

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR

D'EL OUED

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE



Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Thème

Méthode Des Éléments Finis
Pour Un Problème
Intégré-Différentiel Non
Linéaire

Présenté par :
Lachraf Haifa
Allouche Siham

Sous la Dupervision du Docteur :
Doudi Nadjet

Soutenu devant le jury composé de

Habita Khaled	Prof	Président	Univ. El Oued
Doudi Nadjet	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
Beggas Mohammed	MAA	Examineur	Univ. El Oued

Promotion : 2020/2021



Remerciements

*Tout d'abord, nous remercions notre Dieu **ř Allah** ř le tout puissant de nous avoir donné la force d'atteindre notre objectif et accomplir notre travail.*

Nous adressons également nos sincères remerciements à notre encadreur, Dr. Nadjet Doudi pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support et pour son accompagnement à travers ses conseils et notes qui ont été très utiles dans la réalisation de ce mémoire.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.





Dédicace

*J*e dédie dans ce modeste travail à ceux qui possèdent un bon cœur plein d'amour et de douceur.

*A*mes très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils, leur affection et leurs encouragements.

*J*e vous remercie pour tous vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

Et je le dédie :

*A*ux personnes que j'aime tant et qui m'ont soutenu tout au long de cette mémoire :
mes frères,
mes sœurs
et mon fiancé.

*A*ux petits chers à mon cœur : Tasneem, Baraa et Rital.

*A*tous les membres de ma famille

*A*tous mes amis et mes collègues avec qui
j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

*A*Tous les professeurs honorables
pour leurs efforts avec nous tout au long de notre carrière universitaire.

Allouche Siham





Dédicace

Avec un grand plaisir, une immense joie et un coeur plein d'amour .

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :

*A mes très chers, respectueux et magnifiques ma mère et mon père, qui m'ont soutenus
durant ma vie .*

Par leur amour et leur encouragement .

A ma soeur .

*Pour sa soutien, ses conseils précieux pendant mes études
et leur support dans les moments difficiles.*

A tous les membres de ma famille .

*A tous mes amis et mes collègues avec qui
j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.*

A tous mes enseignants, pour leurs utiles conseils, leur persévérance .

Lachraf Haifa



Table des matières

Remerciements	I
Table des figures	VI
Liste des tableaux	VII
Introduction	VIII
Notations	X
1 Rappel sur les équations intégral-différentielles et analyse fonctionnelle	1
1.1 Les équations intégrales	1
1.1.1 Équations intégrales de Volterra	2
1.1.2 Équations intégrales de Fredholm	2
1.2 Équations intégral-différentielles	3
1.2.1 Classification des équations intégral-différentielles (E.I.D)	3
1.3 Espaces normés et espaces de Banach	4
1.4 Produits scalaires	4
1.5 Espaces de Hilbert	5
1.6 Espaces fonctionnels	5
1.6.1 Espaces C^k	6
1.6.2 Espace de Lebesgue	6
1.6.3 Espace des fonctions test $D(\Omega)$	7
1.6.4 Espace des distributions $D'(\Omega)$	7
1.7 Espace de Sobolev	7
1.7.1 L'espace H^1	7
1.7.2 L'espace H_0^1	8
1.7.3 L'espace H^m	8
1.8 Quelques opérateurs importants	9
1.8.1 L'opérateur d'interpolation I_h	9
1.8.2 L'opérateur de L^2 -projection P_h	9
1.8.3 L'opérateur de Ritz-projection R_h	10
1.8.4 L'opérateur de Ritz-Volterra projection V_h	10
2 Introduction à la méthode des éléments finis	11
2.1 Présentation de la méthode des éléments finis	11
2.1.1 Formulation variationnelle	11
2.1.2 Formulation générale	12



2.1.3	Théorèmes d'existence et unicité	12
2.1.4	Principe générale de la méthode	13
2.1.5	Discrétisation du domaine d'étude	13
2.1.6	Système linéaire	14
2.1.7	Estimation de l'erreur	15
2.1.8	Éléments finis de Lagrange	16
2.2	Retour au problème (\mathcal{P})	18
2.2.1	Approximation par éléments finis rectangulaires Q_1	19
2.2.2	Espace discret V_h	20
2.2.3	Calcul de u_h	21
2.2.4	Calcul des fonctions de base	22
2.3	Problème détaillé	23
3	Méthode des éléments finis double maillages pour un problème intégral-différentiel parabolique non-linéaire	28
3.1	Présentation du problème	28
3.2	Schéma des éléments finis et estimation d'erreurs	29
3.2.1	Schéma semi-discret	29
3.2.2	MEF double maillages	34
3.2.3	Discrétisation complet (implicite arrière)	38
3.3	Exemples numériques	39
	Bibliographie	41



Table des figures

2.1	Maillage uniforme de $]a, b[$	14
2.2	Maillage admissible en dimension 2.	14
2.3	Éléments finis de Lagrange 2D : triangulaire P_1 , triangulaire P_2 et rectangulaire Q_1	17
2.4	Maillage non conforme : Situations interdites.	18
2.5	Fonction de base φ_i	26
2.6	La fonction g_h	27
3.1	A gauche : Solution exacte. A droite : Solution numérique.	39

Liste des tableaux

2.1	Éléments de Lagrange unidimensionnels de degrés 1 à m	17
2.2	Éléments de Lagrange bidimensionnels triangulaires de degrés 1 et 2.	17
2.3	Élément de Lagrange bidimensionnel rectangulaire de degré 1.	17
3.1	Erreur H^1 , taux de convergence et temps CPU du FEM standard (3.34).	40
3.2	Erreur H^1 , taux de convergence et temps CPU du FEM standard à double maillage.	40
3.3	Erreur H^1 , taux de convergence et temps CPU du FEM standard (3.34).	40
3.4	Erreur H^1 , taux de convergence et temps CPU du FEM standard à double maillage.	40



Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique numérique pour résoudre des problèmes qui sont décrits par des équations aux dérivées partielles ou peut être formulée comme fonction de minimization. Un domaine d'intérêt est représenté comme un assemblage d'éléments finis. Les fonctions d'approximation en éléments finis sont déterminées en termes de valeurs ponctuelles d'un champ physique qui est recherchée. Un problème physique continu est transformé en un problème d'éléments finis discrétisés avec des valeurs ponctuelles inconnues. Pour un problème linéaire, un système d'équations algébriques linéaires doit être résolu. Les valeurs à l'intérieur des éléments finis peuvent être récupérées à l'aide de valeurs nodales. Par conséquent, l'idée fondamentale de la méthode des éléments finis est de remplacer des fonctions continues par des approximations par morceaux, généralement des polynômes.

La méthode des éléments finis est un résultat de deux domaines de recherche : Les mathématiques et les sciences de l'ingénieur. Mathématique : Outils qui remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909). Sciences de l'ingénieur : Dont la contribution a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchèrent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continue d'une barre longue. D'où l'idée de base des éléments finis. Argyris (1955), Turner, Glough et Martin (1956) ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions. Le terme " élément fini " est utilisé pour la première fois par Glough (1960) et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode.

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis (MEF) est considérée comme une des techniques bien établies et pratiques pour la solution numérique de problèmes complexes dans différents domaines du génie : génie civil, génie mécanique, génie nucléaire, génie biomédical, hydrodynamique, conduction thermique -mécanique, etc. D'un autre côté, la MEF peut être examinée comme un outil puissant pour la solution approximative d'équations différentielles décrivant différents phénomènes physiques.

Dans ce travail, nous avons présenté la méthode des éléments finis pour résoudre une équations intégro-différentielles paraboliques non linéaires avec des conditions aux limites. Ce type d'équations apparaît assez fréquemment en tant que modèles mathématiques dans diverses disciplines. Les origines de l'étude des équations intégrales et intégro-différentielles remontent aux travaux d'Abel, Lotka, Fredholm, Malthus, Verhulst et Volterra sur des problèmes de mécanique, de biologie mathématique et d'économie. Les travaux de Volterra sur le problème des espèces concurrentes sont d'une importance fondamentale pour le développement de la modélisation mathématique des problèmes du monde réel.

Le contenu de chaque chapitre est résumé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons présenté un aperçu des équations intégro-différentielles et quelques concepts spéciaux dont nous avons besoin pour étudier les équations intégro-différentielles paraboliques non linéaires, avec quelques concepts préliminaires de base en analyse fonctionnelle requise par la méthode des éléments finis.





En deuxième chapitre, nous introduisons un cas particulier d'équation aux dérivées partielles sur un domaine compact avec conditions aux bords, sur laquelle on illustrera la méthode des éléments finis. Où nous avons donné la méthode pour trouver le système linéaire et comment étudier l'estimation des erreurs. Ensuite, nous avons effectué un exemple détaillé sur un problème de Dirichlet non-homogènes.

Dans le dernier chapitre, notre objectif principal est de construire la MEF à double maillages pour les équations intégro-différentielles paraboliques non linéaires. Pour autant que nous savons, il n'y a pas d'analyse par éléments finis à double maillages pour les équations intégro-différentielles paraboliques non linéaires. Les méthodes sont basées sur deux espaces d'éléments finis linéaires par morceaux conformes V_H sur une grille grossière avec une taille de grille H et V_h sur une grille fine avec une taille de grille h , respectivement. Nous construisons l'algorithme à deux grilles en deux étapes : Premièrement, nous résolvons un problème non linéaire sur V_H en utilisant la méthode d'itération de Newton pour produire une approximation grossière u_H de la solution. Ensuite, nous utilisons u_H pour linéariser les équations et résoudre le problème linéaire sur V_h . L'estimation d'erreur optimale dans la norme H^1 s'avère être $O(h + H^2)$. Nous donnons deux exemples numériques pour valider le théorème à la fin. Les exemples numériques montrent que la méthode à deux grilles peut conserver la même précision par rapport au MEF standard mais avec moins de temps de calcul.





Notations

Ω	:	Ouvert de \mathbb{R}^N .
$\partial\Omega, \Gamma$:	Frontière de Ω .
V_h	:	Espace d'approximation.
$\text{Vect}\{1, x, \dots, x^k\}$:	L'espace vectoriel engendré par $1, x, \dots, x^k$.
$\text{diam}(T_K)$:	Le diamètre de l'élément T_K .
∇u	=	$(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = \text{gradu}$: Le gradient de u .
Δu	=	$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: Laplacien de u .
D^α	:	Dérivée partielle par rapport au multi-indice α .
$ \alpha $:	Longueur du multi-indice, $ \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
h	:	Taille de pas dans la variable d'espace x .
k	:	Longueur de pas dans la variable de temps t .
T_h	:	Une triangulation quasi-uniforme.
W_h	:	Une projection élliptique avec mémoire.
$e = u - u_h$:	L'erreur.
$\theta = W_h - u_h$:	L'erreur.
$\rho = u - W_h$:	L'erreur.
N_s	:	Le nombre de sommets.
$N_{s,i}$:	Le nombre de sommets intérieurs.
N_e	:	Le nombre de mailles.
I_h	:	L'opérateur d'interpolation.
P_h	:	L'opérateur de L^2 -projection.
R_h	:	L'opérateur de Ritz-projection.
(K, Σ, P)	:	Élément fini de Lagrange.
MEF	:	Méthode des éléments finis.
E.I.D	:	Équation intégréo-différentielle.
EF	:	Élément fini.
EF 1D	:	Élément fini en dimension un.
EF 2D	:	Élément fini en dimension deux.
p.p	:	Presque partout.
δ_{ij}	:	Symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon).
$C^\infty(\Omega)$:	Espace des fonctions infiniment différentiables dans Ω .
$C^r(\bar{\Omega})$:	Espace des fonctions continûments différentiables jusqu'au $r^{\text{ième}}$ ordre.
$D(\Omega)$:	L'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur Ω à support compact inclus dans Ω .
$W_{m,p}(\Omega)$:	Espace de Sobolev.
$L^p(\Omega)$:	Espace des fonctions intégrables.
$H^m(\Omega) = W_{m,2}(\Omega)$:	Espace de Hilbert.
$H^1(H^2)$:	$H^1(0, T; H^2) = \{u \in H^2 \mid \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0, T; H^2)\}$.
$\ \cdot\ $:	La norme dans L^2 .
$\ \cdot\ _1$:	La norme dans H^1 .
$ \cdot _1$	=	$\ \nabla v\ _{L^2}$.



Rappel sur les équations intégrales et analyse fonctionnelle

L'analyse par la méthode des éléments finis nécessite une bonne base d'analyse fonctionnelle, qui est un outil fondamental pour une véritable compréhension de cette méthode. C'est l'objet de ce chapitre. Il convient de noter d'emblée que notre objectif n'est pas de donner un cours complet d'analyse fonctionnelle mais de fournir les outils de base nécessaires à l'utilisation efficace de la méthode des éléments finis, donnant une introduction à l'équation intégrale et les outils de base nécessaires à l'utilisation efficace de l'analyse de la méthode avec ce type de problème.

1.1 Les équations intégrales

Définition 1.1.1. *Toute équation fonctionnelle de la forme*

$$\lambda\varphi(x) + f(x) = \int_E K(x, y, \varphi(y))dy, \tag{1.1}$$

est appelée équation intégrale, où φ est l'inconnue, f est une fonction donnée, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), E est un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien et K le noyau. On prend

$$K(x, y, \varphi(y)) = K(x, y)\varphi(y).$$

L'équation intégrale (1.1) devient

$$f(x) = \int_E K(x, y)\varphi(y)dy - \lambda\varphi(x),$$

qui est dite une équation intégrale linéaire.

Le type le plus général d'une équation intégrale linéaire est

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \int_E K(x, y)\varphi(y)dy.$$

Une équation intégrale peut être classifiée en linéaire ou non linéaire.

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont sous les deux principales classes, nommées équations intégrales de **Volterra** et équations intégrales de **Fredholm** [17].



1.1.1 Équations intégrales de Volterra

Définition 1.1.2. On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt,$$

où φ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre réel.

Définition 1.1.3. Une équation de la forme

$$\lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x),$$

est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de premier espèce. Equation intégrale linéaire de Volterra du second espèce est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt.$$

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt,$$

et est dite équation intégrale linéaire homogène de Volterra du second espèce.

Une équation à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$f(x) = \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt,$$

est dite équation intégrale linéaire de Volterra de premier espèce [17].

1.1.2 Équations intégrales de Fredholm

Définition 1.1.4. On appelle équation intégrale de Fredholm non linéaire du second espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x), \quad (1.2)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$, $f(x)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre réel.

Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) est dite équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de second espèce [17].





1.2 Équations intégréo-différentielles

Définition 1.2.1. Une équation intégréo-différentielle (E.I.D) est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles dont la fonction inconnue est φ .

La forme générale d'une équations intégréo-différentielle non linéaire d'ordre n est

$$\varphi^{(n)}(x) = F \left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x), \lambda \int_E K(x, t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) dt \right). \quad (1.4)$$

Avec les conditions initiales

$$\varphi(\alpha) = \beta_0, \varphi'(\alpha) = \beta_1, \varphi''(\alpha) = \beta_2, \dots, \varphi^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

telle que $\alpha \in E$ et β_i ($0 \leq i \leq n - 1$) nombres donnés et φ est la fonctions inconnue.

La forme linéaire d'une équation intégréo-différentielle (E.I.D) d'ordre n est

$$P_x(\varphi) = \lambda \int_E K(x, t) M_t(\varphi) + f(x),$$

où

$$P_x(\varphi) = \sum_{i=0}^n a_i(x) \varphi^{(i)}(x) \text{ et } M_t(\varphi) = \sum_{j=0}^m b_j(x) \varphi^{(j)}(x).$$

$a_i(x), b_j(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions données et ($0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$) [17].

1.2.1 Classification des équations intégréo-différentielles (E.I.D)

Il existe une importante classification des (E.I.D), et sont classées par leurs caractéristiques :

Les limites de l'intégration

On distingue trois types majeurs de l'équation intégréo-différentielle.

- Si les limites de l'intégration sont fixées, alors l'équation intégréo-différentielle est dite de Fredholm

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt + f(x).$$

- Si $b = x$ alors l'E.I.D est de Volterra

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt + f(x).$$

- Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra coïncident alors l'équation intégréo-différentielle est dite de Fredholm -Volterra.

$$L_x(\varphi) = \lambda_1 \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt + f(x) + \lambda_2 \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt + f(x).$$

Tel que L_x un opérateur différentiel. [17]





1.3 Espaces normés et espaces de Banach

Définition 1.3.1. [19] Une norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E est une application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

possédant les propriétés suivantes

(N1) *Positivité* : pour tout $x \in E$ non nul, on a $\|x\| \neq 0$, $\|0\| = 0$.

(N2) *Transformation par les homothéties* : pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(N3) *Inégalité triangulaire* : pour tout $x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

L'espace E , muni de la norme $\|\cdot\|$ est dit espace normé ou espace vectoriel normé (ou \mathbb{K} -espace vectoriel normé, si on veut préciser le corps \mathbb{K}). On note souvent un tel espace $(E, \|\cdot\|)$.

Proposition 1.3.1. [19] Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

- L'inégalité (N3) se généralise à n points. Pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|.$$

Exemple 1.3.1. Sur l'espace vectoriel L^p , $1 \leq p < \infty$ des suites complexes $x = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ telles que la série des modules soit convergente : $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$,

la fonction $\|\cdot\|_p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définit par $\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme.

Distance associée à une norme. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 1.3.2. [19] (Espace de Banach) Un espace de Banach est un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ qui est complet pour la distance associée à la norme.

Exemple 1.3.2. • Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.

- Pour $1 \leq p < \infty$, L^p est un espace de Banach.

1.4 Produits scalaires

Définition 1.4.1. [21] Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Le produit scalaire sur E est une fonction $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y, z \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les quatre propriétés suivantes

- $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
- $(x, y) = (y, x)$,
- $(x, x) \geq 0$,
- $(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.





1.5 Espaces de Hilbert

Définition 1.5.1. [21] (*Espaces préhilbertiens*) On appelle espace préhilbertien $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) . Tout espace préhilbertien est un espace normé pour la norme définie par $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.5.2. [21] (*Espaces de Hilbert*) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

Remarque 1.5.1. [7] Les espaces des produits scalaires sont des espaces normés et les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach .

Exemple 1.5.1. $(L^2, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert.

Exemple 1.5.2. (Espace euclidien \mathbb{R}^n) L'espace \mathbb{R}^n est un espace de Hilbert avec un produit scalaire défini par

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \cdots + \xi_n \eta_n$$

où $x = (\xi_i) = (\xi_1 + \cdots + \xi_n)$ et $y = (\eta_i) = (\eta_1 + \cdots + \eta_n)$.

Définition 1.5.3. [7] (**Orthogonalité**) Un élément x d'un produit scalaire l'espace E est dit orthogonal à un élément $y \in E$ si

$$(x, y) = 0.$$

On dit aussi que x et y sont orthogonaux, et on écrit $x \perp y$. De même, pour les sous-ensembles $A, B \subset E$ on écrit $x \perp A$ si $x \perp a$ pour tout $a \in A$, et $A \perp B$ si $a \perp b$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$.

Lemme 1.5.1. [7] (**Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire**) Un produit scalaire et la norme correspondante satisfont l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire comme suit

(i) **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| ,$$

où le signe d'égalité est vérifié si et seulement si $\{x, y\}$ est un ensemble linéairement dépendant.

(ii) **Inégalité triangulaire**

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| ,$$

où le signe d'égalité est vérifié si et seulement si $y = 0$ ou $x = cy$ (c réel et ≤ 0).

1.6 Espaces fonctionnels

Notations

- Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , K désigne un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^n , d'intérieur non vide, inclus dans Ω : $\emptyset \neq \overset{\circ}{K} \subset K \subset \Omega$.
- Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de \mathbb{R}^n .
- Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un élément de \mathbb{N}^n . On appelle ordre de α et on note $|\alpha|$ l'entier :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| .$$
- Soit u une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} , α un élément de \mathbb{N}^n . On note $D^\alpha u$ la dérivée d'ordre α de u soit : $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$ [11].





1.6.1 Espaces C^k

$$C(\Omega) = C^0(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}.$$

Pour $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, on définit alors

$$C^k(\Omega) = \{u \in C^{k-1}(\Omega), D^\alpha u \in C(\Omega), |\alpha| = k\}.$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega).$$

[11].

1.6.2 Espace de Lebesgue

Définition 1.6.1. [13] Une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$E_\alpha = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

Définition 1.6.2. [13] On dit qu'une fonction mesurable $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si

$$\int_{\Omega} |u| < \infty.$$

Définition 1.6.3. [13] Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable et } |u|^p \text{ intégrable}\}.$$

De plus, pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable et il y a une constante } C \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\},$$

avec

$$\|u\|_{L^\infty} = \text{Supess}(u) = \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ p.p}\}.$$

Définition 1.6.4. [13] Deux nombres $p, q \in [1, \infty]$ sont appelés exposants conjugués si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Proposition 1.6.1. [21] (**Inégalité de Hölder**) Soit $1 \leq p < \infty$, si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, où q est l'exposant conjugué de p , alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Proposition 1.6.2. [21] (**Inégalité de Minkowski**) Soit $1 \leq p < \infty$ et $u, v \in L^p(\Omega)$, alors $u + v \in L^p(\Omega)$ et

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

Théorème 1.6.1. [10] L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $p, 1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.6.2. [10] (**Fischer-Riesz**) L^p est un espace de Banach pour tout $p, 1 \leq p \leq \infty$.





1.6.3 Espace des fonctions test $D(\Omega)$

Définition 1.6.5. [18] (Support d'une fonction) Soit u une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} ; on appelle support de u , et on note $\text{supp}(u)$ l'adhérence dans \mathbb{R}^n de l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \neq 0\}$; ainsi, $\text{supp}(u) = \overline{A}$.

Définition 1.6.6. [18] (Espace $D(\Omega)$ des fonctions test) Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n ; on appelle espace des fonctions test et on note $D(\Omega)$ l'ensemble :

$$D(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \exists K \text{ compact, } K \subset \Omega, u \in D_K(\Omega)\}.$$

$$\text{où : } D_K(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(u) \subset K\}.$$

1.6.4 Espace des distributions $D'(\Omega)$

Définition 1.6.7. [18] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $D(\Omega)$ et on note $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

Notation : Pour tout (T, u) de $D'(\Omega) \times D(\Omega)$, $T(u)$ appartient à \mathbb{C} , et on note

$$T(u) = \langle T, u \rangle.$$

1.7 Espace de Sobolev

Définition 1.7.1. [15] Pour un entier non négatif m , pour $1 \leq p \leq \infty$ et pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de (équivalence classes de) fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour toutes les dérivations D^α de longueur $|\alpha| \leq m$. C'est un espace normé équipé de la norme $\|u\| = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$, ou la norme équivalente

$$\|u\|_{m,p} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p \right) dx \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\infty} \quad \text{si } p = \infty.$$

Où D^α est la dérivée de l'ordre α pris au sens des distributions.

Théorème 1.7.1. [9] Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.7.1 L'espace H^1

Définition 1.7.2. [2] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On pose

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N\}.$$

Bien entendu, la dérivation est à comprendre au sens des distributions.

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{H^1} := \left(\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Proposition 1.7.1. [2] L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert.





1.7.2 L'espace H_0^1

Définition 1.7.3. [18] Quel que soit le réel $p, 1 \leq p < \infty$, on appelle espace de Sobolev, et on note espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $H_0^1(\Omega)$ si $p = 2$).

Propriétés 1.7.1. [18] Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ est fermé dans $W^{1,p}(\Omega)$, muni de la topologie induite c'est un espace de Banach séparable; il est de plus réflexif pour tout réel p vérifiant $1 < p < \infty$.

Proposition 1.7.2. [18] Soient p un réel, $1 \leq p < \infty$, I un intervalle de \mathbb{R} et u un élément de $W^{1,p}(I)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. L'application u appartient à $W_0^{1,p}(I)$.
2. L'application u vérifie $u = 0$ au bord de I .

Remarque 1.7.1. [10] Depuis $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

D'autre part, si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, alors en général, $W^{1,p}(\Omega) \neq W_0^{1,p}(\Omega)$.

Cependant, si $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ est suffisamment mince et $p < N$, alors $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. Par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ et $N \geq 2$ on peut montrer que $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Corollaire 1.7.1. [10] (**Inégalité de Poincaré**) Soit $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert borné. Alors, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.7.3 L'espace H^m

Définition 1.7.4. [2] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On pose

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in N^N, |\alpha| \leq m\},$$

où m est un entier strictement positif et D^α est la dérivée de l'ordre α pris au sens des distributions.

On le munit de la norme naturelle

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |D^{\alpha_i} u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Proposition 1.7.3. [2] L'espace $H^m(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^m}$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.7.2. [9] Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} uv dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx.$$

Proposition 1.7.4. [2] (**Formule de Green**) Soit Ω un ouvert de classe C^1 dans \mathbb{R}^N tel que Γ soit borné où bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, alors, pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$





Lemme 1.7.1. [3] (**Lemme de Gronwall**) Considérons $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ comme deux fonctions continues. Soit $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue qui satisfait

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Ainsi, l'inégalité suivante est vraie

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s) \exp \left[\int_s^t g(\tau)d\tau \right] ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

En particulier, si $f(t) = k$ est une constante, alors

$$y(t) \leq k \exp \left[\int_a^t g(s)ds \right], \quad \forall t \in [a, b].$$

Notez que le lemme de Gronwall permet le passage d'une inéquation intégrale pour y à une estimation de la borne supérieure pour y .

1.8 Quelques opérateurs importants

1.8.1 L'opérateur d'interpolation I_h

Il est simple d'étendre le concept d'interpolation linéaire à une interpolation linéaire continue par morceaux sur un maillage. En effet, étant donné une fonction f sur Ω , nous définissons son interpolant continu linéaire par morceaux $\pi f \in V_h$ sur un maillage Ω_i de Ω par

$$\pi f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\varphi(x_i).$$

Où V_h est l'espace des fonctions linéaires continues par morceaux, et $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ est une base V_h [16].

Proposition 1.8.1. [16] L'interpolant πf satisfait les estimations

$$\|f - \pi f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(\Omega_i)}^2,$$

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|f''\|_{L^2(\Omega_i)}^2.$$

1.8.2 L'opérateur de L^2 -projection P_h

L'interpolation est un moyen simple d'approximer une fonction continue, mais ils sont, bien sûr, d'autres moyens. On va étudier ce que l'on appelle orthogonal- L^2 , ou projection- L^2 . La projection- L^2 donne une approximation pour ainsi dire bonne en moyenne, par opposition à l'interpolation, qui est exacte aux nuds. De plus, contrairement à interpolation, la projection- L^2 ne nécessite pas la fonction que nous cherchons à approcher être continue, ou a des valeurs de nud bien définies [16].

Définition 1.8.1. [16] Étant donné une fonction $f \in L^2(\Omega)$ la projection- L^2 $P_h f \in V_h$ de f est définie par

$$\int_{\Omega} (f - P_h f)v dx = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.5)$$

Par analogie avec la projection sur des sous-espaces de \mathbb{R}^N , (1.5) définit une projection de f sur V_h , puisque la différence $(f - P_h f)$ doit être orthogonale à toutes les fonctions $v \in V_h$.





Dérivation d'un système linéaire d'équations

Afin de calculer réellement le $P_h f$ de projection- L^2 , nous notons d'abord que la définition (1.5) est équivalente à

$$\int_{\Omega} (f - P_h f) \varphi_i dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Où $\varphi_i, i = 0, 1, \dots, n$ sont les fonctions de base du chapeau (base V_h). Ceci est une conséquence du fait que si (1.5) est satisfait pour tout choix de v en tant que fonction chapeau, alors il est également satisfait pour une combinaison linéaire de fonctions chapeau, et inversement puisque toute fonction $v \in V_h$ est une combinaison linéaire des fonctions chapeau (1.5) implique (1.6).

Maintenant, puisque $P_h f$ appartient à V_h , il peut être écrit comme la combinaison linéaire

$$P_h f = \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j.$$

Où $\xi_j, j = 0, 1, \dots, n$, sont $n + 1$ coefficients inconnus à déterminer [16].

1.8.3 L'opérateur de Ritz-projection R_h

La projection de Ritz est une technique d'approximation d'une fonction u donnée, et est très similaire à la projection- L^2 . En effet, les projections- L^2 et Ritz calculent la projection orthogonale de u sur un sous-espace de dimension finie par rapport à un certain produit scalaire. Pour la projection- L^2 , le sous-espace est V_h et le produit scalaire habituel $L^2 \int uv dx$. Cependant, pour la projection de Ritz, le sous-espace est $V_{h,0}$ et le produit scalaire $\int u'v' dx$. Plus précisément, la projection de Ritz $R_h u \in V_{h,0}$ d'une fonction donnée $u \in V_0$ est définie par

$$\int_{\Omega} (u - R_h u)' v' dx = 0, \quad \forall v \in V_{h,0}. \quad (1.7)$$

Avec cette définition, nous avons le résultat d'approximation suivant [16].

Proposition 1.8.2. [16] *La projection de Ritz $R_h u$, définie par (1.7), satisfait l'estimation*

$$\|u - R_h u\| \leq Ch^2 \|u''\|.$$

1.8.4 L'opérateur de Ritz-Volterra projection V_h

Si l'on considère le problème de valeur aux limites et initiales d'une équation integro-différentielle parabolique suivant

$$\begin{cases} u_t + Au = \int_0^t Bu(s) ds + f, & (x, t) \in Q_t = \Omega \times J, J = (0, T], \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times J, \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Où A est un opérateur uniformément elliptique du second ordre, et B est un opérateur différentiel partiel arbitraire de second ordre.

Afin d'analyser l'approximation par éléments finis semi-discrets du problème parabolique, on introduit la projection de Ritz-Volterra (ou projection quasielliptique) $V_h u(t) \in S_h$ qui satisfait

$$A(V_h u(t) - u(t), v) = \int_0^t B(V_h u(s) - u(s), v) ds, \quad v \in S_h. \quad (1.9)$$

Où S_h est un sous-espace par morceaux [3].



Introduction à la méthode des éléments finis

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode des éléments finis (MEF) en tant que technique numérique pour résoudre des problèmes décrits par des équations aux dérivées partielles. Cette méthode consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

2.1 Présentation de la méthode des éléments finis

Soit (\mathcal{P}) le problème de Dirichlet homogène

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \forall x \in \Gamma, \end{cases}$$

où

Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

Γ la frontière de Ω .

$f \in L^2(\Omega), c \in L^\infty(\Omega)$. En outre, on suppose qu'il existe $c_0 > 0$ telle que $\forall x \in \Omega, c(x) \geq c_0 > 0$.

Définition 2.1.1. [6] Une solution **classique** (ou solution **forte**) de (\mathcal{P}) est une fonction de $C^2(\Omega)$ telle que $u = 0$ sur Γ et $\forall x \in \Omega, -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x)$.

2.1.1 Formulation variationnelle

En faisant le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ de l'équation différentielle avec une fonction-test $v \in D(\Omega)$ (c'est-à-dire en intégrant sur Ω), on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

En utilisant la formule de Green, nous avons

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx,$$



car $v(x) = 0$ sur Γ puisque $v \in D(\Omega)$. Chaque terme de cette équation a en fait un sens lors que $v \in H_0^1(\Omega)$. De plus $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, cette équation est vérifiée pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

On peut donc définir le nouveau problème

$$(\mathcal{Q}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce problème est la **formulation variationnelle** (ou **formulation faible**) du problème (\mathcal{P}) . Toute solution de (\mathcal{Q}) est appelée **solution faible**. Il est immédiat que toute solution forte de (\mathcal{P}) est aussi une solution faible [6].

2.1.2 Formulation générale

On peut écrire une formulation de problème sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

1. $V = H_0^1(\Omega)$.
2. $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx$.
3. $L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$,

où $a(., .)$ une forme bilinéaire sur $V \times V$ et $L(.)$ une forme linéaire sur V .

Remarque 2.1.1. [6] Une formulation plus générale est la suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, w) = L(w) \quad \forall w \in W, \end{cases} \quad (2.3)$$

où $a(., .)$ une forme bilinéaire sur $V \times W$ et $L(.)$ une forme linéaire sur W . V est alors appelé espace des solutions et W espace des fonctions-tests. La formulation précédente (2.2) correspond donc au cas particulier $W = V$.

2.1.3 Théorèmes d'existence et unicité

Théorème de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert.

Définition 2.1.2. [10] Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire :

1. On dit que a est **continue** dans V , s'il existe une constante positive M telle que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

2. On dit que a est V -elliptique ou **coercive** sur V , s'il existe une constante strictement positive α telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$





Définition 2.1.3. [10] $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est-à-dire que $v \rightarrow L(v)$ est linéaire de V dans \mathbb{R} et il existe $c > 0$ tel que

$$|L(v)| \leq \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

Théorème 2.1.1. [10] (**Lax-Milgram**) Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace de Hilbert V , soit $L(v)$ une forme linéaire continue sur V , le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à l'espace de Hilbert } V \text{ telle que :} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

admet une solution unique dans V .

De plus, si a est symétrique, ce problème est équivalent au problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à l'espace de Hilbert } V \text{ telle que :} \\ J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - L(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Condition inf-sup

Dans le cas de la formulation plus générale (2.3), on a le théorème suivant :

Théorème 2.1.2. [6] (**Banach-Neca-Babuska**) Soient V et W deux espaces de Hilbert, a une forme bilinéaire continue sur $V \times W$, L une forme linéaire continue sur W . Alors le problème (2.3) admet une seule solution si et seulement si

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \inf_{v \in V} \sup \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha, \\ \forall w \in W, (a(v, w) = 0, \quad \forall v \in V) \implies (w = 0). \end{cases} \quad (2.4)$$

2.1.4 Principe générale de la méthode

L'idée de base consiste à approximer la solution u du problème (2.2) par une fonction linéaire continue par morceaux. Pour cela, on définit un maillage du domaine, grâce au quel on va définir un espace d'approximation de dimension finie V_h sous espace vectoriel de V (qui est habituellement de dimension infinie) approchant l'espace V dans un sens à définir (C'est le principe de la méthode de **Galarkin**). Le problème approché est alors [1][5]

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.5)$$

2.1.5 Discrétisation du domaine d'étude

Maillage admissible en dimension 1

Un maillage de $\Omega = [a, b]$ est de la forme

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b,$$

avec un pas de discrétisation local $h_i = x_{i+1} - x_i$, $0 \leq i \leq n$.

On pose $h = \max_{0 \leq i \leq n} h_i$. Les points $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ constituent les sommets du maillage et les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les sommets intérieurs. Les segments $[x_i, x_{i+1}]_{0 \leq i \leq n}$ sont appelés les éléments du maillage ou





plus simplement les mailles. En une dimension d'espace, la relation entre le nombre de sommets N_s , le nombre de sommets intérieurs $N_{s,i}$ et le nombre de mailles N_e est très simple

$$N_s = N_{s,i} + 2 = N_e + 1 = n + 2.$$

Pour des raisons de simplicité, nous supposons souvent que les sommets du maillage sont régulièrement espacés si bien que pour tout $0 \leq i \leq n + 1$, on a $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n+1}$. De tels maillages sont dits uniformes.

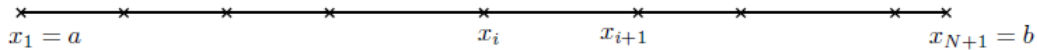


FIGURE 2.1 – Maillage uniforme de $]a, b[$.

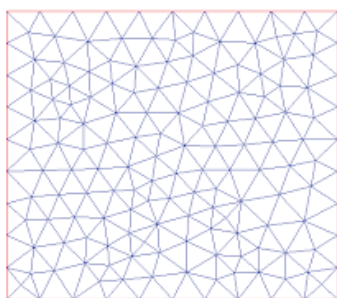
[8]

Maillage admissible en dimension 2

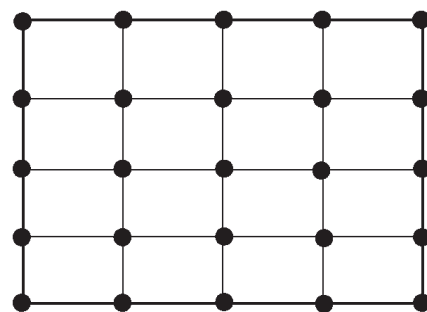
Définition 2.1.4. [8] (*Maillage admissible rectangulaire*) Soit τ_h une rectangulation de domaine Ω à l'aide de quadrilatères convexes K_i de diamètre $\leq h$, donc cela signifie que : Si K_i et K_j sont deux éléments quelconques mais distincts de τ_h , on aurait

$$K_i \cap K_j = \begin{cases} \text{Soit } \emptyset. \\ \text{Soit un sommet commun.} \\ \text{Soit un côté commun.} \end{cases}$$

Dans cette dernière éventualité, les éléments K_i et K_j seront dits adjacents (voir la figure 2.2)



(a) Maillage triangulaire.



(b) Maillage rectangulaire .

FIGURE 2.2 – Maillage admissible en dimension 2.

2.1.6 Système linéaire

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$ une base de V_h . En décomposant u_h sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i,$$





le problème (2.5) devient avec a bilinéaire et L linéaire

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction } u \in V_h \text{ telle que :} \\ \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (2.6)$$

pour $v_h = \varphi_j$, on obtient

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction } u \in V_h \text{ telle que :} \\ \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad \forall j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.7)$$

c'est-à-dire résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & \cdots & a(\phi_N, \phi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\phi_1, \phi_N) & \cdots & a(\phi_N, \phi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\phi_1) \\ \vdots \\ L(\phi_N) \end{pmatrix},$$

où simplement

$$AU = B.$$

Ainsi, si la matrice A est inversible (ce qui sera toujours le cas pour nous), le vecteur U recherché est donc égal à $U = A^{-1}B$ et il est unique, ce qui prouve que le problème (2.5) admet une solution unique. La matrice A est appelée **matrice de rigidité**. La matrice A est a priori pleine. Toutefois, pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonctions de base φ_i dont le support sera petit, c'est-à-dire que chaque fonction φ_i sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes $a(\varphi_i, \varphi_j)$ seront le plus souvent nuls, car correspondant à des fonctions φ_i et φ_j de supports disjoints. La matrice A sera donc une matrice creuse [1][14].

2.1.7 Estimation de l'erreur

Lemme 2.1.1. [20] (**Orthogonalité de Galarkin**) Soit $u \in V$ la solution exacte du problème continu (2.2) et u_h la solution exacte du problème discret (2.5).

Alors, l'erreur $e = u - u_h$ satisfait

$$a(e, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.8)$$

Démonstration. Comme $V_h \subset V$ nous pouvons prendre une fonction test dans V_h et déduire que $a(u, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$ et de $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$ nous obtenons immédiatement le résultat. □

Lemme 2.1.2. [20] (**Lemme de Céa**) La forme bilinéaire $a(.,.)$ étant continue de constante de majoration M et coercitive de constante de minoration α , il est aisé d'obtenir la majoration de l'erreur appelée lemme de Céa

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h),$$

où d est la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$





or $v_h - u_h \in V_h$. Donc, d'après (2.8) $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$. On a donc

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.9)$$

a étant coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|^2$ où $\|\cdot\|$ est une norme sur V . Par ailleurs, a étant continue, il existe $M > 0$ tel que $a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$. En réinjectant ces deux inégalités de part et d'autre de (2.9) et en simplifiant par $\|u - u_h\|$, on obtient

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.10)$$

□

2.1.8 Éléments finis de Lagrange

Les éléments de Lagrange sont les plus simples des éléments finis.

Définition 2.1.5. [22] (**Unisolvance**) Soit $\Sigma = a_1, \dots, a_N$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n . Soit P un espace vectoriel de dimension finie de fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que Σ est P -unisolvant SSI pour tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, il existe un unique élément p de P tel que $\forall i = 1, \dots, N; p(a_i) = \alpha_i$. (Ce qui revient à dire que la fonction de P dans \mathbb{R}^n qui à p fait correspondre $(p(a_i), \dots, p(a_N)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ est bijective).

Définition 2.1.6. [22] (**EF de Lagrange**) Un élément fini de Lagrange est un triplet (K, Σ, P) tel que

- K est un élément géométrique de \mathbb{R}^n , compact, connexe et d'intérieur non vide.
- $\Sigma = a_1, \dots, a_N$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n .
- P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K , et tel que Σ soit P -unisolvant (donc $\dim P = N$).

Les fonctions de bases locales de l'élément fini de Lagrange (K, Σ, P) sont les N fonctions de P telles que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i \leq j \leq N$.

$(p(a_i), \cdot, p(a_N))$ est une base de P .

Définition 2.1.7. [22] On appelle **un opérateur de P -interpolation** sur Σ est un opérateur π_K qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction $\pi_K v$ de P définie par : $\pi_K v = \sum_{i=1}^N v(a_i) p_i$. $\pi_K v$ est donc l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ .

Exemple 2.1.1. (Éléments finis de Lagrange)

On notera P_K l'espace vectoriel des polynômes de degré total inférieur ou égal à K .

- Sur \mathbb{R} , $P_K = \text{Vect}\{1, X, \dots, X^K\}$ et $\dim P_K = K + 1$,
- Sur \mathbb{R}^2 , $P_K = \text{Vect}\{X^i Y^j, 0 \leq i + j \leq K\}$ et $\dim P_K = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$,
- Sur \mathbb{R}^3 , $P_K = \text{Vect}\{X^i Y^j Z^l, 0 \leq i + j + l \leq K\}$ et $\dim P_K = \frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{6}$.

On notera Q_K l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à K par rapport à chaque variable.

- Sur \mathbb{R} , $Q_K = P_K$,
- Sur \mathbb{R}^2 , $Q_K = \text{Vect}\{X^i Y^j, 0 \leq i, j \leq K\}$ et $\dim Q_K = (K + 1)^2$,
- Sur \mathbb{R}^3 , $Q_K = \text{Vect}\{X^i Y^j Z^l, 0 \leq i, j, l \leq K\}$ et $\dim Q_K = (K + 1)^3$.




EF 1D

On discrétise le segment $[a, b]$ avec des polynômes de degrés 1 à m . On obtient les éléments suivants

Elément	P_1	P_2	\dots	P_m
K	$[a, b]$	$[a, b]$	\dots	$[a, b]$
Σ	$\{a, b\}$	$\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$	\dots	$\{a + i\frac{b-a}{m}, i = 0, \dots, m\}$
P	P_1	P_2	\dots	P_m

 TABLE 2.1 – Éléments de Lagrange unidimensionnels de degrés 1 à m .

EF 2D triangulaire

On discrétise le triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$ avec, le long de chaque arête une interpolation polynômiale de degré 1 à m . On obtient les éléments suivants

Elément	P_1	P_2
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}, 1 \leq i, j \leq 3\}$
P	P_1	P_2

TABLE 2.2 – Éléments de Lagrange bidimensionnels triangulaires de degrés 1 et 2.

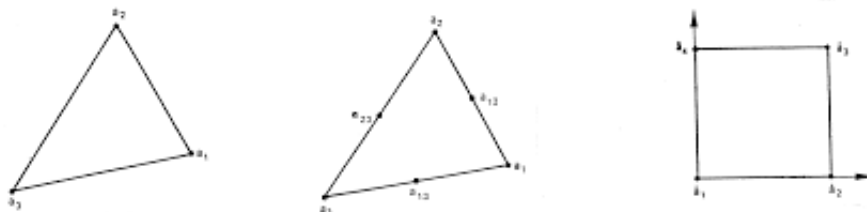
Remarque 2.1.2. [22] Les fonctions de base pour l'élément P_1 sont définies par $p_i(a_j) = \delta_{ij}$. Ce sont les coordonnées barycentriques : $p_i = \lambda_i$.

EF 2D rectangulaire

On discrétise le rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes.

Elément	Q_1
K	rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes.
Σ	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
P	Q_1

TABLE 2.3 – Éléments de Lagrange bidimensionnel rectangulaire de degré 1.


 FIGURE 2.3 – Éléments finis de Lagrange 2D : triangulaire P_1 , triangulaire P_2 et rectangulaire Q_1 .




Remarque 2.1.3. [22] Ce type de définition des fonctions de base n'est possible que si le maillage est **conforme**, c'est à dire si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit réduite à un sommet ou une arête en dimension 2 (ou à un sommet, une arête ou une face en dimension 3). On interdit ainsi les situations du type de celle de la figure 2.4.

FIGURE 2.4 – Maillage non conforme : Situations interdites.

Conditions nécessaires et suffisantes pour la P-unisolvance

Lemme 2.1.3. [5] Σ est P-unisolvent si et seulement si

1. il existe N fonctions p_i linéairement indépendantes telles que

$$\varphi_i(p_j) = \delta_{ij},$$

2. $\dim P = \text{card } \Sigma$.

ou

1. l'unique fonction $p \in P$ telle que $\varphi_i(p) = 0, \forall i$ est l'application nulle,
2. $\dim P = \text{card } \Sigma$.

Démonstration. La P-unisolvant est équivalente à la bijectivité de l'application :

$\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^N$ définie par $\varphi(p) = (\varphi_i(p))_{i=1}^N$.

\implies si $(e_i = \delta_{ij})_{j=1}^N$ est la base canonique de \mathbb{R}^N on a $p_i = \phi^{-1}(e_i)$.

\longleftarrow tantdonn $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N$, on vérifie que $p \in P$ donné par

$$p = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i,$$

satisfait $\varphi(p) = \alpha$. Donc φ est surjective donc bijective. □

2.2 Retour au problème (\mathcal{P})

Le principe consiste à écrire une formulation variationnelle associée à (\mathcal{P}) puis de résoudre ce problème sur un espace de dimension finie inclus dans $H_0^1(\Omega)$.

La construction de l'espace de dimension finie exige un maillage de Ω qui satisfait certaines règles .

On recouvre Ω par des éléments de forme simple par exemple des rectangles ou des triangles construisants un maillage admissible. Soit $(T_k), k \in \{1, \dots, N_T\}$ les éléments de petite taille qui recouvrent Ω . On note

$$h = \max_{k \in \{1, \dots, N_T\}} (\text{diam}(T_k)).$$

On désigne par τ_h l'ensemble de tous les éléments T_k , τ_h s'appelle une **triangulation** de Ω . Pour simplifier, supposons que Ω est à frontière polygonale. Donc, on a

$$\bar{\Omega} = \cup_{T \in \tau_h} T.$$

[5]





2.2.1 Approximation par éléments finis rectangulaires Q_1

D'après la formulation variationnelle (2.1) du problème, on a

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) : \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.11)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx, \quad (2.12)$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx. \quad (2.13)$$

Le théorème de **Lax-Milgrame** assure l'existence et l'unicité de la solution dans $H_0^1(\Omega)$, où a est une forme bilinéaire et d'après (2.3) on a :

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx \right|.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Shwarz et Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|\nabla u\| \|\nabla v\| + c\|u\| \|v\| \\ &\leq \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + c\beta^2 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} = M \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

où $M = \alpha + c\beta^2$. Donc a est continue.

De plus, nous prouvons la V-ellipticité de a . Alors on suppose que on a pour $u \in H_0^1$

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla u^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &= \|u\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, a est coercive.

Et L une forme linéaire, d'après (2.4), on a

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \int_{\Omega} |f| |v|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq C \|v\| \\ &\leq C \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Donc L est continue.

On suppose que Ω est le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$. On recouvre par $N_T = (N_1 + 1)(N_2 + 1)$ rectangles R_k , $k \in \{1, \dots, N_T\}$ de taille $h_1 = 1/(N_1 + 1)$ dans la direction de x_1 et $h_2 = 1/(N_2 + 1)$ dans la direction de x_2 . On note $h = \max(h_1, h_2)$.

On note q^i , $i \in \{1, \dots, (N_1 + 1)(N_2 + 1)\}$ les points du maillage, $N_s = (N_1 + 1)(N_2 + 1)$ et $N_i = N_1 * N_2$ le nombre de sommets internes.





2.2.2 Espace discret V_h

On note Q_1 l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 par rapport à chacune des deux variables x_1 et x_2 . Cet espace est engendré par $1, x_1, x_2, x_1x_2$. En fait il est engendré par les produits tensoriels de fonctions affines en x_1 par des fonctions affines en x_2 , $((f \otimes g)(x) = f(x_1)g(x_2))$. On notera $Q_1 = Vect(P_1 \otimes P_1)$ avec P_1 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à un engendré par $1, x_1$ et x_2 , où

$$Q_1 = \{p, p(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2\}.$$

Introduisons l'espace discret V_h défini par

$$V_h = \left\{ v_h \in \tilde{V}_h, (v_h)|_\Gamma = 0 \right\},$$

avec

$$\tilde{V}_h = \left\{ v_h \in C^0(\Omega), \text{ tel que } (v_h)|_{R_k} \in Q_1, \forall k \in \{1, 2, \dots, N_T\} \right\}.$$

La proposition suivante permet de définir une base de \tilde{V}_h et de donner les degrés de liberté des fonctions et de l'espace [5].

Proposition 2.2.1. [5]

1. Les fonctions de \tilde{V}_h sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_S sommets q^i du maillage.
2. La dimension de \tilde{V}_h est N_S et une base de \tilde{V}_h est formée des fonctions $w^i, i \in \{0, 1, \dots, N_S\}$ suivantes : $w^i \in \tilde{V}_h, w^i(q^j) = \delta_{ij}$. Ces fonctions sont appelées fonctions chapeaux en raison de leur graphe et on a

$$\forall v_h \in \tilde{V}_h, v_h(x) = \sum_{i=0}^{N_S} v_h(q^i)w^i(x).$$

Les scalaires $v_h(q^i), i \in \{0, 1, \dots, N_S\}$ sont les degrés de liberté de la fonction $v_h \in \tilde{V}_h$.

3. $\tilde{V}_h \subset H^1(\Omega)$ et pour toute fonction $v_h \in \tilde{V}_h$ on a au sens des distributions

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{N_T} \chi_{R_k} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_h|_{R_k}).$$

Démonstration. Voir [5] □

Corollaire 2.2.1. [5]

1. Les fonctions de V_h sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_i sommets internes du maillage.
2. $\dim V_h = N_i$

$$\forall v_h \in V_h, v_h = \sum_{i=1}^{N_i} v_h(q^i)w^i(x).$$

Les scalaires $v_h(q^i)$ pour $i \in \{1, 2, \dots, N_i\}$ sont les degrés de liberté de la fonction v_h .

3. $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. $v_h = \sum_{i=1}^{N_i} v_h(q^i)w^i(x)$ car $v_h \in \tilde{V}_h$. Comme $v_h(q^i) = 0$ pour tout $q^i \in \Gamma$, on a

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_i} v_h(q^i)w^i(x).$$

Cette famille est génératrice et libre donc c'est une base de V_h . □





2.2.3 Calcul de u_h

Le problème discret est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (2.14)$$

Où V_h est l'espace décrit dans le corollaire précédent. On cherche alors u_h sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_i} x_i w^i(x),$$

où les coefficients x_i pour $i \in \{1, \dots, N_i\}$ sont déterminés en résolvant le système

$$AX = B,$$

avec

1. $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N_i})$.
2. $A = (A_{ij}), 1 \leq i \leq N_i, 1 \leq j \leq N_i$, où

$$A_{ij} = a(w^j, w^i).$$

3. $B = (B_i)_{i=1, \dots, N_i}$, où

$$B_i = L(w^i).$$

Ce qui suit explique le calcul de la matrice A et du second membre B par un procédé appelé assemblage.

On a

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega} (\nabla w^i \nabla w^j + c w^i w^j) \\ &= \sum_{k=1}^{N_T} A_{ij}(R_k), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{ij}(R_k) &= \int_{R_k} (\nabla w^i \nabla w^j + c w^i w^j), \\ B_i &= \int_{\Omega} f w^i = \sum_{k=1}^{N_T} B_i(R_k), \end{aligned}$$

où

$$B_i(R_k) = \int_{R_k} f w^i.$$

Cette écriture montre que le calcul de A et B se ramène à une somme de contributions élémentaires $A_{ij}(R_k)$ et $B_i(R_k)$ sur chacun des rectangles formant la triangulation .

Par ailleurs, pour un rectangle R_k donné, il n'intervient dans le calcul effectif de $A_{ij}(R_k)$ que les indices i et j associés à des sommets q^i et q^j qui appartiennent à R_k , (si q^i ou q^j n'appartient pas à R_k alors $A_{ij}(R_k) = 0$) [5] .

On est donc ramené à un calcul local c'est-à-dire sur chacun des rectangles de la triangulation. Pour calculer les contributions élémentaires, il suffit de déterminer les bases locales sur chacun des rectangles .





2.2.4 Calcul des fonctions de base

On va calculer quatre polynômes p^i de type Q^1 associés au rectangle R_k tel que

$$p^i(A^j) = \delta_{ij}.$$

Expliquons le calcul pour p^1 . On a

$$p^1(A^2) = p^1(A^3) = 0,$$

et sur la droite $(A^2A^3)p^1$ est affine en x_2 donc $p^1 = 0$ sur (A^2A^3) d'équation $x_1 = x_1^2$. De même p^1 est nul sur (A^3A^4) d'équation $x_2 = x_2^4$. Ainsi, on a

$$p^1(x_1, x_2) = C(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^4),$$

où $C \in \mathbb{R}$. Or $p^1(A^1) = 1$, donc on a $C = 1/h_1h_2$. D'où

$$p^1(x) = \frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^4).$$

De même

$$p^2(x) = -\frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^1)(x_2 - x_2^4),$$

$$p^3(x) = \frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^1)(x_2 - x_2^1),$$

$$p^4(x) = -\frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^1).$$

Le lien entre les fonctions de base locales p^i pour $i \in \{1, 4\}$ et les fonctions de base globales w^i pour $i \in \{1, N_i\}$

Soit q^i un point du maillage et w^i la fonction de base globale qui lui est associée d'après le corollaire 2.2.1. Soit $R_k \in \tau_h$, on obtient

1. si $q^i \notin R_k$, $(w^i)|_{R_k} = 0$,
2. si $q^i \in R_k$, par exemple $q^i = A^3$, alors

$$(w^i)|_{R_k} = p^3,$$

c'est à dire

$$(w^i)|_{R_k} = \frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^1(R_k))(x_2 - x_2^1(R_k)).$$

Remarque 2.2.1. *La restriction à un rectangle d'une fonction de base globale est une fonction de base locale.*

Ainsi, en ayant calculer des fonctions de base locales de type Q^1 sur chaque rectangle, on peut calculer les contributions élémentaires $A_{i,j}(R_k)$ et $B_i(R_k)$ sur chaque rectangle R_k de τ_h . [5]





2.3 Problème détaillé

Considérons le problème (\mathcal{P}) en une dimension d'espace avec conditions aux limites de Dirichlet non homogènes :

Trouver une fonction u définie sur $\Omega =]a, b[$ tel que

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases} \quad (2.15)$$

où :

Les fonctions de coefficients $p, q \in L^\infty(\Omega)$ vérifient les propriétés suivantes :

$$\exists M(\text{constante}) > 0 \text{ tel que } p(x) \geq M > 0 \text{ et } q(x) \geq 0 \text{ p. p } x \in \Omega.$$

$$f \in L^2(\Omega).$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Aux fins de la formulation variationnelle, nous considérons une fonction $g \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tel que $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$. Notez que g n'est pas unique. en écrivant $u = U + g$, le problème (\mathcal{P}) peut être reformulé comme suit

Trouvez $U \in C^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -(p(x)(U + g)'(x))' + q(x)(U + g)(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ (U + g)(a) = \alpha, \quad (U + g)(b) = \beta. \end{cases}$$

Le problème (\mathcal{P}) est équivalent au problème suivant

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} -(p(x)U'(x))' + q(x)U(x) = f(x) + (p(x)g'(x))' - q(x)g(x), & x \in \Omega, \\ U(a) = 0, \quad U(b) = 0. \end{cases}$$

[20]

• Formulation variationnelle

On multiplie la première équation du problème (\mathcal{P}') par une fonction test v supposée régulière et on intègre sur le domaine Ω . On obtient

$$\begin{aligned} - \int_a^b (p(x)U'(x))'v(x)dx + \int_a^b q(x)U(x)v(x)dx &= \int_a^b f(x)v(x)dx + \int_a^b (p(x)g'(x))'v(x)dx \\ &\quad - \int_a^b q(x)g(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)U'(x)v'(x)dx - [p(x)U'(x)v(x)]_a^b + \int_a^b q(x)U(x)v(x)dx &= \int_a^b f(x)v(x)dx \\ - \int_a^b p(x)g'(x)v'(x)dx + [p(x)g'(x)v(x)]_a^b - \int_a^b q(x)g(x)v(x)dx. \end{aligned}$$





On va prendre v nulle sur la frontière de Ω ($v(a) = v(b) = 0$), alors

$$\int_a^b p(x)U'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)U(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx - \int_a^b p(x)g'(x)v'(x)dx - \int_a^b q(x)g(x)v(x)dx.$$

On peut donc définir la formulation variationnelle :

$$(f\nu) \begin{cases} \text{Trouver } U \in V & \text{tel que :} \\ a(U, v) = L(v), & \forall v \in V, \end{cases}$$

où :

$$V = H_0^1(\Omega).$$

$$a(U, v) = \int_a^b p(x)U'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)U(x)v(x)dx.$$

$$L(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx - \int_a^b p(x)g'(x)v'(x)dx - \int_a^b q(x)g(x)v(x)dx.$$

$$g \in H^1(\Omega) \text{ tel que } g(a) = \alpha, g(b) = \beta.$$

• **Existence et unicité de la solution**

Montrons l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème de Lax-Milgram. D'abord, nous introduisons la notation suivante : Si $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\|v\|_1 = \|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|v\|_{H^1(\Omega)} = (\|v\| + \|v'\|)^{\frac{1}{2}}.$$

Depuis $p, q \in L^\infty(\Omega)$, il existe un $C_{max} < \infty$ tel que $|p(x)| \leq C_{max}$ et $|q(x)| \leq C_{max}$ p.p $x \in \Omega$.

i) Montrons que la forme linéaire $L(\cdot)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_a^b f(x)v(x)dx - \int_a^b p(x)g'(x)v'(x)dx - \int_a^b q(x)g(x)v(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x)v(x)| dx + \int_a^b |p(x)g'(x)v'(x)| dx + \int_a^b |q(x)g(x)v(x)| dx, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\| \|v\| + C_{max} \|g'\| \|v'\| + C_{max} \|g\| \|v\| \\ &\leq \|f\| \|v\|_1 + C_{max} \|g\|_1 \|v\|_1 + C_{max} \|g\|_1 \|v\|_1 \\ &= (\|f\| + 2C_{max} \|g\|_1) \|v\|_1 \\ &= \lambda \|v\|_1. \end{aligned}$$

D'où : $\lambda = \|f\| + 2C_{max} \|g\|_1$.

Alors, $L(v)$ est continu sur $H_0^1(\Omega)$.

ii) Montrons que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue, on a sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |a(\cdot, \cdot)| &= \left| \int_a^b p(x)U'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)U(x)v(x)dx \right| \\ &\leq C_{max} \int_a^b |U'(x)v'(x)| dx + C_{max} \int_a^b |U(x)v(x)| dx, \end{aligned}$$





en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$|a(.,.)| \leq 2C_{max} \|U\|_1 \|v\|_1.$$

D'où la continuité de $a(U, v)$ sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

- iii) On montre aussi que $a(.,.)$ est coercive en utilisant l'inégalité de Poincaré, comme ($v \in H_0^1(\Omega)$) et $p(x) \geq M > 0, q(x) \geq 0$ p.p $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_a^b p(x)(v'(x))^2 dx + \int_a^b q(x)v^2(x) dx \\ &\geq M \|v'\|^2. \end{aligned}$$

De l'inégalité de Poincaré on obtient

$$\eta > 0 \quad \|v\| \leq \eta \|v'\|.$$

On ajoute $\|v'\|$ au deux côtés, on obtient

$$\delta \|v\|_1^2 \leq \|v'\| \quad \left(\delta = \frac{1}{\eta + 1}\right).$$

Alors

$$a(v, v) \geq M\delta \|v\|_1^2,$$

Donc, a est coercive.

Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution.

Indépendance de la solution $u = U + g$ sur la fonction g :

Suppose que $u_1 = U_1 + g_1 \in H^1(\Omega)$ et $u_2 = U_2 + g_2 \in H^1(\Omega)$ sont deux solutions faibles. D'après l'équation du problème ($f\nu$) la différence $u_1 - u_2 \in V = H_0^1(\Omega)$ satisfait

$$a(u_1 - u_2, v) = 0, \quad \text{pour tous } v \in V.$$

En prenant $v = u_1 - u_2$ et en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire a , on obtient

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq M\delta \|u_1 - u_2\|_1^2.$$

Alors : $\|u_1 - u_2\|_1 = 0$,

c'est-à-dire que $u_1 = u_2$ p.p. dans Ω [20].

• *Problème discret*

Discrétisation du domaine Ω :

On peut maintenant construire un maillage de $\Omega = [a, b]$ en définissant une subdivision par $N + 1$ sous-intervalles $K_i = [x_{i-1}, x_i]$, On pose : Le pas du maillage $h = \frac{b-a}{N+1}$, on désigne par $x_i = a + ih, i \in \{0, \dots, N + 1\}$.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b.$$





Construction de l'espace V_h :

Définissons alors V_h le sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie, par

$$V_h = \{v_h \in C([a, b]), v_h|_{[x_{i-1}, x_i]} \in P_1, \forall i \in 1, \dots, N+1, v_h(a) = v_h(b) = 0\},$$

où P_1 est l'espace de degré inférieur ou égal à un.

En remarquant qu'une fonction de V_h est entièrement déterminée par ses valeurs en x_1, \dots, x_N , on établit que la dimension de V_h est N , et qu'une base de V_h est par exemple $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, où φ_i est définie par $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \dots, N$ (δ_{ij} est ici le symbole de Kronecker), pour $1 \leq i \leq N$, on introduit les fonctions φ_i définies par :

$$(\varphi_i) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in K_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in K_{i+1}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

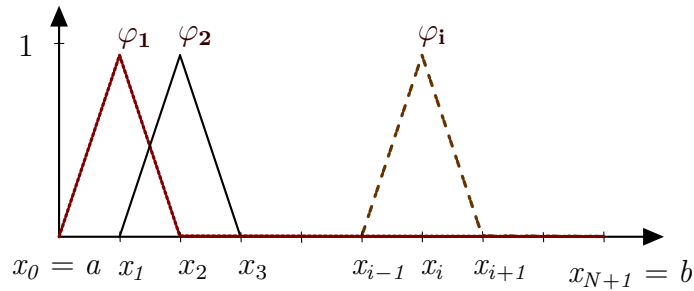


FIGURE 2.5 – Fonction de base φ_i

En décomposant la solution approchée U_h sur cette base sous la forme

$$U_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i(x),$$

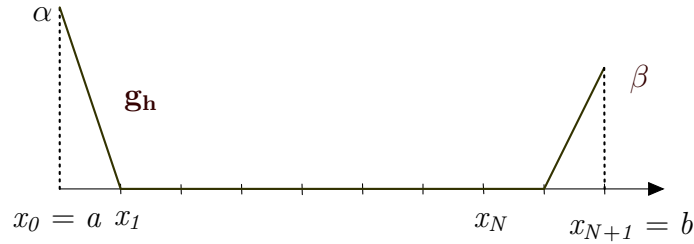
où le vecteur de \mathbb{R}^N de composantes U_i .

Choix de g_h :

La fonction auxiliaire g sera approchée par une fonction g_h continue et affine par morceaux prenant les valeurs imposées sur K_1, K_{N+1} et nulle sur $K_i, i \in \{2, \dots, N\}$, on définit la fonction g_h par :

$$(g_h) = \begin{cases} \frac{\alpha(x-x_1)}{a-x_1}, & x \in K_1, \\ \frac{\beta(x-x_N)}{b-x_N}, & x \in K_{N+1}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$



FIGURE 2.6 – La fonction g_h

En injectant dans la formulation variationnelle tous ces éléments on obtient le problème approché dans V_h

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver les valeurs } U_j \text{ pour } j = \overline{1, N} \text{ telles que :} \\ \sum_{j=1}^N \left(\int_a^b p(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + q(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \right) U_j = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx - \int_a^b p(x) g_h'(x) \varphi_i'(x) dx \\ - \int_a^b q(x) g_h(x) \varphi_i(x) dx, \quad \forall i = \overline{1, N}. \end{array} \right.$$

On obtient un système de N équations et N inconnues où N désigne le nombre de points du maillage d'indices $i = \overline{1, N}$ donc le nombre de nuds correspondant à des valeurs inconnues de la solution. Ce système s'écrit sous la forme matricielle

$$AU = B,$$

avec A la matrice définie par

$$A_{ij} = \int_a^b p(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + q(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx,$$

et B le vecteur de second membre de composantes

$$\begin{aligned} B_i &= \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx - \int_a^b p(x) g_h'(x) \varphi_i'(x) dx - \int_a^b q(x) g_h(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx - \frac{\alpha}{a - x_1} \int_a^{x_1} p(x) \varphi_1'(x) dx - \frac{\beta}{b - x_N} \int_{x_N}^b p(x) \varphi_N'(x) dx \\ &\quad - \int_a^{x_1} \frac{\alpha(x - x_1)}{a - x_1} q(x) \varphi_1(x) dx - \int_{x_N}^b \frac{\beta(x - x_N)}{b - x_N} q(x) \varphi_N(x) dx. \end{aligned}$$



Méthode des éléments finis double maillages pour un problème intégrro-différentiel parabolique non-linéaire

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode des éléments finis (MEF) à double maillages pour une équation intégrro-différentielle parabolique non linéaire à deux dimensions. Nous résolvons un système entièrement non linéaire sur un espace de grille grossier avec une taille de grille H et dérivons une approximation approximative de la solution exacte, puis résolvons le problème linéarisé correspondant sur un espace de grille fine avec une taille de grille h . Les estimations d'erreur optimales dans la norme H^1 sont obtenues pour la MEF à double maillage semi-discret. Enfin, des exemples numériques sont donnés pour montrer l'efficacité de la méthode.

3.1 Présentation du problème

On considère l'équation integro-differentiel parabolique non linéaire suivante

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (a(u)\nabla u + \int_0^t b(u(\tau))\nabla u(\tau)d\tau) = f(u) & x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour les fonctions $a(u)$ et $b(u)$, on suppose qu'il existe des constantes positives a_*, a^*, b^* telles que $0 < a_* \leq a(u) \leq a^*$ et $|b(u)| \leq b^*$. On suppose aussi que les fonctions $a(u), b(u)$ et leurs dérivées et $f(u)$ satisfont les conditions continues de Lipschitz sur u [4].

• Formulation variationnelle

En multipliant (3.1) par une fonction lisse v , en intégrant et en appliquant la formule de Green, on peut obtenir la formulation variationnelle correspondante

$$\begin{cases} (u_t, v) + \left(a(u)\nabla u + \int_0^t b(u(\tau))\nabla u(\tau)d\tau, \nabla v \right) = (f(u), v), & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(x, 0) = u_0. \end{cases} \quad (3.2)$$



3.2 Schéma des éléments finis et estimation d'erreurs

3.2.1 Schéma semi-discret

Pour le domaine Ω , on considère une triangulation régulière $T_h \cdot \bar{\Omega} = \cup_{e \in T_h} e$ où e est un élément triangulaire de T_h et h représente le plus grand diamètre de l'élément. Afin de simplifier, on choisit l'espace des éléments finis linéaires par morceaux

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_e \in P_1(e), \forall e \in T_h, v_h|_{\partial\Omega} = 0\},$$

où $P_1(e)$ est la famille des polynômes d'interpolation linéaire par morceaux [4].

On obtient alors le schéma des éléments finis semi-discret pour (3.1)

$$\begin{cases} (u_{h,t}, v) + \left(a(u_h) \nabla u_h + \int_0^t b(u_h(\tau)) \nabla u_h(\tau) d\tau, \nabla v \right) = (f(u_h), v), & \forall v \in V_h, \\ u_h(0) = W_h u_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

où W_h est défini par (3.4).

L'inégalité inverse suivante est satisfaite : il existe une constante $C > 0$, indépendante de h , $\forall v \in V_h$, tel que

$$\|\nabla v\|_\infty \leq Ch^{-1} \|\nabla v\|,$$

où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de sup.

La projection de Ritz-Volterra est définie comme une projection elliptique avec mémoire

$W_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h, \forall v \in V_h$, tel que

$$(a(u) \nabla(u - W_h u), \nabla v) + \left(\int_0^t b(u(\tau)) \nabla(u - W_h u)(\tau) d\tau, \nabla v \right) = 0. \quad (3.4)$$

• Le système linéaire

Dénoter

$$F(u) = \int_0^u a(y) dy \quad \text{et} \quad G(u) = \int_0^u b(y) dy,$$

ensuite

$$\nabla F(u) = a(u) \nabla u \quad \text{et} \quad \nabla G(u) = b(u) \nabla u.$$

(3.2) peut être récrire sous la forme suivante :

$$(u_t, v) + \left(\nabla F(u) + \int_0^t \nabla G(u(\tau)) d\tau, \nabla v \right) = (f(u), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

et (3.3) par

$$\begin{cases} (u_{h,t}, v) + \left(\nabla F(u_h) + \int_0^t \nabla G(u_h(\tau)) d\tau, \nabla v \right) = (f(u_h), v), & \forall v \in V_h, \\ u_h(0) = W_h u_0. \end{cases} \quad (3.5)$$





Soit $\{\varphi_j\}_1^N$ la base du sous-espace d'éléments finis V_h . Selon la méthode de Galerkin classique, on trouve

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \varphi_j(x) \in V_h,$$

tel que

$$\begin{cases} (u_{h,t}, v) + \left(\nabla F_h + \int_0^t \nabla G_h(\tau) d\tau, \nabla v \right) = (f_h, v), & \forall v \in V_h, \\ u_h(0) = W_h u_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

où F_h est l'interpolant de la fonction $F(u_h)$ (similaire pour G_h et f_h)

$$F_h(t, x) = \sum_{j=1}^N F(\alpha_j(t)) \varphi_j(x).$$

D'où (3.6) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N [(\varphi_j, \varphi_i) \alpha_j' + (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) (F(\alpha_j(t)) + \int_0^t G(\alpha_j(\tau)) d\tau)] = \sum_{j=1}^N (f(\alpha_j(t)) (\varphi_j, \varphi_i)), & i = 1, \dots, N, \\ \alpha_i(0) = \alpha_i^0, \end{cases}$$

où α_i^0 sont des coefficients de l'expansion $W_h u_0 = \sum_{j=1}^N \alpha_i^0 \varphi_j \in V_h$.

Les deux schémas discrets (3.5) et (3.6) sont différents. Ils peuvent être résolus par la méthode itérative, mais celui-ci n'a besoin que de calculer et de stocker une fois que la matrice $[(\varphi_j, \varphi_i)]_{N \times N}$ de coefficient, et le processus itératif est répété uniquement sur trois fonctions scalaires $F(\alpha_j(t))$, $G(\alpha_j(t))$ et $f(\alpha_j(t))$, donc à la fois les exigences le calcul et de stockage sont enregistrées [3].

• Estimation d'erreur

Lemme 3.2.1. [12] *Si u et ∇u sont bornés, il existe une constante positive $C = C(u)$ indépendante de h , tel que*

$$\|u - W_h u\| + h \|u - W_h u\|_1 \leq C h^2.$$

Lemme 3.2.2. [12] *Si u , ∇u , u_t et ∇u_t sont bornés, il existe une constante positive $C = C(u)$ indépendante de h , tel que*

$$\|(u - W_h u)_t\| + h \|\nabla(u - W_h u)_t\| \leq C h^2.$$

Comme corollaire des deux lemmes précédents, nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.2.3. [12] *Si u et ∇u sont bornés et $u \in L^\infty(H^2)$, il existe une constante positive $C = C(u)$ indépendante de h , tel que*

$$\|\nabla W_h u\|_\infty + \|\nabla(W_h u)_t\|_\infty \leq C.$$

Les estimations d'erreurs optimales en norme L^2 pour l'approximation par éléments finis semi-discrète des équations intégro-différentielles paraboliques non linéaires ont été prouvées dans [4] et nous avons alors le lemme suivant.





Lemme 3.2.4. [12] Supposons que $u(t)$ et $u_h(t)$ sont les solutions de (3.1) et (3.3) respectivement. Si u et ∇u sont bornés et $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^2(\Omega))$, nous avons l'estimation d'erreur optimale L^2 comme suit

$$\|u - u_h\| \leq Ch^2,$$

où $C = C(u)$ est une constante positive indépendante de h .

Ensuite, on va donner les estimations d'erreurs dans la norme H^1 pour l'approximation des éléments finis semi-discrète de (3.1).

Théorème 3.2.1. [4] Supposons que $u(t)$ et $u_h(t)$ sont les solutions de (3.1) et (3.3), respectivement. Si u et ∇u sont bornés et $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^2(\Omega))$, nous avons l'estimation d'erreur optimale H^1 comme suit

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch,$$

où $C = C(u)$ est une constante positive indépendante de h .

Démonstration. Soit $u(t) - u_h(t) = u(t) - W_h u(t) + W_h u(t) - u_h(t) := \rho(t) + \theta(t)$. Selon (3.2) et le définition de W_h (3.4), on a

$$\begin{aligned} & ((u(t) - W_h u(t) + W_h u(t))_t, v) + \\ & \left(a(u) \nabla (u(t) - W_h u(t) + W_h u(t)) + \int_0^t b(u(\tau)) \nabla (u(\tau) - W_h u(\tau) + W_h u(\tau)) d\tau, \nabla v \right) = (f(u), v), \end{aligned}$$

donc,

$$((W_h u(t))_t, v) + \left(a(u) \nabla W_h u(t) + \int_0^t b(u(\tau)) \nabla W_h u(\tau) d\tau, \nabla v \right) = (f(u) - \rho_t, v), \quad \forall v \in V_h. \quad (3.7)$$

En soustrayant ((3.3) - (3.7)), on obtient

$$\begin{aligned} & (\theta_t, v) + \left(a(u_h) \nabla \theta + \int_0^t b(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau) d\tau, \nabla v \right) \\ & = - \left((a(u) - a(u_h)) \nabla W_h u + \int_0^t (b(u(\tau)) - b(u_h(\tau))) \nabla W_h u(\tau) d\tau, \nabla v \right) \\ & + ((f(u) - f(u_h)) - \rho_t, v), \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En prenant $v = \theta_t$ dans (3.8) et Comme

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^t (b(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau = \left(\int_0^t b(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau) d\tau, \nabla \theta_t \right) + (b(u_h(t)) \nabla \theta(t), \nabla \theta(t)) \\ & + \int_0^t (b_t(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau, \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (a(u_h) \nabla \theta, \nabla \theta) = \frac{1}{2} (a_t(u_h) \nabla \theta, \nabla \theta) + (a(u_h) \nabla \theta, \nabla \theta_t),$$





on obtient

$$\begin{aligned}
 & \|\theta_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (a(u_h) \nabla \theta, \nabla \theta) - \frac{1}{2} (a_t(u_h) \nabla \theta, \nabla \theta) - (b(u_h(t)) \nabla \theta(t), \nabla \theta(t)) \\
 & \quad + \frac{d}{dt} \int_0^t (b(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau - \int_0^t (b_t(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau \\
 & = - \frac{d}{dt} ((a(u) - a(u_h)) \nabla W_h u, \nabla \theta) - \frac{d}{dt} \int_0^t ((b(u(\tau)) - b(u_h(\tau))) \nabla W_h u(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau \quad (3.9) \\
 & \quad + ((a(u) - a(u_h))_t \nabla W_h u, \nabla \theta) + \int_0^t ((b(u(\tau)) - b(u_h(\tau)))_t \nabla W_h u(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau \\
 & \quad + ((a(u) - a(u_h)) \nabla (W_h u)_t, \nabla \theta) + ((b(u(t)) - b(u_h(t))) \nabla W_h u(t), \nabla \theta(t)) \\
 & \quad + (f(u) - f(u_h) - \rho_t, \theta_t).
 \end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés de l'équation ci-dessus de 0 à t , en déplaçant certains termes de gauche vers la droite de (3.9) et en notant que $\theta(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + C_0 \|\nabla \theta\|^2 \\
 & \leq \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + \frac{1}{2} (a(u_h) \nabla \theta, \nabla \theta) \\
 & \leq |((a(u) - a(u_h)) \nabla W_h u, \nabla \theta)| + \left| \int_0^t ((a(u) - a(u_h)) \nabla (W_h u)_t, \nabla \theta) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \int_0^t ((a(u) - a(u_h))_t \nabla W_h u, \nabla \theta) d\tau \right| + \left| \int_0^t ((b(u(\tau)) - b(u_h(\tau))) \nabla W_h u(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \int_0^t ((b(u(t)) - b(u_h(t))) \nabla W_h u(t), \nabla \theta(t)) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \int_0^t \int_0^t ((b_t(u(\tau)) - b_t(u_h(\tau))) \nabla W_h u(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau d\tau \right| + \left| \int_0^t (f(u) - f(u_h) - \rho_t, \theta_t) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \frac{1}{2} \int_0^t (a_t(u_h) \nabla \theta, \nabla \theta) d\tau \right| + \left| \int_0^t \int_0^t (b_t(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \int_0^t (b(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau \right| + \left| \int_0^t (b(u_h(t)) \nabla \theta(t), \nabla \theta(t)) d\tau \right| \\
 & \equiv \sum_{i=1}^{11} K_i. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Pour estimer les termes de droite de (3.10), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité ε -Cauchy, lemme 3.2.3 et la Lipschitzienne de a , on obtient

$$\begin{aligned}
 K_1 & = |((a(u) - a(u_h)) \nabla W_h u, \nabla \theta)| \\
 & \leq C \|W_h u\|_\infty (\|u - u_h\|) \|\nabla \theta\| \\
 & \leq C \|W_h u\|_\infty \|\theta + \rho\| \|\nabla \theta\| \\
 & \leq C \|W_h u\|_\infty (\|\theta\| + \|\rho\|) \|\nabla \theta\| \\
 & \leq \frac{C_0}{4} \|\nabla \theta\|^2 + C \|\theta\|^2 + C \|\rho\|^2, \tag{3.11}
 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 K_2 &= \left| \int_0^t ((a(u) - a(u_h)) \nabla(W_h u)_t, \nabla\theta) d\tau \right| \\
 &\leq C \int_0^t \|(\nabla W_h u)_t\|_\infty \|\theta + \rho\| \|\nabla\theta\| d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\rho\|^2 d\tau,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

et

$$\begin{aligned}
 K_3 &= \left| \int_0^t ((a(u) - a(u_h))_t \nabla W_h u, \nabla\theta) d\tau \right| \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla W_h u\|_\infty (\|\theta_t\| + \|\rho_t\|) \|\nabla\theta\| d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\rho_t\|^2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}
 K_4 + K_5 &= \left| \int_0^t ((b(u(\tau)) - b(u_h(\tau))) \nabla W_h u(\tau), \nabla\theta(t)) d\tau \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^t ((b(u(t)) - b(u_h(t))) \nabla W_h u(t), \nabla\theta(t)) d\tau \right| \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla W_h u\|_\infty \|\theta + \rho\| \|\nabla\theta\| d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\rho\|^2 d\tau,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

et

$$\begin{aligned}
 K_6 &= \left| \int_0^t \int_0^t ((b_t(u(\tau)) - b_t(u_h(\tau))) \nabla W_h u(\tau), \nabla\theta(t)) d\tau d\tau \right| \\
 &\leq C \int_0^t \int_0^t \|\nabla W_h u\|_\infty \|\theta + \rho\| \|\nabla\theta\| d\tau d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\rho\|^2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité ε -Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned}
 K_7 &= \left| \int_0^t (f(u) - f(u_h) - \rho_t, \theta_t) d\tau \right| \\
 &\leq \int_0^t C(\|\theta + \rho\| + \|\rho_t\|) \|\theta_t\| d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \|\theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\rho\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\rho_t\|^2 d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient





$$\begin{aligned}
 K_8 + K_9 + K_{10} + K_{11} &= \left| \frac{1}{2} \int_0^t (a_t(u_h) \nabla \theta, \nabla \theta) d\tau \right| + \left| \int_0^t \int_0^t (b_t(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau d\tau \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^t (b(u_h(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau \right| + \left| \int_0^t (b(u_h(t)) \nabla \theta(t), \nabla \theta(t)) d\tau \right| \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

En combinant (3.10) - (3.17), on obtient que

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + C_0 \|\nabla \theta\|^2 &\leq C \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 d\tau + \frac{C_0}{4} \|\nabla \theta\|^2 + C \|\theta\|^2 \\
 + C \|\rho\|^2 + C \int_0^t \|\rho\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\rho_t\|^2 d\tau &+ \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\theta\|^2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, lemme 3.2.1, lemme 3.2.2 et l'équivalence de $\|\cdot\|_1$ et $|\cdot|_1$, on peut avoir

$$\int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + \|\theta\|_1^2 \leq C \|\rho\|^2 + C \int_0^t \|\rho\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\rho_t\|^2 d\tau \leq Ch^4. \tag{3.19}$$

Avec (3.19), lemme 3.2.1 et l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|u - u_h\|_1 \leq \|\theta\|_1 + \|\rho\|_1 \leq Ch.$$

Par conséquent, le théorème 3.2.1 est prouvé. \square

3.2.2 MEF double maillages

Dans cette partie, nous proposons la MEF à double maillages pour l'équation intégrodifférentielle parabolique non linéaire (3.1). Nous introduisons deux triangulations quasi-uniformes de Ω et obtenons les espaces aux éléments finis correspondants V_H avec une taille de maille H et V_h avec une taille de maille h , respectivement. Nous résolvons un problème non linéaire sur l'espace de grille grossière V_H , puis nous utilisons la solution de grille grossière connue pour linéariser l'équation et résoudre l'équation linéaire sur l'espace de grille fine V_h . Nous présentons l'algorithme des éléments finis à double maillages comme suit.

Algorithme 1.

Étape 1 : Sur la grille grossière T_H , $\forall v \in V_H$, trouver $u_H \in V_H$ pour satisfaire le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} (u_{H,t}, v) + (a(u_H) \nabla u_H + \int_0^t b(u_H(\tau)) \nabla u_H(\tau) d\tau, \nabla v) = (f(u_H), v), \\ u_H(0) = W_H u_0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Étape 2 : Sur la grille fine T_h , $\forall v \in V_h$, trouvez $u_h \in V_h$ pour satisfaire le système linéaire

$$\begin{cases} (u_{h,t}, v) + (a(u_H) \nabla u_h + \int_0^t b(u_H(\tau)) \nabla u_h(\tau) d\tau, \nabla v) = (f(u_H), v), \\ u_h(0) = W_h u_0. \end{cases} \tag{3.21}$$





• **Estimation d'erreur**

Nous donnons maintenant l'estimation d'erreur dans la norme H^1 .

Théorème 3.2.2. [4] *Soit $u(t)$ et $u_h(t)$ les solutions de (3.1) et de l'algorithme 1, respectivement. Si $u, \nabla u, u_t$ et ∇u_t sont bornés, et $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^2(\Omega))$, il existe une constante positive $C = C(u)$ telle que*

$$\|u - u_h\|_1 \leq C(h + H^2),$$

où C est indépendante de h .

Démonstration. Soit $u(t) - u_h(t) = u(t) - W_h u(t) + W_h u(t) - u_h(t) := \rho(t) + \theta(t)$ à nouveau. En soustrayant ((2.3) – (3.21)), on obtient

$$\begin{aligned} (\theta_t, v) + (a(u)\nabla W_h u - a(u_H)\nabla u_h + \int_0^t b(u(\tau))\nabla W_h u(\tau)d\tau - \int_0^t b(u_H(\tau))\nabla u_h(\tau)d\tau, \nabla v) \\ = (f(u) - f(u_H) - \rho_t, v). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dans (3.22), le terme $a(u_H)\nabla W_h u$ est ajouté et soustrait, et de même pour le terme $\int_0^t b(u_H(\tau))\nabla W_h u(\tau)d\tau$, on a

$$\begin{aligned} (\theta_t, v) + (a(u_H)\nabla\theta + \int_0^t b(u_H(\tau))\nabla\theta(\tau)d\tau, \nabla v) \\ = -((a(u) - a(u_H))\nabla W_h u + \int_0^t (b(u(\tau)) - b(u_H(\tau)))\nabla W_h u(\tau)d\tau, \nabla v) \\ + (f(u) - f(u_H) - \rho_t, v). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Soit $v = \theta_t$ in (3.23),

$$\begin{aligned} (\theta_t, \theta_t) + (a(u_H)\nabla\theta, \nabla\theta_t) + \int_0^t b(u_H(\tau))\nabla\theta(\tau)d\tau, \nabla\theta_t) \\ = \|\theta_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(a(u_H)\nabla\theta, \nabla\theta) - \frac{1}{2}(a_t(u_H)\nabla\theta, \nabla\theta) - b(u_H(t))\nabla\theta(t), \nabla\theta(t) \\ + \frac{d}{dt}\int_0^t b(u_H(\tau))\nabla\theta(\tau), \nabla\theta(t)d\tau - \int_0^t b_t(u_H(\tau))\nabla\theta(\tau), \nabla\theta(t)d\tau \\ = -\frac{d}{dt}((a(u) - a(u_H))\nabla W_h u, \nabla\theta) + ((a(u) - a(u_H))_t \nabla W_h u, \nabla\theta) \\ + ((a(u) - a(u_H))\nabla(W_h u)_t, \nabla\theta) - \frac{d}{dt}\int_0^t ((b(u(\tau)) - b(u_H(\tau)))\nabla W_h u(\tau), \nabla\theta(t))d\tau \\ + \int_0^t ((b(u(\tau)) - b(u_H(\tau)))_t \nabla W_h u(\tau), \nabla\theta(t))d\tau \\ + ((b(u(t)) - b(u_H(t)))\nabla W_h u(t), \nabla\theta(t)) + (f(u) - f(u_H) - \rho_t, \theta_t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

En intégrant les deux côtés de l'équation ci-dessus de 0 à t , en notant que $\theta(0) = 0$, on obtient





$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + C_0 \|\nabla\theta\|^2 \\
 & \leq \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + \frac{1}{2}(a(u_H)\nabla\theta, \nabla\theta) \\
 & \leq |((a(u) - a(u_H))\nabla W_h u, \nabla\theta)| + \left| \int_0^t ((a(u) - a(u_H))\nabla(W_h u)_t, \nabla\theta) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \int_0^t ((a(u) - a(u_H))_t \nabla W_h u, \nabla\theta) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \int_0^t ((b(u(\tau)) - b(u_H(\tau)))\nabla W_h u(\tau), \nabla\theta(t)) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \int_0^t ((b(u(t)) - b(u_H(t)))\nabla W_h u(t), \nabla\theta(t)) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \int_0^t \int_0^t ((b(u(\tau)) - b(u_H(\tau)))_t \nabla W_h u(\tau), \nabla\theta(t)) d\tau d\tau \right| + \left| \int_0^t (f(u) - f(u_H) - \rho_t, \theta_t) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \frac{1}{2} \int_0^t (a_t(u_H)\nabla\theta, \nabla\theta) d\tau \right| + \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b_t(u_H(\tau))\nabla\theta(\tau), \nabla\theta(t) d\tau d\tau \right| \\
 & \quad + \left| \int_0^t b(u_H(t))\nabla\theta(t), \nabla\theta(t) d\tau \right| + \left| \int_0^t b(u_H(\tau))\nabla\theta(\tau), \nabla\theta(t) d\tau \right| \\
 & = \sum_{i=1}^{11} T_i.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Pour estimer les termes de droite de (3.25), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité ε -Cauchy, lemme 3.2.3 et lemme 3.2.4, on obtient

$$\begin{aligned}
 T_1 + T_2 & = |((a(u) - a(u_H))\nabla W_h u, \nabla\theta)| + \left| \int_0^t ((a(u) - a(u_H))\nabla(W_h u)_t, \nabla\theta) d\tau \right| \\
 & \leq C \|\nabla W_h u\|_\infty \|u - u_H\| \|\nabla\theta\| + C \int_0^t \|\nabla(W_h u)_t\|_\infty \|u - u_H\| \|\nabla\theta\| d\tau \\
 & \leq \frac{C_0}{4} \|\nabla\theta\|^2 + C \|u - u_H\|^2 + C \int_0^t \|u - u_H\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 d\tau \\
 & \leq \frac{C_0}{4} \|\nabla\theta\|^2 + C \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 d\tau + CH^4,
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

et

$$\begin{aligned}
 T_3 & = \left| \int_0^t ((a(u) - a(u_H))_t \nabla W_h u, \nabla\theta) d\tau \right| \\
 & \leq C \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|u - u_H\|^2 d\tau \\
 & \leq C \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 d\tau + CH^4,
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

de même, on a





$$\begin{aligned}
 T_4 + T_5 &= \left| \int_0^t ((b(u(\tau)) - b(u_H(\tau))) \nabla W_h u(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^t ((b(u(t)) - b(u_H(t))) \nabla W_h u(t), \nabla \theta(t)) d\tau \right| \\
 &\leq \int_0^t C \|\nabla W_h u\|_\infty \|u - u_H\| \|\nabla \theta\| d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|u - u_H\|^2 d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 d\tau + CH^4,
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

et

$$\begin{aligned}
 T_6 &= \left| \int_0^t \int_0^\tau ((b(u(\tau)) - b(u_H(\tau)))_t \nabla W_h u(\tau), \nabla \theta(t)) d\tau d\tau \right| \\
 &\leq C \|\nabla W_h u\|_\infty \int_0^t \int_0^\tau \|u - u_H\| \|\nabla \theta\| d\tau d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 d\tau + C \int_0^t \|u - u_H\|^2 d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 d\tau + CH^4.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Pour T_7 , on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité ε -Cauchy, lemme 3.2.2 et lemme 3.2.4, on obtient

$$\begin{aligned}
 T_7 &= \left| \int_0^t (f(u) - f(u_H) - \rho_t, \theta_t) d\tau \right| \\
 &\leq C \int_0^t (\|u - u_H\| + \|\rho_t\|) \|\theta_t\| d\tau \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + C \int_0^t \|u - u_H\|^2 d\tau + C \int_0^t \|\rho_t\|^2 d\tau \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + CH^4 + Ch^4.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
 T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} &= \left| \frac{1}{2} \int_0^t (a_t(u_H) \nabla \theta, \nabla \theta) d\tau \right| + \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\tau b_t(u_H(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t) d\tau d\tau \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^t b(u_H(t)) \nabla \theta(t), \nabla \theta(t) d\tau \right| + \left| \int_0^t b(u_H(\tau)) \nabla \theta(\tau), \nabla \theta(t) d\tau \right| \\
 &\leq C \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

De (3.25) à (3.31), on obtient





$$\begin{aligned} \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + C_0 \|\nabla\theta\|^2 &\leq C \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 d\tau + \frac{C_0}{4} \|\nabla\theta\|^2 \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + CH^4 + Ch^4. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Par (3.32), le lemme de Gronwall et l'équivalence de $\|\cdot\|_1$ et $|\cdot|_1$, nous savons

$$\int_0^t \|\theta_t\|^2 d\tau + \|\theta\|_1^2 \leq C(h^4 + H^4). \quad (3.33)$$

Par (3.33), lemme 3.2.1 et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\int_0^t \|u - u_h\|_1 d\tau \leq \|\theta\|_1 + \|\rho\|_1 \leq C(h + H^2).$$

Par conséquent, le théorème 3.2.2 est prouvé. □

3.2.3 Discrétisation complet (implicite arrière)

Dans cette partie, nous considérons la discrétisation spatiale basée sur la méthode double maillages. L'algorithme 1 est seulement MEF semi-discret double maillages. Dans les calculs pratiques, la méthode doit être combinée avec une discrétisation temporelle, nous devons donc donner le schéma entièrement discret. Soit N l'entier positif, le pas de temps $k = T/N$, puis, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ être une partition de l'intervalle de temps $[0, T]$. Dénoter $t_n = nk, n = 0, 1, \dots, N$ et $u_h^n = u_h(t_n)$.

En utilisant une quadrature numérique

$$\int_0^{t_n} g(s) ds \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_{n,i} g(t_i), n \geq 2,$$

où $w_{n,i} = k$ sont les poids d'intégration et supposons que l'estimation d'erreur suivante est valide

$$\left| \int_0^{t_n} g(s) ds - \sum_{i=0}^{n-1} w_{n,i} g(t_i) \right| \leq ck \int_0^{t_n} (|g| + |g'|) d\tau.$$

Nous pouvons obtenir un schéma d'éléments finis entièrement discrets d'Euler implicite en arrière : Trouvez $u_h^n \in V_h (n = 1, 2, \dots), \forall v \in V_h$, tel que

$$\begin{cases} \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{k}, v \right) + (a(u_h^n) \nabla u_h^n, \nabla v) + \left(k \sum_{i=0}^{n-1} b(u_h^i) \nabla u_h^i, \nabla v \right) = (f(u_h^n), v), \\ u_h^0 = W_h u_0. \end{cases} \quad (3.34)$$

C'est la MEF standard. Pour la méthode à double maillages, nous résolvons le système non linéaire d'origine sur la grille grossière avec l'itération de Newton et résolvons le système linéarisé sur la grille fine. Soit $h = H^2$, nous obtenons l'algorithme des éléments finis à double maillages.





Algorithme 1.

Étape 1 : Sur le maillage grossier T_H , on trouve $u_H^n \in V_H (n = 1, 2, \dots)$, pour $v \in V_H$, tel que

$$\begin{cases} \left(\frac{u_H^n - u_H^{n-1}}{k}, v \right) + (a(u_H^n) \nabla u_H^n, \nabla v) + \left(k \sum_{i=0}^{n-1} b(u_H^i) \nabla u_H^i, \nabla v \right) = (f(u_H^n), v), \\ u_H^0 = W_H u_0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Étape 2 : Sur la fine maillage T_h , on trouve $u_h^n \in V_h (n = 1, 2, \dots)$, pour $v \in V_h$, tel que

$$\begin{cases} \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{k}, v \right) + (a(u_h^n) \nabla u_h^n, \nabla v) + \left(k \sum_{i=0}^{n-1} b(u_h^i) \nabla u_h^i, \nabla v \right) = (f(u_h^n), v), \\ u_h^0 = W_h u_0. \end{cases} \quad (3.36)$$

[4] [23]

3.3 Exemples numériques

Pour vérifier l'efficacité du MEF à double maillages, nous le comparons avec le MEF standard (3.34)

Exemple 3.3.1. [4] Dans le premier exemple numérique, soit la solution exacte $u = \sin(x) \sin(y)(1-x)(1-y)e^t$ et les coefficients être $a(u) = u^2 + 1$, $b(u) = u$, $f(u) = u - u^3 + g(x, y, t)$, $g(x, y, t)$ est décidé par la solution exacte de (3.1). Soit $k = h$, la solution exacte et la solution numérique ($h = 1/64$) sont montrées sur la figure 3.1 lorsque $t = 1$. L'erreur de norme H^1 , les taux de convergence et le temps de calcul sont indiqués dans les tableaux 3.1 et 3.2.

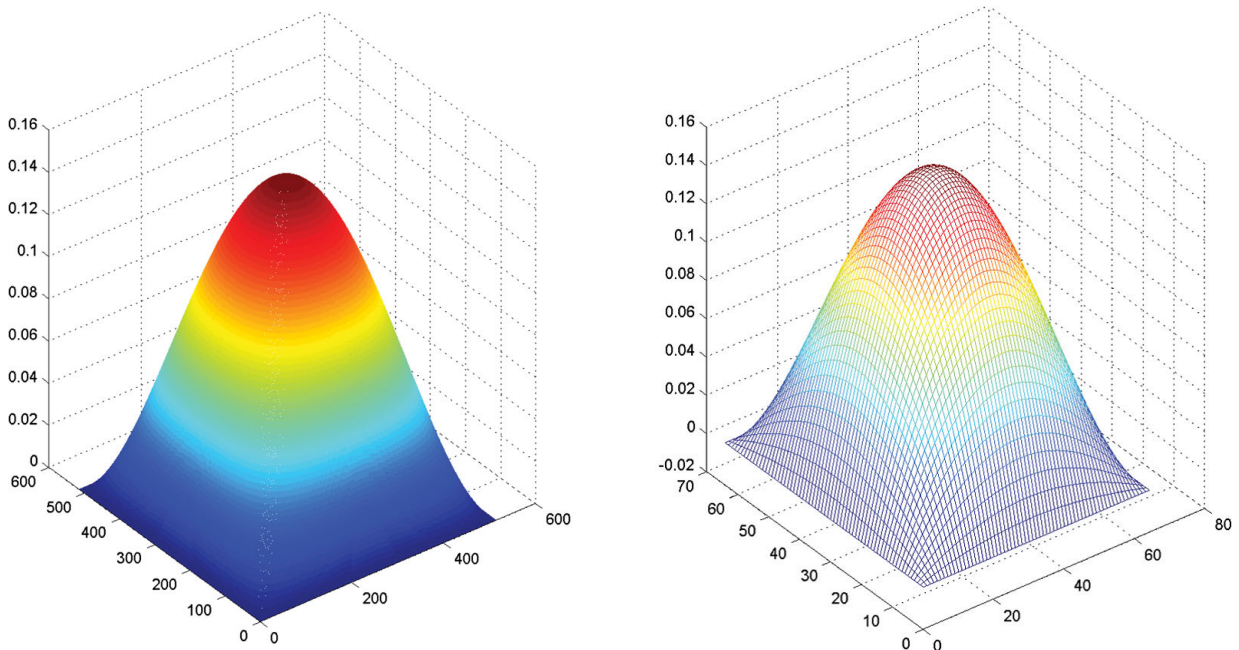


FIGURE 3.1 – A gauche : Solution exacte. A droite : Solution numérique.





h	Δt	H^1 erreur	Rate	CPU time
$1/2^2$	$1/2^2$	$1.449e^{-1}$		0.151 s
$1/2^4$	$1/2^4$	$3.728e^{-2}$	0.97921	3.91 s
$1/2^6$	$1/2^6$	$9.335e^{-3}$	0.99885	57.78 s
$1/2^8$	$1/2^8$	$2.334e^{-3}$	0.99998	1.09 h
$1/2^{10}$	$1/2^{10}$	$5.834e^{-4}$	1.00002	117.75 h

TABLE 3.1 – Erreur H^1 , taux de convergence et temps CPU du FEM standard (3.34).

h	H	Δt	H^1 erreur	Rate	CPU time
$1/2^2$	$1/2$	$1/2^2$	$1.449e^{-1}$		0.102 s
$1/2^4$	$1/2^2$	$1/2^4$	$3.738e^{-2}$	0.97916	1.711 s
$1/2^6$	$1/2^3$	$1/2^6$	$9.336e^{-3}$	0.99879	17.59 s
$1/2^8$	$1/2^4$	$1/2^8$	$2.333e^{-3}$	0.99978	0.29 h
$1/2^{10}$	$1/2^5$	$1/2^{10}$	$5.835e^{-4}$	1.00172	19.13 h

TABLE 3.2 – Erreur H^1 , taux de convergence et temps CPU du FEM standard à double maillage.

Exemple 3.3.2. [4] Pour le deuxième exemple, soit la solution exacte $u = 10xy(1-x)(1-y)e^{-t}$ et les coefficients $a(u) = 1/(u^2 + 1)$, $b(u) = u^2$, $f(u) = u - u^3 + g(x, y, t)$, $g(x, y, t)$ est décidé par la solution exacte de (3.1). Les tableaux 3.3 et 3.4 montrent les résultats de calcul avec le MEF standard et le MEF à double maillages, respectivement.

h	Δt	H^1 erreur	Rate	CPU time
$1/2^2$	$1/2^2$	$2.179e - 1$		0.225 s
$1/2^4$	$1/2^4$	$5.624e - 2$	0.97711	3.053 s
$1/2^6$	$1/2^6$	$1.409e - 2$	0.99822	2.05 m
$1/2^8$	$1/2^8$	$3.525e - 3$	0.99965	1.99 h
$1/2^{10}$	$1/2^{10}$	$8.815e - 4$	0.99990	112.67 h

TABLE 3.3 – Erreur H^1 , taux de convergence et temps CPU du FEM standard (3.34).

h	H	Δt	H^1 erreur	Rate	CPU time
$1/2^2$	$1/2$	$1/2^2$	$2.180e - 1$		0.141 s
$1/2^4$	$1/2^2$	$1/2^4$	$5.628e - 2$	0.97678	1.735 s
$1/2^6$	$1/2^3$	$1/2^6$	$1.410e - 2$	0.99828	0.7887 m
$1/2^8$	$1/2^4$	$1/2^8$	$3.526e - 3$	0.99982	0.58 h
$1/2^{10}$	$1/2^5$	$1/2^{10}$	$8.817e - 4$	0.99997	26.43 h

TABLE 3.4 – Erreur H^1 , taux de convergence et temps CPU du FEM standard à double maillage.

D'après les tableaux 3.1 à 3.4, il est clair que la méthode à double maillages permet d'économiser un travail de calcul substantiel et de maintenir les taux de convergence et une précision élevée, par rapport au MEF standard.



Bibliographie

- [1] A. Alia, *Les équations intégro-différentielles et la méthode des éléments finis*, Mémoire de mastère, Université de M'sila, Algérie, 2019.
- [2] A. Munnier, *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*, Institut Elie Cartan, 2007-2008.
- [3] C. Chen, S. Tsimin, *Finite element method for intégro-différential equations*, World Scientific, USA, 1998.
- [4] C. Chen, X. Zhang, G. Zhang , Y. Zhang, *A two-grid finite element method for nonlinear parabolic intégro-differential equations*, International journal of computer mathematics, 2018.
- [5] D. Christian, *Méthode des éléments finis*, Université de Cergy Pontoise, France, 2005-2006.
- [6] E. Blayo, *Notes de cours sur la méthode des éléments finis*, 2010.
- [7] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley Sons Inc, Canada, 1978.
- [8] G. Fouzia, R. Aicha, *Introduction à la méthode des éléments finis*, Mémoire de mastère, Université d'El oued, Algérie, 2014.
- [9] G. leoni, *A first course in Sobolev Spaces*, American Mathematical Society, USA, 2019.
- [10] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et application*, Dunod, Paris, 1999.
- [11] J. Emile. Rakotoson, J.Michel. Rakotoson, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, Presses universitaires de France, Paris, 1999.
- [12] J. R. Cannoni, Y. Lin, *A priori L^2 error estimates for finite-elements methods for nonlinear diffusion equations wiyh memory*, SIAM J, 1990.
- [13] J. Rochat, *Les espaces de Sobolev*, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 2009.



- [14] K. Saleh, *Introduction à la méthode des élément finis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2011.*
- [15] L. Tartar, *An introduction to sobolev spaces and interpolation spaces, Springer, Newyork, 2000.*
- [16] M. G. Larson, F. Bengzon, *The finite element method : theory, implementation, and practice, Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2013.*
- [17] M. Moussai, *Résolution des équations intégró-défférentielles, Thèse de doctorat, Université de M'sila, Algérie 2018.*
- [18] M. Thérèse, Lacroix-Sonnier, *Distributions Espaces de Sobolev Applications, Ellipses, Paris, 1998.*
- [19] N. El Hage Hassan, *Topologie générale et espace normés, Dunod, 2011.*
- [20] P. Solin, *Partial differential equations and the finite element method, John Wiley Sons Inc, New Jersey, 2006.*
- [21] V. Komornik, *Précis danalyse réelle analyse fonctionnelle intégrale de Lebesgue espaces fonctionnels, Ellipses, Paris, 2002.*
- [22] V. Manet, *La Méthode des éléments finis : vulgarisation des aspects mathématiques, illustration des capacités de la méthode, Hal, Lyon, 2012*
- [23] X. Gan, D,Xu *An efficient symmetric finite volume element method for second-order variable coefficient parabolic integro-differential equations, Computational and Applied Mathematics, 2020*



Résumé

Le but de ce travail est de fournir au lecteur comment utiliser la méthode des éléments finis et la méthode des éléments finis double maillages pour trouver la solution numérique d'une équation intégro-différentielle parabolique non linéaire. De plus nous avons donné une estimation optimale de l'erreur pour les deux méthodes. Nous avons appuyé ces résultats avec deux exemples numériques qui illustrent l'efficacité de la méthode des éléments finis, ainsi que la rapidité de la méthode des éléments finis double maillage.

Mots clés: Méthode des éléments finis, équation intégro-différentielle, MEF double maillage, estimation d'erreur.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تزويد القارئ بكيفية استخدام طريقة العناصر المنتهية وطريقة العناصر المنتهية للشبكة المزدوجة لإيجاد الحل العددي لمعادلة تكامل-تفاضلية تكافئية غير خطية. بالإضافة إلى ذلك ، قدمنا التقديراً الأمثل للخطأ بالنسبة للطريقتين. لقد دعمنا هذه النتائج بمثلين عددين يوضحان كفاءة طريقة العناصر المنتهية، وكذلك سرعة طريقة العناصر المنتهية ذات شبكتين.

الكلمات المفتاحية: طريقة العناصر المنتهية، المعادلات التكامل تفاضلية، طريقة العناصر المنتهية مزدوجة الشبكة، تقدير الخطأ.

Abstract

The goal of this work is to provide the reader with how to use the finite element method and the two-grid finite element method to find the numerical solution of a nonlinear parabolic integro-differential equation. In addition, we have given an optimal estimate of the error for the two methods. We have supported these results with two numerical examples that illustrate the efficiency of the finite element method, as well as the speed of the two-grid finite element method.

Key words: Finite element method, integro-differential equation, two grid FEM, error estimates