c_1 \Gamma(\alpha)0 + c_2 \Gamma(\alpha-1) + I_{0+}^2 y(0) = 0 &\implies c_2 \Gamma(\alpha-1) = 0 \\
&\implies c_2 = 0.
\end{aligned}$$

Donc,

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + I_{0+}^{\alpha} y(t).$$

• D'une autre part on a :

$$\begin{aligned}
D_{0+}^{\alpha-2}u(t) &= c_1 (D_{0+}^{\alpha-2}t^{\alpha-1}) + D_{0+}^{\alpha-2} (I_{0+}^{\alpha}y)(t) \\
&= c_1 \Gamma(\alpha)t + I_{0+}^2 y(t),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_{0+}^{\alpha-1}u(t) &= c_1 (I_{0+}^{\alpha-1}t^{\alpha-1}) + I_{0+}^{\alpha-1} (I_{0+}^{\alpha}y)(t) \\
&= c_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha-1)} t^{2\alpha-2} + I_{0+}^{2\alpha-1} y(t).
\end{aligned}$$

En utilisant la condition aux limites $D_{0+}^{\alpha-2}u(T) = \sum_{i=1}^m a_i I_{0+}^{\alpha-1}u(\xi_i)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_1 \Gamma(\alpha)T + I_{0+}^2 y(T) &= \sum_{i=1}^m a_i \left[c_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha-1)} \xi_i^{2\alpha-2} + I_{0+}^{2\alpha-1} y(\xi_i) \right] \\
&= c_1 \Gamma(\alpha)A + \sum_{i=1}^m a_i I_{0+}^{2\alpha-1} y(\xi_i),
\end{aligned}$$

où $A = \frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)}$. Donc,

$$c_1 [\Gamma(\alpha)(T - A)] = \sum_{i=1}^m a_i I_{0+}^{2\alpha-1} y(\xi_i) - I_{0+}^2 y(T),$$

et alors,

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(T - A)} \left[\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} y(\tau) d\tau - \int_0^T (T - \tau) y(\tau) d\tau \right],$$

tel que $T \neq A$.

Finalement on trouve

$$u(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\tau) d\tau + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T-A)} \left[\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} y(\tau) d\tau - \int_0^T (T-\tau) y(\tau) d\tau \right],$$

ce qui complète la démonstration.

3.2.2 Existence de solution pour le problème donné

$E = C([0, T])$ désigne l'espace de toutes les fonctions continues définies de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par $\|x\| = \sup\{|x(t)|, t \in [0, T]\}$. Soit l'opérateur $P : E \rightarrow E$ défini par :

$$\begin{aligned} (Pu)(t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau, u(\tau)) d\tau \\ &+ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T-A)} \left[\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} f(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_0^T (T-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

On remarque que le problème 3.12 donné équation admet une solution dans E si et seulement si l'opérateur P a un point fixe.

Théorème 3.2.1. *Supposons qu'il existe une constante positive L_1 telle que $|f(t, u(t))| \leq L_1$ pour tout $t \in [0, T]$ et $u \in E$. Alors le problème (3.12) admet au moins une solution dans E .*

Preuve Nous montrons, dans un premier temps, que l'opérateur P est complètement continue. la continuité de l'opérateur P résulte de la continuité de f . Soit Ω une partie

bornée de E , alors pour tout $u \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
|(Pu)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \\
&+ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \right. \\
&+ \left. \int_0^T (T - \tau) |f(\tau, u(\tau))| d\tau \right) \\
&\leq L_1 \left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \right. \\
&+ \left. \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} d\tau + \int_0^T (T - \tau) d\tau \right) \right] \\
&\leq L_1 \left[\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{T^2}{2} \right) \right], \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|Pu\| \leq L_1 \left[\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{T^2}{2} \right) \right] < \infty.$$

Par conséquent, $P(\Omega)$ est uniformément borné.

Pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ et $u \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
|(Pu)(t_1) - (Pu)(t_2)| &= \left| \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\
&+ \frac{t_1^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T-A)} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\
&- \left. \int_0^T (T - \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) - \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau, u(\tau)) d\tau \\
&- \frac{t_2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T-A)} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\
&- \left. \int_0^T (T - \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) \Big| \\
&\leq L_1 \left| \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^{\alpha-1} - (t_2 - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \right. \\
&+ \frac{t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T-A)} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} d\tau \right. \\
&- \left. \int_0^T (T - \tau) d\tau \right) - \left. \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \right| \\
&\leq L_1 \left[\left| \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^{\alpha-1} - (t_2 - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \right| \right. \\
&+ \left. \left| \frac{t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T-A)} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} d\tau - \int_0^T (T - \tau) d\tau \right) \right| \right] \\
&\rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t_1 \rightarrow t_2.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $P(\Omega)$ est équicontinue sur $[0, T]$. Ainsi, par le théorème d'Arsela-Ascoli [1.6.2](#), l'opérateur P est complètement continue sur E .

Dans la suite considérons l'ensemble $V = \{u \in E / u = \mu Pu, \quad 0 < \mu < 1\}$, et montrons qu'il est borné. Soit $u \in V$; alors $u = \mu Pu$, $0 < \mu < 1$ pour tout $t \in [0, T]$, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau, u(\tau)) d\tau \\
&+ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T-A)} \left[\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\
&- \left. \int_0^T (T - \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|u(t)| &= \mu |Pu(t)| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \\
&+ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \right. \\
&+ \left. \int_0^T (T-\tau) |f(\tau, u(\tau))| d\tau \right) \\
&\leq L_1 \left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \right. \\
&+ \left. \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} d\tau + \int_0^T (T-\tau) d\tau \right) \right] \\
&\leq L_1 \left[\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{T^2}{2} \right) \right] = M.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|u\| \leq M$. Alors, l'ensemble V est bornée. Alors d'après le théorème de Schaefer [1.6.4](#), l'opérateur P admet au moins un point fixe, ce qui implique que le problème [\(3.12\)](#) admet au moins une solution.

3.2.3 Résultat d'unicité

Pour le prochain théorème nous utiliserons les deux hypothèses :

(H_1) il existe une constante positive L , tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall t \in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(H_2) La constante L satisfi au condition

$$2L \leq \left[\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{T^2}{2} \right) \right]^{-1}.$$

Théorème 3.2.2. *Supposons qu'en vertu de l'hypothèse (H_1), (H_2), problème [\(3.12\)](#) admet une solution unique dans $E = C[0, T]$.*

Preuve Posons $\sup_{t \in [0, T]} |f(t, 0)| = M_1$, et choisissons

$$r \geq 2M_1 \left[\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{T^2}{2} \right) \right],$$

puis nous montrons que $P(Br) \subset Br$, où $Br = \{u \in E : \|u\| \leq r\}$. Pour tout $u \in Br$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|Pu\| &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\
 &+ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T-A)} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\
 &- \left. \left. \int_0^T (T-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) \right| \\
 &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \right. \\
 &+ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \right. \\
 &+ \left. \left. \int_0^T (T-\tau) |f(\tau, u(\tau))| d\tau \right) \right] \\
 &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (|f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, 0)| + |f(\tau, 0)|) d\tau \right. \\
 &+ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} (|f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, 0)| + |f(\tau, 0)|) d\tau \right. \\
 &+ \left. \left. \int_0^T (T-\tau) (|f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, 0)| + |f(\tau, 0)|) d\tau \right) \right] \\
 &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left[(Lr + M_1) \left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \right. \right. \\
 &+ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} d\tau \right. \\
 &+ \left. \left. \int_0^T (T-\tau) d\tau \right) \right) \right] \\
 &\leq (Lr + M_1) \left[\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T-A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{T^2}{2} \right) \right] \leq r.
 \end{aligned}$$

Ce qui montre que $PB_r \subset B_r$.

Compte tenu de (H_1) , pour chaque $t \in [0, T]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|(Px)(t) - (Py)(t)\| &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (f(t, x) - f(t, y)) d\tau \right. \\
&\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(T - A)} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha - 1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} (f(t, x) - f(t, y)) d\tau \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^T (T - \tau) (f(t, x) - f(t, y)) d\tau \right) \right| \\
&\leq \sup_{t \in [0, T]} \left[\int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(t, x) - f(t, y)| d\tau \right. \\
&\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T - A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha - 1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} |f(t, x) - f(t, y)| d\tau \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^T (T - \tau) |f(t, x) - f(t, y)| d\tau \right) \right] \\
&\leq \sup_{t \in [0, T]} \left[L\|x - y\| \left(\int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \right. \right. \\
&\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T - A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\Gamma(2\alpha - 1)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - \tau)^{2\alpha-2} d\tau \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^T (T - \tau) d\tau \right) \right] \\
&\leq L\|x - y\| \left[\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T - A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{T^2}{2} \right) \right] \\
&= A\|x - y\|,
\end{aligned}$$

où

$$A = L \left[\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)|T - A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{T^2}{2} \right) \right],$$

en vertu de de l'hypothèse (H_2) , $0 < A \leq \frac{1}{2} < 1$, alors P s'agit d'une contraction. Par conséquent le théorème du point fixe de Banach [1.6.3](#) assure que l'opérateur P admet un point fixe unique.

Exemple 3.2.1. *Considérons le problème aux limites à quatre points suivant :*

$$\begin{cases} D_{0+}^{3/2} u(t) + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ I_{0+}^{2-\alpha} u(t)|_{t=0} = 0, & D_{0+}^{\alpha-2} u(T) = \sum_{i=1}^m a_i I_{0+}^{\alpha-1} u(\xi_i) \end{cases} \quad (3.16)$$

où $f(t, u) = \frac{1}{(2t+8)^2} \frac{8\|u\|}{1+\|u\|}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 1/3$,

$T = 2$ nous avons

$A = \sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-2} / \Gamma(2\alpha - 1) = 1 \neq T = 2$. de toute évidence $L = 1/8$ comme

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq 1/8 \|u - v\|,$$

de plus,

$$L \left[\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) |T - A|} \left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i \xi_i^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{T^2}{2} \right) \right] \approx 0.3 < 1.$$

Ainsi, l'ensemble de l'hypothèse du théorème 3.2.2 sont remplies. par conséquent, (3.16) admet une solution unique sur $C[0, 1]$.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire est d'introduire et définir les dérivées et les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville, en tant qu'extension des dérivées et intégrales ordinaires. Ainsi que déterminer les caractéristiques et les résultats liés à ceux-ci, et de les pratiquer et appliquer dans différentes situations. Ce travail nous a permis de savoir l'importance du calcul fractionnaire dans le domaine des mathématiques. Grâce à ce recherche, nous avons beaucoup appris sur le calcul dite fractionnaire, en particulier la maîtrise à une certaine mesure, de calculer des dérivées ou des intégrales fractionnaires pour différentes fonctions.

Nous comptons, dans l'avenir d'appliquer le calcul fractionnaire aux divers problèmes et de développer des autres méthodologies de résolution des équations différentielles et problèmes aux limites d'ordre fractionnaires.

Bibliographie

- [1] **E. Artin** Einführung in die Theorie der Gammafunktion. Teubner, Leipzig (English translation : The Gamma Function. Published 1964 by Holt, Rinehart and Winston, New York), 1931.
- [2] **I. K. Guce**, On fractional derivatives : The non-integer order of the derivative, International Journal of scientific Engineering research, vol.4, issue 3, March-2013.
- [3] **H. Holmgren**, Om differentialkalkylen med indecies af hvad natur som helst, Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Handl. Stockholm, 1865-1866, Bd 5, No.11, 83 pages (in Swedish)
- [4] **V. C. L. Huston, and J. S. Pym**, Application of functional analysis and operator theory. Academic Press London, New York/Toronto/Sydney, 1980.
- [5] **J.M. Kimeu**, Fractional calculus : Definitions and applications, Masters theses Specialist projects, Paper 115, 2009.
- [6] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo**, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, 2006.
- [7] **A. Oustaloup**, Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire : théorie et pratique, Editions Masson, Paris, 1983.
- [8] **I. Podlubny**, Fractional-order Systems and fractional-Order Controllers, UEF-03-94 Slovak Academy of Science, Kosice, 1994.
- [9] **B. Riemann**, Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration and Differentiation, Gesammelte Werke, pp.62, 1876.
- [10] **H. Schaefer**, Über die methode der a priori schranken, Math, 415-416, Ann.126, 1955.

- [11] **H. H. Sun, A. Charef, Y. Tsao, B. Onaral**, "Analysis of polarization dynamics by singularity decomposition method," *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 20, 1992.
- [12] **P. J. Torvik, and R. L. Bagley**, On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials, *Trans. Of the ASME*, vol. 51, 1984.
- [13] **G. WANG, W. LIU and C. REN**, Existence of solutions for multi-point nonlinear differential equations of fractional orders with integral boundary conditions, *Electronic Journal of differential equations*, Vol. 2012, No. 54, pp. 1–10, 2012.
- [14] **M. Wellbeer**, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, *Analytical Background*, D. Univ Braunschweig, 2010.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de s'adapter avec le calcul fractionnaire en introduisant les opérateurs linéaires d'intégration fractionnaire et de différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville. Grâce à une variété d'applications employant ces nouvelles définitions et propriétés qui n'ont pas été abordées auparavant et qui constituent un champ fertile de recherche pour plusieurs genres de problèmes aux limites. Une attention particulière est consacré aux outils auxiliaires nécessaires pour des définir ces nouveaux concepts comme certaines fonctions spéciales (Gamma-bêta...) et à la technique des transformées de Laplace.

Mots clés: dérivée fractionnaire, intégrale fractionnaire, Riemann-Liouville, transformé de Laplace, théorème de point fixe, existence et unicité de solution.

Abstract

The work presented in this memoir is part of the framework of adapting with fractional calculus by introducing the fractional integration and fractional differentiation linear operators of Riemann-Liouville. Through a variety of applications using these new definitions and properties that have not been addressed before and that provide a fertile field of research for many kinds of boundary value problems. Particular attention is devoted to the auxiliary tools necessary to define these new concepts as certain special functions (Gamma-bêta...) and to the Laplace transform technique.

Key words: fractional derivative, fractional integral, Riemann-Liouville, transformed of Laplace, theorem of fixed point, existence and uniqueness of solution.

ملخص

يندرج العمل المقدم في هذه المذكرة في إطار التكيف مع الحساب الكسري من خلال إدخال مؤثري التكامل والتفاضل برتب

غير طبيعية حسب مقارنة ريمان- ليوفيل. وانطلاقاً من مجموعة متنوعة من التطبيقات التي تستخدم هذه التعريفات الجديدة

والخصائص التي لم يتم التطرق لها طيلة المسار الدراسي من قبل حيث توفر مجالاً خصباً للبحث في العديد من أنواع المسائل

الحدية. ويكرس اهتمام خاص للأدوات المساعدة اللازمة لتقديم هذه المفاهيم الجديدة كبعض الدوال الخاصة (غاما-بيتا ..) وتقنية

تحويل لابلاس.

الكلمات المفتاحية: الاشتقاق الكسري, التكامل الكسري, ريمان- ليوفيل, تحويل لابلاس, نظرية النقطة الثابتة, وجود و وحدانية الحل.