



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et De
La Recherche Scientifique



Université Echahid Hamma Lakhdar, El-oued

Faculté Des Sciences Exactes

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et application

Thème

Valeurs et Vecteurs propres :

Méthodes des calculs et applications

Présenté par: Sahraoui Nidhal et Atia Roumaissa

Soutenue devant le jury :

Président M : Touati Brahim Mohammed Said Univ El-Oued

Rapporteur M: Mohammed Beggas Univ El-Oued

Examineur M: Nadjat Doudi Univ El-Oued

Année universitaire : 2024/2025





شكر و تقدير

بعد رحلة بحث و جهد و اجتهاد تكللنا بانجاز هذه المذكرة القيمة، نحمد الله عز و جل على النعمة التي منّ بها علينا فهو العلي القدير ، كما لا يسعنا إلا أن نخص بأسمى عبارات الشكر و التقدير للدكتور " **بقاص محمد** " لما قدمه لنا من جهد ونصح ومعرفة طيلة انجاز هذه المذكرة فلولاً لله ثم وجوده لما أحسسنا بمتعة العمل و حلاوة البحث ، ولا وصلنا إلى ما وصلنا إليه فله منا كل الشكر و التقدير.





الإهداء

كان الطريق إلى النور شائكا ، محفوفاً بالتعب والسهر والإحباط . وها قد من الله عليا بأن شارفت على الوصول ، وبهذه المناسبة الطيبة أهدي ثمرة جهدي :
إلى من كان معي في الإخفاق والنجاح ، و في مواجهة الحياة ، في الانطلاق و حتى النهاية ، إلى معلمي الأول

" أبي الغالي "

إلى التي رافقتني في أحلامي وتفصيلي الصغيرة ، إلى ملاذي و جنة دنيائي

" قمري الأجل أمي "

إلى الإثني عشرة كوكبا سر طفولتي السعيدة ومنبع العطاء في شبابي

" أخي و أخواتي "

إلى من ألن لي الطريق و كن كما الزهر الذي يعبق سعادة و لطفا

" صديقتي و رفيقات عمري "

إلى هؤلاء أهدي هذا العمل المتواضع .

صحراوي نضال



إهداء

الحمد لله حباً وشكراً وامتناناً على البدء والختام، ها قد أتممت بفضل هذا العمل وبهذه المناسبة أهدى بحث تخرجي بكل حب قبل كل شيء إلى نفسي التي تحملت عناء الطريق، من ثم ...

إلى أولئك الذين كانوا الوطن حين كانت الرحلة طويلة ...

إلى أمي

نبض البدايات ودفء كل الطرق،

يا من كنت الدعاء الذي لا ينقطع، والحنان الذي لا يقاس.

في كل لحظة تعب، كنت السند والصبر، وكنت الوطن.

إلى أبي

سندي الأول، من علمني أن لا شيء مستحيل أمام العزيمة.

وأن الإرادة تصنع المعجزات وأن الخطوات الصغيرة تصنع الطريق الطويل.

إلى إخوتي وأخواتي

أنتم الضحكة في وقت الضيق، والدعامة الخفية التي تشد الظهر.

كنتم ومازلتم جزءاً من هذا الحلم، بضحكاتكم، وحتى بصمتكم الذي كان أماناً.

إلى أصدقائي

رفقاء الأيام الثقيلة، يا من تقاسمتم معي ساعات الدراسة.

رفاق القلق والنجاح، من كنتم المعنى الآخر للرفقة الحقيقية.

عطية رميسة

Notation

$M_n(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices carrées d'ordre n .

A_n : Matrice carrée d'ordre n .

I_n : Matrice identité d'ordre n .

λ : Valeur propre.

V : Vecteur propre.

$\rho(A)$: Rayon spectrale de A .

Δx : Le pas en espace.

Table des matières

Notation	i
Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Rappel sur les matrices	3
1.2 Matrice carrée particulière	4
1.3 Propriétés principales d'une matrice carrée	6
1.4 Différences finies en dimension 1	8
1.4.1 Discrétisation de domaine	8
1.4.2 Approximation de dérivées secondes	8
1.5 Différences finies en dimension 2	9
1.5.1 Discrétisation de domaine	9
1.5.2 Approximation de dérivées secondes	9
1.6 Discrétisation de temps	9
1.6.1 Approximation des dérivées par rapport au temps	10
1.7 Théorème de Lax	10
2 Méthodes directes pour calculer les valeurs et les vecteurs propres	11
2.1 Généralités sur les valeurs et les vecteurs propres	11

2.1.1 Valeurs propres et Vecteurs propres	11
2.1.2 Quelques propriétés	13
2.2 Méthodes directes pour calculer les valeurs propres	14
2.3 Les valeurs propres d'une matrice tridiagonal	16
2.4 Les valeurs propres d'une matrice tridiagonale par blocs symétrique	18
3 Méthodes itératives pour le calcul des valeurs propres	21
3.1 Méthode de puissance	22
3.2 Méthode de puissance inverse	27
3.3 Méthode de Jacobi	30
4 Applications	34
Conclusion	48
Bibliography	49
Annex	50

Introduction

Le concept de valeur propre est une notion algébrique s'appliquant à une application linéaire d'un espace dans lui même, il intervient aussi bien en mathématiques pures qu'appliquées.

La première méthode pour calculer les valeurs propres d'une matrice était utilisé par Joseph Luis Lagrange (1736 - 1813). Elle consiste à calculer les racines du polynôme caractéristique.

On sait depuis Galois (1811-1832) et Abel (1802-1829) qu'on ne peut pas calculer par opérations élémentaires les racines d'un polynôme quelconque de degré supérieur ou égal à cinq. On préfère donc les méthodes itératives dans lesquelles on approche pas à pas des valeurs propres.

L'approximation numérique des valeurs propres est un problème important rencontré dans le traitement d'équations différentielles, EDP et d'équation intégrales. Cette approche permet aussi de résoudre de multiples problèmes de vibration, l'étude de l'équation de Schrodinger en mécanique quantique, la théorie des graphes.

Les méthodes itératifs sont des algorithmes qui nous donne une approximation des valeurs propres. Nous étudierons deux types de méthodes : méthodes partiels fournissant seulement certaines valeurs propres et méthodes globales qui rendent compte de l'ensemble de tout le spectre.

Dans notre mémoire, nous avons adopté le plan suivant :

Après une introduction générale, nous avons cité quelques définitions et propriétés sur les matrices carrées.

Quand au deuxième chapitre, nous avons abordé la méthode directe du calcul des valeurs propres et les vecteurs propres associés.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes itératives pour calculs des valeurs et vecteurs propres, tel que :

- La méthode des puissances.
- La méthode des puissances inverses.
- La méthode de Jacobi.

La dernière chapitre est sous une forme des applications qui montrent les intérêts aux différents domaines de mathématiques. (calcul puissance d'une matrice, résolution d'un système différentiel, méthodes itératives).

Finalement, cette mémoire contient une annexe de Matlab et clôturée par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous mentionnons des rappelles sur les matrices et quelques propriétés d'une matrice carré, ainsi des matrices particulière.

1.1 Rappelle sur les matrices

Définition 1.1.1. *Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions n et m respectivement, toute application linéaire l de E dans F peut se représenter par un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}, \end{pmatrix}$$

appelée matrice associée à l .

On notera

$$A = (a_{i,j}) \text{ avec } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

- Pour $i = 1$: $A = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$.

- Pour $j = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.2. (*Matrice carrée*) Pour $n = m$, On dit que A une matrice carée d'ordre n .

Exemple 1.1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A est une matrice carrée d'ordre 2.

1.2 Matrice carrée particulière

Définition 1.2.1. (*Matrice triangulaire supérieure*) C'est une matrice M , telle que

$$M_{i,j} = 0, \quad (i > j).$$

Exemple 1.2.1.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -6 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.2. (*Matrice triangulaire inférieure*) C'est une matrice N où

$$N_{i,j} = 0, \quad (i < j).$$

Exemple 1.2.2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.3. (*Matrice tridiagonale*) La matrice tridiagonale est

$$R = \begin{pmatrix} d & e & 0 & 0 \\ f & d & e & 0 \\ 0 & f & d & e \\ 0 & 0 & f & d \end{pmatrix}$$

- Si $e = f$, on dit que R est tridiagonale symétrique.
- La matrice tridiagonale symétrique par bloc :

$$R = \begin{pmatrix} D & E & 0 & 0 \\ E & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & E \\ 0 & 0 & E & D \end{pmatrix}$$

où :

- D : matrice tridiagonal symétrique.
- E : matrice symétrique.

Définition 1.2.4. (*Matrice diagonale*) C'est une matrice carrée, telle que

$$a_{ij} = 0 \quad \forall j \neq i.$$

Exemple 1.2.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.5. (*Matrice unité*) C'est une matrice diagonale où

$$a_{ii} = 1, \quad \forall i.$$

Exemple 1.2.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note aussi I_n où n est la dimension de la matrice, c'est aussi l'élément neutre de la multiplication matricielle.

Définition 1.2.6. (*Matrice transposée*) La matrice transposée de $A = (a_{i,j})$ est

$$A^t = (a_{j,i}).$$

1.3 Propriétés principales d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée tel que

$$A = (A_{i,j}), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Définition 1.3.1. (*Matrice symétrique*) Une matrice A est dite symétrique, si

$$(a_{i,j}) = (a_{j,i}), \quad \forall (i, j),$$

donc : $A^t = A$.

Exemple 1.3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Définition 1.3.2. (*Matrice inverse*) La matrice inverse de A est par définition, la matrice noté A^{-1} telque

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

où I est la matrice d'identité.

Exemple 1.3.2.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Définition 1.3.3. (*Matrice orthogonale*) La matrice A est dite orthogonale, Si $A^{-1} = A^t$.

Définition 1.3.4. (*Matrice définie positive*) On appelle forme quadratique associée à la matrice A la forme

$$Q(X) = X^t A X.$$

Une forme quadratique est dite définie positive si

$$X^t A X > 0, \quad (\forall X \neq 0).$$

Une matrice carrée est définie positive si la forme quadratique associée est définie positive.

1.4 Différences finies en dimension 1

1.4.1 Discrétisation de domaine

Soit $\Omega = [a, b]$ un domaine de $\mathbb{R}$ et $\partial\Omega = \{a, b\}$ la frontière de Ω .

Le maillage uniforme définie sur le domaine Ω est : $x_i = a + ih$, où $h = x_{i+1} - x_i$.

1.4.2 Approximation de dérivées secondes

Différences finies centrées :

On considère le développement de Taylor de $u(x_i + \Delta x)$ et $u(x_i - \Delta x)$:

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} u^{(4)}(\xi_1),$$

tel que $x_i < \xi_1 < x_i + \Delta x$, et

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} u^{(4)}(\xi_2),$$

tel que $x_i - \Delta x < \xi_2 < x_i$.

Effectuant la somme de ces deux équations, on obtient

$$u(x_i + \Delta x) + u(x_i - \Delta x) = 2u(x_i) + \Delta x^2 u^{(2)}(x_i) + O(\Delta x^4),$$

ce qui équivaut à

$$u^{(2)}(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) + u(x_i - \Delta x) - 2u(x_i)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Alors

$$u^{(2)}(x_i) \approx \frac{u(x_i + \Delta x) + u(x_i - \Delta x) - 2u(x_i)}{\Delta x^2}.$$

Donc, on peut écrire

$$u_i^{(2)} \approx \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{\Delta x^2}.$$

1.5 Différences finies en dimension 2

1.5.1 Discrétisation de domaine

Dans ce cas on discrétise le domaine rectangulaire $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, par des maillages formés de grilles perpendiculaire. On prend Δx et Δy les pas discrétisation de l'intervalle $[a, b] \times [c, d]$ respectivement. Le maillage définie sur le domaine $[a, b] \times [c, d]$ est : $(x_i, y_j) = (a + i\Delta x, c + j\Delta y)$, où $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ et $\Delta y = y_{j+1} - y_j$ avec $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, \dots, M$.

1.5.2 Approximation de dérivées secondes

Différences finies centrées :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}.$$

1.6 Discrétisation de temps

La discrétisation consiste à donner un ensemble de points t^n , $n = 0, \dots, M + 1$, de l'intervalle $]0, T[$ et un ensemble de points x_i , $i = 0, \dots, N + 1$ de l'intervalle $[a, b]$.

$$\Delta x = \frac{b - a}{n + 1},$$

$$x_i = a + i\Delta x; \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad / \quad x_0 = a \text{ et } x_{N+1} = b,$$

$$\Delta t = \frac{T}{M + 1},$$

$$t^n = n\Delta t; \quad n = 0, \dots, M+1 \quad / \quad t^0 = 0 \text{ et } t^{M+1} = T.$$

Les inconnues discrètes sont notées : U_i^n .

1.6.1 Approximation des dérivées par rapport au temps

Schéma d'Euler explicite :

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x_i, t^n) \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}.$$

1.7 Théorème de Lax

Pour un problème aux limites linéaire consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence [5].

Chapitre 2

Méthodes directes pour calculer les valeurs et les vecteurs propres

Dans ce chapitre, on va citer quelques propriétés des valeurs propres d'une matrices carré. Par la suite, nous abordons la méthode directe pour le calcul des valeurs propres et les vecteurs propres associées dans le cas où la dimension de la matrice est inférieur à cinq.

Les matrices tridiagonales symétrique jouent un rôle très important dans le problème aux limites linéaires a partir de leurs valeurs et vecteurs propres pour cela, nous citons deux lemmes importants qui nous donne les valeurs et vecteurs propres des ces matrices.

2.1 Généralités sur les valeurs et les vecteurs propres

2.1.1 Valeurs propres et Vecteurs propres

En étudiant des transformations linéaires de la forme

$$Y = AX,$$

où

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Il est intéressant de connaître quels sont les vecteurs X , s'ils existent, qui gardent la même direction après transformation par l'opération A .

Comme deux vecteurs non nuls ont même direction, si et seulement si, l'un est un multiple scalaire de l'autre alors on cherche les vecteurs X dont les images Y par l'opérateur A .

Donc on cherche les vecteurs X tels que

$$AX = \lambda X,$$

ou encore

$$(A - \lambda I)X = 0.$$

C'est un système d'équations linéaires et homogènes en λ du type

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

et l'on sait qu'une solution $X (\neq 0)$ existe si et seulement si

$$\det(A - \lambda I) \neq 0,$$

or

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n [\lambda^n - B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n \det(A)] = 0, \quad (2.2)$$

où les B_m ($m = 1, \dots, n-1$) sont $(-1)^m$ fois la somme de tous les mineurs principaux d'ordre m de A .

Cette équation s'appelle équation caractéristique de la matrice A .

Ces racines de l'équation caractéristique sont appelées valeurs propres de la matrice A et les vecteurs solutions correspondants du système (2.1) sont appelés vecteurs propres de A .

2.1.2 Quelques propriétés

- Les valeurs propres peuvent être complexes même si la matrice est réelle.
- Les valeurs propres d'une matrice symétrique sont toutes réelles.
- Si A est diagonale, les valeurs propres de A sont égales aux éléments diagonaux.
- Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.
- Si toutes les valeurs propres d'une matrice carrée sont strictement positives, on dit que cette matrice est symétrique définie positive (noté $A \succ 0$).
- Si λ valeur propre alors $\lambda - \mu$ et $\frac{1}{\lambda - \mu}$ sont respectivement valeurs propres $A - \mu I$ et $(A - \mu I)^{-1}$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

Définition 2.1.1. (*Rayon spectral*). Soit $A(n, n)$ une matrice complexe dont les n valeurs propres sont notées λ_i , alors

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|, \quad (1 \leq i \leq n),$$

est le rayon spectral de la matrice A .

2.2 Méthodes directes pour calculer les valeurs propres

Exemple 2.2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \rho(A) = \max_{i=1,2} |\lambda_i|$, alors $\rho(A) = 5$.

Exemple 2.2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Polynôme caractéristique de la matrice A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 3 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0.$$

Alors, les valeurs propres de la matrice A sont

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3.$$

Les vecteurs propres

$$AV = \lambda V.$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = \lambda x, \\ x + y + z = \lambda y, \\ x + 3y - z = \lambda z, \end{cases}$$

Pour $\lambda_1 = -2$:

$$AV_1 = -2V_1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z = -2x \\ x + y + z = -2y \\ x + 3y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = 1$:

$$AV_2 = 1V_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z = x, \\ x + y + z = y, \\ x + 3y - z = z, \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_3 = 3$:

$$AV_3 = 3V_3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 3x, \\ x + y + z = 3y, \\ x + 3y - z = 3z, \end{cases} \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors, les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 sont respectivement V_1 , V_2 et V_3 .

Exemple 2.2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= \lambda^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$$

Alors les valeurs propres de la matrice A sont : i et $-i$.

Les vecteurs propres :

$$AV = \lambda V,$$

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda x, \\ -x - y = \lambda y. \end{cases}$$

Pour $\lambda_1 = i$:

$$AV_1 = iV_1 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = ix, \\ -x - y = iy, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (-i - 1)y, \\ y = 1, \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -i - 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_1 = -i$:

$$AV_2 = iV_2, \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -ix, \\ -x - y = -iy, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (i - 1)y, \\ y = 1, \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} i - 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Les valeurs propres d'une matrice tridiagonal

Les matrice tridiagonal sont des matrices particuliers, qui apparaitre dans plusieurs problèmes sur tout en EDP (elliptique - parabolique - hyperbolique), après la discrétisations, on obtient la forme matricielle, où la matrice est tridiagonal ou tridiagonal par bloc.

Lemme 2.3.1. [2]. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont données par

$$\lambda_k = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),$$

où $k = 1, \dots, n$.

Exemple 2.3.1. Pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \\ &= 2 - 2 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) \right) \\ &= 2 - 2 \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) \right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right). \end{aligned}$$

Les vecteurs propres de la matrice A sont

$$V_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \frac{k\pi}{N} \\ \sin \frac{2k\pi}{N} \\ \vdots \\ \sin \frac{Nk\pi}{N} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, N.$$

2.4 Les valeurs propres d'une matrice tridiagonale par blocs symétrique

Corollaire 2.4.1. [3]. $\forall L \in M_{(n,k)}(\mathbb{R})$ et $\forall A, B \in M_k(\mathbb{R})$, tels que

$$L = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B & A & B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B & A & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & B \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & d & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & d & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de L sont

$$\lambda_{q,p} = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{q\pi}{k+1}\right) + 2\left(d + 2c \cos\left(\frac{q\pi}{k+1}\right)\right) \cos\left(\frac{p\pi}{N+1}\right),$$

$$1 \leq q \leq k \text{ et } 1 \leq p \leq N.$$

Exemple 2.4.1.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont

$$\begin{aligned} \lambda_{q,p} &= -4 + 2 \cos\left(\frac{q\pi}{k+1}\right) + 2(1) \cos\left(\frac{p\pi}{N+1}\right) \\ &= -4 + 2 \cos\left(\frac{q\pi}{k+1}\right) + 2 \cos\left(\frac{p\pi}{N+1}\right) \\ &= -4 + 2 \left(\cos^2\left(\frac{q\pi}{2(k+1)}\right) - \sin^2\left(\frac{q\pi}{2(k+1)}\right) \right) \\ &\quad + 2 \left(\cos^2\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right) - \sin^2\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right) \right) \\ &= -4 + 2 \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{q\pi}{2(k+1)}\right) \right) + 2 \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right) \right) \\ &= -4 \sin^2\left(\frac{q\pi}{2(k+1)}\right) - 4 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right). \end{aligned}$$

Les vecteurs propres de la matrice A sont

$$V_{q,p} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \frac{q\pi}{k} + \sin \frac{p\pi}{N} \\ \sin \frac{2q\pi}{k} + \sin \frac{2p\pi}{N} \\ \vdots \\ \sin \frac{Nq\pi}{k} + \sin \frac{2p\pi}{N} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Méthodes itératives pour le calcul des valeurs propres

Nous nous intéressons à la détermination des valeurs propres (le spectre) et des vecteurs propres correspondants d'une matrice A de dimension n .

Des méthodes plus adaptées sont utilisées, elles sont séparées entre deux types de méthodes :

- Méthodes globales :
 - Méthode de Jacobi.
 - Méthode QR.
 - Transformation sous forme de matrice de Hessenberg.
 - Méthode de Lanczos.
 - Méthode de bisection.
- Méthodes partielles :
 - Méthode de la puissance.
 - Méthode de la puissance inverse.
 - Méthode de délation.

Dans notre travail, nous introduisons les méthodes suivantes :

- Méthode de la puissance.
- Méthode de la puissance inverse.

- Méthode de Jacobi.

3.1 Méthode de puissance

La méthode de puissance est un algorithme itératif pour trouver le plus grande valeur propre (en valeur absolue) et un vecteur propre correspondant d'une matrice quelconque donnée à partir du théorème suivant.

Théorème 3.1.1. *La méthode de puissance sert à calculer la plus grande valeur propre (en valeur absolue) d'une matrice quelconque A ainsi que son vecteur propre associée.*

Démonstration : Soit λ_1 la plus grande valeur propre de A :

D'où : $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$.

Les vecteurs propres $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forme une base dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n : Y = \sum_{i=1}^n c_i v_i, \quad \forall c_i \in \mathbb{R}.$$

Considérons le vecteur $Y^{(0)}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que ($c_1 \neq 0$) ; on applique la transformation vectorielle suivante

$$Y^{(1)} = AY^{(0)} = A\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i Av_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i v_i$$

où ($Av_i = \lambda_i v_i$).

Alors,

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_n \lambda_n v_n, \\ Y^{(2)} &= c_1 \lambda_1^2 v_1 + c_2 \lambda_2^2 v_2 + \dots + c_n \lambda_n^2 v_n, \\ &\vdots \\ Y^{(k)} &= c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n. \end{aligned}$$

À partir de la dernière équation, nous avons

$$Y^{(k)} = \lambda_1^k \left[c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right].$$

On pose $\varepsilon(k) = c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n$, On obtient

$$Y^{(k)} = \lambda_1^k (c_1 v_1 + \varepsilon(k)), \quad (3.1)$$

$$\varepsilon(k)_{k \rightarrow +\infty} \rightarrow 0, \quad (|\lambda_1| > |\lambda_i|).$$

Alors, on peut négliger $\varepsilon(k)$. La relation (3.1) dévient

$$Y^{(k)} = \lambda_1^k c_1 v_1,$$

Par récurrence

$$\begin{aligned} Y^{(k+1)} &= \lambda_1^{k+1} c_1 v_1 \\ &= \lambda_1 \lambda_1^k c_1 v_1 \\ &= \lambda_1 Y^{(k)}. \end{aligned}$$

Pour calculer λ_1 parmi tout les composante, en choisit deux composante de même ordre de $Y^{(k+1)}$ et $Y^{(k)}$, on obtient

$$|\lambda_1| = \left| \frac{Y_i^{(k+1)}}{Y_i^{(k)}} \right|,$$

ou on prend la moyenne. □

Remarque 3.1.1.

a- Le signe de λ_1 est positive. Si $Y^{(k)}$ et $Y^{(k+1)}$ ont les même signes.

Le signe de λ_1 est négative. Si $Y^{(k)}$ et $Y^{(k+1)}$ ont des signes opposées.

b- Si : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{Y^{(k+1)}}{Y^{(k)}}$ est non définie on change le vecteur initiale $Y^{(0)}$.

c- *Teste d'arrêt :*

$$\frac{Y^{(k+1)}}{Y^{(k)}} \approx C, \quad C : \text{constate},$$

c.à.d : *le rapport est presque stable.*

On prend la valeur approchée comme la plus grande valeur propre de A.

Les étapes de la méthode :

- Choisir $Y^{(0)}$.
- $Y^{(i+1)} = AY^{(i)}$.
- La méthode s'arrête quand la différence entre deux valeurs successives devient inférieure au seuil ε .

Exemple 3.1.1. *Déduire la grande valeur propre de la matrice en utilisant la méthode de puissance, tels que*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Itération 1 :

$$Y^{(1)} = AY^{(0)},$$

$$Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Itération 2 :

$$Y^{(2)} = AY^{(1)},$$

$$Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Itération 3 :

$$Y^{(3)} = AY^{(2)},$$

$$Y^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 60 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Itération 4 :

$$Y^{(4)} = AY^{(3)},$$

$$Y^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 111 \\ 60 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 504 \\ 252 \\ 81 \end{pmatrix}.$$

Itération 5 :

$$Y^{(5)} = AY^{(4)},$$

$$Y^{(5)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 504 \\ 252 \\ 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2268 \\ 1089 \\ 333 \end{pmatrix}.$$

Itération 6 :

$$Y^{(6)} = AY^{(5)},$$

$$Y^{(6)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2268 \\ 1089 \\ 333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10161 \\ 4779 \\ 1422 \end{pmatrix}$$

Itération 7 :

$$Y^{(7)} = AY^{(6)},$$

$$Y^{(7)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10161 \\ 4779 \\ 1422 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45433 \\ 21141 \\ 6201 \end{pmatrix}.$$

Itération 8 :

$$Y^{(8)} = AY^{(7)},$$

$$Y^{(8)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45433 \\ 21141 \\ 6201 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 202833 \\ 93906 \\ 27342 \end{pmatrix}.$$

On arrête les itérations, on obtient

$$\frac{Y_1^{(8)}}{Y_1^{(7)}} \approx 4.46, \quad \frac{Y_2^{(8)}}{Y_2^{(7)}} \approx 4.44, \quad \frac{Y_3^{(8)}}{Y_3^{(7)}} \approx 4.40.$$

Alors, $\lambda = \frac{1}{3}(4.46 + 4.44 + 4.4) \approx 4.43$.

Donc, le vecteur propre associé à la valeur propre λ de la matrice A est

$$Y^{(8)} = \begin{pmatrix} 202833 \\ 93906 \\ 27342 \end{pmatrix}.$$

Avantages :

- On n'utilise que des produits des matrices par vecteurs.
- Le calcul, même avec des matrices de grande taille, ne prend pas de place en mémoire.

Inconvénients :

- Si les valeurs propres sont très proches, la convergence sera lente.
- L'intérêt de la méthode des puissances itérées est de ne pas nécessiter d'hypothèses très particulières sur la matrice, comme être symétrique. En revanche, elle demande une configuration particulière des valeurs propres qui n'est pas toujours vérifiée. De plus, elle ne permet de calculer qu'une seule des valeurs propres de A .
- Si la matrice est inversible, on peut modifier la méthode pour la valeur propre de plus petit module.

3.2 Méthode de puissance inverse

La méthode de puissance inverse est utilisée pour calculer la plus petite valeur de la matrice A .

Supposons que λ soit la valeur propre d'une matrice A avec un vecteur propre associé V .

Alors, nous pouvons l'écrire comme

$$\begin{aligned}AV &= \lambda V \\ \Rightarrow A^{-1}AV &= A^{-1}\lambda V \\ \Rightarrow IV &= \lambda A^{-1}V \\ \Rightarrow A^{-1}V &= \frac{1}{\lambda}V,\end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1} .

Remarque 3.2.1. Si λ une valeur propre non nulle de la matrice A , alors $\frac{1}{\lambda}$ une valeur

propre de A^{-1}

$$\lambda_{max} \longrightarrow A,$$

$$\frac{1}{\lambda_{max}} = \lambda_{min} \longrightarrow A^{-1}.$$

Les étapes de la méthode :

- Calculer la matrice inverse A^{-1} .
- Boucle itérative $A^{-1}X_i = Y_{i+1}$.
- On trouve une valeur de λ_{max} pour le nouveau vecteur.
- La méthode s'arrête quand la différence entre deux valeurs successives devient inférieure au seuil ε .

Exemple 3.2.1. *Utilisons la méthode de puissance inverse pour calculer la petite valeur propre de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } X_0 = (1, 0, 0)^t.$$

On calcule la matrice inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$Y_1 = A^{-1}X_0,$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc, $X_1 = (1, 1, 1)^t$:

$$Y_2 = A^{-1}X_1,$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.833 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc, $X_2 = (0.5, 0.833, 1)^t$:

$$Y_3 = A^{-1}X_2$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.833 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.333 \\ 4.166 \\ 5.166 \end{pmatrix} = 5.166 \begin{pmatrix} 0.4516 \\ 0.8036 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $X_3 = (0.4516, 0.8036, 1)^t$:

$$Y_4 = A^{-1}X_3$$

$$Y_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4516 \\ 0.8036 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2552 \\ 4.0588 \\ 5.0588 \end{pmatrix} = 5.0588 \begin{pmatrix} 0.4457 \\ 0.80232 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $X_4 = (0.4457, 0.80232, 1)^t$:

$$Y_5 = A^{-1}X_4$$

$$Y_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4457 \\ 0.80232 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.24802 \\ 4.05034 \\ 5.05034 \end{pmatrix} = 5.05034 \begin{pmatrix} 0.4451 \\ 0.801 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $X_5 = (0.44, 0.8, 1)^t$:

$$Y_6 = A^{-1}X_5,$$

$$Y_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.80 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.24 \\ 4.04 \\ 5.04 \end{pmatrix} = 5.04 \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.80 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $X_6 = (0.44, 0.80, 1)^t$:

$$Y_7 = A^{-1}X_6$$

$$Y_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.80 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.24 \\ 4.04 \\ 5.04 \end{pmatrix} = 5.04 \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.80 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc, $X_7 = (0.44, 0.80, 1)^t$.

Alors, la plus petite valeur propre de la matrice A est $\lambda = \frac{1}{5.04} = 0.198$

et le vecteur propre associé est $X = (0.44, 0.80, 1)^t$.

3.3 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi est une méthode efficace pour trouver les valeurs propres d'une matrice symétrique. Elle repose sur l'application des étapes de Jacobi pour supprimer les éléments hors diagonale de la matrice.

Les étapes de la méthode :

- Chercher un grand élément non diagonal.
- Calculer l'angle de rotation.
- Construction de la matrice de rotation.
- $A' = P^t A P$.
- Répéter le processus devenir les éléments non diagonaux nuls.

Exemple 3.3.1. *Nous avons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- Dédurre les valeurs propres et les vecteurs propres associés.

Itération 1 :

- Le grand élément non diagonal est : $a_{13} = 2$, alors

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

où $p_{13} = \sin \theta$, $p_{31} = -\sin \theta$, $p_{11} = \cos \theta$, $p_{33} = \cos \theta$ avec $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2a_{13}}{a_{11}-a_{33}} \right) = \frac{\pi}{4}$, alors

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$A' = P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme A' n'est pas une matrice diagonale, on passe à la deuxième itération.

Itération 2 :

- Le grand élément non diagonal est $a_{23} = 2$, alors

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

où $a_{23} = \sin \theta$, $a_{22} = a_{33} = \cos \theta$, $a_{32} = -\sin \theta$ avec $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2a_{23}}{a_{22}-a_{33}} \right) = \frac{\pi}{4}$,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

-

$$A'' = P_2^{-1}AP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

A'' est une matrice diagonale.

- Les valeurs propres sont : $(-1, 1, 5)$.

- Les vecteurs propres associés :

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors, les vecteurs propres sont :

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; V_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Avantages :

- Simplicité d'implémentation.
- Elle fonctionne bien avec les matrices symétriques réelles, garantissant une bonne convergence.
- Eviter les calculs complexes.

Inconvénients :

- Convergence lente.
- Difficulté avec les grandes matrices.
- Méthode ancienne.

Remarque 3.3.1. *En plus des méthodes de puissance, de puissance inverse et de Jacobi, il existe plusieurs autres méthodes pour trouver les valeurs et les vecteurs propres d'une matrice, notamment :*

Méthode QR, méthode LU, méthode de Newton, méthode de Perron, méthode de Wilkinson.

Voir ([8], [9], [10]).

Chapitre 4

Applications

Les valeurs propres et les vecteurs propres jouent un rôle important dans le calcul matriciel pour diverses applications : résolution de systèmes d'équations linéaires, analyse en composantes principales, etc.

Les valeurs propres et les vecteurs propres par les méthodes itératives ou intervient le rayon spectral dans la convergence de la méthode.

Les valeurs et les vecteurs intervient aussi dans la résolution de système d'équation différentielle, ainsi pour le calcul de la puissance d'une matrice.

Application 1 : (Calcul de la puissance d'une matrice)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notre but est de trouver A^n :

1^{ière} étapes :

Les valeurs propres de la matrice A :

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (5 - \lambda) \times \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 - \lambda & -2 \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 44\lambda + 48 \\
 &= -(\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 6).
 \end{aligned}$$

On obtient trois valeurs propres distinctes classées par ordre croissant :

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 6.$$

Les vecteurs propres de la matrice A :

Pour $\lambda_1 = 2$:

$$(A - 2I)\vec{V}_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0, \\ 2x + 2y - 2z = 0, \\ x - y + z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = z, \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = 4$:

$$(A - 4I)\vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - 2z = 0, \\ x - y - z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_3 = 6$:

$$(A - 6I)\vec{V}_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0, \\ 2x - 2y - 2z = 0, \\ x - y - 3z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2^{ème} étape :

- Matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

à partir de vecteurs propres.

$$\text{- Matrice } B \text{ définie par } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3^{ème} étape :

- Calcul de A^n :

On peut écrire que

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow A^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB^2P^{-1}.$$

On peut montrer de même que $A^3 = PB^3P^{-1}$ et on généralise cette formule au rang n

par récurrence :

$$\begin{aligned}
 A^n &= PB^nP^{-1}, \\
 A^n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 6^n & -4^n + 6^n & 4^n - 6^n \\ -2^n + 6^n & 2^n + 6^n & 2^n - 6^n \\ -2^n + 4^n & 2^n - 4^n & 2^n + 4^n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Application 2 : (Résolution d'un système différentiel [II](#))

Soit le système suivant

$$\begin{cases} y' = Ay + \psi(x), \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ x + 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1 - \lambda)^2 - 4 \\
 &= \lambda^2 - 2\lambda - 3.
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrices A sont

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Les vecteurs propres associés de la matrices A :

Pour $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3I)\vec{V}_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0, \\ 2x - 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = y, \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = -1$:

$$(A + 1I)\vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 2x + 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -y, \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrices A sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solution particulière est de la forme

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ -x + \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$y(x) = C_1 \exp(3x)V_1 + C_2 \exp(-x)V_2,$$

$$y(x) = C_1 \exp(3x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(-x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -x + \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

Enfin, en considérant la condition initiale on obtient $C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = \frac{3}{2}$, d'où

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \exp(3x) + \frac{3}{2} \exp(-x) - \frac{5}{3} \\ \frac{1}{6} \exp(3x) - \frac{3}{2} \exp(-x) - x + \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Application 3 : (Méthodes itératives)

Soit le problème de la chaleur en dimension 1

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ U(0, x) = U(x, 1) = 0 & x \in]0, 1[, \\ U(t, 0) = U(t, 1) = 0 & t \in]0, T[. \end{cases}$$

Soit $\Omega_{h,k} = \{(x_i, t_n) = (ih, nk)/i = 0, \dots, N+1; n = 0, \dots, M\}$.

On applique un schéma d'Eluer explicite en temps et un schéma aux différences finies centrées en espace. On obtient

$$U_{xx}(x_i, t_n) \approx \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2},$$

$$U_t(x_i, t_n) \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}.$$

Donc, l'équation discrète s'écrit sous la forme

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n,$$

$$U_i^{n+1} = \Delta t f_i^n + (-2r + 1)U_i^n + rU_{i+1}^n + rU_{i-1}^n \quad r = \frac{\Delta t}{h^2},$$

$$\begin{cases} U_i^{n+1} = \Delta t f_i^n + (-2r + 1)U_i^n + rU_{i+1}^n + rU_{i-1}^n \\ U_0^n = U_{N+1}^n = 0 \quad \forall n = 1, \dots, M \\ U_i^0 = U_0(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N \end{cases}$$

On utilise des conditions aux limites $U_0 = U_{N+1} = 0$, on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} i = 1 : U_1^{n+1} = \Delta t f_1 + (2r + 1)U_1^n - rU_2^n, \\ i = 2 : U_2^{n+1} = \Delta t f_2 + (2r + 1)U_2^n - rU_3^n - rU_1^n, \\ \vdots \\ \vdots \\ i = N - 1 : U_{N-1}^{n+1} = \Delta t f_{N-1} + (2r + 1)U_{N-1}^n - rU_N^n - rU_{N-2}^n, \\ i = N : U_N^{n+1} = \Delta t f_N + (2r + 1)U_N^n - rU_{N-1}^n, \end{cases}$$

Soit la forme matricielle

$$U^{n+1} = AU^n + b^n,$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} -2r+1 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -2r+1 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & -2r+1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & -2r+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix}^n + \Delta t \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}^n$$

Les valeurs propres de la matrice A sont

$$\lambda_k = (1 - 2r) + 2r \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \quad k = 1, \dots, N$$

$$= 1 - 4r \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right).$$

Le rayon spectral de A est

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \max_k |\lambda_k(A)| = \max_k \left| 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right) \right| < 1 \\ &= |1 - 4r| < 1,\end{aligned}$$

d'où

$$-1 < 1 - 4r < 1 \Rightarrow -2 < -4r < 0 \Rightarrow 0 < 4r < 2 \Rightarrow r < \frac{1}{2}.$$

Alors, la stabilité est vérifiée sous la condition $r < \frac{1}{2}$.

D'après le théorème de Lax ??, on obtient la convergence sous la condition $r < \frac{1}{2}$.

Application 4 :

Soit le problème de poisson en dimension 1 avec la condition de Dirichlet

$$\begin{cases} -U'' = f, & \text{sur } \Omega =]0, 1[, \\ U(0) = U(1) = 0. \end{cases}$$

Notre but est l'étude des valeurs et vecteurs propres du problème discret.

Soit $\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N+1\}$ ou $h = \frac{1}{N+1}, N \in \mathbb{N}^*$

Nous utilisons un schéma centré d'ordre 2 pour approximer les dérivées secondes en espace

$$U'' \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}.$$

L'équation discrète :

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = f_i$$

donc, le problème discret devient

$$\begin{cases} -\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = f_i \\ U_0 = U_{N+1} = 0 \quad i = 0, \dots, N+1 \end{cases}$$

On pose *****

On utilise des conditions limites est : $U_0 = U_{N+1} = 0$

$$\begin{cases} i = 1 & : -U_2 + 2U_1 = h^2 f_1 \\ i = 2 & : -U_3 + 2U_2 - U_1 = h^2 f_2 \\ & \vdots \\ i = N-1 & : -U_N + 2U_{N-1} - U_{N-2} = h^2 f_{N-1} \\ i = N & : 2U_N - U_{N-1} = h^2 f_N \end{cases}$$

Soit la forme matricielle

$$AU = h^2 f_i$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 2 - 2 \cos \left(\frac{k\pi}{N+1} \right) = 2 - 2 \left(\cos^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right) - \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right) \right) \\ &= 2 - 2 \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right) \right) \\ &= 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right) \end{aligned}$$

Les vecteurs propres de la matrice A sont

$$V_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \frac{k\pi}{N} \\ \sin \frac{2k\pi}{N} \\ \vdots \\ \sin \frac{Nk\pi}{N} \end{pmatrix} \quad k = 1, \dots, N$$

Application 5 :

Soit le problème de poisson en dimension 2 avec les conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f & , (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ U(0, y) = 0 \quad \text{et} \quad U(L_x, y) = 0 & 0 < y < L_y \\ U(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad U(x, L_y) = 0 & 0 < x < L_x \end{cases}$$

Soit $h = h_1 = h_2$

$$\Omega_h = \{x_i, y_i = ih, 0 \leq i \leq N+1, 0 \leq j \leq P+1\}$$

Nous utilisons un schéma centré d'ordre 2 pour approximer les dérivées secondes en espace :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h_2^2},$$

pour simplifier, on prend $h = h_1 = h_2$:

$$\frac{U_{i+1,j} - 4U_{i,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_i,$$

donc, le problème discret devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_{i+1,j} - 4U_{i,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_i \\ U_1 = U_P = 0 \quad j = 1, \dots, P-1 \\ U_1 = U_N = 0 \quad i = 1, \dots, N-1 \end{array} \right.$$

On pose :

$$i = 1 \left\{ \begin{array}{l} j = 1 : U_{2,1} + U_{0,1} + U_{1,2} + U_{1,0} - 4U_{1,1} = f_{1,1}, \\ j = 2 : U_{2,2} + U_{0,2} + U_{1,3} + U_{1,1} - 4U_{1,2} = f_{1,2}, \\ j = 3 : U_{2,3} + U_{0,3} + U_{1,4} + U_{1,2} - 4U_{1,3} = f_{1,3}, \end{array} \right.$$

$$i = 2 \left\{ \begin{array}{l} j = 1 : U_{3,1} + U_{2,2} - 4U_{2,1} + U_{2,0} + U_{1,1} = f_{2,1}, \\ j = 2 : U_{3,2} + U_{2,3} - 4U_{2,2} + U_{2,1} + U_{1,2} = f_{2,2}, \\ j = 3 : U_{3,3} + U_{2,4} - 4U_{2,3} + U_{2,2} + U_{1,3} = f_{2,3}, \end{array} \right.$$

$$i = 3 \left\{ \begin{array}{l} j = 1 : U_{4,1} + U_{3,2} + U_{3,0} + U_{2,1} - 4U_{3,2} = f_{3,1}, \\ j = 2 : U_{4,2} + U_{3,3} - 4U_{3,2} + U_{3,1} + U_{2,2} = f_{3,2}, \\ j = 3 : U_{4,3} + U_{3,4} - 4U_{3,3} + U_{3,2} + U_{2,3} = f_{3,3}, \end{array} \right.$$

Soit sous forme matricielle

$$AU = h^2 F,$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{31} \\ U_{12} \\ U_{22} \\ U_{32} \\ U_{13} \\ U_{23} \\ U_{33} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{1,3} \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \\ f_{2,3} \\ f_{3,1} \\ f_{3,2} \\ f_{3,3} \end{bmatrix}$$

Notons :

- I la matrice identité d'ordre 3 :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- D la matrice de dimension 3 définie par :

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Notons U_1, U_2, U_3 les vecteurs à 3 composantes définie par :

$$U_1 = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{31} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ U_{32} \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{33} \end{bmatrix}.$$

Le système peut s'écrire sous la forme matricielle par bloc suivante

$$\begin{bmatrix} D & I & 0 \\ I & D & I \\ 0 & I & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned} \lambda_{q,p} &= -4 + 2 \cos \left(\frac{q\pi}{k+1} \right) + 2(1) \cos \left(\frac{p\pi}{N+1} \right) \\ &= -4 + 2 \cos \left(\frac{q\pi}{k+1} \right) + 2 \cos \left(\frac{p\pi}{N+1} \right) \\ &= -4 + 2 \left(\cos^2 \left(\frac{q\pi}{2(k+1)} \right) - \sin^2 \left(\frac{q\pi}{2(k+1)} \right) \right) + 2 \left(\cos^2 \left(\frac{p\pi}{2(N+1)} \right) - \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2(N+1)} \right) \right) \\ &= -4 + 2 \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{q\pi}{2(k+1)} \right) \right) + 2 \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2(N+1)} \right) \right) \\ &= -4 \sin^2 \left(\frac{q\pi}{2(k+1)} \right) - 4 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2(N+1)} \right) \end{aligned}$$

Les vecteurs propres de la matrice A sont

$$V_{q,p} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \frac{q\pi}{k} + \sin \frac{p\pi}{N} \\ \sin \frac{2q\pi}{k} + \sin \frac{2p\pi}{N} \\ \vdots \\ \sin \frac{Nq\pi}{k} + \sin \frac{2p\pi}{N} \end{pmatrix}.$$

Application 6 : (Conditionnement d'une matrice)

Nous avons les valeurs propres de la matrice précédente :

$$\lambda_{min} = 3.7327360.96, \quad \lambda_{max} = 4$$

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} < 1.$$

Alors :

$$\frac{4}{3.73} = 1.07$$

Si

$$1.07 > 1$$

1.07 est proche de grandeur de l'unité. Donc, notre matrice est bien conditionné.

Conditionnement :

Le conditionnement mesure l'influence des erreurs d'arrondi sur la solution d'un problème donné. Il est mis en évidence par une légère perturbation des données initiales. C'est une notion générale qui s'applique aussi bien aux racines d'un polynôme***** vis-à-vis de la variation de ses coefficients.

Une matrice est dite bien conditionnée si son conditionnement est de l'ordre de grandeur de l'unité. [\[8\]](#)

Si A est une matrice symétrique inversible et si λ_{max} et λ_{min} désignent respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs propres de A en valeur absolue, on a

$$cond_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Conclusion

Au terme de ce mémoire après avoir donnée une généralité sur les matrices, une présentation des valeurs et vecteurs propres pour une matrice carrée, nous avons procédé aux méthodes des calculs de valeurs propres :

- Méthode directe.
- Méthodes itératives.

Les valeurs propres et les vecteurs propres jouent un rôle important dans le calcul matriciel pour diverses applications, certaines de ces applications ont été exposées.

Enfin, annexe MATLAB avec une liste de références est présentée.

Bibliographie

- [1] Boutayeb A, Derouich M, Lamlili M et Boutayeb W, Analyse Numérique :SMA-SMI S4
- [2] Lucquin, B. (2004). Equations aux dérivées partielles et leurs approximations : niveau M1. Ellipses Ed. Marketing.
- [3] Ahmed, D. A. H. (2022). On the characteristic polynomial, eigenvalues for block tridiagonal matrices. Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 25(6),1745-1756 .
- [4] P.G.Ciarlet : "Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation". Masson.
- [5] D.Lay : "Linear Algebra and its applications", 4th ed.
- [6] A.Quarteroni, P.Gervasio ,F.Saleri : "Calcul Scientifique", cours, exercices corrigés et illustration en MATLAB et Octave, Springer-verlag Italia 2010.
- [7] A.Quarteroni, R.Sacco ,F.Saleri : "Méthodes numériques pour le calcul scientifique", Springer, 2007.
- [8] Franck Jedrzejewski, Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition
- [9] Eric Goncalvès da Silva. Méthodes et Analyse Numériques. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2007, pp.99. [jcel-00556967](#);
- [10] Alfio Quarteroni ,Riccardo Sacco ,Fausto Saleri ,Méthodes Numériques , Algorithmes, analyse et applications

Annex

Méthode de puissance

```
A=input('enter the matrix A :\ n');  
u=input('enter the initial choice of eigenvector u as column vector :\ n');  
epsilon = input ('\ n enter the tolerance of error');  
m1=1;  
 $v = A * u$ ;  
m2=max(abs(v));  
err=abs(m1-m2);  
while      err> epsilon  
 $v = A * u$ ;  
m2=max(abs(v));  
u=v/m2;  
err=abs(m1-m2);  
m1=m2;  
end  
fprintf('\ n the greatest eigenvalue is % 2.5f\ n',m1);  
disp(' the corresponding eigenvector is :');  
disp(u)
```

Méthode de puissance inverse

```
a = [2 1 0 0 0; 1 2 1 0 0; 0 1 2 1 0; 0 0 1 2 1; 0 0 0 1 2];  
x0 = [1; 1; 1; 1; 1];  
t=0.000001;  
na=length(a);  
tol=t*ones(na, 1);  
  
% initialing i and initial vector  $x_i$   
  
i=1;  
  
x(:,1)=x0;  
  
% initial error assumption  
err=1000000000*rand(na, 1);  
  
% loop starts  
  
while sum(abs(err) >= tol) ~= 0  
  
    x(:,i+1)= inv(a)*x(:,i);  
  
    % inverse power method formula  
  
    % normalizing the obtained vector  
  
    [v,j]= max (abs(x(:,i+1)));  
  
    xn=x(:,i+1);  
  
    % giving name to new vector x i+1  
  
    eigenvalue = (1/xn(j,1));  
  
    % eigenvalue of inverse power is 1/lamda  
  
    x(:,i+1)=x(:,i+1)/(xn(j,1));  
  
    % normalization of obtained vector  
  
    fprintf(' iteration no : %i the greatest eigenvalue %0.4f * the corresponding eigenvector  
is \ n ',i,eigenvalue)
```

```
v=( :,i+1)

err= norm(x( :,i+1)-x( :,i),inf);

% finding error

i=i+1

% error =[error ;err];

end
```

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié les valeurs propres et les vecteurs propres, en abordant d'abord les méthodes de calcul directes et itératives, ainsi que diverses applications basées sur ces concepts.

Les mots clés: valeurs propres, vecteurs propres méthodes directes méthodes itératives , applications

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة القيم و الأشعة الذاتية أولاً كيفية حسابها بالطرق المباشرة و التكرارية مع التعرض لتطبيقات متنوعة تعتمد على القيم و الأشعة الذاتية.

الكلمات المفتاحية : القيم الذاتية ، الأشعة الذاتية ، طرق مباشرة ، طرق تكرارية ، تطبيقات

Abstract

In this work, we studied eigenvalues and eigenvectors, first by exploring direct and iterative computation methods, along with various applications that rely on these concepts.

Keywords: Eigenvalues , Eigenvectors , direct methods, iterative methods, applications