

Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDDAR D'EL OUED
FACULTE DE LA SCINCES EXACTES



Département De Mathématique



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Spécialité Mathématique appliquées

Thème

**L'extension du théorème de Fugled-Putnam
Pour quelque opérateur dans l'espace
de Hilbert**

Présenté par **Lorbi Antar**

Devant le jury

Guedda Lamine

Président

Univ. d'el Oued

Hefouda Belhadi

Examineur

Univ. d'el Oued

Lourabi Hariz Bekkar

Rapporteur

Univ. d'el Oued

2020 - 2021

Remerciement

Je remercie (Allah) qui ma donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire .

Je remercie monsieur ***Dr . Lourabi Hraiz Bekkar*** : Professeur à l'Université de El Oued qui a encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse , Il a su me motiver chaque étape de ce travail .

Je remercie très sincèrement pour sa disponibilité .

Ainsi que tous nos professeurs qui m'ont enseigné durant mes études à la faculté des sciences exactes .

Je remercie également tous collègues d'études .

Enfin , je ne voudrais pas oublier ma famille qui m'a soutenu moralement , sans les nommés explicitement , je les remercie pour leurs encouragements .

Résumé

Notre objectif principal dans ce mémoire andum est d'étendre la théorie de Fugled –Putnam afin d'améliorer son utilisation en ajoutant des conditions aux opérateurs utilisés.

On sait que la théorie est validée pour un opérateur régulier et pour un autre de $B(H)$, et elle s'étend même dans le cas de deux opérateurs réguliers, et cela reste vrai pour de nombreux types d'influences.

Mais dans le cas d'une influence régulatrice et de deux influenceurs de $B(H)$, cela ne se fait qu'en ajoutant des conditions spécifiques.

A cet effet, afin d'élargir le cas d'utilisation, nous avons étudié dans quelle mesure la théorie a été réalisée dans le cas d'un opérateur sous les modulateurs et les opérateurs de $B(H)$ dans l'espace du composé, et nous avons obtenu des de nouveaux résultats, qui sont inclus dans la preuve dans cette mémoire.

Mots clés:

Théorème de Fuglede-Putnam , opérateur normal , opérateur sous normal , équations d'opérateurs .

ملخص :

هدفنا الأساسي في هذه المذكرة هو توسيعه نظرية فوجلاد - بيطنام من أجل أنواع من المؤثرات وتحسين استخدامها بإضافة شروط على المؤثرات المستخدمة .

نعلم أن النظرية محققة من أجل مؤثر ناظمي وآخر من $B(H)$ ويمتد حتى في حالة مؤثرين ناظميين وتبقى صحيحة لأصناف كثيرة من المؤثرات .

لكن في حالة مؤثر ناظمي ومؤثرين من $B(H)$ تكون غير محققة إلا بإضافة شروط محددة . ولهذا قصد توسيع حالة الاستخدام درسنا مدى تحقيق النظرية في حالة مؤثر تحت ناظمي ومؤثرين من $B(H)$ وذلك في فضاء هيلبرتي مركب ، وحصلنا على نتائج مهمة وجديدة ، مدرجة بالبرهان في هذه المذكرة .

كلمات مفتاحية:

نظرية فوجلاد - بيطنام ، مؤثر ناظمي ، مؤثر تحت ناظمي ، معادلة المؤثرات.

Abstract :

Our main goal in this memorandum is to expand the Vogelad-Butnam theory in order to improve its use by adding conditions to the operators used.

We know that the theory is validated for a regular operator and for another of $B(H)$, and it extends even in the case of two regular operators, and it remains true for many types of influences.

But in the case of a regulating influence and two influencers of $B(H)$, it is not achieved except by adding specific conditions. For this purpose, in order to expand the use case, we studied the extent to which the theory was achieved in the case of an operator under the modulators and operators of $B(H)$ in the space of the compound, and we got important and new results, which are included in the proof in this memory.

Keywords:

Fuglede-Putnam theory, normal operator , subnormal operator, operator equation .

Notations

H	Espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie .
$\mathbb{C}$	Le corps des nombres complexe .
$B(H)$	Espace des opérateurs linéaire bornées sur H .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	Produit scalaire .
$\ \cdot \ _H$	La norme .
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur T .
T^*	Adjoint de T .
$ T = \sqrt{T^* T}$	Module T .
$\text{Im}(T)$	L'image d'opérateur T .
$\ker(T)$	Le noyau d'opérateur T .
I_H	L'opérateur identité .
$R_\lambda(T)$	La résolvante d'opérateur T .
$\sigma(T)$	Le spectre d'opérateur T .
$(FP)_{B(H)}$	Propriété de Fuglède-Putnam .

Table des matières

Introduction	1
1. Préliminaires	2
1.1 Espaces de Hilbert	2
1.1.1 Définitions et exemples	2
1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert	3
1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés	6
1.2.1 Définitions et exemples	6
1.2.2 L'inverse d'un opérateur linéaire borné	10
1.2.3 Adjoint d'un opérateur linéaire borné	11
1.2.4 Opérateurs isométriques, unitaires, positifs, auto-adjoints	14
1.2.5 Racine carrée d'un opérateur linéaire borné	17
1.2.6 Les commutateurs	19
1.2.7 Similarité	19
2. Les opérateurs linéaires bornés et normaux	21
2.1 Définitions et propriétés	21
2.2 quelques classes des opérateurs normaux	25
2.3 Les opérateurs n -normal	25
2.4 Les opérateurs (n, k) -normal	34
2.5 Quelques classes d'opérateurs n -normaux	40
2.6 Opérateurs n -hyponormaux	43

3. Théorème de Fuglede-Putnam	45
3.1 Une petite biographie de Bent Fuglede	45
3.2 Propriété de Fuglede sur les opérateurs bornés	46
3.3 Résultats positifs : Pour les opérateurs isométrie	48
3.3.1 première généralisation	48
3.3.2 deuxième généralisation	52
3.4 Résultats positifs : Pour les opérateurs normaux	55
3.4.1 cas deux opérateurs dans $B(H)$ et un opérateur normal	55
3.4.2 cas deux opérateurs dans $B(H)$ et deux opérateurs normaux	57
4. Extension du théorème de Fuglede-Putnam et applications	59
4.1 L'opérateur sous normal	59
4.2 Résultats négatif	60
4.3 Résultats positifs : première généralisation	61
4.4 l'équation $(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$ dans $B(H)$	67
4.5 Principaux Résultats	69
Conclusion	75
Bibliographie	77

Introduction

L'analyse fonctionnelle est une partie très importante des mathématiques pures , c'est un pilier fondamental des mathématiques appliquées .

La théorie des opérateurs est importante aussi bien en analyse fonctionnelle dans plusieurs disciplines scientifiques .

Elle s'est révélée être une nécessité pour le progrès de plusieurs théories en physique et surtout la mécanique quantique .

Le problème traité dans ce mémoire est l'étude de certaines extensions du théorème de Fuglede-Putnam dans l'espace de Hilbert pour quelque type d'opérateur est applications cette mémoire est principalement répartie en quatre chapitres .

Dans le premier chapitre , on effectue des rappels mathématiques de toutes les règles de base que nous nous utilisons dans ce travail. Nous avons commencé par les définitions et les propriétés de l'espace de Hilbert , ainsi que par les opérateurs linéaires bornés et on présente quelques types d'opérateurs sur un espace de Hilbert .

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons les opérateurs linéaires bornés et normaux .

Le troisième chapitre contient une présentation .

Le quatrième chapitre on donne des nouveaux résultats sur l'extension de ce théorème pour les opérateurs sous normaux est l'application sur quelque équation d'opérateurs de type $(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$ tel que $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre , nous intéressons a quelques définitions et des résultats principaux d'analyse fonctionnelle , ces rappels concernent les espaces de Hilbert , est les opérateurs linéaires borné . leurs propriétés sur les espace de Hilbert .

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Définitions et exemples

Définitions 1.1.1 soit H un espace vectoriel . On appelle **produit scalaire** sur H toute forme bilinéaire , définie positive .

On notera $\langle x , y \rangle$ le produit scalaire des vecteurs cela signifie que l'application :

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : H \times H &\rightarrow K = \mathbb{R} \quad \text{ou } \mathbb{C} \\ (x , y) &\rightarrow \langle x , y \rangle \end{aligned}$$

Vérifiant :

- Pour tout $y \in H$ l'application $x \in H \rightarrow \langle x , y \rangle \in K$ est un forme linéaire
- Pour tout $x , y \in H$ on a :

$$\langle x , y \rangle = \begin{cases} \langle y , x \rangle & \text{si l'espace est réel} \\ \overline{\langle y , x \rangle} & \text{si l'espace complexe} \end{cases}$$

$$\text{Pour tout } x \in H : \begin{cases} \langle x , x \rangle = 0 & \text{si } x = 0 \\ \langle x , x \rangle > 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

- L'espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est de plus complet pour la norme

$$\left\{ \| x \| = \sqrt{\langle x , x \rangle} \right\} .$$

- Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront supposés **séparables** , c'est-à-dire admettant un sous-ensemble dénombrable dense .

Remarque 1.1.1. Notons que dans les cas complexe , on a donc pour $x, y \in H$ et $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$$

Exemple 1.1.1. :

- 1) • Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$ défini par :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \\ \text{ou } x &= (x_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \end{aligned} \right\} \text{ forme bilinéaire sur } \mathbb{R}^N .$$

- Le produit scalaire sur $\mathbb{C}$ est défini par :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n} \\ \text{ou } x &= (x_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \end{aligned} \right\} \text{ n'est pas forme bilinéaire .}$$

- 2) L'espace $L^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable tel que : } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty \}$

le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \text{ et la norme définie par } \|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert

Proposition 1.1.1. : [12] (L'inégalité de Cauchy - Schwartez)

H espace de Hilbert $x, y \in H$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_H \cdot \|y\|_H$$

Preuve : Soient x et y dans H , l'intégrale de **Cauchy - Schwartez** (ainsi que son cas d'égalité) est immédiate si $\langle x, x \rangle = 0$

Sinon : pour tout $\lambda \in K$, tel que $|\lambda| = 1$

$$\text{et } |\lambda \varphi(x, y)| = |\varphi(x, y)|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x + t y, \lambda x + t y)$ est positive .

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + t y, \lambda x + t y) &= \varphi(\lambda x, \lambda x) + \varphi(\lambda x, t y) + \varphi(t y, \lambda x) + \varphi(t y, t y) \\ &= \varphi(x, x) + \lambda t \varphi(x, y) + t \bar{\lambda} \varphi(y, x) + t^2 \varphi(y, y) \\ &= \varphi(x, x) + 2t \operatorname{Re} \varphi(\lambda x, y) + t^2 \varphi(y, y) \\ &\leq \varphi(x, x) + |2t \operatorname{Re} \varphi(\lambda x, y)| + t^2 \varphi(y, y) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \Delta' = |\varphi(x, y)|^2 - \varphi(x, x) \varphi(y, y) \leq 0$$

On aura

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x) \varphi(y, y)$$

Définitions 1.1.2. (L'orthogonal)

$\forall x, y \in H$: Si $\langle x, y \rangle = 0$ on dit que x et y sont orthogonaux , alors l'orthogonal de M (partie de H) est définit par :

$$M^\perp = \{ y \in H \text{ tq : } \forall x \in M, y \perp x \}$$

Proposition 1.1.2. (Identité du parallélogramme)

Pour tout $(x, y) \in H^2$, on a l'identité :

$$\|x + y\|_H^2 + \|x - y\|_H^2 = 2 \left(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2 \right)$$

Appellée l'identité du parallégramme .

Proposition 1.1.3. (Identité polarisation)

Soient $x, y \in H$

1) Si $\varphi : H \times H \mapsto K$ est une forme bilinéaire symétrique sur E , on a :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} \left[\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) \right]$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

2) Si $K = \mathbb{C}$ et si $\varphi : H \times H \mapsto \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire sur H on a :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) + i \varphi(x + iy, x + iy) - i \varphi(x - iy, x - iy)]$$

Alors :

$$\forall x, y : \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\forall x, y : \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Théorème 1.1.1. [18] (projection)

Soit A un ensemble convexe fermé (est non vide) de H alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in A$ tel que :

$$\inf_{a \in A} \|x - a\| = \|x - y\|$$

Autrement dit : il existe un unique point $y \in A$ qui est à une distance de x la plus petite possible ce point y s'appelle **la projection** de x sur A .

Corollaire 1.1.1. Soit F sous espace vectoriel fermé de H , et soit $x \in H$

$$1) \text{ Soit } y \in F \text{ tel que } \|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$$

Alors $(x - y)$ est orthogonal à F (i.e orthogonal à tous les vecteurs $z \in F$)

$$2) \text{ Réciproquement si } y \in F, \text{ est tel que : } (x - y) \perp F$$

Alors $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ i.e y est la projection de x sur F .

Définitions 1.1.3. On notera $y = P_F(x)$ et on dira que y est **la projection orthogonale** de x sur F .

1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés

1.2.1 Définitions et exemples

Définitions 1.2.1 : [12] (opérateur linéaire)

Soient E et F deux espace vectoriels $D(T) \subset E$ dans F l'application

$$T : D(T) \subset E \mapsto F$$

($D(T)$ est la domaine de T) qui vérifié les conditions suivants :

- 1) $\forall x, y \in D(T) : T(x, y) = T(x) + T(y)$ (condition additive)
- 2) $\forall x \in D(T), \forall \lambda \in k (k = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) : T(\lambda x) = \lambda T(x)$ (condition homogène)

Remarque 1.2.1

1. d'autre termes l'opérateur $T : D(T) \subset E \mapsto F$ est linéaire ssi :

$$T(\lambda x, \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \quad \forall \lambda, \mu \in k \text{ et } \forall x, y \in D(T)$$

2. Le vecteur $T(x)$ est en générale T_x .

3. On suppose que D_T est une variété linéaire i.e

$$\forall x, y \in D_T, \forall \lambda, \mu \in k, \lambda x + \mu y \in D_T$$

Définitions 1.2.2 : (opérateur continu)

Soit E et F deux espaces de Hilbert un opérateur linéaire continu , A défini de E

dans F est une application linéaire et continue de E et F c'est-a-dire : $\forall x \in E, Ax \in F$

$$\forall (x, y) \in E \times E : \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} : A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

$$\exists c > 0 : \forall x \in E : \text{tel que } \|Ax\|_F < c \|x\|_E$$

le plus petit nombre " c " s'appelle **la norme** de l'opérateur A et se note $\|A\|$ i.e

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_F$$

Définitions 1.2.3 : (L'opérateur borné)

On dit l'opérateur $A : E \mapsto F$ est borné s'il fait correspondre à tout ensemble borné dans $D(A)$ un ensemble borné dans l'espace F .

Définitions 1.2.4 : Un opérateur linéaire $A : E \mapsto F$ tel que $D(A) = H$ est borné si et seulement si pour tout $x \in H$, on a

$$\|Ax\|_F \leq c \|x\|_H$$

Théorème 1.2.1 : [18] Soit un opérateur linéaire $A : E \mapsto F$ tel que $D(A) = H$. A est continu si et seulement s'il est borné.

Exemple 1.2.1.

1. L'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} T : c[0,1] &\mapsto c[0,1] \\ f(x) &\mapsto xf(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Est borné car : } \|Tf\| &= \sup_{x \in [0,1]} |xf(x)| \leq \|f\|_\infty \\ &\Rightarrow \|f\|_\infty, \quad c=1 \end{aligned}$$

2. L'opérateur de dérivation

$$\begin{aligned} T : C^1[a,b] &\mapsto C[a,b] \\ f(t) &\mapsto f'(t) \end{aligned}$$

est borné ssi :

$$\exists c > 0 : \|Tf\|_\infty \leq c \|f\|_{C^1} \quad \forall f \in C^1$$

On a :

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |Tf(t)| = \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)| = \|f'\|_\infty$$

$$\text{On sait que : } \|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

D'où :

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$$

Donc T est borné

Théorème 1.2.2. Pour tout opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert H ,
les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) T est borné .
- (ii) T est continu sur l'espace H .
- (iii) T est continu en un point x_0 de l'espace H .

Preuve : On remarque que (ii) $\Rightarrow$ (iii), danc il suffit de démontrer (i) $\Rightarrow$ (ii) et
(iii) $\Rightarrow$ (i).

- (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit x_0 vecteur quelconque de H et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite
Dans H Comme .

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\| \|x_n - x_0\|$$

On a donc

$$(x_n \rightarrow x_0) \Rightarrow (\{Tx_n\} \rightarrow \{Tx_0\})$$

d'où la continuité de T .

- (iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit T un opérateur linéaire sur H , continu en x_0 , supposons le
contraire : soit T non borné . alors pour tout entier naturel n il existe un vecteur
non nul $x_n \in H$ tel que $\|Tx_n\| \geq n \|x_n\|$. Si on pose $y_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}$,
alors $\|y_n\| = \frac{1}{n}$.

Or $y_n \rightarrow 0$, donc $y_n + x_0 \rightarrow x_0$, mais

$$\|T(y_n + x_0) - Tx_0\| = \|T y_n\| = \frac{\|T x_n\|}{n \|x_n\|} > \frac{n \|x_n\|}{n \|x_n\|} = 1$$

Donc T n'est pas continu en x_0 d'où la contradiction, et par conséquent T est
borné .

Définitions 1.2.5 : [9] (Type de convergences)

Une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs linéaire bornés sur un espace de Hilbert H ,
et soit $T \in B(H)$

- a) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **uniformement** vers T si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\|_{B(H)} = 0$$

b) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **formement** vers T si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x - Tx\|_{B(H)} = 0$$

c) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **faiblement** vers T si

$$\langle T_n x, y \rangle - \langle T x, y \rangle \mapsto 0, \quad n \mapsto +\infty$$

Remarque 1.2.1 La convergence **uniformement** $\Rightarrow$ la convergence **fortement** $\Rightarrow$ la convergence **faiblement**.

Exemple 1.2.2.

1. Soit $T_n \in L(l_2)$ défini par :

$$T_n \left(\frac{1}{n} \alpha_1, \frac{1}{n} \alpha_2, \dots \right) = \left(\frac{1}{n} \alpha_1, \frac{1}{n} \alpha_2, \dots \right) \quad n \geq 1, \quad T_n \mapsto 0$$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ on a :

$$\begin{aligned} \|T_n\| &= \sup_{\|\alpha\| \leq 1} \|T_n \alpha\| = \sup_{\|\alpha\| \leq 1} \left\| \frac{1}{n} \alpha_1, \frac{1}{n} \alpha_2, \dots \right\| \\ &= \frac{1}{n} \sup_{\|\alpha\| \leq 1} \|(\alpha_1, \alpha_2, \dots)\| = \frac{1}{n} \sup_{\|\alpha\| \leq 1} \|\alpha\| = \frac{1}{n} \times 1 \end{aligned}$$

Donc on remarque que

$$\|T_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

Alors T_n converge uniformement vers 0.

2. Considérons la suite d'opérateurs $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit de l_2 vers l_2 comme suite :

$$T_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, 0, \dots, \alpha_{n+1}, \alpha_n, \dots)$$

Montrer que T_n converge simplement vers 0.

On a : $\|T_n \alpha\| = \|(0, 0, \dots, \alpha_{n+1}, \alpha_n, \dots)\|$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

Donc $\|T_n \alpha\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$ d'où T_n converge fortement vers 0, $\forall \alpha \in l_2$

3. Considérons

$$\begin{aligned} T_n : \mathbb{R} &\rightarrow l_2 \\ \varepsilon &\rightarrow \varepsilon e_n \end{aligned}$$

tel que $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ donc T_n converge faiblement vers 0.

1.2.2 L'inverse d'un opérateur linéaire bornée

Définitions 1.2.6 : (Inversibilité)

Soit E et F deux espace normés , $A \in L(E, F)$ l'opérateur A est dit inversible si pour tout $y \in F$ l'équation $Ax = y$ admet une seule solution .

Définitions 1.2.7 : (Opérateur Inversé)

On dit que $A \in L(E, F)$ est inversible . S'il existe $B \in L(F, E)$ tel que

$$AB = I_E \text{ et } BA = I_F$$

On appelle l'inverse de A est noté par A^{-1} .

Remarque 1.2.3

1. Si $AB = I_E$, alors A admet un inverse à droite $B = A_d^{-1}$
2. Si $BA = I_F$, alors A admet un inverse à gauche $B = A_g^{-1}$
3. A est un opérateur inversible si $A_d^{-1} = A_g^{-1} = B$

Théorème 1.2.3. L'opérateur A^{-1} inverse d'un opérateur linéaire A est aussi linéaire .

Remarque 1.2.4

$A \in L(E, F)$ Est inversible s'il est bijectif et A^{-1} est continue (borné).

Définitions 1.2.8

Si T est un opérateur linéaire borné , La trace de T est la somme des élément diagonaux de la matrice de l'opérateur T dans une base quelconque .

On note trT

Remarque 1.2.5 : Si $T \in B(H)$, la trace de l'opérateur inverse de T ,

$$\text{tr} T^{-1} = \frac{1}{\text{tr} T}$$

1.2.3 Adjoint d'un opérateur linéaire borné

Rappel : Théorème (Riez – Fréchet)

Soit H un espace de Hilbert et f une forme linéaire continue sur H , alors il existe $a \in H$ et un seul tel que :

$$\forall x \in H, f(x) = \langle x, a \rangle$$

Théorème 1.2.4. [9] Soient H et K deux espaces de Hilbert $T \in L(H, K)$

il existe un opérateur unique continu de K dans H noté T^* .

Preuve : soient $y \in K$, et :

$$\begin{aligned} f &: H \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow f(x) = \langle Tx, y \rangle \end{aligned}$$

Alors f est linéaire et bornée car :

$$|f(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$$

D'après la théorème de **Riez – Fréchet** il existe un unique $z \in H$ tel que :

$$f(x) = \langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle$$

Possions : $z = T^*y$

Donc T^* est application de K vers H c'est simple de voir que est linéaire ,

$$\begin{aligned} \text{et est aussi bornée car } \|T^*y\| &= \langle T^*y, T^*y \rangle = \langle TT^*y, y \rangle \\ &\leq \|TT^*y\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|T^*y\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

alors T^* est bornée et : $\|T^*\| \leq \|T\|$

pour l'unicité de l'opérateur adjoint :

supposons il $B_1, B_2 \in L(K, H)$ existe tel que :

$$\forall x \in H : \langle Tx, y \rangle = \langle x, B_1y \rangle = \langle x, B_2y \rangle \Rightarrow B_1y = B_2y \Rightarrow B_1 = B_2$$

Définitions 1.2.9. : L'unique opérateur linéaire $T^* \in L(K, H)$ tel que :

$\forall x \in H, \forall y \in H : \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ est appelé l'adjoint de T .

Exemple 1.2.3. Soit

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x, 0)$$

On pose $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2)$

On a $\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^*Y \rangle$, alors $\langle AX, Y \rangle = \langle (x_1, 0), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2$

D'autre part : on pose

$$A^*Y = Z = (z_1, z_2)$$

On a : $\langle X, A^*Y \rangle = \langle (x_1, y_1), (z_1, z_2) \rangle = x_1 z_1 + y_1 z_2$

Donc $z_1 = x_2, z_2 = 0$ d'où : $A^*Y = A^*(x_2, y_2) = (x_2, 0)$

Donc

$$A^*(x, y) = (x, 0)$$

Proposition 1.2.1 : [12] Soient H, K deux espace de Hilbert et soit $T \in B(H)$

alors, l'application $T \rightarrow T^*$ est Isometrique de $B(H)$ dans $B(H)$ de plus :

1. $(T^*)^* = T$.
2. $\|T^*\| = \|T\|$.
3. $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Preuve :

1. On montre que : $\langle Tx, y \rangle = \langle (T^*)^*x, y \rangle, \forall x \in H, \forall y \in K$ on a :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \overline{\langle T^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, (T^*)^*x \rangle} = \langle (T^*)^*y, x \rangle \text{ D'où } (T^*)^* = T$$

2. On a d'après la preuve de théorème précédaent $\|T^*\| \leq \|T\|$

$$\text{et } \|T\| = \|(T^*)^*\| \text{ donc } \|T^*\| = \|T\|.$$

3. On a $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$.

D'autre part, en utilisant

$$\forall x \in H : \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, Tx \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2 \text{ Et}$$

$$\text{on sait que : } \|T\|^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|^2} \leq \sup_{x \neq 0} \|T^*T\| \|x\|^2 \leq \|T^*T\|$$

$$\text{Donc } \|T\|^2 = \|T^*T\|$$

Proposition 1.2.2. : soient $S, T \in L(H, K)$ on a :

1. $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $(TS)^* = S^*T^*$.
3. Si T est inversible T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Preuve :

1. On a : $x \in H, y \in K$

$$\begin{aligned} \langle (\alpha T + \beta S)^* x, y \rangle &= \langle x, (\alpha T + \beta S)y \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle x, Ty \rangle + \bar{\beta} \langle x, Sy \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle T^*x, y \rangle + \bar{\beta} \langle S^*x, y \rangle \\ &= \langle (\bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*)x, y \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*$$

2. Pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$ il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \langle (TS)^* x, y \rangle &= \langle S^*T^*x, y \rangle \text{ par la définition de l'adjoint on a :} \\ \langle (TS)^* x, y \rangle &= \langle x, TSy \rangle = \langle T^*x, Sy \rangle = \langle S^*T^*x, y \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (TS)^* = S^*T^*$$

3. T est inversible d'où

$$\begin{aligned} TT^{-1} &= T^{-1}T = I \\ \Rightarrow (TT^{-1})^* &= (T^{-1}T)^* = I^* \\ \Rightarrow (T^{-1})^*T^* &= T^*(T^{-1})^* = I \end{aligned}$$

Donc est inversible de plus $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Lemme 1.2.1. : soient $H ; K$ deux espace de Hilbert et $T \in L(H, K)$ on a :

- (i) $\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp$.
- (ii) $\ker T^* = (\text{Im } T)^\perp$.
- (iii) $\ker T^* = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\text{Im } T} = K$.

Corollaire 1.2.1. : soit H un espace de Hilbert et soit $T \in B(H)$ est inversible

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha > 0, \|Tx\| \geq \alpha \|x\| \\ \ker T^* = 0 \end{cases} \quad \forall x \in H$$

Exemple 1.2.4. : L'opérateur de " **Shift** " S , définit de l_2 vers l_2 n'est pas inversible.

En effet puisque

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots) S^*(1, 0, 0, \dots) = (0, 0, 0, \dots) (1, 0, 0, \dots) \in \ker S^*$$

Alors : $S^* \neq \{0\}$

Lemme 1.2.1. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in B(H)$ inversible, alors T^* est inversible et on a : $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Preuve :

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I \quad (T \text{ est inversible}) \quad \text{d'où} \quad (TT^{-1})^* = I^* = I \quad (T^{-1})^* T^* = T^* (T^{-1})^* = I$$

Alors T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

1.2.4 Opérateurs isométriques, unitaires, positifs, auto-adjoints

Opérateur isométrie

Définitions 1.2.10. : On dit que $A \in B(H)$ un opérateur isométrie (ou isométrique) si :

$$A^* A = I$$

Ou bien : $\|Ax\| = \|x\|$

Opérateur unitaire

Définitions 1.2.11. : Soit H un espace de Hilbert $U \in B(H)$. On dit que U est un opérateur unitaire si : U est inversible et

$$U^{-1} = U^*$$

D'autre part , on dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est isométrique si T préserve les longueurs : $\|Tv\| = \|v\|$ pour tout $v \in H$

Proposition 1.2.3. : [18] soient $U, V \in B(H)$ des opérateurs unitaires . Alors :

- (i) U est isométrique .
- (ii) $\|U\| = 1$.
- (iii) U^{-1} et U^* sont unitaires .
- (iv) UV est unitaire .

Preuve :

- (i) Pour tout $V \in H$, on a bien :

$$\|UV\|^2 = \langle UV ; UV \rangle = \langle U^*UV ; V \rangle = \langle V ; V \rangle = \|V\|^2$$

- (ii) Si $\|UV\| = \|V\|$ pour tout $V \in H$, alors :

$$\|U\| = \sup_{V \in H} \frac{\|UV\|}{\|V\|} = 1$$

- (iii) C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente .
- (iv) On a bien $(UV)^{-1} = U^{-1}V^{-1} = U^*V^* = (UV)^*$. Pour contre , une application linéaire isométrique n'est pas forcément unitaire .

Opérateur auto – adjoint

Définitions 1.2.12. : Soient H_1 et H_2 deux espace de Hilbert et $T \in B(H_1, H_2)$. L'opérateur adjoint de T est l'opérateur linéaire $T^* : H_2 \mapsto H_1$ caractérise par

$$\langle T^*y, x \rangle_{H_1} = \langle y, Tx \rangle_{H_2} \text{ Pour tout } x \in H_1, y \in H_2, \text{ on dit aussi que } T$$

est symétrique ou que T est hermitien .

Exemple 1.2.5.

1. Soit le matrice $A \in \mu_2(\mathbb{R})$ tq

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que : $A = A^*$ donc est auto-adjoint

2. Considerons l'opérateur A défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par $Ax(t) = e^{-|t|}x(t)$

A est un opérateur auto-adjoint car pour tous $x(t), y(t) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t), \overline{y(t)}) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} x(t) \overline{y(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{e^{-|t|} y(t)} dt = \langle x, Ay \rangle \end{aligned}$$

Théorème 1.2.4 : [9] (norme d'un opérateur auto – adjoint)

Si T est opérateur auto-adjoint alors

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\langle Tx, x \rangle\|$$

Proposition 1.2.4. Soit H un espace de Hilbert complexe , et $T \in B(H)$ auto-adjoint alors :

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle x, Tx \rangle} \in \mathbb{R}, \forall x \in H$$

Preuve :

En effet $\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle x, Tx \rangle}$ comme T est auto-adjoint , donc : $\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle x, Tx \rangle}$

Corollaire 1.2.2. Si H est un espace de Hilbert et $T \in B(H)$ un opérateur auto-adjoint , alors :

$$\langle Tx, x \rangle = 0 \Rightarrow T = 0, \quad \forall x \in H$$

Proposition 1.2.5. : Si T_1 et T_2 deux opérateurs auto-adjoint alors

1. $\alpha T_1 + \beta T_2$ est un opérateur auto-adjoint , $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $T_1 T_2$ est un opérateur auto-adjoint si $T_1 T_2 = T_2 T_1$
3. Si T est in opérateur quelconque alors, T^*T , TT^* et $T + T^*$ sont auto-adjoints

Opérateur positifs

Définitions 1.2.13. : On dit qu'un opérateur T sur un espace de Hilbert H est positif s'il vérifie : $\langle x, Tx \rangle \geq 0, \forall x \in H$. On écrit $T \geq B$ si $T - B$ est positif.

En utilisant l'identité de polarisation on voit qu'un opérateur positif est nécessairement auto-adjoint.

1.2.5 Racine carrée d'un opérateur linéaire borné

Définitions 1.2.14. Soit $T \in B(H)$ on dit que $S \in B(H)$ est la racine carrée de T si : $S^2 = T$

Théorème 1.2.6. : [12] Soit T un opérateur linéaire borné positif, alors il existe un unique opérateur positif S tel que : $S^2 = T$

De plus : si T commute avec B alors : B commute avec S on note $S = T^{\frac{1}{2}}$

Exemple 1.2.6.

1. L'opérateur $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est la racine carrée de l'opérateur $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

2. Soit $T \in B(H)$ défini par :

$$T : L^2[0,1] \mapsto L^2[0,1]$$

$$Tf(x) = xf(x)$$

$$\langle Tf, f \rangle = \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 x|f(x)|^2dx \geq 0$$

Alors on a : T est positif, donc il existe S tel que : $S^2 = T$ on remarque que :

$$S : L^2[0,1] \mapsto L^2[0,1]$$

$$Sf(x) = (x)^{\frac{1}{2}}f(x)$$

$$\text{Alors : } S^2f(x) = S(Sf(x)) = S\left((x)^{\frac{1}{2}}f(x)\right)$$

$$(x)^{\frac{1}{2}}(x)^{\frac{1}{2}}f(x) = xf(x) = Tf(x)$$

Corollaire 1.2.3. Soit T et S deux opérateurs positifs tel que : $ST = TS$,
alors TS est positif .

Preuve :

On a $S \geq 0$ alors d'après le théorème précédent :

$\exists T \geq 0$ tel que : $T^2 = S$ et aussi $T^* = T$ car T positif nous donne T auto-adjoint .

Soit $x \in H$ on a donc :

$$\langle STx, x \rangle = \langle T^2T x, x \rangle = \langle TTx, Tx \rangle = \langle TTx, Tx \rangle \geq 0$$

(car T est positif) alors , TS est positif .

La démonstration est a chevée .

Théorème 1.2.7. : [18] (Décomposition polaire d'un opérateur)

Soit $T \in B(H)$ et inversible , alors $T = UR$ ou R est positif et U est unitaire .

Preuve :

Puisque T est inversible T^* l'est aussi d'où T^*T est inversible puisque $T^*T \geq 0$

alors $(T^*T)^{\frac{1}{2}} = |T|$ existe et elle est même inversible . On prend :

$R = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ et $U = TR^{-1}$. Il reste de montre que U est unitaire on a :

$$U^*U = (TR^{-1})^*(TR^*) = (R^{-1})^*T^*TR^{-1},$$

($R^{-1} = (R^{-1})^*$ car R positif) $R^{-1}(T^*T)R^{-1} = I$, (car $T^*T = R^2$) .

1.2.6 Les commutateurs

Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension infinie .

Définitions 1.2.15. :

1. Un élément X de $B(E)$ est appelé commutateur sil existe T et B de $B(E)$ tel que $X = TB - BT$

2. Le commutant de $T \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{T\}' = \{B \in B(E), TB = BT\}$$

3. Le bicommutant de $T \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}'' = \{C \in B(E), CB = BC, \forall B \in A'\}$$

Proposition 1.2.5.

(i) $\{A\}'' = \left\{ \{A\}' \right\}$.

(ii) A' est une sous-algèbre de $B(E)$

(iii) A'' est une sous-algèbre commutative de $B(E)$

(iv) Tout polynome de A appartienta A''

1.3 Similarité :

Définition 1.3.1 : [3] soit A et B deux opérateurs dans $B(H)$, on dit que A et B sont similaire si et seulement s'il existe un opérateur inversible Q

tel que $B = QAQ^{-1}$

Lemme : soit A et B deux opérateurs dans $B(H)$, $R_\lambda(A)$, $R_\lambda(B)$

et leurs application résolvantes respectivement , alors $R_\lambda(A)$ et $R_\lambda(B)$ sont

similaire si seulement si A et B les sont .

Preuve : soient A et B deux opérateurs similaires dans $B(H)$, alors il existe un opérateur inversible Q tel que $B = QAQ^{-1}$. on a

$$R_\lambda(B) = R_\lambda(QAQ^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&= (QAQ^{-1} - \lambda I)^{-1} = [(QA - \lambda Q)Q^{-1}]^{-1} \\
&= Q(QA - \lambda Q)^{-1} = Q[Q(A - \lambda I)]^{-1} \\
&= Q(A - \lambda I)^{-1}Q^{-1} = QR_{\lambda}(A)Q^{-1}
\end{aligned}$$

D'où la similiaire de $R_{\lambda}(A)$ et $R_{\lambda}(B)$

Pour la réciproque on passe aux inverses dans l'égalité précédente .

Chapitre 2

Les opérateurs linéaires bornés et normaux

Dans ce chapitre nous présentons les définitions et les principaux résultats sur les opérateurs normaux .

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1. [12] On dit que $T \in B(H)$ est un opérateur normal , si T commute avec son adjoint : $T^*T = TT^*$

Exemple 2.1.1.

1/ soit $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, tel que $a, b \in \mathbb{C}$, d'où $T^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$

On a $T^*T = TT^*$, alors T est normal.

2/ On considère l'opérateur (multiplication T_φ par une fonction mesurable borne φ)

$$T_\varphi : L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$
$$T_\varphi f(t) = \varphi(t)f(t)$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi f ; g \rangle &= \int_0^1 \varphi(t)f(t)\overline{g(t)} \\ &= \int_0^1 f(t)\overline{\overline{\varphi(t)}\overline{g(t)}} \\ &= \int_0^1 f(t)\overline{\overline{\varphi(t)}\overline{g(t)}} = \langle f(t) ; \overline{\varphi(t)}\overline{g(t)} \rangle \end{aligned}$$

Donc : $T_\varphi^* g(t) = \overline{\varphi(t)}\overline{g(t)}$, où bien $T_\varphi^* f(t) = \overline{\varphi(t)}f(t)$

Donc, $T_\varphi^* T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^*$

L'opérateur T_φ est un hermitien (auto-adjoint) s'il la fonction φ est réelle

Proposition 2.1.1. Soit $T \in B(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes

1. T est normal
2. $\|Tx\| = \|T^*x\|$, pour tout $x \in H$.
3. Dans les cas complexes, les parties réelles et imaginaires de T commutent .

Preuve :

- Pour $x \in H$, alors :

$$\begin{aligned} & \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 \\ &= \langle Tx, Tx \rangle - \langle T^*x, T^*x \rangle \\ &= \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle \end{aligned}$$

Donc l'équivalence de 1 et 2 .

- On pose : $T = A + iB$, tel que : $A = \operatorname{Re}(T)$, et $B = \operatorname{Im}(T)$

On a :

$$T^* = A - iB , \text{ et } T^*T - TT^* = 2i(AB - BA) .$$

D'où : $T^*T - TT^*$ si et seulement si $AB - BA$

Corollaire 2.1.1. Si $T \in B(H)$ est normal , on a

$$\ker(T) = \ker(T^*)$$

Proposition 2.1.2. [18] Soit T est normal , on a :

1. L'opérateur aT est aussi normal pour tout $a \in \mathbb{C}$.
2. L'opérateur T^n est normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve :

1) Nous avons :

$$(aT)(aT)^* = a\bar{a}TT^*, \text{ et } (aT)^*(aT) = \bar{a}aT^*T$$

Puisque T est normal, d'où il sont égaux .

2) T est normal, d'où $TT^* = T^*T$

$$\Rightarrow (TT^*)^n = (T^*T)^n$$

$$\Rightarrow T^n (TT^*)^n = (T^*)^n T^n$$

$$\Rightarrow T^n (T^n)^* = (T^n)^* T^n . \text{ C'est -à-dire } T^n \text{ est normal, pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Corollaire 2.1.2. Soit P est polynôme et T est un opérateur normal. Alors $P(T)$ est aussi normal .

Remarque 2.1.1. T^n normal $\Rightarrow T$ normal

Exemple 2.1.2. Soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

On a : $T^2 = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow T^2$ est normal ,mais T n'est pas normal.

Proposition 2.1.3. [9] Soit $T \in B(H)$ est normal , on a :

$$\ker(T) \oplus \overline{\text{Im}(T)} = H.$$

Preuve : On sait que : $\ker(T^*) = (\text{Im}(T))^\perp$,

D'où :

$$(\ker(T^*))^\perp = ((\text{Im}(T))^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(T)},$$

Donc

$$H = \ker(T^*) \oplus (\ker(T^*))^\perp = \ker(T) \oplus \overline{\text{Im}(T)}$$

Proposition 2.1.4. (Inverse d'un opérateur normal)

Soit $T \in B(H)$ est normal et inversible d'inverse T^{-1} . Alors T^{-1} est aussi normal .

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
 (T^{-1})^* T^{-1} &= (T^*)^{-1} T^{-1} \\
 &= (T T^*)^{-1} = (T^* T)^{-1} \quad (\text{car normal}) \\
 &= T^{-1} (T^*)^{-1} = T^{-1} (T^{-1})^*
 \end{aligned}$$

Donc T^{-1} est un opérateur normal .

Proposition 2.1.5. [12] Soit $T \in B(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) T est normal.
- (ii) $T^{-1} T^*$ (ou $T^* T^{-1}$) est unitaire.
- (iii) Il existe un opérateur unitaire U tel que : $T^* = U T$.

Preuve : Montrons que :

- (i) $\Rightarrow$ (ii) : On a

$$\begin{aligned}
 (T^{-1} T^*)^* (T^{-1} T^*) &= T (T^{-1})^* T^{-1} T^* \\
 &= T T^{-1} (T^{-1})^* T^* = I (T T^{-1})^* = I
 \end{aligned}$$

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) : Clair .
- (iii) $\Rightarrow$ (i) : pour tout $x \in H$, On a :

$$\begin{aligned}
 \|T^* x\|^2 &= \|U T x\|^2 \\
 &= \langle U T x, U T x \rangle = \langle T x, U^* U T x \rangle \\
 &= \|T x\|^2
 \end{aligned}$$

Donc, T est normal.

2.2 quelques classes des opérateurs normaux

Opérateurs quasi-normaux

Définition 2.3.2. Un opérateur $S \in B(H)$ est quasi-normal si :

$$S \text{ commute avec } S^*S$$

Proposition 2.3.1. [9] Si $S = UT$ est la décomposition polaire de S , alors S est quasi-normal si et seulement si : T et U commutent .

Preuve : $T = |S| = (S^*S)^{\frac{1}{2}}$, U est une isométrie partielle.

1. Si S est quasi-normal alors S et S^*S commutent , avec $S^*S = T^2$. Cela implique : S et T commutent d'où :

$$\begin{aligned} ST - TS &= 0 \\ &= UTT - TUT \\ &= (UT - TU)T \\ &\Rightarrow (UT - TU) = 0 \\ &\Rightarrow UT = TU \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{Si } UT = TU &\Rightarrow UTT = TUTT = TTUT \\ &\Rightarrow ST^2 = T^2S \\ &\Rightarrow S \text{ est quasi-normal} \end{aligned}$$

Les opérateurs bornés des puissances normaux

2.3 Les opérateurs n - normal

Par suit , nous présentons les opérateurs n - normaux sur un espace de Hilbert H .

Nous donnons quelques propriétés de ces opérateurs. En général, un opérateur n - normal n'a pas nécessaire d'être un opérateur normal, un opérateur hyponormal .

Définition 2.4.1. Soit $T \in B(H)$, est appelé un opérateur n -normal si :

$$T^n T^* = T^* T^n$$

Proposition 2.4.1. Soit $T \in B(H)$, alors T est n -normal si et seulement si :

T^n est normal .

Preuve :

- Soit T opérateur n -normal , $T^n T^* = T^* T^n$. Donc

$$\begin{aligned} T^n (T^*)^n &= T^* T^n (T^*)^{n-1} = T^* (T^n T^*) (T^*)^{n-2} \\ &= (T^*)^2 T^n (T^*)^{n-2} = (T^*)^n T^n \end{aligned}$$

Alors T^n est normal .

- Soit T^n est normal. Comme $T^n T = T T^n$, après propriété de Fuglede $T^* T^n = T^n T^*$. Donc T est n -normal .

Remarque 2.4.1. L'opérateur borné normal est n -normal pour tout n .

Mais l'inverse n'est pas vrai .

Exemple 2.4.1. Soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, on a T est 2-normal mais n'est pas normal.

Proposition 2.4.2. Soit $T \in B(H)$ est n -normal. Alors

1. T^* est n -normal .
2. Si T^{-1} existe, alors (T^{-1}) est n -normal .
3. Si S, T deux opérateurs $\in B(H)$ sont unitairement équivalents, alors S est n -normal .

Preuve :

1. Comme T est n -normal, donc T^n est normal. On a

$$(T^n)^* = (T^*)^n \text{ est normal ,}$$

Alors T^* est un opérateur n -normal .

2. Comme T est n -normal, donc T^{-1} est normal. Et on a

$$(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n \text{ est normal,}$$

Alors T^{-1} est un opérateur n -normal.

3. Soit T est un opérateur n -normal et S, T sont unitairement équivalents .

Donc existe un opérateur unitaire U tel que $S = UTU^*$, alors $S^n = UT^nU^*$.

Comme T^n est normal , alors S^n est normal $\Rightarrow S$ est un opérateur n -normal

.

Théorème 2.4.1. Si S, T deux opérateurs n -normaux commutent, alors

ST est un opérateur n -normal .

Preuve : comme S, T deux opérateurs n -normaux commutent $\Rightarrow S^n, T^n$ sont aussi.

Alors $S^n T^n$ est un opérateur normal .

Et on a $S^n T^n = (ST)^n$, $(ST)^n$ est normal. Donc ST est opérateur n -normal.

Remarque 2.4.2. Cette résultat n'est pas nécessairement vrai si S, T non commutent .

Exemple 2.4.2. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ opérateurs sur espace

de Hilbert $\mathbb{C}^2$. S et T sont 2-normal . On remarque que

$$ST \neq \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = TS$$

Mais $(ST)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas normal donc ST n'est pas 2-normal.

Proposition 2.4.3. Soit T, S deux opérateurs n -normaux commutent, tel que :

$(S+T)^*$ commute avec $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k$. Alors $(S+T)$ est un opérateur n -normal.

Preuve :
$$(S+T)^n (S+T)^* = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k \right) (S^* + T^*),$$

$$(S+T)^n (S+T)^* = S^n S^* + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k (S+T)^* + T^n S^* + S^n T^* + T^n T^*$$

Comme $(S+T)^*$ est commute avec $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k$,

$$(S+T)^n (S+T)^* = S^n S^* + (S+T)^* \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k + S^* T^n + T^* S^n + T^* T^n$$

Alors $(S+T)^n (S+T)^* = (S+T)^* (S^n + T^n) + (S+T)^* \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k \right)$

Donc $(S+T)^n (S+T)^* = (S+T)^* = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S^{n-k} T^k \right) = (S+T)^* + (S+T)^n$

Remarque 2.4.3. La somme de deux opérateurs n -normal commutent ne pas nécessairement n -normal.

Exemple 2.4.3. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a S et T sont 2-normal, et commutent. Mais

$$S+T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } (S+T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est non-normal.}$$

Donc $S+T$ est un opérateur non 2-normal.

Lemme 2.4.1. soient $S, T \in B(H)$ sont deux opérateurs 2-normaux. Si

$$ST + TS = 0 ;$$

Alors $T + S$ et ST sont 2-normaux .

Preuve :

- On a $ST + TS = 0$, $S^2 T^2 = T^2 S^2$. Alors $(S + T)^2 = S^2 + T^2$ est normal .
Donc $(S + T)$ est un opérateur 2-normal .
- $ST + TS = 0$, $(ST)^2 = -S^2 T^2 = -T^2 S^2$, après (3.1.1) ST est opérateur 2-normal .

Théorème 2.4.2. Soit $T_1, \dots, T_m$ sont opérateurs n -normaux sur $B(H)$

alors : $(T_1 \oplus \dots \oplus T_m)$ et $(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)$ sont opérateurs n -normaux .

Preuve :

$$\begin{aligned} \bullet \quad (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^n (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^* &= (T_1^n \oplus \dots \oplus T_m^n) (T_1^* \oplus \dots \oplus T_m^*) \\ &= T_1^n T_1^* \oplus \dots \oplus T_m^n T_m^* = T_1^* T_1^n \oplus \dots \oplus T_m^* T_m^n \end{aligned}$$

$$(T_1^* \oplus \dots \oplus T_m^*) (T_1^n \oplus \dots \oplus T_m^n) = (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^* (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^n$$

Alors $(T_1 \oplus \dots \oplus T_m)$ est un opérateur n -normal .

- Pour $x_1, \dots, x_m \in H$

$$\begin{aligned} &(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^* (x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \\ &= (T_1^n \otimes \dots \otimes T_m^n) (T_1^* \otimes \dots \otimes T_m^*) (x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \\ &= T_1^n T_1^* x_1 \otimes \dots \otimes T_m^n T_m^* x_m \\ &= T_1^* T_1^n x_1 \otimes \dots \otimes T_m^* T_m^n x_m \\ &= (T_1^* \otimes \dots \otimes T_m^*) (T_1^n \otimes \dots \otimes T_m^n) (x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \\ &= (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^* (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n (x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \end{aligned}$$

Alors $(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^* = (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^* (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n$

Donc $(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)$ est n -normal.

Proposition 2.4.4. Soit $T \in B(H)$ avec la décomposition cartésienne $T = A + iB$

où A et B sont auto-adjoint. Alors T est 2-normal si et seulement si

B^2 commute avec A , et A^2 commute avec B

Preuve :

- Supposer $B^2A = AB^2$ et $A^2B = BA^2$. Alors :

$$\begin{aligned} T^2 T^* &= (A + iB)^2 (A - iB) = (A^2 + iAB + iBA - B^2)(A - iB) \\ &= A^3 - iA^2B - B^2A + iB^3 + iABA + AB^2 + iBA^2 + BAB \end{aligned}$$

Et

$$T^2 T^* = A^3 - AB^2 + iA^2B + iABA - iBA^2 + iB^3 + BAB + B^2A$$

Comme $B^2A = AB^2$ et $A^2B = BA^2$, d'où $T^2 T^* = T^* T^2$

Donc T est 2-normal.

- Soit T est 2-normal $\Rightarrow T^2 T^* = T^* T^2$, alors :

$$\begin{aligned} -B^2A + iBA^2 - iA^2B + AB^2 &= -AB^2 + iA^2B - iBA^2 + B^2A \\ (AB^2 - B^2A) + i(BA^2 - A^2B) &= 0 \end{aligned}$$

Soit $T_1 = AB^2 - B^2A$, $T_2 = BA^2 - A^2B$. Alors $T_1^* = -T_1$, $T_2^* = T_2$

(T_1, T_2 sont symétrique hermitiens) et $T_1 + iT_2 = 0$. Alors $-T_1 + iT_2 = 0$

Donc $T_1 = AB^2 - B^2A = 0$. Même $BA^2 = A^2B$

Remarque 2.4.4. L'opérateur 2-normal est un opérateur $2k$ -normal et l'opérateur 3-normal est un opérateur $3k$ -normal.

Exemple 2.4.4.

1) Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Alors $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est un opérateur normal.

Mais $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ est non normal.

2) Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $T^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ est un opérateur normal.

Mais $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ est un opérateur non normal.

Proposition 2.4.5. Si T est un opérateur k -normal et $(k+1)$ -normal pour tout k entier positif. Alors T est $(k+2)$ -normal.

Donc, T est normal pour tout $n \geq k$.

Preuve : On a T est k -normal, $T^k T^* = T^* T^k$. Donc

$$TT^k T^* T = TT^* T^k T. \text{ Alors } T^{k+1} T^* T = TT^* T^{k+1}$$

Comme T est $(k+1)$ -normal, $T^* T^{k+2} = T^{k+2} T^*$

Alors T est $(k+2)$ -normal.

Corollaire 2.4.1. Si T est 2-normal et 3-normal, alors T est n -normal

pour tout $n \geq 2$

Exemple 2.4.5. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ est un opérateur sur espace de Hilbert complexe.

Alors T est 2-normal, 3-normal, donc n -normal $\forall n \geq 2$ mais est non normal.

Proposition 2.4.6. Soit $T \in B(H)$ est un opérateur k -normal est un isométrie partielle.

Alors T est $(k+1)$ -normal.

Et donc T est n -normal $(\forall n \geq k)$ et k entier positif.

Preuve : Comme T est un isométrie partielle $TT^*T = T$. Donc

$$TT^*T^k = T^k \quad \text{et} \quad T^kT^*T = T^k$$

Comme T est k -normal.

$$T^{k+1}T^* = T^k \quad \text{et} \quad T^*T^{k+1} = T^k$$

Alors

$$T^{k+1}T^* = T^*T^{k+1}$$

Donc T est $(k+1)$ -normal. Après la proposition (3.1.5) est n -normal $(\forall n \geq k)$

Corollaire 2.4.2 Si $T \in B(H)$ est 2-normal et $(k+1)$ -normal et isométrie partille

Alor T est n -normal $(\forall n \geq 2)$.

Lemme 2.4.2 Soit $T \in B(H)$ est k -normal et $(k+1)$ -normal. Si T ou T^* est injectif alors T est normal.

Preuve : On a T est $(k+1)$ -normal $\Rightarrow T^{k+1}T^* = T^*T^{k+1}$

Et on a T est k -normal $\Rightarrow T^{k+1}T^* = T^kT^*T$

Donc

$$T^k(TT^* - T^*T) = 0$$

Comme T est injectif $\Rightarrow TT^* - T^*T = 0$. Alors T est normal.

Dans ce cas T^* est injectif, comme T^* est k -normal et $(k+1)$ -normal $\Rightarrow T^*$ est normal.

Donc T est normal.

Proposition 2.4.7. Pour $n \geq 2$ On a $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est n -normal si et seulement si

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) = 0, \text{ ou } a, b, c \in \mathbb{C}$$

Preuve : Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Alors T est n -normal si et seulement si

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}, \quad T^* T^n = T^n T^*.$$

T est normal si et seulement si

$$\left| b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) \right| = 0$$

Donc

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) = 0$$

Exemple 2.4.6. Considérer $n = 3$ dans la proposition précédente alors T est 3-normal si et seulement si $b(a^2 + ac + c^2) = 0$. Prendre $a = 2$, $b = 1$ et $c = -1 + \sqrt{3}i$. Alors

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix} \text{ est 3-normal.}$$

Mais $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ est normal, donc T est 3-normal.

Proposition 2.4.8. En générale et après la proposition (3.1.7). On a Si

$$T = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ alors } T^n = \begin{pmatrix} A^n & \sum_{i=0}^{n-1} A^i X B^{n-i-1} \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$$

Où A , B et X sont opérateurs dans $B(H)$ (n, k)

2.4 Les opérateurs (n, k) -normal

Définition 2.5.1 Soit T est opérateur borné. On appelle T est (n, k) -normal si et seulement si

$$T^n (T^k)^* = (T^k)^* T^n ,$$

Où n, k entiers non négatifs.

Remarque 2.5.1. tout opérateur normal borné est (n, k) -normal

(où $n = k = 1$). Et tous les opérateurs n -normal est (n, k) -normal (où $m = 1$)

Mais l'inverse n'est pas toujours vrai .

Exemple 2.5.1. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Alors $T^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

Et $(T^2)^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors $T^3 (T^2)^* = \begin{pmatrix} 32 & 16 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} = (T^2)^* T^3$

Donc T est $(3, 2)$ -normal. Mais non 3-normal ,

$$T^3 T^* = \begin{pmatrix} 20 & -8 \\ -8 & -32 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix} = T^* T^3$$

Corollaire 2.5.1. Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors T est $(2, 2)$ -normal si $b = c$

Preuve : T est $(2, 2)$ -normal si et seulement si $T^2 (T^2)^* = (T^2)^* T^2$

On a $T^* = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $T^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} \Rightarrow (T^2)^* = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$

Alors

$$(T^2)^* T^2 = \begin{pmatrix} (a^2 + bc)^2 + c^2(a+d)^2 & (a+d)(b(a^2 + bc) + d(d^2 + bc)) \\ (a+d)(b(a^2 + bc) + c(d^2 + bc)) & d^2(a+d)^2 + (d^2 + bc)^2 \end{pmatrix}$$

Et

$$T^2(T^2)^* = \begin{pmatrix} (a^2 + bc)^2 + b^2(a+d)^2 & (a+d)(c(a^2 + bc) + c(d^2 + bc)) \\ (a+d)(c(a^2 + bc) + b(d^2 + bc)) & c^2(a+d)^2 + (d^2 + bc)^2 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique T est $(2,2)$ -normal si et seulement si $b = c$.

Proposition 2.5.1. Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont nombres complexes,

et $n, k \geq 2$. Alors T est (n, k) -normal si et seulement si

$$b^2(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1})(a^{k-1} + a^{k-2}c + \dots + c^{k-1}) = 0, c^k = a^k \text{ et } c^n = a^n$$

Preuve : On a $T^n = \begin{pmatrix} a^n & b \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$

Et $(T^k)^* = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ b \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) & c^k \end{pmatrix}$

Donc :

$$T^n(T^k)^* = \begin{pmatrix} \left[a^n a^k + b^2 \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) \right] & bc^k \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \\ bc^n \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) & c^n c^k \end{pmatrix}$$

Et

$$(T^k)^* T^n = \begin{pmatrix} a^n a^k & ba^k \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \\ ba^n \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) & \left[c^n c^k + b^2 \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) \right] \end{pmatrix}$$

Par conséquent T est (n, k) -normal si et seulement si

$$b^2 \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) = 0, \quad c^k = a^k \quad \text{et} \quad c^n = a^n$$

Proposition 2.5.1. Soit T est un opérateur borné. Si T est (n, k) -normal, alors T^{nk} est un opérateur normal.

Preuve : T est un opérateur (n, k) -normal, alors $T^n (T^k)^* = (T^k)^* T^n$,

et $(T^c)^* = (T^*)^c$ pour chaque c entier non négatif, donc :

$$\begin{aligned} T^{nk} (T^{nk})^* &= \left((T^n)^k (T^k)^n \right)^* = \underbrace{(T^n T^n \dots T^n)}_{k\text{-times}} \underbrace{(T^k T^k \dots T^k)^*}_{n\text{-times}} \\ &= T^n T^n \dots T^n (T^k)^* \dots (T^k)^* = T^n T^n \dots (T^k)^* T^n (T^k)^* \dots (T^k)^* \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= \underbrace{(T^k)^* (T^k)^* \dots (T^k)^*}_{n\text{-times}} \underbrace{(T^n T^n \dots T^n)}_{k\text{-times}} = \underbrace{(T^k T^k \dots T^k)^*}_{n\text{-times}} \underbrace{(T^n T^n \dots T^n)}_{k\text{-times}} \\ &= \left((T^k)^n \right)^* (T^n)^k = \left((T^n)^k \right)^* (T^n)^k = (T^{nk})^* T^{nk} \end{aligned}$$

Donc T^{nk} est normal.

Proposition 2.5.2. T est un opérateur (n, k) -normal si et seulement si T est (n, k) -normal.

Preuve : Soit T est (n, k) -normal $T^n (T^k)^* = (T^k)^* T^n$. Donc :

$$T^k (T^n)^* = \left(\left(T^k (T^n)^* \right)^* \right)^* = \left(T^n (T^k)^* \right)^* = \left((T^k)^* T^n \right)^* = (T^n)^* T^k.$$

Alors T est (k, n) -normal.

Proposition 2.5.3. Si $T \in B(H)$ est un opérateur (n, k) -normal, alors :

- 1) T^* est (n, k) -normal.
- 2) Si T^{-1} existe alors T^{-1} est (n, k) -normal.
- 3) Soient $S, T \in B(H)$ deux opérateurs sont unitairement équivalents, alors S est (n, k) -normal.

Preuve : On a T est (n, k) -normal, alors $T^n (T^k)^* = (T^k)^* T^n$

- 1) Après la proposition (3.2.2)

$$(T^*)^n \left((T^*)^* \right)^k = (T^*)^n T^k = T^k (T^*)^n = \left((T^*)^* \right)^k (T^*)^n$$

Alors T^* est (n, k) -normal.

- 2) On a :

$$\begin{aligned} (T^{-1})^n \left((T^{-1})^* \right)^k &= (T^n)^{-1} \left((T^*)^k \right)^{-1} = \left((T^*)^k (T^n) \right)^{-1} = \left((T^n) (T^k)^* \right)^{-1} \\ &= \left(T^n (T^k)^* \right)^{-1} = \left((T^k)^* \right)^{-1} (T^n)^{-1} = \left((T^{-1})^* \right)^k (T^{-1})^n. \end{aligned}$$

Alors T^{-1} est (n, k) -normal.

- 3) Comme S et T , sont unitairement équivalents, alors $S = UTU^*$

Donc : $(UTU^*)^n = UT^n U^*$

Alors :

$$\begin{aligned} S^n (S^k)^* &= (UTU^*)^n \left((UTU^*)^k \right)^* = UT^n U^* (UT^k U^*)^* \\ &= UT^n U^* U (T^k)^* U^* = UT^n (T^k)^* U^* = U (T^k)^* T^n U^* \end{aligned}$$

$$= \left((UTU^*)^k \right)^* (UTU^*)^n = (S^k)^* S^n$$

Donc S est (n, k) -normal .

Proposition 2.5.4. Soit T est (c, k) -normal et $(c+1, k)$ -normal ,où c, k sont entiers non négatifs, alors T est $(c+2, k)$ -normal. Donc T est (n, k) -normal

Preuve : On a T est (c, k) -normal et $(c+1, k)$ -normal , alors :

$$\begin{aligned} T^c (T^k)^* &= (T^k)^* T^c \quad \text{et} \quad T^{c+1} (T^k)^* = (T^k)^* T^{c+1} \\ \Rightarrow T^{c+2} (T^k)^* &= T T^{c+1} (T^k)^* = T (T^k)^* T^{c+1} = T (T^k)^* T^c T \\ &= T T^c (T^k)^* T = T^{c+1} (T^k)^* = (T^k)^* T^{c+1} T = (T^k)^* T^{c+2} \end{aligned}$$

Donc T est $(c+2, k)$ -normal, alors T est (n, k) -normal. $\forall n, k$

Proposition 2.5.5. Soit T est (n, c) -normal et $(n, c+1)$ -normal où n, c sont entiers non négatifs alors T est $(n, c+2)$ -normal. Donc T est (n, k) -normal

Théorème 2.5.1. soient S et T deux opérateurs (n, k) -normaux, si S commute avec T , alors (ST) est (n, k) -normal .

Preuve : Comme S et T sont commutent alors $(ST)^n = S^n T^n$

De plus S commute avec T^* et T commute avec S^* , on a :

$$\begin{aligned} (ST)^n ((ST)^k)^* &= S^n T^n (S^k T^k)^* = S^n T^n (T^k)^* (S^k)^* \\ &= S^n T^n (T^k)^* (S^k)^* = S^n (T^k)^* T^n (S^k)^* \quad (T \text{ est } (n, k)\text{-opérateur}) \\ &= (T^k)^* S^n (S^k)^* T^n = (T^k)^* (S^k)^* S^n \quad (S \text{ est } (n, k)\text{-opérateur}) \\ &= ((ST)^k)^* (ST)^n \end{aligned}$$

Alors ST est (n, k) -normal .

Théorème 2.5.2. Soit $T_1, T_2, \dots, T_p$ sont des opérateurs (n, k) -normaux sur $B(H)$ alors $(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)$ est un (n, k) -normal.

Preuve : Comme $T_1, T_2, \dots, T_p$ sont (n, k) -normaux, alors :

$$= T_i^n (T_i^k)^* = (T_i^k)^* T_i^n \quad \forall i = 1, 2, \dots, p$$

$$\begin{aligned} (T_1 \oplus T_1 \oplus \dots \oplus T_p)^n ((T_1 \oplus T_1 \oplus \dots \oplus T_p)^k)^* &= (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) (T_1^k \oplus T_2^k \oplus \dots \oplus T_p^k)^* \\ &= (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) ((T_1^k)^* \oplus (T_2^k)^* \oplus \dots \oplus (T_p^k)^*) = T_1^n (T_1^k)^* \oplus T_2^n (T_2^k)^* \oplus \dots \oplus T_p^n (T_p^k)^* \\ &= (T_1^k)^* T_1^n \oplus (T_2^k)^* T_2^n \oplus \dots \oplus (T_p^k)^* T_p^n = ((T_1^k)^* \oplus (T_2^k)^* \oplus \dots \oplus (T_p^k)^*) (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) \\ &= (T_1^k \oplus T_2^k \oplus \dots \oplus T_p^k)^* (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) = ((T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^k)^* (T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^n \end{aligned}$$

Alors $(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)$ est (n, k) -normal.

Théorème 2.5.3. Soit $T_1, T_2, \dots, T_p$ sont (n, k) -normaux sur $B(H)$,

alors $(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)$ est un (n, k) -normal.

Preuve :

Comme $T_1, T_2, \dots, T_p$ sont (n, k) -normaux, alors :

$$T_i^n (T_i^k)^* = (T_i^k)^* T_i^n \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \text{ et soit } x_1, x_2, \dots, x_p \in H \text{ Donc :}$$

$$\begin{aligned}
& \left(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p \right)^n \left(\left(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p \right)^k \right)^* (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\
&= \left(T_1^n \otimes T_2^n \otimes \dots \otimes T_p^n \right) \left(T_1^k \otimes T_2^k \otimes \dots \otimes T_p^k \right)^* (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\
&= T_1^n \left(T_1^k \right)^* x_1 \otimes T_2^n \left(T_2^k \right)^* x_2 \otimes \dots \otimes T_p^n \left(T_p^k \right)^* x_p \\
&= \left(T_1^k \right)^* T_1^n x_1 \otimes \left(T_2^k \right)^* T_2^n x_2 \otimes \dots \otimes \left(T_p^k \right)^* T_p^n x_p \\
&= \left(\left(T_1^k \right)^* \otimes \left(T_2^k \right)^* \otimes \dots \otimes \left(T_p^k \right)^* \right) \left(T_1^n \otimes T_2^n \otimes \dots \otimes T_p^n \right) (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\
&= \left(T_1^k \otimes T_2^k \otimes \dots \otimes T_p^k \right)^* \left(T_1^n \otimes T_2^n \otimes \dots \otimes T_p^n \right) (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\
&= \left(\left(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p \right)^k \right)^* \left(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p \right)^n (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p)
\end{aligned}$$

Alors $(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)$ est (n, k) -normal.

2.5 Quelques classes d'opérateurs n -normaux

Opérateurs n -quasi normaux

Définition 2.6.1. L'opérateur $T \in B(H)$ est n -quasi normal, si :

$$T^n T^* T = T^* T^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque 2.6.1.

- i. L'opérateur 1-quasi normal est un opérateur quasi normal.
- ii. Chaque opérateur quasi-normal est n -quasi normal, quelque soit n .

Préposition 2.6.1. L'opérateur n -normal est aussi n -quasi normal, mais l'inverse n'est pas vrai.

Définition 2.6.2.

A) Opérateurs quasi n -normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est Quasi n normal si , $(\forall n \in \mathbb{Z}^+)$

$$T(T^* T^n) = (T^* T^n)T.$$

B) Opérateur K -Quasi-normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est K -Quasi-normal si :

$$T \left(T^* T \right)^k = \left(T^* T \right)^k T .$$

C) Opérateur N -Quasi-normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est N -Quasi-normal si et seulement si

$$T \left(T^* T \right) = N \left(T^* T \right) T .$$

D) Opérateurs (K, N) Quasi-normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est (K, N) Quasi-normal si satisfait :

$$T^K \left(T^* T \right) = N \left(T^* T \right) T^K \text{ où } K \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } N \in B(H)$$

E) Opérateur (K, N) Quasi n -normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est (K, N) Quasi n -normal si satisfait

$$T^K \left(T^* T^n \right) = N \left(T^* T^n \right) T^K , \text{ Où } K \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } N \in B(H)$$

F) Opérateur $(K, N)^*$ Quasi n -normal :

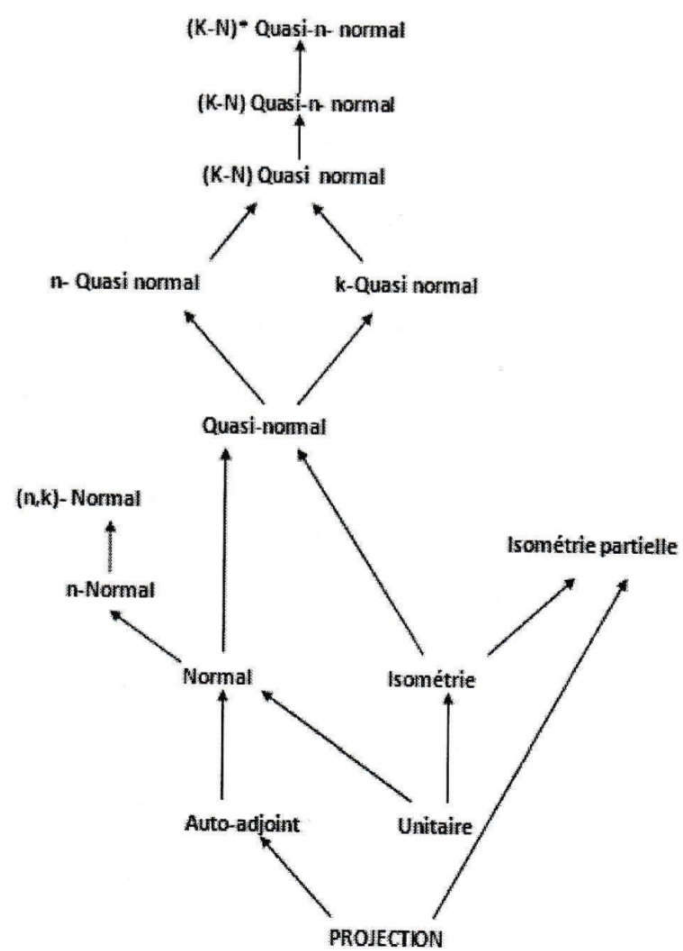
On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est $(K, N)^*$ Quasi n -normal si satisfait :

$$T^K \left(T^* T^n \right)^K = N \left(T^* T^n \right)^K T^K , \text{ Où } K \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } N \in B(H)$$

Remarque 2.6.2. Soit T est un opérateur $(K, N)^*$ Quasi n -normal ,tel que :

1. Si $N = I$ alors T est un opérateur quasi n -normal .
2. Si $K = 1, n = 1$ alors T est un opérateur N -quasi normal .
3. Si $K = 1, N = I$ alors T est un opérateur quasi n -normal .
4. Si $n = 1, N = I$ alors T est un opérateur quasi normal .
5. Si $K = 1, n = 1$ alors T est un opérateur quasi normal .

Pour illustrer ces propos, nous allons introduire le schéma suivant :



2.6 Opérateurs n -hyponormaux

Définition 2.7.1. un opérateur $T \in B(H)$ est appelé un opérateur n -hyponormal

si :

$$T^n T^* \leq T^* T^n$$

Proposition 2.7.1. Soient $S, T \in B(H)$ deux opérateurs sont unitairement équivalents, et T est n -hyponormal.

Alors, l'opérateur S aussi est n -hyponormal.

Preuve : Comme S et T sont unitairement équivalents, alors il existe un opérateur unitaire U tel que :

$$S = UTU^*$$

D'où,

$$S^n = UT^n U^*$$

Nous avons ,

$$\begin{aligned} S^n S^* &= UT^n U^* (UTU^*)^* \\ &= UT^n U^* UTU^* \\ &= UT^n T^* U^* \\ &\leq UT^* T^n U^* \\ &= S^* S^n \end{aligned}$$

Donc : $S^n S^* \leq S^* S^n$ alors S est un opérateur n -hyponormal.

Proposition 2.7.2. Soit $T \in B(H)$ est un opérateur n -hyponormal. Alors, T^* est non n -hyponormal.

Preuve : On a T est un opérateur n -hyponormal, alors :

$$\begin{aligned}
T^n T^* &\leq T^* T^n \Rightarrow (T^n T^*)^* \leq (T^* T^n)^* \\
&\Rightarrow (T^*)^* (T^n)^* \leq (T^n)^* (T^*)^* \\
&\Rightarrow T (T^*)^n \leq (T^*)^n T \\
&\Rightarrow (T^*)^n T \geq T (T^*)^n.
\end{aligned}$$

Donc T^* est non n -hyponormal.

Corollaire 2.7.1. Si T et T^* sont deux opérateurs n -hyponormaux.

Alors, l'opérateur T est un opérateur n -normal.

Théorème 2.7.1. Soient $S, T \in B(H)$ deux opérateurs n -hyponormaux commutent avec $ST^* = T^*S$ alors, ST est un opérateur n -hyponormal.

Preuve : On a : $ST = TS \Rightarrow S^n T^n = (TS)^n$

et $ST^* = T^*S \Rightarrow S^n T^* = T^* S^n$.

Alors

$$\begin{aligned}
ST^* = T^*S &\Rightarrow TS^* = S^*T \\
&\Rightarrow T^n S^* = S^* T^n
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
(ST)^n (ST)^* &= S^n T^n T^* S^* \\
&\leq S^n T^* T^n S^* \\
&= T^* S^n S^* T^n \\
&\leq T^* S^* S^n T^n
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(ST)^n (ST)^* \leq (ST)^* (ST)^n$$

Donc, ST est un opérateur n -hyponormal.

Chapitre 3

Théorème de Fuglede-Putnam

3.1 Une petite biographie de Bent Fuglede

Dans ce chapitre on va parler du théorème de Fuglede-Putnam .

Le célèbre théorème de Fuglede-Putnam .

Qui affirme qu'un opérateur linéaire borné qui commute avec deux opérateurs normaux , il commute également avec leurs adjoints . La généralisation étant étudiée sur certaines classes d'opérateurs non normaux définis sur des espace de Hilbert séparables complexes de dimension infinie .

Le théorèmes de Fuglede-Putnam a été établit pour des couples d'opérateur de classes différentes . L'idée du théorème de Fuglede-Putnam est due à B. Fuglede , qui a montré en premier lieu , que si A est un opérateur normal dans $B(H)$ et si $AX = XA$ pour certain $X \in B(H)$, alors $A^*X = XA^*$, ce qui veut dire que tout opérateur qui commute avec un opérateur normal , commute aussi avec son adjoint , Ce résultat est en general faux si A n'est pas normal , si X est auto-adjoint , le résultat est trivial sans la normalité de l'opérateur A .

Puis , C.R. Putnam a généralisé ce résultat pour le cas de deux opérateurs normaux A et B comme suit :

Pour deux opérateurs normaux A et B dans $B(H)$ et pour un opérateur $X \in B(H)$ l'équation $AX = XB$ implique $A^*X = XB^*$, ce qui veut dire que tout opérateur qui commute avec deux opérateurs normaux , commute aussi avec leurs adjoints .

3.2 Propriété de Fuglede sur les opérateurs bornés

Théorème 3.2.1. [5] (Fuglede – 1950)

Soient T et N deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H , tels que $TN = NT$ où N est normal . Alors ,

$$AN^* = N^*A$$

Puis en 1951 Putnam a fait la généralisation au cas de deux opérateurs normaux

Théorème 3.2.2. [8] (Fuglede- Putnam-Rosenblum) :

Supposons que M , N et $T \in B(H)$ avec M , N sont normaux et $MT = TN$. Alors

$$M^*T = TN^*$$

Preuve : La preuve suivante est à M.Rosenblum.

Supposons que $S \in B(H)$, et posons $V = S - S^*$. On définit :

$$Q = \exp(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \right) V^n$$

Alors,

$$V^* = -V ,$$

Donc

$$Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-1}$$

Donc Q est unitaire, la conséquence dont nous avons besoin est que

$$\left\| \exp(S - S^*) \right\| = 1, \text{ pour tout } S \in B(H)$$

D'autre part ,on a : $MT = TN$ d'où par récurrence ,alors :

$$M^k T = TN^k , \text{ Pour tout } k \in \mathbb{N}$$

D'où

$$\exp(M)T = T \exp(N) , \text{ ou bien } T = \exp(-M)T \exp(N)$$

Posons : $U_1 = \exp(M^* - M)$ et $U_2 = \exp(N^* - N)$

Puisque M et N sont normaux il s'en suit que :

$$\exp(M^*)T \exp(-N^*) = U_1 T U_2, \text{ et } \|U_1\| = \|U_2\| = 1$$

D'où

$$\|\exp(M^*)T \exp(-N^*)\| \leq \|T\|$$

Maintenant, on définit

$$F(\lambda) = \exp(\lambda M^*)T \exp(\lambda N^*) \text{ tel que } (\lambda \in \mathbb{C})$$

Les hypothèses du théorème sont vérifiées avec $\overline{\lambda}M$ et $\overline{\lambda}N$ à la place de M et N donc implique que :

$$\|F(\lambda)\| \leq \|T\| \text{ Pour } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Alors, F est une fonction bornée analytique à valeur dans $B(H)$.

D'après le théorème de Liouville ($F'(\lambda) = 0$) on a pour $\lambda = 0$, $F'(0) = 0$:

$$F'(\lambda) = M^* \exp(\lambda M^*)T \exp(-\lambda N^*) + \exp(M^*)T (-N^*) \exp(-\lambda N^*)$$

D'où :

$$M^*T = TN^*$$

Lemme : si A et B^* sont de classe $[n, N]$ alors l'opérateur Γ est de classe $[n, N]$.

Preuve : par hypothèse $A^*A^n = A^nA^*$, $B(B^*)^n = (B^*)^nB$.

Puisque, $\Gamma(X) = AXB$ est $\Gamma^*(X) = A^*XB^*$ pour tout couple $A, B \in \Gamma(H)$

$$\begin{aligned} (\Gamma^*\Gamma^n - \Gamma^n\Gamma^*)(X) &= \Gamma^*\Gamma^nX - \Gamma^n\Gamma^*X \\ &= \Gamma^*(A^nX(B^*)^n) - \Gamma^n(A^*XB) \\ &= A^*A^nX(B^*)^nB - A^nA^*BX(B^*)^n \\ &= A^*A^nX(B^*)^nB - A^*A^nX(B^*)^nB \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus montre que $\Gamma \in [nN]$.

Lemme : Si $A \in [nN]$ et A est inversible, alors $A^{-1} \in [nN]$

Preuve : par l'hypothèse $A^* A^n = A^n A^*$,

nous devons prouver que $(A^*)^{-1}(A^n)^{-1} = (A^n)^{-1}(A^*)^{-1}$.

$$(A^*)^{-1}(A^n)^{-1} = (A^n A^*)^{-1} = (A^* A^n)^{-1} = (A^n)^{-1}(A^*)^{-1}$$

D'où $A^{-1} \in \text{class } [nN]$.

Lemme : soit $T \in L(H)$ tel que $T \in [2N] \cap [3N]$ puis $T \in [nN]$ pour tous les entiers de positive $n \geq 4$.

Théorème 3.2.3 : Soient A et B^* de class $[2N \cap 3N]$ tels que soit B^* inversible est X de a Hilbert-Schmidt. Supposons que $AX = XB$ puis $A^*X = XB^*$.

Preuve : Soit Γ l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini par $\Gamma Y = A Y B^{-1}$,

Ou $Y \in L(H)$ par l'hypothèse A et B^* sont de classe $[nN]$, par le lemme $(B^*)^{-1}$ est de classe $[nN]$ depuis $(B^*)^{-1} = (B^{-1})^*$. il s'ensuit par le lemme 2.13 que Γ est de classe $[nN]$ l'hypothèse $AX = XB$ implique que $\Gamma X = X$ et aussi par le lemme $T \in [nN]$ pour tout $n \geq 2$, il s'ensuit que ,

$$\begin{aligned} \|\Gamma^* X\|^2 &= \langle \Gamma^* X, \Gamma^* X \rangle \\ &= \langle \Gamma^* \Gamma^n X, \Gamma^* \Gamma^n X \rangle \\ &= \langle \Gamma \Gamma^{*n} \Gamma^* \Gamma^n X, X \rangle \\ &= \langle \Gamma \Gamma^{*n+1} \Gamma^n X, X \rangle \\ &= \langle \Gamma^{*n+1} \Gamma \Gamma^n X, X \rangle \\ &= \langle \Gamma^{n+1} X, \Gamma^{n+1} X \rangle \\ &= \|X\|^2 \end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus donne

$$\begin{aligned}
\|\Gamma^*X - X\|^2 &= \langle \Gamma^*X - X, \Gamma^*X - X \rangle \\
&= \langle \Gamma^*X, \Gamma^*X \rangle - \langle \Gamma^*X, X \rangle - \langle X, \Gamma^*X \rangle + \langle X, X \rangle \\
&= \|\Gamma^*X\|^2 - \langle X, \Gamma X \rangle - \langle \Gamma X, X \rangle + \|X\|^2 \\
&= \|X\|^2 - \langle X, X \rangle - \langle X, X \rangle + \|X\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\Gamma^*X = X$ et donc $A^*X = XB^*$

3.3 Résultats positifs : Pour les opérateurs isométrie

3.3.1 première généralisation .

Théorème 3.3.4 : [14] Si M est une isométrie et N est un co-isométrie. Si A et B d'opérateur dans $B(H)$ tels que $AN = MB$ donc $BN^* = M^*A$.

Preuve : On a

$$A = ANN^* = (AN)N^* = (MB)N^* = M(BN^*).$$

Puis

$$M^*A = M^*MBN^* = BN^*$$

Remarque : Même si l'ordre des opérateurs A et B ne ressemble pas à celui que l'onont espéré, mais c'est en fait une généralisation puisque le réglage $A = B$ nous permet d'obtenir retour à la version connue

Remarque : On observe aussi que des conditions fortes sont à imposer si l'on veut pour garder l'ordre voulu de A et B

(par exemple une hypothèse de commutativité)

Remarque : Le opérateur M étant une isométrie et N étant une co-isométrie ne peuvent être abandonné.

Car si l'on prend U le décalage unilatéral défini sur ℓ^2 , alors en posant

$$M = N = A = B = U \text{ (et donc } N \text{ n'est pas une co-isométrie) ,}$$

on voit que $AN = MB$ tandis que $BN^* \neq M^*A$. Et si l'on fixe

$$M = N = A = B = U^* \text{ (et donc } M \text{ n'est pas une isométrie) ,}$$

alors $AN = MB$ alors que $BN^* \neq M^*A$.

Corollaire 3.3.1.1 : Si M est une isométrie et A est un opérateur tel que $A^*M = M^*A^*$ puis $AM^* = MA$.

Preuve : Appliquer le théorème 3.3.4 et prendre l'adjoint de l'équation obtenue.

Remarque : Le corollaire précédent constitue en quelque sorte une généralisation de Lemme de Barria.

Le résultat à venir sera nécessaire pour énoncer plus de conséquences des principaux théorèmes dans cette section.

Lemma : Si A est tel que $0 \notin W(A)$ ($W(A)$ est songamme) $\sigma(A) \cap \sigma(-A) = \emptyset$ ($\sigma(A)$ étant le spectre de A) et $AE = -EA$, où soit A soit E est normal, alors $E = 0$.

Une autre application du théorème précédent est la suivante.

Corollaire 3.3.1.2 : [14] Supposons que M soit une isométrie et N une co-isométrie. Supposons en outre que A est un opérateur auto-adjoint tel que $0 \notin W(A)$ ou que $\sigma(A) \cap \sigma(-A) = \emptyset$. $AN = MA$, alors $N = M$.

Preuve : Puisque $AN = MA$, alors d'après le théorème 3.3.4 nous obtenons $AN^* = M^*A$. Aussi en prenant l'adjoint de la première équation on obtient $N^*A = AM^*$. En combinant ces deux équations nous donne

$$A(N - M)^* = -(N - M)^*A$$

Par le lemme A nous concluons que $N = M$.

Une autre application concerne une équation d'opérateur.

Corollaire 3.3.1.3 : Supposons que

X est tel que $0 \notin W(X)$ (ou $\sigma(X) \cap \sigma(-X) = \emptyset$)

Que tu soit U déplacement unilatéral. Alors l'équation de l'opérateur

$$XU = U^*X$$

n'a pas de solution normale non nulle X sur ℓ^2 .

Preuve : Supposons que X est normal. Puisque U est une isométrie,
 $XU = U^*X \Rightarrow XU^* = UX$ et donc $X(U - U^*) = (U - U^*)X$

Le lemme A implique que U est auto-adjoint, ce qui est faux, établissant le résultat.

Il est évident qu'un opérateur unitaire est une isométrie. À l'inverse, un auto-adjoint (ou normal) l'isométrie est unitaire. Nous donnons ici une réponse à une question similaire .

Proposition 3.3.1 : Supposons que A et B soient deux opérateurs auto-adjoints tels que $\sigma(B) \cap \sigma(-B) \subset \{0\}$. Si AB est une isométrie, alors elle est auto-adjointe.

Remarque . Sous la même hypothèse que dans la proposition précédente, on a

$$AB \text{ isométrie} \Leftrightarrow AB \text{ unitaire} .$$

Preuve : Soit $N = AB$. Puisque A et B sont auto-adjoints,

$$BN = BAB = (BA)B = N^*B$$

Maintenant que N est une isométrie, le théorème 1 nous donne

$$BN^* = NB , \text{ à savoir } B^2A = AB^2 .$$

Puisque $\sigma(B) \cap \sigma(-B) \subset \{0\}$, appliquer le théorème d'application spectrale à f (la fonction $x \mapsto x^2$ défini sur $\sigma(B^2)$) permet d'obtenir

$$BA = AB , \text{ soit } N = N^* ,$$

compléter la preuve.

Corollaire 3.3.1.3 : Soit A une projection sur un sous-espace fermé M . Si B est auto-adjoint,

$$AB \text{ isométrie} \Rightarrow B \text{ réduit } M$$

Preuve : Puisque AB est une isométrie, le résultat précédent donne $AB = BA$ et donc B réduit M

3.3.2 deuxième généralisation .

Avant de donner une autre généralisation, nous souhaitons rappeler le lemme standard suivant.

Lemme : Supposons que N est unitaire et que A et B sont deux opérateurs bornés. Puis

$$NA = BN \Rightarrow NA^* = B^*A \quad .$$

Nous souhaitons maintenant abandonner l'hypothèse d'« unité » sur N .

On utilise une astuce de matrice opérateurs via l'opérateur Julia qui a été défini en introduction .

Théorème 3.3.2.5 : [14] Soient A et B deux opérateurs bornés. Supposons que N est une contraction telle que

$$(1 - N^*N)^{\frac{1}{2}}A = B(1 - NN^*)^{\frac{1}{2}} = (1 - NN^*)^{\frac{1}{2}}A^* = B^*(1 - NN^*)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad .$$

Puis

$$NA = BN \Rightarrow NA^* = B^*A \quad .$$

Remarque : Avant de donner la preuve, nous voudrions attirer l'attention des lecteurs qu'il existe des opérateurs non unitaires N et des opérateurs A et B satisfaisant les hypothèses du théorème précédent. Prenons par exemple $A = I$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & .. \\ & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & .. & .. & .. \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & .. \\ & 0 & 1 & 0 & .. \\ 0 & & .. & .. & .. \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que N n'est qu'une isométrie et que toutes les autres hypothèses sont remplies.

Preuve. Considérons les opérateurs de matrice définie sur $H \oplus H$ comme

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{est} \quad \tilde{N} = J(N) = \begin{pmatrix} (1 - NN^*)^{\frac{1}{2}} & N \\ -N^* & (1 - N^*N)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Puis

$$\tilde{N} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & NA \\ 0 & (1 - N^*N)^{\frac{1}{2}} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & NA \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{par hypothèse .}$$

Nous avons également

$$\tilde{B} \tilde{N} = \begin{pmatrix} B(1 - NN^*)^{\frac{1}{2}} & BN \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & BN \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{par hypothèse .}$$

Alors $\tilde{B} \tilde{N} = \tilde{N} \tilde{A}$.

Mais $\tilde{N}$ est unitaire de sorte que le lemme précédent nous donne

$$\tilde{B}^* \tilde{N} = \begin{pmatrix} B^*(1 - NN^*)^{\frac{1}{2}} & BN \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & NA^* \\ 0 & (1 - N^*N)^{\frac{1}{2}} A^* \end{pmatrix} = \tilde{N} \tilde{A}^*$$

Les deux hypothèses non utilisées restantes permettent d'obtenir $B^*N = NA^*$ et ceci terminela preuve.

Corollaire 3.3.2 : Soient A et B deux opérateurs bornés. Si N est une isométrie telle que

$$B(1 - NN^*)^{\frac{1}{2}} = B^*(1 - NN^*)^{\frac{1}{2}} = 0 .$$

Ensuite

$$BN = NA \Rightarrow B^*N = NA^* .$$

Remarque . La condition $B(1 - NN^*)^{\frac{1}{2}} = B^*(1 - NN^*)^{\frac{1}{2}} = 0$ ne peut pas être complètement éliminé dans le corollaire précédent. Par exemple, si l'on reprend

le décalage unilatéral U sur ℓ^2 et pose $N = B = U$ alors N est une isométrie et on peut vérifier qu'il ne vérifie pas l'équation 1. Si nous posons également $A = U$,

Alors

$$BN = U^2 = NA \quad \text{tandis que} \quad B^*N = U^*U \neq UU^* = NA^*$$

Nous donnons maintenant un exemple satisfaisant les hypothèses du corollaire précédent et non satisfait par aucune autre version connue du théorème de Fuglede-Putnam.

Exemple 3.3.2 : Considérons les matrices infinies

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & & & & & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & & 0 & \dots & \dots \\ 0 & & & & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Alors la condition (1) est satisfaite. De plus, on a facilement $BN = NA$

et donc $NA^* = B^*N$

Cependant, on peut aussi vérifier que B n'est pas normal et A non plus. En fait, B n'est pas hyponormal. Il n'est même pas dominant, c'est pourquoi nos opérateurs ne sont pas couverts par les versions du théorème de Fuglede-Putnam de Radjabalipour ou Stampfli et Wadhwa.

Avant de faire la dernière remarque de cet article, nous voudrions rappeler ce qui suit .

3.4 Résultats positifs : Pour les opérateurs normaux

3.4.1 cas deux opérateurs dans $B(H)$ et un opérateur normal

Dans cette section, nous présentons nos résultats en étendant le théorème précédent de Fuglede à deux les opérateurs.

Conjecture 3.4.1 : Soit H un espace de Hilbert et N un opérateur normal, pour deux opérateurs linéaires bornés A et B , si

$$AN = NB$$

Ensuite

$$AN^* = N^*B$$

Cette conjecture n'est pas vraie, nous donnons le contre-exemple suivant :

Exemple 3.4.1 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2-i & 2+2i \\ 1+i & -1+2i \end{bmatrix}, \quad N^* = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

Puisque N est non seulement normal mais même auto-adjoint.

$$AN = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2i \end{bmatrix}, \quad NB = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$$

Donc $AN = NB$

$$\text{Mais } BN^* = \begin{bmatrix} 4-3i & 5+6i \\ 3+2i & -3+5i \end{bmatrix}, \quad N^*A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -i & 2i \end{bmatrix}$$

Donc $BN^* \neq N^*A$.

Théorème 3.4.1 : [16] Soit H un espace de Hilbert, soit N un opérateur normal sur H pour deux opérateurs bornés A et B sur H si

$$AN = NB \quad \dots\dots (1)$$

Et

$$BN = NA \quad \dots\dots (2)$$

Ensuite

$$AN^* = N^*B \quad \& \quad BN^* = N^*A \quad \dots\dots (3)$$

Preuve : En ajoutant (1) et (2) on obtient

$$\begin{aligned} AN + BN &= NB + NA \\ (A + B)N &= N(A + B) . \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de Fuglede, nous avons

$$\begin{aligned} (A + B)N^* &= N^*(A + B) \\ AN^* + BN^* &= N^*A + N^*B \quad \dots\dots(4) \end{aligned}$$

$$AN^* - N^*B = N^*A - BN^* \quad \dots\dots(5)$$

En soustrayant (2) de (1) on obtient

$$\begin{aligned} AN - BN &= NB - NA \\ (A - B)N &= N(B - A) \\ (A - B)N &= -N(A - B) \end{aligned}$$

Par le théorème de Fuglede-Putnam nous avons

$$\begin{aligned} (A - B)N^* &= -N^*(A - B) \\ AN^* - BN^* &= -N^*A + N^*B \\ AN^* - N^*B &= BN^* - N^*A. \quad \dots\dots (6) \end{aligned}$$

En ajoutant (5) avec (6) on obtient

$$UN^* - 2N^*B = 0 \quad \text{Donc} \quad UN^* = N^*B.$$

En soustrayant (6) de (5) on obtient

$$0 = -2BN^* + 2N^*A \quad \text{Donc} \quad NA^* = N^*A.$$

Donc (3) est prouvé.

Nous pouvons prouver (3) (une autre preuve) en utilisant la matrice d'astuces comme suit :

$$\text{Soit} \quad X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & N \\ N & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad Y^* = \begin{pmatrix} 0 & N^* \\ N^* & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque Y est normal.

Aussi nous avons

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & AN \\ BN & 0 \end{pmatrix}, \quad YX = \begin{pmatrix} 0 & NB \\ NA & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $XY = YX$.

Ainsi, par le théorème de Fuglede, nous avons :

$$XY^* = Y^*X.$$

$$XY^* = \begin{pmatrix} 0 & AN^* \\ BN^* & 0 \end{pmatrix}, \quad Y^*X = \begin{pmatrix} 0 & N^*B \\ N^*B & 0 \end{pmatrix}$$

Donc nous avons :

$$AN^* = N^*B \quad \& \quad BN^* = N^*A.$$

On donne maintenant le résultat négatif .

3.4.2 cas deux opérateurs dans $B(H)$ et deux opérateurs normaux

Dans cette section, nous présentons nos résultats en étendant le théorème précédent de Fuglede-Putnam à deux bornés les opérateurs.

Conjecture 3.4.2 : Soit H un espace de Hilbert, soit N et M des opérateurs normaux sur H pour deux linéaires bornés opérateurs A et B sur H si

$$AN = MB \quad \text{ensuite} \quad AN^* = M^*B$$

Cette conjecture n'est pas vraie, nous donnons le contre-exemple suivant :

Exemple 3.4.2 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -i & i \\ -i & -i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{On a } N^* = \begin{bmatrix} -i & i \\ i & -i \end{bmatrix}, \quad M^* = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$$

Notons que N et M sont des opérateurs normaux sur H ,

$$\text{On a : } AN^* = \begin{bmatrix} i & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^*B = \begin{bmatrix} i & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc} \quad AN = MB$$

$$\text{Mais } AN^* = \begin{bmatrix} -i & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^*A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } AN^* \neq M^*B$$

Nous donnons le résultat négatif à notre conjecture qui est :

Théorème 3.4.2 : [16] Soit H un espace de Hilbert, soit N et M des opérateurs normaux sur H pour deux opérateurs bornés A et B sur H si :

$$AN = MB \quad \text{.....(7)}$$

$$BN = MA \quad \text{..... (8)}$$

Ensuite

$$AN^* = M^*B \quad , \quad BN^* = M^*A \quad \text{..... (9)}$$

Preuve. La preuve est similaire à la preuve du théorème 3.4.1

On donne le résultat négatif à la conjecture apparue dans

Chapitre 4

Extension du théorème de Fuglede-Putnam et applications

Dans ce chapitre on donne l'extensions du théorème de Fuglede-Putnam pour quelques tybe d'opérateurs et un nouveaux résultats pour l'opérateurs sous normaux .

4.1 L'opérateur sous normal

Définition 4.2.1 : [3] Soit B l' opérateur dans $B(H)$, B est dit sous normal s'il existe un espace de Hilbert K tel que $H \subseteq K$ et une extension normale $N_B \in B(K)$, c'est-à-dire $N_B|_H = B$

Autrement dit , B est sous normal s'il existe un espace de Hilbert K tel que $H \subseteq K$ et il existe un opérateur normal $N_B \in B(K)$ qui s'écrit ,
selon la décomposition $K = H \oplus H^\perp$, sous la forme

$$N_B = \begin{pmatrix} B & (B^*B - BB^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & QBQ^{*-1} \end{pmatrix}$$

Où , $Q = (B^*B - BB^*)^{\frac{1}{2}}$

Théorème 4.2.3 : Si B est un opérateur sous normal, alors N_B est un opérateur normal .

Lemme 1 . Si B est un opérateur subnormal sur un espace de Hilbert ,
alors $\alpha B + \beta B^*$ est subnormal, où α, β sont des nombres complexes.

Théorème 4.2.4 : Si B et T^* sont sous normales et Q est un opérateur tel que

$$BQ = QT, \text{ alors } B^*Q = QT^*.$$

En combinant le lemme 1 et le théorème 5 , on obtient la proposition suivante .

Proposition 4.2.1 : [23] Si B et T sont des opérateurs sous normaux dans $B(H)$ et Q est dans $B(H)$ tel que $BQ = QT$, alors $B^*Q = QT^*$

Théorème 4.2.5 : Soit G une normale 3×3 , et soit a et b des scalaires donnés.

Il existe alors un scalaire c de telle sorte que si $C = (a, b, c)$, la matrice $S = \begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix}$ est subnormal .

4.2 Résultats négatifs

Sans aucune condition sur les opérateurs B , il semble sans espoir que de telles généralisations tiennent.

Conjecture : Soit H un espace de Hilbert et N un opérateur sous normal , pour deux opérateurs linéaires bornés A et B , si

$$AN = NB \quad \text{alors} \quad N^*A = BN^*$$

Cette conjecture n'est pas vraie, on donne le contre-exemple suivant :

Exemple 4.2.3 : Soit $C_h = (S_{ij})$, $S_{ij} = \frac{h(j)}{h(i)}$, $S_{ij} = 0 \quad j \geq i + 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & A_2 & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & B_2 & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

$$S_{i+1, j+1} A_j = B_i S_{ij}$$

$$C_h A = \begin{pmatrix} S_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{10} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ S_{20} & S_{21} & S_{22} & 0 & \\ S_{30} & S_{31} & S_{32} & S_{33} & \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{11}A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21}A_0 & S_{22}A_1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{31}A_0 & S_{32}A_1 & S_{33}A_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$BC_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & B_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{10} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ S_{20} & S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ S_{30} & S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_0S_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1S_{01} & B_1S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ B_2S_{20} & B_2S_{21} & B_2S_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$C_h A = BC_h$$

$$C_h^* = \begin{pmatrix} S_{00} & S_{10} & S_{20} & S_{30} & 0 \\ 0 & S_{11} & S_{21} & S_{31} & 0 \\ 0 & 0 & S_{22} & S_{32} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & S_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$C_h^* A \neq BC_h^*$$

4.3 Résultats positifs : première généralisation .

Théorème 4.3.1 : Soit H un espace de Hilbert, soit S un opérateur sous normal sur H pour deux opérateurs bornés A et B sur H si

$$SA = BS \quad \dots\dots\dots(1) \quad \text{et} \quad SB = AS \quad \dots\dots\dots(2)$$

Tel que

$$A(S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} = B(S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} = 0$$

alors $AS^* = S^*B$, $S^*A = BS^*$ (3)

Et $\left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}}\right)^* A = \left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}}\right)^* B = 0$ (4)

Preuve :

$$M = \begin{pmatrix} S & (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & QSQ^{*-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis

$$M\tilde{A} = \begin{pmatrix} S & (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & QSQ^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}M = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & QSQ^{*-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BS & B(S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$SA = BS$ et $B(S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} = 0$ Puis $M\tilde{A} = \tilde{B}M$

$$\tilde{A}M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & QSQ^{*-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS & A(S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M\tilde{B} = \begin{pmatrix} S & (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & QSQ^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$AS = SB$ et $A(S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} = 0$ Puis $\tilde{A}M = M\tilde{B}$

$$M^* \tilde{A} = \tilde{B} M^* \text{ et } \tilde{A} M^* = M^* \tilde{B}$$

$$M^* \tilde{A} = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} & Q^{-1}S^*Q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^*A & 0 \\ \left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* A & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}M^* = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ \left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* & Q^{-1}S^*Q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^*A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* A = 0$$

Ensuite $S^*A = BS^*$

$$\tilde{A}M^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ \left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* & Q^{-1}S^*Q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^* \tilde{B} = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ \left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* & Q^{-1}S^*Q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^*B & 0 \\ \left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* B & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* B = 0$$

Ensuite $AS^* = S^*B$

Résultats négatifs

Conjecture 4.4.1 : Soit H un espace de Hilbert, soit N et M des opérateurs sous normaux sur H pour deux opérateurs linéaires bornés A et B sur H si :

$$NA = BM \quad \text{alors} \quad N^*A = BM^*.$$

Cette conjecture n'est pas vraie, nous donnons le contre-exemple suivant :

Exemple 4.4.1 : Soit

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad G' = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \quad 0 \quad \alpha) \quad C' = (0 \quad 0 \quad \beta)$$

G et G' sont opérateur normal , i e . $G^*G = GG^*$ et $G'^*G' = G'G'^*$

$$\text{Alors } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } S' = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & -i & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ sont l'opérateur subnormal.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}$$

$$SA = BS'$$

$$S^*A \neq BS'^*$$

Exemple 4.4.2 : Soit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .. \\ .. & .. & .. & & .. \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .. \\ .. & .. & .. & & .. \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & P & 0 & .. \\ .. & .. & .. & & .. \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & P & 0 & .. \\ .. & .. & .. & & .. \end{pmatrix}$$

$$SA = BM$$

$$S^*A \neq BM^*$$

Résultats positifs : première généralisation .

Théorème 4.5.1 : Soit H un espace de Hilbert, permettent de S et T soient inférieurs à la normale opérateurs sur H pour les deux opérateurs bornés A et B sur H si

$$SA = BT \quad \dots\dots\dots(5) \quad \text{et} \quad SB = AT \quad \dots\dots\dots(6)$$

Et
$$A \left(T^* T - T T^* \right)^{\frac{1}{2}} = B \left(T^* T - T T^* \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

alors
$$S^* A = B T^*, \quad S^* B = A T^* \quad \dots\dots\dots(8)$$

Et
$$\left(\left(T^* T - T T^* \right)^{\frac{1}{2}} \right)^* A = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

Preuve :

$$M = \begin{pmatrix} S & (S^* S - S S^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & Q S Q^{*-1} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} T & (T^* T - T T^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & P T P^{*-1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \tilde{A} = \begin{pmatrix} S & (S^* S - S S^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & Q S Q^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} N = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & (T^* T - T T^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & P T P^{*-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B T & B (T^* T - T T^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S A = B T$ et $B (T^* T - T T^*)^{\frac{1}{2}} = 0$ Puis $M \tilde{A} = \tilde{B} N$

$$M \tilde{B} = \begin{pmatrix} S & (S^* S - S S^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & Q S Q^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & (T^* T - T T^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & P T P^{*-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A T & A (T^* T - T T^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S B = A T$ et $A (T^* T - T T^*)^{\frac{1}{2}} = 0$ Puis $M \tilde{B} = \tilde{A} N$

alors

$$M^* \tilde{A} = \tilde{B} M^* \text{ et } M^* \tilde{B} = \tilde{A} M^*$$

$$M^* \tilde{A} = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ (S^* S - S S^*)^{\frac{1}{2}} & Q^{-1} S^* Q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^* A & 0 \\ \left((S^* S - S S^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* A & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} M^* = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^* & 0 \\ \left((T^* T - T T^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* & P^{-1} T^* P^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B S^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left((S^* S - S S^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* A = 0 \text{ alors } S^* A = B S^*$$

$$M^* \tilde{B} = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ \left((S^* S - S S^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* & Q^{-1} S^* Q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^* B & 0 \\ \left((S^* S - S S^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* B & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} M^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^* & 0 \\ \left((T^* T - T T^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* & P^{-1} T^* P^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A T^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left((S^* S - S S^*)^{\frac{1}{2}} \right)^* B = 0$$

Ensuite $S^* B = A T^*$.

4.4 Application De Théorème

l'équation $(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$ dans $B(H)$

Théorème 4.6.1 : Soient A et B deux opérateurs bornés dans $B(H)$ satisfait la propriété de $(FP)_{B(H)}$ et C est opérateur dans $B(H)$, alors l'équation :

$$(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$$

Admet une solution X dans $B(H)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Sont deux opérateurs similaires dans $H \oplus H$

Remarque 4.6.1 : On peut généraliser dans le cas $A + \lambda$, $B + \mu \in B(H)$ sont normaux donc on a l'équation :

$$(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C \quad \text{tel que } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Proposition 4.6.1 : soient A et B deux opérateurs normaux bornés dans $B(H)$ et C est opérateur dans $B(H)$ alors l'équation :

$$(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C \quad (4.1)$$

Admet une solution X dans $B(H)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} A + \lambda & 0 \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A + \lambda & C \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix}$$

Sont deux opérateurs similaires dans $H \oplus H$

Preuve : Si l'équation (4.1) admet une solution X alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + \lambda & 0 \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A + \lambda & (A + \lambda)X - X(B + \mu) \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A + \lambda & C \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent $\begin{pmatrix} A + \lambda & 0 \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A + \lambda & C \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix}$ sont similaires

Supposons maintenant que les opérateurs :

$$\begin{pmatrix} A + \lambda & 0 \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A + \lambda & C \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix} \text{ sont similaires.}$$

Alors il existe un opérateur inversible $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ dans $B(H \oplus H)$ tel que

$$\begin{pmatrix} A + \lambda & 0 \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + \lambda & C \\ 0 & B + \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (A + \lambda)Q & (A + \lambda)S \\ (B + \mu)S & (B + \mu)T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A + \lambda) & QC + R(A + \lambda) \\ S(B + \mu) & SC + T(B + \mu) \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne après l'identification terme par terme

$$(A + \lambda)Q = Q(A + \lambda) \quad \text{et} \quad (A + \lambda)R - R(B + \mu) = QC$$

$$(B + \mu)S = S(B + \mu) \quad \text{et} \quad (B + \mu)T - T(B + \mu) = SC$$

En appliquant la propriété $(FP)_{B(H)}$ on obtient

$$(B + \mu)S^* = S^*(A + \lambda) \quad \text{et} \quad (A + \lambda)Q^* = Q^*(A + \lambda)$$

Par conséquent

$$(A + \lambda)S^*S = S^*S(A + \lambda)$$

D'où $(A + \lambda)$ commute avec S^*S et Q^*Q donc avec la somme $S^*S + Q^*Q$

L'inverse $(S^*S + Q^*Q)^{-1}$ commute aussi avec $(A + \lambda)$ car en général si :

$$(A + \lambda) \text{ commute avec } (B + \mu), \text{ donc il commute avec } (B + \mu)^{-1}.$$

en effet

$$\begin{aligned}
& (A + \lambda)(B + \mu) = (B + \mu)(A + \lambda) \\
& \Leftrightarrow (B + \mu)^{-1}(B + \mu)(A + \lambda)(B + \mu)^{-1} = (B + \mu)^{-1}(A + \lambda)(B + \mu)(B + \mu)^{-1} \\
& \Leftrightarrow (A + \lambda)(B + \mu)^{-1} = (B + \mu)^{-1}(A + \lambda)
\end{aligned}$$

De plus on obtient

$$\begin{aligned}
(S^*S + Q^*Q)C &= Q^*((A + \lambda)R - R(B + \mu)) + S^*((B + \mu)T - T(A + \lambda)) \\
&= ((A + \lambda)Q^*R - (B + \mu)S^*T) + (Q^*S(B + \mu) - S^*T(A + \lambda)) \\
&= (A + \lambda)(Q^*R + S^*T) - (Q^*S + S^*T)(B + \mu)
\end{aligned}$$

D'après lemme (4.1.1)

L'opérateur $S^*S + Q^*Q$ est inversible, son inverse commute avec $(A + \lambda)$

Par conséquent

$$C = (A + \lambda)(S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T) - (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)(B + \mu)$$

D'où

$$X = (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)$$

4.5 Principaux Résultats

Les théorèmes suivants expliquent quelles conditions impliquent la normalité pour p - hyponormales opérateurs.

Théorème 4.7.1 : Soit $A, B, X \in B(H)$ tel que A soit un p-hyponormal ou un log - hyponormal, B est un dominant et X est un inversible. Si $XA = BX$, alors il y a un unitaire U tel que $AU = UB$ et donc A et B sont normaux.

Preuve.

Puisque $XA = BX$, il découle du théorème de Fuglede-Putnam pour p -hyponormal que $B^*X = XA^*$ et si $X^*B = AX^*$. À présent $AX^*X = X^*BX = X^*XA$.

Soit $X = UP$ la décomposition polaire de X . Puisque X est un inversible, il s'ensuit que P est inversible et U est unitaire. Puisque $AP^2 = P^2A$ et P est positif, il s'ensuit que $AP = PA$.

Ainsi $BUP = UPA$ implique $BUP = UAP$.

Mais P est inversible, on a $BU = UA$. Donc A, B sont des équivalents unitaires. Donc, A est dominant et B^* est p -hyponormal. Donc A, B sont normaux.

En conséquence du théorème 2.1, on a immédiatement

Corollaire 4.7.1 : Soit $A, B, X \in B(H)$ tel que A^* soit un p -hyponormal ou un $\log$ -hyponormal, B est un dominant. Si X est un opérateur positif inversible, alors $XA = BX$ implique $A = B$.

Théorème 4.7.2 : Soit $T = A + iB \in B(H)$ la décomposition cartésienne de T avec AB est p -hyponormal. Si A ou B est positif, alors T est normal.

Preuve. Supposons d'abord que A est positif. Soit $S = AB$, alors $SA = AS^*$. Puis il résulte du théorème de Fuglede-Putnam pour p -hyponormal [14, corollaire 2] que $S^*A = AS$, qui est, $BA^2 = A^2B$. Mais A est positif, alors $AB = BA$, c'est-à-dire que T est Ordinaire

Maintenant, si B est positif, appliquez le même argument à $-iT = B - iA$

Théorème 4.7.3 Soit $T = A + iB$ la décomposition cartésienne de T . Si T^* est opérateur hyponormal et AB est l'opérateur p -hyponormal, alors T est l'opérateur normal.

Preuve.

Laissez $Q = AB$, puis $QA = AQ^* = ABA$. Puis par Fuglede-Putnam's théorème d'opérateurs p -hyponormal, nous avons $Q^*A = AQ$, c.-à-d. $BA^2 = A^2B$

À présent

$$(Q + Q^*)A = A(Q + Q^*)$$

Et

$$(Q - Q^*)A = A(Q^* - Q) .$$

Puisque T^* est hyponormal, nous avons

$$TT^* - T^*T = 2i(BA - AB) = 2i(Q^* - Q)$$

Soit $Y = 2i(BA - AB)$ est $Y \geq 0$ et $YA = -AY$. À présent

$$\begin{aligned} Y^2A &= Y(YA) \\ &= Y(-AY) \\ &= -YAY \\ &= -(AY)Y \\ &= -AY^2 \end{aligned}$$

Mais Y est positif, $YA = AY = 0$.

Donc, $A(AB - BA) = (AB - BA)A = 0$

implique que $\sigma(AB - BA) = \{0\}$. Par conséquent $AB - BA$ est une asymétrie quasinilpotente hermitienne. Donc $AB - BA = 0$. Donc T est normal.

Théorème 4.7.4. Soit $A, V, X \in B(H)$ tels que V, X sont des isométries et A^* est p-hyponormal. Si $VX = XA$, alors A est unitaire.

Preuve.

Puisque $VX = XA$, alors d'après le théorème de Fuglede-Putnam [14, corollaire 2], on ont $V^*X = XA^*$. Maintenant, multipliant la première équation par V^* , on obtient $X = V^*XA$, alors $X(I - A^*A) = 0$ implique que $X^*X(I - A^*A) = 0$. D'où

$A^*A = I$, donc A est une isométrie. Par conséquent, A et A^* sont p -hyponormal.

Donc A est l'isométrie normale. Donc A est unitaire.

Le théorème suivant montre que si $A, B \in B(H)$ sont hyponormaux et $A^*B = BA^*$, la somme et le produit de A et B sont hyponormaux.

Conclusion

Le théorème de Fuglede-Putnam intervient dans de nombreux domaines des mathématiques, des sciences physiques, il permet son modèle en solutions des équations d'opérateurs. Dans ce mémoire, nous avons fourni l'action de travail suivante :

- 1/ L'extension de ce Théorème pour quelque type d'opérateurs.
- 2/ Étant donné l'importance du Théorème, et comme cas particulier, les opérateurs pour quatre opérateurs.
- 3/ Nous donnons les solutions de l'équation $AX - XB = C$ dans $B(H)$ et généralisons l'équation.

dans le cas de l'écriture l'opérateur de la forme $A + \lambda$, et on applique ce Théorème.

- Soient N, M deux opérateurs dans $B(H)$, on dit que la paire (N, M) satisfait (FP) (propriété de Fuglede-Putnam), si $NA = AM$ où A dans $B(H)$ implique $N^*A = AM^*$
- Soit S un opérateur dans $B(H)$, S est dit sous normal s'il existe un espace de Hilbert K tel que H incluse dans K et une extension normale M dans $B(K)$

1. $H \subset K$.
2. M opérateur normal dans K .
3. $M|_H = S$.

en général, si S opérateur sous normal, tel que $K = H \oplus H^\perp$

$$M = \begin{pmatrix} S & Q \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad Q : H^\perp \rightarrow H \quad \text{et} \quad T : H^\perp \rightarrow H^\perp$$

- soit B opérateur sous normal. l'opérateur normal M

défini par , $M = \begin{pmatrix} S & (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & QSQ^{*-1} \end{pmatrix}$

tel que, $Q = (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}}$

- Soit H un espace de Hilbert, soit S un opérateur subnormal sur H pour deux opérateurs bornés A et B sur H ; si

$SA = BS$ (1) et

$SB = AS$ (2)

tel que : $A(S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} = B(S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} = 0$

alors : $AS^* = S^*B$, $S^*A = BS^*$ (3)

et $\left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}}\right)^* A = \left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}}\right)^* B = 0$ (4)

- Soient S, T deux opérateurs sous normal dans H , A et B dans H si :

$SA = BT$ (5)

$SB = AT$ (6)

et $A(T^*T - TT^*)^{\frac{1}{2}} = B(T^*T - TT^*)^{\frac{1}{2}} = 0 \dots \dots (7)$ alors

$S^*A = BT^*$, $S^*B = AT^*$ (8)

et $\left((S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}}\right)^* A = 0 \dots (9)$

Bibliographie

- [1] A. Bachir : An Extension of Fuglede-Putnam Theorem for Certain Posinormal Operators. , Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 8, 2013, no. 17, 827-832 Hikari Ltd.
- [2] A. B. Patel , P. B. Ramanujan : On Sum and Product of normal operators , Indian J. pure appl. Math. , 12 (10) : 1213-1218, October 1981 .
- [3] A. Mansour : Résolution de deux types d'équations opératorielles et interactions . 11 équations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Lyon , 2016. Français. "NNT : 2016LYSE1151", 2016.
- [4] A. Schweinsberg : operator equation $AX - XB = C$ with normal A And B , Pacific Journal of Mathematics Vol . 10,2, No. 2 , 1982.
- [5] B. Fuglede: : A commutativity theorem for normal operators. Proc. Natl. Acad. Sci. 36 (1950), 35-40
- [6] C. Cherifa : sur le theoreme de Fuglede-Putnam , mémoire de magister , Université D'Oran .
- [7] G. Fugen , FANG XIAOCHUN : the fuglede-putnam theorem and putnam's inequality for quasi-class (A, k) operators , Ann. Funct. Anal. 2 (2011) , no. 1, 105-113 , ISSN : 2008-87525 (electronic) .
- [8] C.R. Putnam : On normal operators in Hilbert space, Amer. J. Math. 73 (1951), 357-362.
- [9] H. Brezis : Analyse Fonctionnelle Thd. ori , e et applications , niLasson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo, 1987 ,.
- [10] H.K. Wimmer : On the matrix equation $AX - XB = C$ and $AX - YB = C$ SIAM J. Appl. Math . 32, 707-710 , 1977 .
- [11] H. Markus : The Functional Calculus for Sectorial Operators, Birkhauser , Basel. Volume 169. ISBN : 978 -3 - 7643-769 , 2006.

- [12] J.B. Conway : A Course in Functional Analysis, (1985) New York, Spring-Verlag
- [13] J.STELLA IRAENE MARY, P.VIJAYALAKSHMI : Fuglede-Putnam theorem and quasi-nilpotent part of p -power normal operators , Tamkang Journal of Mathematics Volume 46 , Numbre 2 , 151-165 , June 2015 doi : 10.5556/j.tkjm.46.2015.1665
- [14] M. Hicham mortad : yet more versions of the fuglede-putnam theorem , Article in Glasgow Mathematical Journal . september 2009 DOI : 10.1017/S0017089509005114 .
- [15] M.H.M. Rashid : Some Conditions on Non-Normal Operators which Imply Normality , thai journal of mathematics Volume 8(2010) Number 1 : 185-192 .
- [16] M. Kamil Shihab : A note on the fuglede and fuglede-putnam's theorems, Jornal of advances in mathematics and computer science 23(6): 1-11, 2017 ; article no.JAMCS.355982
- [17] P. SAM Johnson , A. Vinoth , K. Kamarj : Fuglede-Putnam tybe commutativity theorems for ep operators , arxiv: 2101.06725v1[math.FA]17 jan 2021 .
- [18] P.R. Halmos : A Hilbert space problem book. Second edition, Springer-verlag, NewYork, 1982.
- [19] R.Bhatia : matrix Analysis , springer-verlag , newyork , graclute texts in mathematics ,1997 .
- [20] S.Dragan , C. Djordjevi : Explicit solution of the operator equation, Journal of Computational and Applied Mathematics 200, 701704 , 2007 .
- [21] S.Mecheri : finit opératoires , Démonstration Mathématicienne, 37 , 357-366, 2002.
- [22] S.W.Luketero, P.G.Rugiri , J.M.Khalagai : On Qusi-Similrity and PutnamFuglede Property of Operators In Hilbert spaces , Mathematical theory and Modeling , ISSN 2224-5804(paper), ISSN 2225-0522(online) Vol.4, No. 14, 2014 .

- [23] T. Furuta : A Hilbert –Schmidt norm inequality associated with the fuglede-putnam theorem , BILL. AUSTRAL. MATH . SOC. Vol 25(1982) , 177-185.
- [24] T. Furuta, M. Horie : A remark on a class of operators, Proc. Japan. 43 (1967), 607-609.
- [25] W.Arendt , F. Rabiger : Spectral Properties of the operator equation $AX - XB = Q$ Quart. J . Math. Arford, 45 : 2, 133 – 149 , 1994 ,.
- [26] Y. Chen : on the Putnam-Fuglede theorem , IJMMS 2004 :53 , 2821-2834, PII.S01661171204311312.