

N^o d'ordre :

N^o de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES



Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Quelques problèmes anisotrope
des systèmes d'élasticités linéaires
avec frottement dans un domaine
mince**

Présenté par : Sakhri Hanane

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Pr.Aissaoui Adel	Prof	Président	Univ.El Oued
Dr.Letoufa Yassine	MCA	Encadreur	Univ.El Oued
Dr.Azeb Abed El aziz	MCA	Examineur	Univ.El Oued

Année universitaire : 2021/2022

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mon cher père Laïd et ma mère aimante Sakhri Mebarka qui m'ont toujours soutenu, et soutenu, et pour eux je dédie la récolte et je n'oublie pas les mains de la créativité, mon frère Saadan et sa famille et mes sœurs Dounya et Ibtissam,

et tous ceux qui m'ont encouragé au cours de ma carrière universitaire.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier " Dieu " qui m'a donné la volonté, la patience et la persévérance pour faire ce travail.

Je voudrais remercier le encadreur " Letoufa Yassine " pour son aide et ses conseils, et je voudrais exprimer ma gratitude à tous membres du jury et enfin, je dédie ce travail à ma famille, mes amis et surtout à mes parents pour leur grand soutien à mon égard.

Table des matières

Notation	v
Introduction	vii
1 Modélisation et Utils Mathématiques	1
1.1 Modélisation	2
1.1.1 Définitions	2
1.1.2 La loi de Hooke généralisée	2
1.1.3 Equations d'équilibre pour les corps déformés	3
1.1.4 Quelques domaines d'application de l'élasticité	3
1.2 Utils Mathématiques	4
1.2.1 Espaces de Sobolev	4
1.2.2 Notions en mécanique.	6
1.2.3 Eléments d'analyse non linéaire	7
1.2.4 Inéquations variationnelles stationnaire	8
1.2.5 Inéquations variationnelles quisistatique	9
1.2.6 Lemmes de type Gronwall	11
2 Existence et unicité du problème quisistatique pour un système visco- elastique avec frottement	13
2.1 Position du problème	14
2.2 Formulation variationnelle du problème	16
2.3 Existence et unicité de la solution	18
3 Analyse asymptotique du système anisotrope visco-elastique avec frotte- ment	24
3.1 Transposer le problème sur un domaine fixe Ω	25
3.2 Estimation à priori sur les solutions	27
3.3 Résultat de convergence et problème limite	31
3.4 Unicité de la solution du problème limite	35

TABLE DES MATIÈRES

4	Analyse asymptotique d'un problème anisotrope stationnaire pour l'élasticité linéaire	37
4.1	Introduction et position du problème	38
4.2	Estimations des solutions	40
4.3	Résultats de convergence et problème limite	44
	Bibliographie	48

Notation

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, on note par

$\bar{\Omega}$: l'adhérence de Ω .
Γ	: la frontière de Ω , supposée régulière, partitionnée en trois parties mesurables disjointes deux à deux.
ν	: la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	: les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel \mathbf{v} défini sur $\bar{\Omega}$.
$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$: l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$D'(\Omega)$: l'espace de distributions sur Ω .
$L^p(\Omega)$: l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables de puissance p -ième intégrable sur Ω .
$L^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables sur Ω telles que $\exists c > 0 : u(x) \leq c, p.p$ sur Ω .
$H^1(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω .
$H_0^1(\Omega)$: l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$: l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
$L^2(\Omega)^d$: l'espace $\{u = (u_i)/u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\}$.
$H^1(\Omega)^d$: l'espace $\{u = (u_i)/u_i \in H^1(\Omega), i = \overline{1, d}\}$.
$\ \cdot\ _{0,\Omega}$: la norme de $L^2(\Omega)^d$.
$\ \cdot\ _{1,\Omega}$: la norme de $H^1(\Omega)^d$.

Si X est un espace de Banach et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

$\ \cdot\ _X$: la norme de X .
X^d	: l'espace $\{x = (x_i)/x_i \in X, i = \overline{1, d}\}$.
$x_n \rightarrow x$: la convergente forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .
$x_n \rightharpoonup x$: la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .
$\text{Div } \sigma$: le divergence de tenseur σ .
$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$: la dérivation par rapport au temp.
$\lim \inf$: la limite inférieure.
δ_{ij}	: le symbole de Krönecker.
0	: le zéro de \mathbb{R}^d .
C	: une constante générique strictement positive.
$p.p$: presque par tout.
$ \cdot $: la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 .
$(u, \mathbf{v}), u \cdot \mathbf{v}$: le produit scalaire des vecteurs u et \mathbf{v} .

Introduction

Dans la recherche mécanique et mathématique [1], [7], [8], [11],[3], [4], [5], [14], [2], [13], [16], ont été étudiés de nombreux problèmes de contact pour les milieux physiques occupant des couches minces de \mathbb{R}^3 pour les fluides non Newtoniens et les matériaux élastiques linéaires. Un choix précis des conditions aux limites sur l'interface fluide-solide est particulièrement intéressant dans le domaine de la lubrification, qui concerne le comportement d'écoulement en couche mince. Dans ce cas, la différence de vitesses entre les surfaces environnantes est le phénomène déterminant qui permet à la pression dans le fluide de s'accumuler et d'empêcher les surfaces solides de s'effondrer, ce qui est l'objectif principal de la lubrification. Des études expérimentales continues sont menées (par exemple [23],[24]) mais sont encore difficiles en raison de l'épaisseur de l'espace entre les surfaces solides qui peut être aussi petite que 50 nm. Dans cette conditions de fonctionnement, aucune condition de glissement n'est induite par des liaisons chimiques entre le lubrifiant et les surfaces environnantes et par l'action des contraintes normales, qui sont liées à la pression à l'intérieur de l'écoulement. Au contraire, les contraintes tangentielles sont si élevées qu'elles ont tendance à détruire les liaisons chimiques et à induire des phénomènes de glissement. Ce phénomène a été exprimé implicitement par des équations en forme de Reynolds bien connues qui ont été utilisées à la première fois en 1886 (voir [25]). Dans cet mémoire, nous intéressons au comportement asymptotique d'un problème quasi statique avec frottement modélisant le contact bilatéral entre un corps viscoélastique et une fondation rigide dans une couche mince représentée par un domaine Ω^ε dans \mathbb{R}^3 . A partir de la formule variable qui donne le champ de déplacement et de contrainte, formulée par Sofonea et al dans [9], [15], pour un matériau de loi de comportement Kelvin-Voigt linéaire, de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) = \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon),$$

où \mathcal{A}^ε est le tenseur de viscosité et \mathcal{B}^ε est le tenseur d'élasticité. Notre objectif donc est de donner une extension d'étude précédente en[12]. La nouveauté ici est d'abord, que l'on prend en compte l'hétérogénéité et l'anisotropie du milieu, cette hypothèse qui couvrira beaucoup de matériaux dans la nature ou l'industrie, par exemple le bois, les matériaux composites et de nombreux matériaux biologiques, dans lesquels bien que ils paraissent homogènes, leurs propriétés varient dans tous les sens (voir [5], [10]). Deuxièmement, le corps est supposé avoir un comportement visqueux, car les travaux précédemment cités se li-

mitent au seul cas d'un corps élastique homogène et isotrope, par tenseur des contraintes $\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) = 2\mu\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \lambda Tr(\mathbf{u}^\varepsilon)\delta_{ij}$ dans un domaine mince. La frontière Γ^ε de Ω^ε est supposé composé de trois parties,

ω le bas (dans le \mathbb{R}^2 surface) du corps et c'est là que réside notre principal intérêt, Γ_1^ε la surface supérieure, et Γ_L^ε la surface latérale. On considère les conditions de frottement aux limites libres de Tresca sur ω et conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_1^ε . Cependant, nous considérons une condition aux limites de traction sur Γ_L^ε . Le problème est converti en un sur un domaine fixe écrit explicitement en fonction de ε dans la formulation variationnelle. Le modèle du problème limite, quand ε tend vers zéro, est alors obtenu. Cette étude aboutit à une nouvelle loi de comportement, qui prend en compte les hypothèses d'hétérogénéité, d'anisotropie et de viscosité pour le corps. De plus, les effets des tenseurs de contraintes appliqués sur la ω frontière sont déterminées, qui seront soumises aux conditions de frottement de Tresca. Ces modèles sont très courants dans la littérature technique, par exemple, voir [1], [6], [7], [13], et les références qui y sont citées.

Le travail est composé comme suit :

Le premier chapitre : est consacré tout d'abord au rappel des notions principales de la théorie des milieux continus et d'analyse fonctionnelle nécessaires et des résultats utilisés tout au long de ce travail.

Le deuxième chapitre : nous prouvons en premier le résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible, de problème anisotrope d'un système d'élasticité linéaire dans un domaine mince trois dimensions avec des conditions de frottement sur une partie de la frontière. Le point de départ sont la lois des conservations en milieu continu, la lois de comportement. Le domaine Ω^ε est donné par

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\} .$$

La frontière de Ω^ε est divisée en trois parties disjoint, sera notée $\Gamma^\varepsilon = \omega \cup \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$ tel que ω est un domaine borné de \mathbb{R}^2 d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine et $h \in C^1(\mathbb{R})$, Γ_1^ε est la frontière supérieure du domaine et Γ_L^ε est la frontière latérale.

Donc, dans ce cadre nous montrons le premier résultat que pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème admet une solution unique faible.

Le troisième chapitre : on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique de notre problème que nous avons posée dans le premier chapitre.

Nous montrons d'abord que pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème admet une solution unique faible. Ensuite, on étudie l'analyse asymptotique du problème en faisant un changement d'échelle, pour ramener l'étude sur un domaine Ω indépendant de ε , sur lequel nous définissons des nouvelles inconnues. Nous obtenons des estimations a priori sur la solution indépendamment de ε en utilisant les inégalités de Korn, Poincaré et Young. Grâce à ces estimations, on obtient un théorème de convergence, qui nous permet de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Donc la convergence forte de la vitesse est prouvée. Enfin, nous montrons l'unicité de la solution de notre problème initial.

Le Quatrième chapitre : Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème stationnaire pour l'élasticité linéaire dans le cas anisotrope et non homogène et ce dans un domaine borné de \mathbb{R}^3 avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie.

Chapitre 1

Modélisation et Utils Mathématiques

1.1 Modélisation

1.2 Utils Mathématiques

1.1 Modélisation

1.1.1 Définitions

On considère Ω un corps qui se déforme. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère Ox , On note $u = u(x, t)$ le champ des vecteurs déplacement à l'instant $t \in [0, T]$ des points $x \in \Omega$

- Le tenseur des contraintes σ (d'ordre 2), de composantes σ_{ij} ($i, j = 1, 2$ ou 3), avec $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ où i indique la direction du vecteur force et j indique la direction normale de la face auquel la force est appliquée.
- Le tenseur des déformations $e = e(u)$ (ordre 2), de composantes $e_{ij}(u)$, où

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2 \text{ ou } 3.$$

- Le tenseur d'élasticité E (ordre 4), de composantes E_{ijkl} .

A 3D, les tenseurs des contraintes et des déformations comportent chacun $3 \times 3 = 9$ composantes. Le tenseur d'élasticité contient $3^4 = 81$ coefficients (heureusement on pourra faire des simplifications).

1.1.2 La loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke dans le cas général Non-homogène et Anisotrope s'écrit comme une

$$\sigma_{ij}(u) = \sum_{k;l=1,3} E_{ijkl} e_{kl}(u) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

En considérant les propriétés suivantes qui sont obtenues par les coefficients d'élasticité E_{ijkl}

- Symétrie :

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}$$

- Ellipticité :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } E_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq \alpha |\xi|^2 \text{ pour tous } \xi \in S_3$$

Cas homogène et isotrope

Pour un matériau élastique homogène, les coefficients E_{ijkl} sont constants (indépendants au point x de Ω). Dans le cas isotrope, le matériau ayant le même comportement dans toutes les directions. Dans ce cas, le tenseur d'élasticité E est défini par

$$E_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}.$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé qui sont spécifiques à chaque matériau.

Alors, la loi de Hooke dans le cas d'un matériau homogène élastique et isotrope est :

$$\sigma(u) = 2\mu e(u) + \lambda \text{Tre}(u) \delta.$$

Le système linéaire inverse en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν , déterminé par

$$e(u) = \frac{1 + \nu}{E} \sigma(u) - \frac{\nu}{E} \text{Tr} \sigma(u) \delta$$

où

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

1.1.3 Equations d'équilibre pour les corps déformés

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieures et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque :

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \cdot \nabla u \right) = \text{Div} \sigma + f, \quad (1.1)$$

où le vecteur f , de composantes f_i ($i = 1, 2, 3$), représente une densité massique des forces extérieures, $\rho = \rho(x, t)$ est la densité du milieu continu au point $x \in \Omega$ et Div désigne l'opérateur divergence :

$$\text{Div} \sigma = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_{i=1,2,3}.$$

S'il s'agit d'un problème de statique le premier membre d'équations (1.1) est identiquement nul et on les appelle équations d'équilibre ;

$$\text{Div} \sigma + f = 0.$$

Cette situation s'applique également lorsque le champ de vitesse u varie très lentement par rapport au temps dans le cas où les deux termes $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ et $\rho u \cdot \nabla u$ négligeables (processus quasistatiques).

1.1.4 Quelques domaines d'application de l'élasticité

– **Stabilité et instabilité des structures mécaniques**

- pour la construction de ponts, routes, ouvrages en béton (bâtiments...), forme d'un profil, la taille maximale du bâtiment, ...,

- fibres, tissus synthétiques, ... (cuir (artificiel?))

- Comprendre les phénomènes naturels (certains reliefs montagneux, mouvements rapides plantes, etc).

– **L'ingénierie est importante.**

- un exemple des poutres latérales utilisées dans le bâtiment,

- Exemple de caoutchouc = caoutchouc synthétique préparé en tubes, bandes et films minces (vernis, sols), en câbles, en tissus, ...

- **Fluides visqueux : modifier la rhéologie des matériaux, complexe par rapport aux liquides simples**

- solutions polymères, gels, caoutchoucs, pâtes, poudres, sables, cristaux liquides, mousses mulsifiants, ...

1.2 Utils Mathématiques

1.2.1 Espaces de Sobolev

Par la suite, Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d . On désigne par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω .

L'espace des distributions $D'(\Omega)$ est le dual de $D(\Omega)$. Si f est une fonction localement intégrable dans Ω , alors on définit T_f par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f \phi \, dx.$$

On dit qu'une suite $T_n \in D'(\Omega)$ **converge au sens des distributions** vers $T \in D'(\Omega)$ si, pour tout $\phi \in D(\Omega)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle.$$

Définissons maintenant la **dérivation au sens des distributions** : si $T \in D'(\Omega)$, la dérivée $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in D'(\Omega)$ est définie par :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle, \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Pour $1 \leq p < \infty$. De façon usuelle, nous désignons par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables et p -intégrables au sens de la mesure de Lebesgue.

On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées. Nous munissons ces espaces de leurs normes usuelles $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$ (l'inégalité de Hölder).

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = 2$, est vérifiée i.e.

$$\int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Quelques théorèmes de ces espaces $L^p(\Omega)$ sont résumées ci-après.

Théorème 1.2.1.1. (Lebesgue). Soit (u_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que

(i) $u_n(x) \rightarrow u(x)$ p.p. sur Ω ,

(ii) il existe une fonction $\mathbf{v} \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n , $|u_n(x)| \leq \mathbf{v}(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $u \in L^1(\Omega)$ et $\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$.

Proposition 1.2.1.1. Il résulte de l'inégalité de Hölder que si (u_n) une suite telle que $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$, et (\mathbf{v}_n) une suite telle que $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ dans $L^q(\Omega)$.

On obtient que la suite $(u_n \mathbf{v}_n) \subset L^1(\Omega)$ converge vers $u\mathbf{v}$ dans $L^1(\Omega)$,

ce qui implique $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \mathbf{v}_n dx = \int_{\Omega} u\mathbf{v} dx$.

Définition 1.2.1.1. On définit l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, d\} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de \mathbf{v} au sens des distributions.

Définition 1.2.1.2. L'espace $H_0^1(\Omega)$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur $\partial\Omega$.

Proposition 1.2.1.2. (Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 1.2.1.2. (Traces des fonctions et formule de Green) Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^d .

Alors il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$, appelé opérateur trace, tel que

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) \text{ est compact.}$$

On définit l'espace vectoriel $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{ \gamma(u); u \in H^1(\Omega) \}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{2}, \partial\Omega} = \inf \left\{ \|u\|_{1, \Omega}; \gamma(u) = f \right\}.$$

Proposition 1.2.1.3.

– Si $u \in H^1(\Omega)$, alors $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est linéaire surjectif et

$$\|\gamma(u)\|_{\frac{1}{2}, \partial\Omega} \leq C \|u\|_{1, \Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

– Si Ω est borné régulier de classe C^1 . Alors, pour toute deux fonctions u et \mathbf{v} de $H^1(\Omega)$, elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \mathbf{v}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u(x) \mathbf{v}(x) \nu_i(x) dx,$$

où $\nu = (\nu_i)_{1 \leq i \leq d}$ est la normale unité extérieure à Γ .

1.2.2 Notions en mécanique.

On utilise les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont défini par

$$\begin{aligned} H &= H^1(\Omega)^3 = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\} \\ \mathcal{H} &= L^2(\Omega)_s^{3 \times 3} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\} \\ H_1 &= L^2(\Omega)^3 = \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\} \\ \mathcal{H}_1 &= H^1(\Omega)_s^{3 \times 3} = \left\{ \sigma \in \mathcal{H} \mid \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \in H \right\} \end{aligned}$$

Les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont de espaces réel de Hilbert munis de produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned} \langle u, \mathbf{v} \rangle_H &= \int_{\Omega} u_i v_i \, dx, \\ \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx, \\ \langle u, \mathbf{v} \rangle_{H_1} &= \langle u, \mathbf{v} \rangle_H + \langle \boldsymbol{\varepsilon}(u), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle_{\mathcal{H}}, \\ \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div } \sigma, \text{Div } \tau \rangle_H, \end{aligned}$$

Donc, on peut maintenant définir l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega)^d \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ qui est linéaire continue, et elle n'est pas surjective. On définit l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^d$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d = \left\{ \gamma(u); \quad u \in H^1(\Omega)^d \right\}$$

ce sous espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Le dual de l'espace de Soblev $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ est notée par $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ le produit de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ et son dual. En outre, si $\sigma \in H_{Div}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})_s^{d \times d}$ et $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$, nous avons

$$\langle \sigma \nu, \gamma(\mathbf{v}) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma,$$

tel que $\sigma \nu = (\sigma_{ij} \cdot \nu_j)_{i=1, \dots, d}$ est un élément dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$. Donc la formule de Green suivante soit satisfaite

$$\int_{\Omega} \sigma : \mathbf{e}(u) \, dx + \int_{\Omega} \text{Div}(\sigma) \cdot u \, dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma .$$

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Théorème 1.2.2.1. (Inégalité de Korn) [[10]]. Soit Ω un domaine régulier borné de \mathbb{R}^d de classe C^1 .

Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$, on a :

$$\int_{\Omega} v_i v_i \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{v}) \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{v}) \, dx \geq C \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

1.2.3 Éléments d'analyse non linéaire

Fonctions convexes

Définitions 1.2.3.1.

Etant donné un espace vectoriel réel X et soit $\phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction. On note par $\text{dom}(\phi)$ l'ensemble défini par :

$$\text{dom}(\phi) = \{u \in X : \phi(u) < +\infty\}$$

ϕ est dite propre si $\text{dom}(\phi) \neq \emptyset$. ϕ est dite convexe si

$$\phi(\lambda u + (1 - \lambda) \mathbf{v}) \leq \lambda \phi(u) + (1 - \lambda) \phi(\mathbf{v}) \quad \forall u, \mathbf{v} \in \text{dom}(\phi), \forall \lambda \in [0, 1],$$

ϕ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, \mathbf{v} \in \text{dom}(\phi)$ et tels que $u \neq \mathbf{v}$.

Soit X un espace topologique, une fonction $\phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement si l'ensemble $\{u \in X : \phi(u) < \alpha\}$ est fermé pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Si une fonction ϕ est s.c.i en u et si (u_n) est une suite qui converge vers u on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n) \geq \phi(u)$. Réciproquement, si pour toute suite $(u_n) \rightarrow u$ on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n) \geq \phi(u)$. La norme d'un espace normé est semi-continue inférieurement pour la topologie faible. On a donc, pour tout $u \in X$ tout suite $(u_n) \rightarrow u : \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|u\|$.

Théorème 1.2.3.1. Soit X un espace de Hilbert et soit $\phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et propre. Alors ϕ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de X .

Convergence faible dans un espace de Hilbert.

Une suite $(f_n) \subset X$ converge faiblement dans X vers un élément $f \in X$, et on note $f_n \rightharpoonup f$, si pour tout $\mathbf{v} \in X$, le produit scalaires $\langle f_n, \mathbf{v} \rangle_X$ convergent vers $\langle f, \mathbf{v} \rangle_X$ dans \mathbb{R} . f s'appelle limite faible de la suite (f_n) .

Théorème 1.2.3.2. (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet). Soit X un espace de Hilbert réel et $\langle f, \mathbf{v} \rangle_X$ un produit scalaire de X . Pour toute $\varphi \in X'$, il existe $f \in X$ unique tel que

$$\langle \varphi, \mathbf{v} \rangle_{X' \times X} = \langle f, \mathbf{v} \rangle_X \quad \forall \mathbf{v} \in X \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_{X'} = \|f\|_X.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \rightarrow f$ est un isomorphisme isométrique qui permet

d'identier X et X' . Donc tout espace de Hilbert est réflexif, on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.3.3. Soit (f_n) une suite bornée de X , il existe alors un élément $x \in X$ et une sous-suite de (f_n) par (f_{n_k}) telle que $f_{n_k} \rightharpoonup x$.

Proposition 1.2.3.1.

(1) Toute suite faiblement convergente est bornée.

(2) Soient (f_n) une suite est converge faiblement vers u et (g_n) une suite est converge fortement vers g . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, g_n \rangle_X = \langle u, g \rangle_X.$$

(3) Si X et Y sont des espaces de Hilbert réels, et si $u \in L(X, Y)$, alors l'image par u de toute suite dans X faiblement convergente vers un élément $x \in X$ est faiblement convergente dans Y vers $u(x)$.

Théorème 1.2.3.4. (Théorème de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert).

Si X est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée dans X admet une sous-suite faiblement convergente.

1.2.4 Inéquations variationnelles stationnaire

Nous commençons ce paragraphe par quelques propriétés des formes bilinéaires dans un espace de Hilbert. Donc, on considère un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ et la norme associée $\|\cdot\|_X$ et X' l'espace dual de X en notant par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ pour le produit de dualité entre X et X' .

On dit qu'une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est :

(i) Continue, s'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$a(u, v) \leq C \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X$$

(ii) Coercive, s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \quad \forall v \in X$$

Théorème 1.2.4.1. (Représentation des formes bilinéaires). Soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue sur $X \times X$. Alors il existe un unique opérateur linéaire borné $A \in L(X; X')$ tel que :

$$\forall u, v \in X : a(u, v) = \langle Au, v \rangle_{X' \times X}.$$

De plus

$$\|a\|_X = \|A\|_{L(X; X')}.$$

Nous rappelons un théorème d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de 2^{ème} espèce qu'on va établir dans le deuxième et troisième chapitre de ce mémoire.

Théorème 1.2.4.2. Soit K un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert X , muni de la norme $\|\cdot\|_X$, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive de $K \times K$ dans \mathbb{R} , et J une fonctionnelle de K dans $\overline{\mathbb{R}}$ convexe, semi-continue inférieurement et propre, alors pour tout forme linéaire défini sur X , il existe un unique u dans X solution de l'inéquation variationnelle :

$$a(u, v - u) + J(v) - J(u) \geq (v - u).$$

1.2.5 Inéquations variationnelles quasi-statique

Pour préciser les problèmes d'évolution posés au quatrième chapitre on a besoin d'outils supplémentaires, qui nous allons introduire maintenant. Soit $T > 0$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. On définit les espaces à valeurs vectorielles suivants :

$$C(0, T; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ continue}\},$$

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable; } \int_0^T \|u(t)\|_X dt < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(0, T; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable; } \exists C > 0 \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p. } t\},$$

munis des normes

$$\|u\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X,$$

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{C > 0 ; \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p. } t\}.$$

Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(0, T, X)$ est un espace de Banach et $C(0, T; X)$ est dense dans $L^p(0, T, X)$. Si $1 \leq p < \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0, T, X)$ est réflexif. Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 1.2.5.1.

- Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X dt.$$

- $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.
- Si X un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \text{ si } 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X).$$

Définition 1.2.5.1. On désigne par $H^1(0, T; X)$ l'espace de Sobolev sur $]0, T[$ à valeurs dans X , défini par

$$H^1(0, T; X) = \left\{ u; \quad u \in L^2(0, T; X) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; X) \right\},$$

tel que la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ défini par

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t) \phi(t) dt = - \int_0^T u(t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) dt, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(]0, T[).$$

$C_0^\infty(]0, T[)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $]0, T[$.

Théorème 1.2.5.1. Soit X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^2(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in H^1(0, T; X)$,

(ii) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^2(0, T; X)$, telles que $u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$.

Théorème 1.2.5.2. Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace de Hilbert et soit $u \in H^1(0, T; X)$. Alors :

(1) $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_X^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), u(t) \right)_X$ p.p. $t \in]0, T[$,

(2) $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s), u(s) \right)_X ds$ pour tout $t \in [0, T]$.

Théorème 1.2.5.3. Soient X, Y deux espaces de Hilbert de normes respectives $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ qui vérifient l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} X \text{ dense dans } Y, \\ X \subset Y \subset X', \end{cases}$$

et soit K un sous-ensemble fermé non vide et convexe de X . Soit $a : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue sur K qui satisfait :

$$\begin{aligned} & \text{il existe } \rho \text{ et } \alpha > 0 \text{ tels que} \\ & a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \rho \|\mathbf{v}\|_Y^2 \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_X^2 \quad \forall \mathbf{v} \in X. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; X')$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; X) \cap C(0, T; Y) \cap H^1(0, T; X'), \\ u(t) &\in K, \quad \forall t \in [0, T], \\ &\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \mathbf{v} - u(t) \right\rangle_{X' \times X} + a(u(t), \mathbf{v} - u(t)) \\ &\geq \langle f, \mathbf{v} - u(t) \rangle_{X' \times X}, \quad \forall \mathbf{v} \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.5.1. Les démonstrations de deux théorèmes précédentes peuvent être trouvées par exemple dans [15]. Avec les notions introduit jusqu'ici, on va voir que le problème quasi-statique posés au deuxième et troisième chapitre de ce mémoire entrent dans le cadre suivante : Trouver une fonction u telle que

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; X), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; X'), \\ \langle A\mathbf{e}(u(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v} - \dot{u}(t)) \rangle_{X' \times X} + \langle B\mathbf{e}(\dot{u}(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v} - \dot{u}(t)) \rangle_{X' \times X} \\ + J(\mathbf{v}) - J(\dot{u}(t)) &\geq \langle f(t), \mathbf{v} - \dot{u}(t) \rangle_{X' \times X} \\ \forall \mathbf{v} \in K, \quad \forall t &\in [0, T], \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

Où A et B represente des tenseurs d'ordre 4, de composantes A_{ijkl} et B_{ijkl} , resp. J est une fonction de K dans $\bar{\mathbb{R}}$ convexe, semi-continue inférieurement et propre.

1.2.6 Lemmes de type Gronwall

Lemme 1.2.6.1. Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$ et $a \geq 0$ une constante. Si la fonction $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$:

$$\phi(t) \leq n(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

Alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq \exp(aT) \int_0^t n(s) ds.$$

Corollaire 1.2.6.1. Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telle que, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

Alors

$$\phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

le corollaire 1.2.6.1. est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ϕ .

Lemme 1.2.6.2. Soient m et $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t) \phi(t) dt + \int_0^s n(t) \phi^2(t) dt \quad \forall s \in [0, T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t) dt\right) \exp\left(\int_0^s n(t) dt\right) \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$ le lemme 1.2.2 devient :

Corollaire 1.2.6.2. Soit $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t) \phi(t) dt \quad \forall s \in [0, T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t) dt\right) \quad \forall s \in [0, T].$$

Chapitre 2

Existence et unicité du problème quasi-statique pour un système visco-élastique avec frottement

2.1 Position du problème

2.2 Formulation variationnelle du problème

2.3 Existence et unicité de la solution

2.1 Position du problème

Soit ω un domaine régulier borné dans le plan x_1Ox_2 , et soit $h \in C^1(\omega)$ est une fonction positive telle que $0 < h_{min} < h(x') < h_{max}$, pour tout $x' = (x_1, x_2) \in \omega$. Soit ε un paramètre prenant des valeurs dans une suite de nombres positifs convergeant vers zéro. Considérons un corps viscoélastique occupant la région Ω^ε ,

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\},$$

de sa frontière est $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$, où Γ_1^ε est la surface supérieure définie par $x_3 = \varepsilon h(x')$, Γ_L^ε est la frontière latérale et ω est le bas du domaine.

Soit $T > 0$. On note ν l'unité extérieure normale à Γ^ε . Le corps est supposé fixé $\Gamma_1^\varepsilon \times (0, T)$ et des tractions de surface de densité \mathbf{g}^ε s'agissent sur $\Gamma_L^\varepsilon \times (0, T)$.

Sur ω , la vitesse normale est nulle mais la vitesse tangentielle est inconnue et satisfait la condition de frottement de type de Tresca, avec coefficient de frottement k^ε qui représente une fonction positive donnée. En outre, une force volumique de densité $\mathbf{f}^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, f_3^\varepsilon)$ s'agit sur le corps en $\Omega^\varepsilon \times (0, T)$. On note par S_n ($n = 2, 3$) l'espace des tenseurs symétriques et "·" le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{n \times n}$ ou \mathbb{R}^n , et $|\cdot|$ est la norme associée.

La formulation classique du problème mécanique est :

Problème P₁. Trouver un champ de déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ et un champ de stress $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = (\sigma_{ij}^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \times (0, T) \rightarrow S_n, i, j = 1, 2, 3$ tel que

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) = A_{ijkl}^\varepsilon \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + B_{ijkl}^\varepsilon \mathbf{e}_{kl}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times (0, T) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times (0, T) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times (0, T) \quad (2.3)$$

$$\sigma \nu^\varepsilon = \mathbf{g}^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \times (0, T) \quad (2.4)$$

$$u_{\nu}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \omega \times (0, T) \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies \dot{u}_\tau^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \forall \lambda \geq 0 \quad \text{tel que } \dot{u}_\tau^\varepsilon = -\lambda \sigma_\tau^\varepsilon \end{array} \right\} \quad \text{sur } \omega \times (0, T) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon(0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \quad (2.7)$$

Ici, l'équation (2.1) représente la loi de comportement linéaire de Kelvin-Voigt ([10, 15]), où σ_{ij}^ε , A_{ijkl}^ε et B_{ijkl}^ε désignent les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$, le tenseur d'élasticité \mathcal{A}^ε et le tenseur de viscosité \mathcal{B}^ε respectivement. Le point au-dessus représente la

dérivée temporelle. Les relations (2.2) sont les équations quasi-statiques de mouvement, les indices i, j, k, l entre 1 et 3 et la convention de sommation sur les indices répétés est utilisé. On note $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ l'opérateur taux de déformation défini par

$$\mathbf{e}(\mathbf{v}) = (\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{v})) , \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) .$$

On note $\sigma \nu^\varepsilon$ le vecteur de contrainte de Cauchy [10], et

$$\sigma_\nu^\varepsilon = \sigma \nu^\varepsilon , \sigma_\tau^\varepsilon = \sigma \nu^\varepsilon - (\sigma_\nu^\varepsilon) \cdot \nu , u_\nu^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot \nu , u_\tau^\varepsilon = u^\varepsilon - u_\nu^\varepsilon \nu ,$$

respectivement, les composantes de la normale, le tenseur des contraintes tangentielles sur Γ^ε , la normale et la tangentielle de \mathbf{u}^ε au Γ^ε , et enfin, u_0^ε est le déplacement initial.

On définit

$$V^\varepsilon = \{ \mathbf{v}^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : \mathbf{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, v_\nu^\varepsilon = 0 \text{ sur } \omega \} .$$

Suivant [9], V^ε est le réel espace de Hilbert muni de produit scalaire,

$$\langle u, \mathbf{v} \rangle_{V^\varepsilon} = \langle \mathbf{e}(u), \mathbf{e}(\mathbf{v}) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} , \|\mathbf{v}\|_{V^\varepsilon} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^\varepsilon}^{1/2} .$$

D'après [15], voir page 97, on utilise l'espace réel de Banach Q_∞^ε de champs tensoriels du quatrième ordre définis par

$$Q_\infty^\varepsilon = \{ C^\varepsilon = (C_{ijkl}^\varepsilon) / C_{ijkl}^\varepsilon = C_{jikl}^\varepsilon = C_{klij}^\varepsilon \in L^\infty(\Omega^\varepsilon), 1 \leq i, j, k, l \leq 3 \}$$

avec la norme

$$\|C^\varepsilon\|_{Q_\infty^\varepsilon} = \max_{1 \leq i, j, k, l \leq 3} \|C_{ijkl}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega^\varepsilon)} .$$

Pour tout $C^\varepsilon \in Q_\infty^\varepsilon$ et $\xi \in L^2(\Omega^\varepsilon)_s^{3 \times 3}$, le tenseur $C^\varepsilon \xi$, de composantes $(C^\varepsilon \xi)_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl}^\varepsilon \xi_{kl}$ satisfait,

$$C^\varepsilon \xi \in L^2(\Omega^\varepsilon)_s^{3 \times 3} , \quad \|C^\varepsilon \xi\|_{0, \Omega^\varepsilon} \leq 3 \|C^\varepsilon\|_{Q_\infty^\varepsilon} \|\xi\|_{0, \Omega^\varepsilon} . \quad (2.8)$$

Pour tout espace réel de Banach H on utilise la notation classique des espaces $L^p(0, T; H)$ et $W^{1,p}(0, T; H)$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Maintenant, on suppose que

$$\begin{cases} A^\varepsilon \in Q_\infty^\varepsilon, B^\varepsilon \in Q_\infty^\varepsilon \\ \exists m_a > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad A^\varepsilon \xi \cdot \xi \geq m_a |\xi|^2 \text{ a.e. dans } \Omega^\varepsilon, \\ \exists m_b > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad B^\varepsilon \xi \cdot \xi \geq m_b |\xi|^2 \text{ a.e. dans } \Omega^\varepsilon, \end{cases} \quad (2.9)$$

et

$$\mathbf{f}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon)^3) , \quad \mathbf{g}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_L^\varepsilon)^3) , \quad (2.10)$$

$$k^\varepsilon \in L^\infty(\omega), \quad k^\varepsilon(x) \geq 0 \text{ a.e. sur } \omega, \quad (2.11)$$

en outre,

$$u_0^\varepsilon \in V^\varepsilon. \quad (2.12)$$

2.2 Formulation variationnelle du problème

Lemme 2.2.1. Si \mathbf{u}^ε est une solution du problème (P_1) , alors elles vérifient le problème variationnel suivant :

Trouver $\mathbf{u}^\varepsilon \in V^\varepsilon$ telle que :

$$\begin{aligned} & \langle A^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} + \langle B^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} + J(\mathbf{v}^\varepsilon) - J(\mathbf{u}^\varepsilon) \\ & \geq \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon(t) \cdot (\mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon(t)) d\rho + \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), (\mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} \end{aligned}$$

Où J définit par :

$$J(\mathbf{v}^\varepsilon) = \int_{\omega} k^\varepsilon |\mathbf{v}^\varepsilon| dx' \quad (2.13)$$

J est une fonction semi-continue inférieure convexe sur V^ε tel que $J \not\equiv +\infty$.

Preuve. En multipliant l'équation (2.2) par $(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon)$, où $\mathbf{v} \in V^\varepsilon$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx' dx_3 - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) d\sigma - \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx = 0 .$$

Les conditions aux limites (2.3) et (2.4) impliquent que :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) d\sigma = \int_{\omega} \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \nu_j (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx' .$$

En utilisant : $\sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j = \sigma_{\tau_i}^\varepsilon + \sigma_\nu^\varepsilon \nu_i$, il vient :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) d\sigma = \int_{\omega} \sigma_{\tau_i}^\varepsilon (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx' + \int_{\omega} \sigma_\nu^\varepsilon \nu_i (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx' ,$$

et comme $(v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) \nu_i = 0$, on a :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) d\sigma = \int_{\omega} \sigma_{\tau_i}^\varepsilon (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx' .$$

Donc :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx' dx_3 - \int_{\omega} \sigma_{\tau_i}^\varepsilon (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx' - \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx = 0, \forall \mathbf{v} \in V^\varepsilon$$

on ajoute et on retranche le terme $\int_{\omega} k^\varepsilon (|\mathbf{v}| - |\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon|) dx'$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx' dx_3 + \int_{\omega} k^\varepsilon (|\mathbf{v}| - |\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon|) dx' \\ &= \int_{\omega} \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \cdot (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx' + \int_{\omega} k^\varepsilon (|\mathbf{v}| - |\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon|) dx' + \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (v_i - \dot{u}_i^\varepsilon) dx. \end{aligned}$$

□

Problème P₁' . Trouver $\mathbf{u}^\varepsilon(t)$ dans V^ε tel que

$$\begin{aligned} & \langle A^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon - \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} + \langle B^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon - \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} + \int_{\omega} k^\varepsilon |\mathbf{v}^\varepsilon| dx' \\ & - \int_{\omega} k^\varepsilon |\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)| dx' \geq \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon(t) \cdot (\mathbf{v}^\varepsilon - \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) d\rho + \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), (\mathbf{v}^\varepsilon - \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon, \forall t \in [0, T], \quad (2.14)$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon(0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon \quad (2.15)$$

où $d\rho$ représente la mesure superficielle sur la limite latérale Γ_L^ε .

Ensuite, nous supposons que le corps est élastique linéaire, c'est-à-dire que nous choisissons (1.2) comme loi de comportement :

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(t) = A_{ijkl}^\varepsilon \mathbf{e}_{kl}(t) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times (0, T) \quad (2.16)$$

La formulation classique du problème mécanique de contact d'un corp élastique avec frottement est le suivant

Problème P₂. Trouver un champ de déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de stress $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \times [0, T] \rightarrow S_d$ qui satisfont (2.2)-(2.7) et (2.15).

Puisque mes $\Gamma_1^\varepsilon > 0$, on a l'inégalité de Korn, il existe donc une constante positive C_K qui ne dépend que de Ω^ε et Γ_1^ε , tel que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{\mathcal{H}^\varepsilon} \geq C_K \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{H_1^\varepsilon} \quad \forall \mathbf{u}^\varepsilon \in V^\varepsilon \quad (2.17)$$

La preuve de l'inégalité de Korn peut être trouvée dans Nečas et Hlaváček [21], p. 79. Pour $\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon$ soit

$$\langle \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon \rangle_{V^\varepsilon} = \langle \mathcal{A}\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon}, \quad |\mathbf{u}^\varepsilon|_{V^\varepsilon} = \langle \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon \rangle_{V^\varepsilon}^{1/2} \quad (2.18)$$

En utilisant maintenant (2.9) et (2.17) on obtient que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^\varepsilon}$ est un produit scalaire sur V^ε et de plus, $\| \cdot \|_{V^\varepsilon}$ et $\| \cdot \|_{H_1^\varepsilon}$ sont des normes équivalentes sur V^ε . Par conséquent, implique que $(V^\varepsilon, \| \cdot \|_{V^\varepsilon})$ est un réel espace de Hilbert.

Ensuite, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, on note $\mathbf{f}^\varepsilon(t)$ l'élément de V^ε donné par

$$\langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), \mathbf{v} \rangle_{V^\varepsilon} = \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), \mathbf{v} \rangle_{H^\varepsilon} + \langle \mathbf{g}^\varepsilon(t), \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}})^d} \quad \forall \mathbf{v} \in V^\varepsilon, t \in [0, T]. \quad (2.19)$$

et on note que les conditions (2.10) impliquent

$$\mathbf{f}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon). \quad (2.20)$$

En fin, La formulation variationnelle de problème P_2 est le suivant

Problème P'_2 . Trouver un champ de déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de stress $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \times [0, T] \rightarrow S_d$ qui satisfont (2.20)-(2.21) et (2.22)

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(t) = A_{ijkl}^\varepsilon \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times (0, T), \quad (2.21)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(t), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) - \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + J(\mathbf{v}^\varepsilon) - J(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \geq \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon - \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t) \rangle_V \quad \forall \mathbf{v} \in V^\varepsilon, \quad \text{a.e. } t \in (0, T), \quad (2.22)$$

$$u(0) = u_0 \quad (2.23)$$

Le bien-posé des problèmes variationnels P'_1 et P'_2 est discuté dans la section suivante, où l'existence et l'unicité des résultats dans l'étude de ces problèmes sont établies.

2.3 Existence et unicité de la solution

Théorème 2.3.1. . Suppose que de semi continuité inférieurement et convexité du J , (2.9),(2.10), (2.12) sont satisfaitées. Alors il existe une solution unique $\{\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\}$ du problème P'_1 . De plus, la solution satisfait

$$\mathbf{u}^\varepsilon \in W^{2,2}(0, T; V^\varepsilon), \quad \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}_1^\varepsilon) \quad (2.24)$$

Théorème 2.3.2. Supposons que (2.9), (2.10), (2.12) et (2.21) soient vérifiées. Alors il existe

une solution unique $\{\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\}$ du problème P'_2 . De plus, la solution satisfait

$$\mathbf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon), \quad \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}_1^\varepsilon) \quad (2.25)$$

Nous concluons que, sous les hypothèses de semi-continuité inférieurement et convexité de J et les hypothèses (2.9), (2.10), (2.12), le problème de contact visco-élastique P_1 a une solution faible unique qui satisfait (2.24), et sous les hypothèses (2.9), (2.10), (2.12) et (2.21), le problème de contact élastique P_2 a une unique solution faible qui satisfait (2.25).

La preuve du théorème 2.3.1. est basée sur des arguments en point fixe, similaires à ceux utilisés dans [17], [18], et s'effectue en plusieurs étapes. Nous supposons dans la suite que de semi-continuité inférieurement et convexité de J et les hypothèses (2.9), (2.10), (2.12) est vérifié et partout dans cette section C désignera une constante positive dont la valeur peut changer de ligne en ligne. Dans la première étape, nous supposons que la partie élastique de la contrainte est donnée et résolvons le problème variationnel correspondant pour le champ de vitesse. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.1. Pour tout $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}^\varepsilon)$ il existe une solution unique $\mathbf{v}_\eta^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon)$ tel que

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) - \mathbf{e}(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} + \langle \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) - \mathbf{e}(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} + J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{v}_\eta(t)) \quad (2.26) \\ & \geq \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t) \rangle_{V^\varepsilon} \quad \forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Preuve. Soit $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}^\varepsilon)$ et $t \in [0, T]$. Il découle des résultats classiques pour les inégalités variationnelles elliptiques (voir par exemple [19]) qu'il existe un élément unique $\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t) \in V^\varepsilon$ tel que

$$\begin{aligned} & b^\varepsilon(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)) + \langle \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) - \mathbf{e}(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} + J(\mathbf{v}^\varepsilon) - J(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)) \quad (2.27) \\ & \geq \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t) \rangle_{V^\varepsilon} \quad \forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon \end{aligned}$$

où $b^\varepsilon : V^\varepsilon \times V^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire sur $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$ donné par

$$b^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = \langle \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} \quad \forall \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon \quad (2.28)$$

Puisque de (2.27) et (2.28) on obtient (2.26), il reste à prouver la régularité $\mathbf{v}_\eta^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon)$ de la solution. Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$. Par souci de simplicité d'écriture, on

note $\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t_i) = v_i^\varepsilon, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t_i) = \eta_i^\varepsilon, \mathbf{f}^\varepsilon(t_i) = f_i^\varepsilon$, pour $i = 1, 2$. En utilisant (2.26), nous dérivons la relation

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(v_1^\varepsilon) - \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(v_2^\varepsilon), \mathbf{e}(v_1^\varepsilon) - \mathbf{e}(v_2^\varepsilon) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} &\leq \langle \mathbf{f}_1^\varepsilon - \mathbf{f}_2^\varepsilon, v_1^\varepsilon - v_2^\varepsilon \rangle_{V^\varepsilon} \\ &+ \langle \eta_1^\varepsilon - \eta_2^\varepsilon, \mathbf{e}(v_1^\varepsilon) - \mathbf{e}(v_2^\varepsilon) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons les hypothèses (2.9) et (2.17) pour dériver

$$|v_1^\varepsilon - v_2^\varepsilon|_{V^\varepsilon} \leq C (|f_1^\varepsilon - f_2^\varepsilon|_{V^\varepsilon} + |\eta_1^\varepsilon - \eta_2^\varepsilon|_{\mathcal{H}^\varepsilon}) \quad (2.29)$$

Par la régularité $\mathbf{f}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon)$ et $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}^\varepsilon)$, on déduit de (2.29) que $\mathbf{v}_\eta^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon)$. □

Considérons maintenant le sous-ensemble fermé de $W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}^\varepsilon)$ défini par

$$\mathcal{W} = \{ \boldsymbol{\eta}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}^\varepsilon) \mid \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(0) = \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(u_0^\varepsilon) \}$$

Lemme 2.3.2. (2.9) et (2.12) permet de considérer l'opérateur $\Lambda : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ défini par

$$\Lambda \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t) = \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}_\eta^\varepsilon(t)), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u}_\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(s) ds + u_0^\varepsilon \quad (2.31)$$

pour tout $t \in [0, T]$ où, pour chaque $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon \in \mathcal{W}$, $\mathbf{v}_\eta^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon)$ désigne la solution de l'inégalité variationnelle (2.26).

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 2.3.3. L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon} \in \mathcal{W}$.

Preuve. Soit $\boldsymbol{\eta}_1^\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_2^\varepsilon \in \mathcal{W}$ et soit $t \in [0, T]$. D'après les définitions (2.30), (2.31) et (2.9) on a

$$|\Lambda \boldsymbol{\eta}_1^\varepsilon(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2^\varepsilon(t)|_{\mathcal{H}^\varepsilon} \leq C \int_0^t |\mathbf{v}_{\eta_1}^\varepsilon(s) - \mathbf{v}_{\eta_2}^\varepsilon(s)|_{V^\varepsilon} ds, \quad (2.32)$$

$$\left| \frac{d}{dt} (\Lambda \boldsymbol{\eta}_1^\varepsilon(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2^\varepsilon(t)) \right|_{\mathcal{H}^\varepsilon} \leq C |\mathbf{v}_{\eta_1}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}_{\eta_2}^\varepsilon(t)|_{V^\varepsilon} \quad (2.33)$$

Un argument similaire à celui de la preuve de (2.29) montre que

$$|\mathbf{v}_{\eta_1}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}_{\eta_2}^\varepsilon(t)|_{V^\varepsilon} \leq C |\eta_1^\varepsilon(t) - \eta_2^\varepsilon(t)|_{\mathcal{H}^\varepsilon} \leq C \int_0^t |\dot{\eta}_1^\varepsilon(s) - \dot{\eta}_2^\varepsilon(s)|_{\mathcal{H}^\varepsilon} ds \quad (2.34)$$

En combinant (2.32)-(2.34) on trouve

$$\begin{aligned} |\Lambda\eta_1^\varepsilon(t) - \Lambda\eta_2^\varepsilon(t)|_{\mathcal{H}^\varepsilon}^2 &\leq C \int_0^t |\eta_1^\varepsilon(s) - \eta_2^\varepsilon(s)|_{\mathcal{H}^\varepsilon}^2 ds \\ \left| \frac{d}{dt} (\Lambda\eta_1^\varepsilon(t) - \Lambda\eta_2^\varepsilon(t)) \right|_{\mathcal{H}^\varepsilon}^2 &\leq C \int_0^t |\dot{\eta}_1^\varepsilon(s) - \dot{\eta}_2^\varepsilon(s)|_{\mathcal{H}^\varepsilon}^2 ds \end{aligned}$$

Itérer les deux dernières inégalités n fois on en déduit

$$|\Lambda^n \eta_1^\varepsilon - \Lambda^n \eta_2^\varepsilon|_{W^{1,2}(0,T;\mathcal{H}^\varepsilon)}^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} |\eta_1^\varepsilon - \eta_2^\varepsilon|_{W^{1,2}(0,T;\mathcal{H}^\varepsilon)}^2$$

Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n T^n / n! = 0$, l'inégalité précédente implique que pour n assez grand, la puissance Λ^n of Λ est une contraction de \mathcal{W} . Il découle maintenant du théorème du point fixe de Banach qu'il existe un élément unique $\boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon} \in \mathcal{W}$ tel que $\Lambda^n \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon} = \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}$. De plus, depuis $\Lambda^n (\Lambda \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}) = \Lambda (\Lambda^n \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}) = \Lambda \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}$, on en déduit que $\Lambda \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}$ on en déduit que Λ^n . On conclut par l'unicité du point fixe que $\Lambda \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon} = \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}$, ce qui montre que $\boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}$ est un point fixe de Λ . L'unicité du point fixe de l'opérateur Λ résulte directement de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ^n . \square

Nous avons maintenant prouver le théorème 2.3.1.

Preuve théorème 2.3.1.

Existence. Soit $\boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon} \in \mathcal{W}$ est le point fixe de Λ et soit $\mathbf{u}_{\eta^*}^\varepsilon$ la fonction définie par (2.31) pour $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon = \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}$. On définit une fonction $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}^\varepsilon$ par

$$\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}^\varepsilon(t) = \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}_{\eta^*}^\varepsilon(t)) + \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}^\varepsilon(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.35)$$

Comme $\boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}(t) = \Lambda \boldsymbol{\eta}^{*\varepsilon}(t) = \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}_{\eta^*}^\varepsilon(t))$ et $\mathbf{v}_{\eta^*}^\varepsilon(t) = \dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}^\varepsilon(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, il résulte de (2.26) et (2.35) que

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}^\varepsilon(t), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) - \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}^\varepsilon(t)) \right\rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} + J(\mathbf{v}) - J(\dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}^\varepsilon(t)) \geq \left\langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon - \dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}^\varepsilon(t) \right\rangle_{V^\varepsilon} \quad (2.36)$$

$$\forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon, t \in [0, T].$$

Prendre $\mathbf{v}^\varepsilon = \dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}^\varepsilon(t) \pm \varphi$ dans (2.36) où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$ et en utilisant (2.19) on trouve

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}^\varepsilon(t) + \mathbf{f}^\varepsilon(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.37)$$

Il découle des Lemmes 2.3.1, (2.31) et (2.12) que $\mathbf{u}_{\eta^*}^\varepsilon \in W^{2,2}(0, T; V^\varepsilon)$. De plus, (2.35), (2.9), (2.37) et (2.10) donnent $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}^\varepsilon_1)$. En gardant à l'esprit (2.35), (2.36) et (2.31), on en déduit que $\{\mathbf{u}_{\eta^*}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}^\varepsilon\}$ est une solution au problème P'_1 qui satisfait (2.24).

Unicité. Pour prouver la partie d'unicité, soit $\{u_i^\varepsilon, \sigma_i^\varepsilon\}$ deux solutions de (2.15)(2.22) avec régularité (2.24), $i = 1, 2$. on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{u}_i^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) - \mathbf{e}(\dot{u}_i^\varepsilon(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} + \langle \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(u_i^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) - \mathbf{e}(\dot{u}_i^\varepsilon(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} + J(\mathbf{v}) - J(\dot{u}_i^\varepsilon(t)) \\ \geq \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon - \dot{u}_i^\varepsilon(t) \rangle_{V^\varepsilon} \quad \forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon, t \in [0, T], \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{u}_1^\varepsilon(t)) - \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{u}_2^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\dot{u}_1^\varepsilon(t)) - \mathbf{e}(\dot{u}_2^\varepsilon(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} \\ & \leq \langle \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(u_1^\varepsilon(t)) - \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(u_2^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\dot{u}_1^\varepsilon(t)) - \mathbf{e}(\dot{u}_2^\varepsilon(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Depuis $u_1^\varepsilon(0) = u_2^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon$, en utilisant (2.18), (3.13) et l'inégalité précédente, on en déduit que

$$|\dot{u}_1^\varepsilon(t) - \dot{u}_2^\varepsilon(t)|_{V^\varepsilon} \leq C \int_0^t |\dot{u}_1^\varepsilon(s) - \dot{u}_2^\varepsilon(s)|_{V^\varepsilon} ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.38)$$

La partie d'unicité dans le théorème 2.3.1. est maintenant une conséquence de (2.38), (2.25) et (2.23). □

Passons maintenant à la preuve du théorème 2.3.2. Pour cela, on rappelle le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.3.3. Soit $(V^\varepsilon, (\cdot, \cdot)_{V^\varepsilon})$ est un espace Hilbert et soit $J : V^\varepsilon \rightarrow (-\infty, +\infty]$ est une fonctionnelle semi-continue inférieure convexe. Suppose que $J \not\equiv \infty$, c'est-à-dire le domaine effectif de J , défini par $D(J) = \{\mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon \mid J(\mathbf{v}^\varepsilon) \leq +\infty\}$, n'est pas vide. Soit $\mathbf{f}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon)$ et $u_0^\varepsilon \in V^\varepsilon$ est tel que

$$\sup_{\mathbf{v}^\varepsilon \in D(J)} \{(\mathbf{f}^\varepsilon(0), \mathbf{v}^\varepsilon)_{V^\varepsilon} - (u_0^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)_{V^\varepsilon} - j(\mathbf{v}^\varepsilon)\} < +\infty \quad (2.39)$$

Alors il existe un élément unique $\mathbf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon)$ qui satisfait

$$\langle \mathbf{u}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon - \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t) \rangle_{V^\varepsilon} + J(\mathbf{v}^\varepsilon) - J(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \geq \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon - \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t) \rangle_{V^\varepsilon} \quad (2.40)$$

pour tout $\mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon$, a.e. $t \in (0, T)$, et

$$\mathbf{u}^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \quad (2.41)$$

Théorème 2.3.3. a été démontré dans [20] , p. 117, en utilisant des arguments de la théorie des équations d'évolution avec des opérateurs maximaux monotones . Une version de ce théorème est considérée dans [21]. Là, la preuve est basée sur une méthode de discrétisation temporelle. Une généralisation du théorème 2.3.3. dans le cas où J dépend de la solution, c'est-à-dire dans le cas où $J = J(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)$ a été établi récemment dans [22] .

On utilise le théorème 2.3.3. pour prouver le théorème 2.3.2.

Preuve théorème 2.3.2. On note que (2.21) implique (2.39) et les hypothèses (2.9), (2.10) et (2.12) permet d'utiliser le théorème 2.3.3. En utilisant (2.40), (2.41) et (2.18), on déduit

que l'existence d'une fonction unique $\mathbf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon)$ qui satisfait (2.23) et

$$\langle \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) - \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\varepsilon} + J(\mathbf{v}^\varepsilon) - J(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \geq \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon - \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t) \rangle_{V^\varepsilon} \quad (2.42)$$

$$\forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon, \text{ a.e. } t \in (0, T)$$

Soit $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ est un donnée par (2.21). En utilisant (2.42) nous obtenons (2.22) et de (2.9) il s'ensuit que $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}^\varepsilon)$. Nous utilisons maintenant dans (2.22) un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du théorème 2.3.1., on obtient $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}_1^\varepsilon)$. Ceci conclut la partie existence du théorème 2.3.2. La part d'unicité résulte de l'unicité de l'élément $\mathbf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V^\varepsilon)$ qui résout (2.42), garanti par le théorème 2.3.3.

□

Chapitre 3

Analyse asymptotique du système anisotrope visco-élastique avec frottement

- 3.1 Transposer le problème sur un domaine fixe Ω
- 3.2 Estimation à priori sur les solutions
- 3.3 Résultat de convergence et problème limite
- 3.4 Unicité de la solution du problème limite

3.1 Transposer le problème sur un domaine fixe Ω

Pour simplifier la notation, partout dans la suite les index α, β, γ et δ prendre des valeurs dans l'ensemble 1, 2. En outre, $x = (x', z)$ désigne le point générique dans \mathbb{R}^3 . Selon le changement de variables $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$, voir par exemple. ([1],[7]), on définit le domaine fixe Ω ,

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega, 0 < z < h(x')\}$$

et on note par $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$ sa frontière, avec

$$\begin{aligned} \Gamma_L &= \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, x' \in \partial\omega, 0 < z < h(x')\} \\ \Gamma_1 &= \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega, z = h(x')\} \end{aligned}$$

Nous définissons les fonctions suivantes dans $\Omega \times [0, T]$

$$\hat{u}_\alpha^\varepsilon(x', z, t) = u_\alpha^\varepsilon(x', x_3, t), \quad \hat{u}_3^\varepsilon(x', z, t) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3, t) .$$

Définissons les tenseurs ε -indépendants $\hat{\mathcal{A}} = (\hat{\mathcal{A}}_{ijkl}), \hat{\mathcal{B}} = (\hat{\mathcal{B}}_{ijkl})$;

$$\hat{\mathcal{A}}(x', z) = \mathcal{A}^\varepsilon(x', x_3), \hat{\mathcal{B}}(x', z) = \mathcal{B}^\varepsilon(x', x_3) ,$$

Pour les données du **Problème P₁**, on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x', z, t) &= \varepsilon^2 \mathbf{f}^\varepsilon(x', x_3, t), \quad \hat{g}(x', z, t) = \varepsilon^2 \mathbf{g}^\varepsilon(x', x_3, t) , \\ \hat{u}_{0\alpha}(x', z) &= u_{0\alpha}^\varepsilon(x', x_3), \quad \hat{u}_{03}(x', z) = \varepsilon^{-1} u_{03}^\varepsilon(x', x_3), \quad \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon \end{aligned}$$

Pour cette remise changement, nous avons les espaces de fonctions suivants

$$Q_\infty = \{C = (C_{ijkl}) / C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq 3\} ,$$

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ sur } \omega\} ,$$

$$\Pi(V) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega)^2 : \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V\}$$

et

$$V_z = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} \in L^2(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} .$$

V_z est un espace de Banach avec la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{V_z} = \left[\sum_{\alpha=1}^2 \left(\|v_\alpha\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 \right) \right]^{1/2} .$$

Considérons maintenant la fonctionnelle J et la forme trilinéaire $\Lambda : Q_\infty \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, sont données par

$$J(\mathbf{v}) = \int_{\omega} \hat{k} |v_\tau| dx', \quad \forall \mathbf{v} \in V;$$

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{C}_1, \hat{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{C}_{\alpha\beta\gamma\theta} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_\gamma}{\partial x_\theta} + \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\gamma} \right) \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx + \\ &\int_{\Omega} \hat{C}_{\alpha 3\gamma\theta} \varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}_\gamma}{\partial x_\theta} + \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\gamma} \right) \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} dx + \int_{\Omega} \hat{C}_{\alpha\beta\gamma 3} \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_\gamma}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_\gamma} \right) \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx + \\ &2 \int_{\Omega} \hat{C}_{\alpha 3\gamma 3} \left(\frac{\partial \hat{u}_\gamma}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_\gamma} \right) \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} dx + \int_{\Omega} \hat{C}_{\alpha\beta 33} \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx + \\ &\frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{C}_{33\alpha\beta} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \hat{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial v_3}{\partial z} dx + 2 \int_{\Omega} \hat{C}_{\alpha 333} \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z} \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} dx + \\ &\int_{\Omega} \hat{C}_{33\alpha 3} \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_\alpha}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial v_3}{\partial z} dx + \int_{\Omega} \hat{C}_{3333} \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z} \frac{\partial v_3}{\partial z} dx \end{aligned}$$

$$\forall (\hat{C}, \hat{u}, \mathbf{v}) \in Q_\infty \times V \times V.$$

Lemme 3.1.1. L'inéquation variationnelle (2.14)-(2.15) est équivalente à l'inéquation suivante

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{A}, \hat{u}^\varepsilon(t), \mathbf{v} - \partial_t \hat{u}^\varepsilon(t)) + \Lambda(\hat{B}, \partial_t \hat{u}^\varepsilon(t), \mathbf{v} - \partial_t \hat{u}^\varepsilon(t)) + J(\mathbf{v}) - J(\partial_t \hat{u}^\varepsilon(t)) \geq \\ \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Gamma_L} \hat{g}_\alpha(t) (v_\alpha - \partial_t \hat{u}_\alpha^\varepsilon(t)) d\rho + \varepsilon \int_{\Gamma_L} \hat{g}_3(t) (v_3 - \partial_t \hat{u}_3^\varepsilon(t)) d\rho + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_\alpha(t) (v_\alpha - \partial_t \hat{u}_\alpha^\varepsilon(t)) dx \\ + \varepsilon \int_{\Omega} \hat{f}_3(t) (v_3 - \partial_t \hat{u}_3^\varepsilon(t)) dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall t \in [0, T], \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\hat{u}^\varepsilon(0) = \hat{u}_0^\varepsilon. \tag{3.2}$$

Preuve. Soit \mathbf{u}^ε est une solution de (2.14)-(2.15). Pour toute $C^\varepsilon \in Q^\varepsilon$, en utilisant la symétrie de $(C^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon))_{ij}$, il s'ensuit que pour tout \mathbf{v}^ε en V^ε et $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \langle C^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} &= \int_{\Omega^\varepsilon} C_{ijkl}^\varepsilon \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)) (\mathbf{e}_{ij} \cdot \mathbf{v}^\varepsilon) dx' dx_3 \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} C_{ijkl}^\varepsilon \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)) \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j} dx' dx_3, \end{aligned}$$

en passant au domaine fixe Ω , on trouve

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \hat{C}_{ijkl} \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx' dx_3 = \varepsilon^{-1} \Lambda(\hat{C}, \hat{u}^\varepsilon(t), \mathbf{v})$$

avec $\mathbf{v} \in V$, la remise à l'échelle de la fonction \mathbf{v}^ε .

Depuis la frontière Γ^ε et $\partial\omega$ sont Lipschitz continues, on peut écrire la frontière Γ_L^ε en une union disjointe de $\Gamma_{L_i}^\varepsilon, i \in I$ tel que chacun $\Gamma_{L_i}^\varepsilon$ est le graphe d'une fonction $\phi^{(i)}$ ses points du domaine,

$$D_i^\varepsilon = \{(x_{\delta_i}, x_3) \in \mathbb{R}^2, a_i < x_{\delta_i} < b_i, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x'), x' \in \partial\omega \cap \bar{\Gamma}_{L_i}^\varepsilon\}$$

qui sont donnés par le théorème de la fonction implicite, avec $\partial_3 \phi_i = 0, a_i$ et b_i sont des nombres réels, les indices δ_i prend la valeur 1 ou 2. En mettant

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{(i)}(x_{\delta_i}, z) &= \phi^{(i)}(x_{\delta_i}, x_3), \\ D_i &= \{(x_{\delta_i}, z) \in \mathbb{R}^2, a_i < x_{\delta_i} < b_i, \quad 0 < z < h(x'), x' \in \partial\omega \cap \bar{\Gamma}_{L_i}\} \end{aligned}$$

On fait des calculs sur la surface latérale Γ_L^ε obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_L^\varepsilon} g^\varepsilon \cdot \mathbf{v}^\varepsilon d\rho &= \sum_{i \in I} \int_{D_i^\varepsilon} [(g^\varepsilon \circ \phi^{(i)}) \cdot (\mathbf{v}^\varepsilon \circ \phi^{(i)})](x_{\delta_i}, x_3) \sqrt{1 + |\partial_{\delta_i} \phi_i|^2} dx_{\delta_i} dx_3 \\ &= \varepsilon^{-1} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i \in I} \int_{D_i} [(\hat{g}_\alpha \circ \hat{\phi}^{(i)}) \cdot (v_\alpha \circ \hat{\phi}^{(i)})](x_{\delta_i}, z) \sqrt{1 + |\partial_{\delta_i} \hat{\phi}^{(i)}|^2} dx_{\delta_i} dz \\ &\quad + \sum_{i \in I} \int_{D_i} [(\hat{g}_3 \circ \hat{\phi}^{(i)}) \cdot (v_3 \circ \hat{\phi}^{(i)})](x_{\delta_i}, z) \sqrt{1 + |\partial_{\delta_i} \hat{\phi}^{(i)}|^2} dx_{\delta_i} dz \\ &= \varepsilon^{-1} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Gamma_L} \hat{g}_\alpha v_\alpha d\rho + \int_{\Gamma_L} \hat{g}_3 v_3 \end{aligned}$$

Ainsi, par les relations précédentes, on obtient facilement l'équivalent entre problème(3.1)-(3.2) et (2.14)-(2.15). □

3.2 Estimation à priori sur les solutions

Lemme 3.2.1. Supposons que \mathbf{u}^ε est une solution de (2.14)-(2.15). Puis

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \\ &\varepsilon^2 \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \varepsilon^4 \sum_{\beta=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\beta} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C; \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \\ &\varepsilon^2 \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta \partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \varepsilon^4 \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\beta \partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où C désigne une constante indépendante de ε et t .

Preuve. Rappelons tout d'abord les inégalités de Korn et de Poincaré (voir [1]), respectivement,

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{0,\Gamma^\varepsilon} \geq C_K \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega^\varepsilon}, \quad \forall \mathbf{v} \in V^\varepsilon \quad (3.5)$$

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \varepsilon h_{\max} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega^\varepsilon}, \quad \forall \mathbf{v} \in V^\varepsilon, \quad (3.6)$$

où $C_K > 0$ est une constante indépendante de ε . D'après le théorème de la trace de Sobolev et au-dessus de l'inégalité,

il y a existé $C_0 > 0$ ne dépendant que de Ω^ε et Γ^ε tel que

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\Gamma_L^\varepsilon} \leq C_0 \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega^\varepsilon}, \quad \forall \mathbf{v} \in V^\varepsilon. \quad (3.7)$$

Cependant, nous pouvons voir que la constante C_0 ne dépend pas de ε , à cette fin, pour toute fonction \mathbf{v} , nous désignons son prolongement de Ω^ε à $\tilde{\Omega} = \omega \times]0, \tilde{h}[$ par

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{on } \Omega^\varepsilon \\ 0 & \text{on } \tilde{\Omega} - \Omega^\varepsilon \end{cases}$$

où $\tilde{h} > h_{\max}$. On note par $\tilde{\Gamma}_L$ la limite latérale de $\tilde{\Omega}$, donc on a $\|\mathbf{v}\|_{0,\Gamma_L^\varepsilon} = \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0,\tilde{\Gamma}_L}$, $\|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega^\varepsilon} = \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_{0,\tilde{\Omega}}$ tel que (3.7) est valable pour une constante indépendante de ε . Suivant pour tout t dans $[0, T]$, choisir dans (2.14) $\mathbf{v}^\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(-\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0,\Omega^\varepsilon} + \langle \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(-\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0,\Omega^\varepsilon} \\ & - \int_\omega k^\varepsilon |\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)| dx' \geq \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon(t) \cdot (-\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t) d\rho + \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), (-\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0,\Omega^\varepsilon} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0,\Omega^\varepsilon} + \langle \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0,\Omega^\varepsilon} \\ & + \int_\omega k^\varepsilon |\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)| dx' \leq \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon(t) \cdot (\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t) d\rho + \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), (\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0,\Omega^\varepsilon}. \end{aligned}$$

On note que $\int_\omega k^\varepsilon |\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)| dx' \geq 0$.

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon), \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon) \rangle_{0,\Omega^\varepsilon} \\ & = \int_{0,\Omega^\varepsilon} \mathcal{B}^\varepsilon \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon) \cdot \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq m_b \int_{0, \Omega^\varepsilon} |\mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon)|^2 dx \\ &= m_b \|\mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon)\|^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} + m_b \|\mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon)\|^2 \\ &\leq \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon(t) \cdot (\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) d\rho + \langle \mathbf{f}^\varepsilon(t), (\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Par inégalité de Cauchy-Schwartz et Poincaré, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}^\varepsilon(s), \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} &\leq \|\mathbf{f}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \|\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\| \\ &\leq \varepsilon h_{\max} \|\mathbf{f}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \\ \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon \cdot \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) d\rho &\leq \|\mathbf{g}^\varepsilon\|_{0, \Omega, \Gamma_L^\varepsilon} \|\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\| \\ &\leq C_0 \|\mathbf{g}^\varepsilon(s)\|_{0, \Gamma_L^\varepsilon} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} + m_b \|\mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon)\|^2 \\ &\leq C_0 \|\mathbf{g}^\varepsilon(s)\|_{0, \Gamma_L^\varepsilon} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} + \varepsilon h_{\max} \|\mathbf{f}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \cdot \\ &\quad \langle \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} \\ &\quad \leq \|\mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \|(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \\ &\quad \leq \varepsilon h_{\max} \|\mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t))\|_{0, \Omega^\varepsilon} \\ &\leq 3 \|\mathcal{A}^\varepsilon\|_{Q_\infty^\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{0, \Omega^\varepsilon} . \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(t)), \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} \\ &\leq 3 \varepsilon h_{\max} \|\mathcal{A}^\varepsilon\|_{Q_\infty^\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon} . \end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'inégalité de Young

$$ab \leq \eta^{-2} \frac{a^2}{2} + \eta^2 \frac{b^2}{2}$$

pour $\eta = \sqrt{m_b C_K / 2}$, $a = \varepsilon h_{\max} \|\mathbf{f}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}$ et $b = \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}$; le $\eta = \sqrt{m_b C_K / 2}$, $a = C_0 \|\mathbf{g}^\varepsilon(s)\|_{0, \Gamma_L^\varepsilon}$ et $b = \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}$, on en déduit

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}^\varepsilon(s), \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} &\leq \frac{(h_{\max})^2}{m_b C_K} \varepsilon^2 \|\mathbf{f}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \frac{m_b C_K}{4} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2, \\ \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon(s) \cdot \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) d\rho &\leq \frac{(C_0)^2}{m_b C_K} \|\mathbf{g}^\varepsilon(s)\|_{0, \Gamma_L^\varepsilon}^2 + \frac{m_b C_K}{4} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 \end{aligned}$$

et s'intégrant sur $[0, t]$, il découle de (2.9) et (2.19) cette

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_a C_K \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} m_b C_K \int_0^t \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 ds &\leq \frac{1}{2} \langle A^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}_0^\varepsilon), \mathbf{e}(\mathbf{u}_0^\varepsilon) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} \\ &+ \int_0^t \langle \mathbf{f}^\varepsilon(s), \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} ds + \int_0^t \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon(s) \cdot \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) d\rho ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Par inégalité de Cauchy-Schwartz et (3.6)-(3.7), on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}^\varepsilon(s), \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) \rangle_{0, \Omega^\varepsilon} &\leq \varepsilon h_{\max} \|\mathbf{f}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \\ \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon \cdot \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) d\rho &\leq C_0 \|\mathbf{g}^\varepsilon(s)\|_{0, \Gamma_L^\varepsilon} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon} \end{aligned}$$

Par deux inégalités précédentes, et (2.8), l'inégalité (3.8) après multiplication par ε devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_a C_K \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} m_b C_K \int_0^t \varepsilon \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 ds &\leq \frac{3}{2} \varepsilon \|\hat{\mathcal{A}}^\varepsilon\|_{Q_\infty} \|\nabla \mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 \\ &+ \frac{(h_{\max})^2}{m_b C_K} \int_0^t \varepsilon^3 \|\mathbf{f}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{(C_0)^2}{m_b C_K} \int_0^t \varepsilon^3 \|\mathbf{g}^\varepsilon(s)\|_{0, \Gamma_L^\varepsilon}^2 ds. \end{aligned}$$

Utilisation des relations $\varepsilon^3 \|\mathbf{g}^\varepsilon(s)\|_{0, \Gamma_L^\varepsilon}^2 = \|\hat{g}(s)\|_{0, \Gamma_L}^2$, $\varepsilon^3 \|\mathbf{f}^\varepsilon(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 = \|\hat{f}(s)\|_{0, \Omega}^2$ et $\varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 \leq \|\nabla \hat{u}_0\|_{0, \Omega}^2$, dans la partie droite de la dernière inégalité, et passant au domaine fixe Ω dans la coté gauche, pour obtenir

$$\begin{aligned} &m_a \left(\sum_{\alpha=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial z}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \varepsilon^2 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \varepsilon^4 \sum_{\beta=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\beta}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 \right) \\ &+ m_b \int_0^t \left(\sum_{\alpha=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial z \partial t}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z \partial t}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \varepsilon^2 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta \partial t}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \varepsilon^4 \sum_{\beta=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\beta \partial t}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 \right) ds \\ &\leq \frac{2}{C_K} \left\{ \frac{3}{2} \|\hat{\mathcal{A}}\|_{Q_\infty} \|\nabla \hat{u}_0\|_{0, \Omega}^2 + \frac{(h_{\max})^2}{m_b C_K} \int_0^t \|\hat{f}(s)\|_{0, \Omega}^2 ds + \frac{(C_0)^2}{m_b C_K} \int_0^t \|\hat{g}(s)\|_{0, \Gamma_L}^2 ds \right\} \end{aligned}$$

Donc, on trouve les estimations (3.3) et (3.4) avec $m = \min(m_a, m_b)$ et

$$C = \frac{2}{mC_K} \left\{ \frac{3}{2} \|\hat{\mathcal{A}}\|_{Q_\infty} \|\nabla \hat{u}_0^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \frac{(h_{\max})^2}{mm_b C_K} \|\hat{f}\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)^3)}^2 + \frac{(C_0)^2}{m_b C_K} \|\hat{g}\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma_L)^3)}^2 \right\}.$$

□

A partir des estimations (3.3)-(3.4), on obtient la convergence de la solution $\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon$ de problème (3.1) – (3.2).

Corollaire 3.2.1. Il existe $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ dans $W^{1,2}(0, T; V_z)$ tel que

$$(\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon) \rightharpoonup (u_1^*, u_2^*) \text{ faiblement dans } W^{1,2}(0, T; V_z), \quad (3.9)$$

$$\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta} \rightharpoonup 0, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\beta} \rightharpoonup 0, \quad \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.10)$$

Preuve. On remarque que (3.3) et (3.4) implique que pour $\alpha = 1, 2$

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C, \quad \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \quad (3.11)$$

On applique l'inégalité de Poincaré dans le domaine $\Omega \times (0, T)$, et par une simple comparaison des deux relations dans (3.11), nous trouvons

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_\alpha^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq h_{\max} \left\| \frac{\partial \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq h_{\max} C, \\ \left\| \frac{\partial \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq h_{\max} \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_\alpha^\varepsilon}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq h_{\max} C. \end{aligned}$$

Clairement, $(\hat{u}_\alpha^\varepsilon)_{\alpha=1,2}$ est borné dans $W^{1,2}(0, T; V_z) \cap L^\infty(0, T; V_z)$, de plus la convergence (3.9) peut être facilement déduit par l'injection $W^{1,2}(0, T; V_z) \hookrightarrow C(0, T; V_z)$ comme dans ([15], Lemme 2.3.1.). Aussi (3.10) découle a partir de (3.3) – (3.4) et (3.9).

□

3.3 Résultat de convergence et problème limite

Dans cette section, nous donnons les équations satisfaites de u^* dans $\Omega \times [0, T]$ et nous pouvons montrer le correspondant conditions aux limites obtenues pour le système (2.1)-(2.7). Pour la suite de cet article, nous désignerons par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the inner product on the space $L^2(\Omega)^2$.

Théorème 3.3.1. u^* satisfait l'inégalité variationnelle suivante

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial u^*}{\partial z}(t), \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v} - \dot{u}^*(t)) \right\rangle + \left\langle \mathcal{B}^* \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(t), \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v} - \dot{u}^*(t)) \right\rangle + \int_{\omega} \hat{k} (|\mathbf{v}| - |\dot{u}^*(t)|) dx' \geq \\ \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Gamma_L^\varepsilon} \hat{g}_\alpha(t) (v_\alpha - \dot{u}_\alpha^*(t)) d\rho + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_\alpha(t) (v_\alpha - \dot{u}_\alpha^*(t)) dx \quad \forall \mathbf{v} \in \Pi(V), \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$u^*(0) = \underline{\hat{u}}_0^\varepsilon \quad (3.13)$$

où la matrice est $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*$ sont donnés par

$$\mathcal{A}^* = 2 \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{A}}_{1313} & \hat{\mathcal{A}}_{1323} \\ \hat{\mathcal{A}}_{2313} & \hat{\mathcal{A}}_{2323} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}^* = 2 \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{B}}_{1313} & \hat{\mathcal{B}}_{1323} \\ \hat{\mathcal{B}}_{2313} & \hat{\mathcal{B}}_{2323} \end{pmatrix}$$

et $\underline{\hat{u}}_0^\varepsilon = (\hat{u}_{01}^\varepsilon, \hat{u}_{02}^\varepsilon)$. De plus, on a

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mathcal{A}^* \frac{\partial u^*}{\partial z} + \mathcal{B}^* \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z} \right\} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2) \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)^2) \quad (3.14)$$

$$u^*(0) = \underline{\hat{u}}_0^\varepsilon.$$

Preuve. Soit $t \in [0, T]$. Par l'intégrale de (3.1) relative à t , on trouve pour chaque $\mathbf{v} \in V$

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[\Lambda(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(s), \mathbf{v}) + \Lambda(\hat{\mathcal{B}}, \partial_t \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(s), \mathbf{v}) + J(\mathbf{v}) \right] ds + \frac{1}{2} \Lambda(\hat{\mathcal{A}}, \hat{u}_0^\varepsilon, \hat{u}_0^\varepsilon) \geq \\ \frac{1}{2} \Lambda(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(t), \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) + \int_0^t \Lambda(\hat{\mathcal{B}}^2, \partial_t \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(s), \partial_t \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)) ds + \int_0^t J(\partial_t \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(s)) ds \\ + \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t \int_{\Gamma_L} \hat{g}_\alpha(s) (v_\alpha - \partial_t \hat{u}_\alpha^\varepsilon(s)) d\rho ds + \varepsilon \int_0^t \int_{\Gamma_L} \hat{g}_3(s) (v_3 - \partial_t \hat{u}_3^\varepsilon(s)) d\rho ds \\ + \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} \hat{f}_\alpha(s) (v_\alpha - \partial_t \hat{u}_\alpha^\varepsilon(s)) dx ds + \varepsilon \int_0^t \hat{f}_3(s) (v_3 - \partial_t \hat{u}_3^\varepsilon(s)) dx ds. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Depuis la forme $\Lambda(\hat{\mathcal{C}}, \cdot, \cdot)$ est une symétrie et V -elliptique, en utilisant les convergences (3.10), on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(t), \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \geq 2 \sum_{\alpha, \gamma=1}^2 \int_{\Omega} \hat{\mathcal{A}}_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial z} \frac{\partial u_\gamma^*}{\partial z} dx$$

Cette formule peut être réécrite en utilisant la forme matricielle \mathcal{A}^* comme suit

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(t), \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(t)) \geq \left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial u^*}{\partial z}(t), \frac{\partial u^*}{\partial z}(t) \right\rangle. \quad (3.16)$$

Un argument similaire à celui utilisé pour (3.16) montre que la fonctionnelle

$$t \longrightarrow \int_0^t \Lambda \left(\hat{\mathcal{B}}, \partial_t \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(s), \partial_t \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) \right) ds$$

est semi-continu inférieur pour la topologie faible de $W^{1,2}(0, T; V_z)$. Puis

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \Lambda \left(\hat{\mathcal{B}}, \partial_t \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(s), \partial_t \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(s) \right) ds \geq \int_0^t \left\langle \mathcal{B}^* \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(s), \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(s) \right\rangle ds \quad (3.17)$$

De (3.16)-(3.17) et (3.9)-(3.10), et par la semi-continuité de $t \longrightarrow \int_0^t J(\dot{u}^*(s)) ds$, on laisse ε tendre vers 0 dans (3.15), obtenir

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial u^*}{\partial z}(t), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\rangle + \int_0^t \left\langle \mathcal{B}^* \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(s), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\rangle ds + \int_0^t J(\mathbf{v}) ds + \frac{1}{2} \left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial z} \right\rangle \geq \\ & \frac{1}{2} \left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial u^*}{\partial z}(t), \frac{\partial u^*}{\partial z}(t) \right\rangle + \int_0^t \left\langle \mathcal{B}^* \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(s), \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(s) \right\rangle ds + \int_0^t J(\dot{u}^*(s)) ds \\ & + \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t \int_{\Gamma_L} \hat{g}_\alpha(s) (v_\alpha - \dot{u}_\alpha^*(s)) d\rho ds + \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t \int_\Omega \hat{f}_\alpha(s) (v_\alpha - \dot{u}_\alpha^*(s)) dx ds \end{aligned}$$

avec

$$u^*(0) = \underline{\hat{u}}_0^\varepsilon$$

La condition $u^*(0) = \underline{\hat{u}}_0^\varepsilon$ est une conséquence immédiate de (3.9) et (3.2). Ainsi, par l'égalité suivante

$$\int_0^t \left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial u^*}{\partial z}(s), \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(s) \right\rangle ds = \frac{1}{2} \left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial u^*}{\partial z}(t), \frac{\partial u^*}{\partial z}(t) \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial z} \right\rangle \quad (3.18)$$

nous concluons que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial}{\partial z} u^*(s), \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v} - \dot{u}^*(s)) \right\rangle + \left\langle \mathcal{B}^* \frac{\partial}{\partial z} \dot{u}^*(s), \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v} - \dot{u}^*(s)) \right\rangle + J(\mathbf{v}) - J(\dot{u}^*(s)) \right] ds \geq \\ & \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t \int_{\Gamma_L} \hat{g}_\alpha(s) (v_\alpha - \dot{u}_\alpha^*(s)) d\rho ds + \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t \int_\Omega \hat{f}_\alpha(s) (v_\alpha - \dot{u}_\alpha^*(s)) dx ds. \end{aligned}$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à utiliser la même méthode que celle utilisée dans [10] pour dériver la relation (3.12). Prouver (3.14), on utilise la formule de Green dans (3.12) et ceci complète la preuve du théorème 3.3.1. □

Théorème 3.3.2. Le problème limite (3.12)-(3.13) admet une unique solution u^* dans $W^{1,2}(0, T; V_z)$.

Preuve. Soit $u^{*,1}, u^{*,2}$ deux solutions de (4.1) – (4.2) et soit $t \in [0, T]$. Prendre $\mathbf{v} = u^{*,2}$ dans (3.12)-(3.13) et $\mathbf{v} = u^{*,1}$ dans l'inégalité relative à $u^{*,2}$, il s'ensuit en posant $\mathbf{w}^* =$

$u^{*,2} - u^{*,1}$ cette

$$\left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial z}(t), \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}^*}{\partial z}(t) \right\rangle + \left\langle \mathcal{B}^* \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}^*}{\partial z}(t), \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}^*}{\partial z}(t) \right\rangle \leq 0.$$

Depuis $u^{*,1}(0) = u^{*,2}(0) = \hat{u}_0$, en utilisant (3.18), on en déduit que

$$\frac{1}{2} \left\langle \mathcal{A}^* \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial z}(t), \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial z}(t) \right\rangle + \int_0^t \left\langle \mathcal{B}^* \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}^*}{\partial z}(s), \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}^*}{\partial z}(s) \right\rangle ds \leq 0 \quad (3.19)$$

Il faut maintenant vérifier que la matrice $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*$ sont l'ellipticité. Soit $\eta = (\eta_\alpha)_{\alpha=1,2} \in \mathbb{R}^2$, nous revenons, maintenant à les hypothèses (2.8)-(2.9), en choisissant des tenseurs symétriques ξ est donné par $\xi_{\alpha\beta} = 0$, pour $\alpha, \beta = 1, 2$, $\xi_{33} = 0$ et $\xi_{\alpha 3} = \xi_{3\alpha} = \eta_\alpha$, pour $\alpha = 1, 2$, on aura

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij} &= 2\hat{\mathcal{A}}_{\alpha\beta\beta 3} \xi_{\beta 3} \xi_{\alpha 3} + 2\hat{\mathcal{A}}_{\alpha 333} \xi_{33} \xi_{\alpha 3} + 2\hat{\mathcal{A}}_{33\alpha 3} \xi_{\alpha 3} \xi_{33} + \hat{\mathcal{A}}_{3333} \xi_{33} \xi_{33} \\ &= \mathcal{A}_{\alpha\beta}^* \eta_\beta \eta_\alpha \end{aligned}$$

De la même manière, on a pour la matrice \mathcal{B}^* . En conséquence, et comme $|\xi|^2 = 2|\eta|^2$, conduit à

$$\mathcal{A}^* \eta \cdot \eta \geq 2m_a |\eta|^2, \quad \mathcal{B}^* \eta \cdot \eta \geq 2m_b |\eta|^2$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent, l'inégalité (3.19) devient

$$2m_a \left\| \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial z}(t) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + 2m_b \int_0^t \left\| \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}^*}{\partial z}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 ds \leq 0.$$

Comme $m_a, m_b > 0$, et par l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^*(t)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 &\leq h_{\max}^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial z}(t) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 = 0, \\ \int_0^t \|\dot{\mathbf{w}}^*(s)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 ds &\leq h_{\max}^2 \int_0^t \left\| \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}^*}{\partial z}(s) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 ds = 0, \end{aligned}$$

on en déduit que $\mathbf{w}^* = 0$ dans $L^2(0, T; V_z)$, dans $\dot{\mathbf{w}}^* = 0$ dans $L^2(0, T; V_z)$, ce qui conclut l'unicité de problème (3.12), (3.13). □

Théorème 3.3.3. Sous les hypothèses du théorème 3.3.2. , les traces $\{\mathbf{s}^*, \pi^*\}$ avec $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*)$ et $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*)$ défini par

$$\mathbf{s}^*(x', t) = u^*(x', 0, t)$$

$$\pi^*(x', t) = \mathcal{A}^*(x', 0) \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0, t) + \mathcal{B}^*(x', 0) \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(x', 0, t) \quad (3.20)$$

satisfont la forme limite suivante des conditions aux limites de Tresca :

$$\int_{\omega} \hat{k} \left| \psi + \frac{\partial \mathbf{s}^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial \mathbf{s}^*}{\partial t} \right| dx' - \int_{\omega} \pi^* \cdot \psi dx' \geq 0 \quad \forall \psi \in L^2(\omega)^2, \forall t \in [0, T], \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\pi^*| < \hat{k} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{s}^*}{\partial t} = 0 \\ |\pi^*| = \hat{k} \Rightarrow \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \frac{\partial \mathbf{s}^*}{\partial t} = \lambda \pi^* \end{array} \right\} \text{ a.e. sur } \omega \times [0, T] \quad (3.22)$$

Preuve. Pour chaque $t \in [0, T]$, on a choisi dans l'inégalité variationnelle (3.12) $\mathbf{v} = \dot{u}^*(t) + \psi$, où ψ dans $H_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}^1(\Omega)^2$ et en utilisant la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mathcal{A}^*(x', z) \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', z, t) + \mathcal{B}^*(x', z) \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(x', z, t) \right\} \cdot \psi dx' dz \\ & - \int_{\omega} \left(\mathcal{A}^*(x', 0) \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0, t) + \mathcal{B}^*(x', 0) \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial z}(x', 0, t) \right) \cdot \psi(x', 0) dx' \\ & + \int_{\omega} \hat{k} (|\psi + \dot{u}^*(t)| - |\dot{u}^*(t)|) dx' \geq \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_{\alpha}(t) \cdot \psi_{\alpha} dx' dz \end{aligned}$$

L'addition de la dernière formule et (3.12),(3.20), conduit à

$$\int_{\omega} \hat{k} (|\psi + \dot{u}^*(t)| - |\dot{u}^*(t)|) dx' - \int_{\omega} \pi^*(x', t) \cdot \psi(x', 0) dx' = 0$$

Par théorèmes de densité on en déduit (3.21). Pour prouver (3.22), on utilise un argument similaire à celui utilisé dans preuve du théorème 3.3.2. , dans [1]. □

3.4 Unicité de la solution du problème limite

Théorème 3.4.1. Supposons que les composants $\hat{\mathcal{A}}_{\alpha 3 \beta 3}, \hat{\mathcal{B}}_{\alpha 3 \beta 3}$ pour $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$, en fonction uniquement de la variable x' , on a la forme faible suivante :

$$\int_{\omega} \left(\int_0^h [\mathcal{A}^* u^*(x', z, t) + \mathcal{B}^* \dot{u}^*(x', z, t)] dz + \frac{h^2}{2} \pi^*(x', t) - \tilde{F}(x', t) \right) \cdot \nabla \psi(x') dx' = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\omega), \forall t \in [0, T] \quad (3.23)$$

où le vecteur $\tilde{F} = \left(\tilde{F}_{\alpha} \right)_{\alpha=1,2}$ est donné par

$$\tilde{F}_{\alpha}(x'; t) = \int_0^h F_{\alpha}(x', z, t) dz - h F_{\alpha}(x', h, t), \text{ et } F_{\alpha}(x', z, t) = \int_0^z \int_0^w \hat{f}_{\alpha}(x', y, t) dy dw. \quad (3.24)$$

Preuve. En intégrant l'égalité (3.14) sur $[0, z]$ temps de remorquage, et en tenant compte $\hat{\mathcal{A}}_{\alpha 3\beta 3}$ et $\hat{\mathcal{B}}_{\alpha 3\beta 3}$ ne dépend que de x' , on en déduit

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}^*(x') u^*(x', z, t) - \mathcal{B}^*(x') \dot{u}^*(x', z, t) + \mathcal{A}^*(x') \dot{\mathbf{s}}^*(x', t) \\ + \mathcal{B}^*(x') \dot{\mathbf{s}}^*(x', t) + z\pi^*(x', t) = F(x', z, t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

pour tout $t \in [0, T]$. Comme $u_\alpha^*(x', h(x'), t) = 0$, $\alpha = 1, 2$ on a

$$\mathcal{A}^*(x') \mathbf{s}^*(x', t) + \mathcal{B}^*(x') \dot{\mathbf{s}}^*(x', t) + h\pi^*(x', t) = F(x', h, t) \quad (3.26)$$

on intègre (3.25) de 0 à $h(x')$, on obtient

$$\begin{aligned} - \int_0^{h(x')} (\mathcal{A}^*(x') u^*(x', z, t) + \mathcal{B}^*(x') \dot{u}^*(x', z, t)) dz + \\ + h\mathcal{A}^*(x') \mathbf{s}^*(x', t) + h\mathcal{B}^*(x') \dot{\mathbf{s}}^*(x', t) + \frac{h^2}{2}\pi^*(x', t) \\ = \int_0^{h(x')} F(x', z, t) dz \end{aligned}$$

De cette égalité et de (3.26), on déduit la relation

$$\int_0^{h(x')} [\mathcal{A}^*(x') u^*(x', z, t) + \mathcal{B}^*(x') \dot{u}^*(x', z, t)] dz + \frac{h^2}{2}\pi^*(x', t) - \tilde{F}(x', t) = 0 \quad (3.27)$$

tel que \tilde{F} est déjà défini dans (3.24), obtenons enfin la forme faible (3.23) si nous multiplions (3.27) par $\nabla\psi(x')$ et l'intégrer dans ω . □

Chapitre 4

Analyse asymptotique d'un problème anisotrope stationnaire pour l'élasticité linéaire

4.1 Introduction et position du problème

4.2 Estimations des solutions

4.3 Résultats de convergence et problème limite

4.1 Introduction et position du problème

Considérons un milieu élastique anisotrope qui occupe un domaine représentée par l'ouvert $\Omega = \omega \times]0, h(x')[$, où ω est un domaine Lipschitzienne borné de \mathbb{R}^2 d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω . On suppose que h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que

$$0 < \underline{h} \leq h(x') \leq \bar{h} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

La frontière de Ω est notée $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$, avec Γ_1 est la frontière supérieure d'équation $x_3 = h(x')$ et Γ_L est la frontière latérale.

Soit $\varepsilon > 0$, on définit Ω^ε par la bijection entre les points de Ω^ε et de Ω donnée par

$$(x, x_3) \in \Omega^\varepsilon \Leftrightarrow (x, z) \in \Omega \text{ et } z = \frac{x_3}{\varepsilon}.$$

et

$$\Gamma_1^\varepsilon = \{(x, \varepsilon h(x)) ; x \in \omega\};$$

$$\Gamma_L^\varepsilon = \{(x, x_3) ; x \in \partial\omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x)\}.$$

On a $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ la frontière de Ω^ε .

Ceci produit automatiquement une correspondance entre les fonctions $\phi : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\hat{\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $\hat{\phi}(x, z) = \phi(x, x_3)$.

Nous considérons un problème de déformations d'un corps élastique anisotrope et non homogène dans le domaine Ω^ε est soumis à une force volumique de densité $\mathbf{f}^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, f_3^\varepsilon)$ défini par

$$\hat{\mathbf{f}}^\varepsilon(x, z) = \varepsilon^2 \mathbf{f}^\varepsilon(x, x_3),$$

telle que $\hat{\mathbf{f}}^\varepsilon \in L^2(\Omega)^3$. Notons par $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ le vecteur déplacement, et par $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ le tenseur de contraintes. On a

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) = E_{ijkl} \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) \text{ dans } \Omega^\varepsilon; \quad (4.1)$$

$$\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (4.2)$$

où

$$E_{ijkl} \in L^\infty(\Omega^\varepsilon)$$

sont des composantes du tenseur de Hooke E du quatrième ordre représentent les propriétés élastiques du matériau.

On suppose que E symétrique;

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}$$

et satisfait par la condition d'ellipticité :

$$\exists c > 0 \text{ tel que } E_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c|\xi|^2$$

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant pour ce système, conduit à l'équation d'un processus d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon \quad (4.3)$$

Sur Γ^ε , on décompose \mathbf{u}^ε et $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ en composantes normale et tangentielle comme suit

$$u_\nu^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nu, \quad u_\tau^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon - u_\nu^\varepsilon \cdot \nu, \quad \sigma_\nu^\varepsilon = (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \cdot \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau^\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \cdot \nu - (\sigma_\nu^\varepsilon) \cdot \nu,$$

où ν représente la normale sortante de la frontière du domaine Ω^ε .

Soit $g = (g_1, g_2, g_3) \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^3$ est une fonction donnée avec

$$g_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_L \text{ et } \int_\Gamma g \cdot n ds = 0. \quad (4.4)$$

On pose $\mathbf{g}^\varepsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega^\varepsilon)^3$ telle que $\mathbf{g}^\varepsilon(x, x_3) = g(x, z)$.

On différencie alors :

- Γ_L^ε , la surface où l'on impose

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{g}^\varepsilon \quad (4.5)$$

- Γ_1^ε , la surface où on a de condition de Dirichlet

$$\mathbf{u}^\varepsilon = 0 \quad (4.6)$$

- ω , la surface en contact. le déplacement est inconnue et supposée satisfait à la condition limite de Tresca d'un seuil de frottement $\varepsilon^{-1}k$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nu = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| < \varepsilon^{-1}k \implies u_\tau^\varepsilon = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = \varepsilon^{-1}k \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon \end{cases} \quad (4.7)$$

où $k \in L^\infty(\omega)$ fonction donnée et positive p.p sur ω (ne dépend de ε), $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 , et s désigne la vitesse de cisaillement qui est supposé connu et égal \mathbf{g}^ε . La troisième composante de \mathbf{u}^ε est sera nul sur Γ^ε pendant le processus.

On utilise aussi les notations

$$K^\varepsilon = \left\{ \phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : \phi = \mathbf{g}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \phi \cdot \nu = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1^\varepsilon \right\},$$

où $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ l'espace de Sobolev est munit de la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega^\varepsilon}$, où la norme de $(L^2(\Omega^\varepsilon))^3$ sera noté $\|\cdot\|_{0,\Omega^\varepsilon}$. Pour $\phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, on définit

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi) &= \int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl} \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{e}_{ij}(\phi) dx dx_3, \\ J^\varepsilon(\phi) &= \int_{\omega} \varepsilon^{-1} k |\phi - s| dx. \end{aligned}$$

De [6] la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est coercive et continue sur $K^\varepsilon \times K^\varepsilon$. Soient ψ et ϕ des éléments de K^ε , on a

$$a(\psi, \psi) \geq c \|\mathbf{e}(\psi)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2, \quad (4.8)$$

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \bar{E} \|\mathbf{e}(\phi)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\mathbf{e}(\psi)\|_{0,\Omega^\varepsilon}. \quad (4.9)$$

où $\bar{E} = \sup |E_{ijkl}(x)|$ et la fonctionnelle J^ε est convexe, semi-continue inférieurement et propre sur K^ε .

Par la formule de Green et par la remarque [10] qu'on peu décrire la loi (4.7) de façon équivalente à la relation :

$$(u_\tau^\varepsilon - s) \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| = 0 \quad (4.10)$$

alors la formulation variationnelle du problème (4.1) – (4.7), s'écrit

$$\begin{aligned} P^\varepsilon : \text{Trouver } \mathbf{u}^\varepsilon \in K^\varepsilon, \text{ telle que} \\ a(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi - \mathbf{u}^\varepsilon) + J^\varepsilon(\phi) - J^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \geq \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f}^\varepsilon(\phi - \mathbf{u}^\varepsilon) dx \quad \forall \phi \in K^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Comme la fonctionnelle J^ε est convexe, semi-continue inférieurement et propre sur K^ε donc d'après la théorie des inéquations variationnelles (voir par exemple [15]), le problème P^ε admet une solution unique \mathbf{u}^ε . On va chercher dans la suite des estimations a priori sur la solution \mathbf{u}^ε .

4.2 Estimations des solutions

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on fait un changement de domaine en utilisant le changement $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$. On définit sur Ω les nouvelles inconnues $\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon = (\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon, \hat{u}_3^\varepsilon)$

$$\hat{u}_i^\varepsilon(x, z) = u_i^\varepsilon(x, x_3) \quad 1 \leq i \leq 3$$

On définit le tenseur de déformation $(\hat{\mathbf{e}}_{ij}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon))_{1 \leq i, j \leq 3}$ par les relations

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_{ij}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) & 1 \leq i, j \leq 2 \\ \hat{\mathbf{e}}_{i3}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) &= \hat{\mathbf{e}}_{3i}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) & 1 \leq i \leq 2 \\ \hat{\mathbf{e}}_{33}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω comme ce qui suit :

$$K = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3 : \mathbf{v} = \hat{G} \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

$$V_z = \left\{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in L^2(\Omega)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}.$$

V_z est un espace de Banach pour la norme :

$$\|\mathbf{v}\|_{V_z} = \left[\sum_{i=1}^3 \left(\|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ci-dessous, les indices α, β, γ et δ sont compris entre 1 et 2 et la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée. En utilisant la symétrie de \hat{E} et si l'on multiplie P par ε puis en passant au domaine fixe Ω on trouve problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{P}^\varepsilon : \text{Trouver } \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon \in K, \text{ telle que :} \\ \hat{a}^\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon, \hat{\phi} - \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) + \int_\omega \hat{k} |\hat{\phi} - s| dx - \int_\omega \hat{k} |\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon - s| dx \geq \\ \sum_{i=1}^3 (\hat{f}_i^\varepsilon, \hat{\phi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon), \quad \forall \hat{\phi} \in K \end{array} \right. \quad (4.12)$$

où

$$\hat{E}(x, z) = E(x, x_3)$$

et

$$\begin{aligned}
\hat{a}^\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon, \hat{\phi}) &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} \hat{E}_{\alpha\beta\gamma\theta} \hat{\mathbf{e}}_{\gamma\theta}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial x_\beta} dx dz + 2\varepsilon \int_{\Omega} \hat{E}_{\alpha 3\gamma\theta} \hat{\mathbf{e}}_{\gamma\theta}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial z} dx dz \\
&+ 2\varepsilon^2 \int_{\Omega} \hat{E}_{\alpha\beta\gamma 3} \hat{\mathbf{e}}_{\gamma 3}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial x_\beta} dx dz + 4\varepsilon \int_{\Omega} \hat{E}_{\alpha 3\gamma 3} \hat{\mathbf{e}}_{\gamma 3}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial z} dx dz \\
&+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \hat{E}_{\alpha\beta 33} \hat{\mathbf{e}}_{33}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial x_\beta} dx dz + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \hat{E}_{33\alpha\beta} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial z} dx dz \\
&+ 2\varepsilon \int_{\Omega} \hat{E}_{\alpha 333} \hat{\mathbf{e}}_{33}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial z} dx dz + 2\varepsilon^2 \int_{\Omega} \hat{E}_{33\alpha 3} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha 3}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial z} dx dz \\
&+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \hat{E}_{3333} \hat{\mathbf{e}}_{33}(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial z} dx dz
\end{aligned}$$

Lemme 4.2.1. Etant donné $\mathbf{f}^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3$ et $k \in L_+^\infty(\omega)$, on suppose que E_{ijkl} sont des fonction positive dans $L^\infty(\Omega^\varepsilon)$, et satisfait

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad (4.13)$$

et

$$\exists c > 0 \text{ tel que } E_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c |\xi|^2 \quad (4.14)$$

Alors, il existe des constantes $C > 0$ ne dépend pas de ε telle que :

$$\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C \quad (4.15)$$

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq C, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.16)$$

Preuve. On a l'inégalité de Poincaré et de Korn,

$$\|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \varepsilon \bar{h} \|\nabla \phi\|_{0,\Omega^\varepsilon} \quad (4.17)$$

$$\|\nabla \phi\|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \bar{c}_K \|\mathbf{e}(\phi)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \text{ Pour tout } \phi \in K^\varepsilon \quad (4.18)$$

où C_K est une constante positive qui ne dépend pas de ε et de ϕ . Soit u^ε la solution du problème $-P^\varepsilon$, donc

$$a(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \leq a(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi) + J^\varepsilon(\phi) + (\mathbf{f}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - (\mathbf{f}^\varepsilon, \phi) \quad \forall \phi \in K^\varepsilon$$

D'après (4.8) et par la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$, il existe une constante \bar{c}_K indépendante de ε telle que

$$a(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \geq \bar{c}_K \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2.$$

D'autre part, à partir de (4.9) on utilise l'inégalité de Yong, et le fait que $|e(\phi)|^2 \leq |\nabla\phi|^2$, on trouve

$$|a(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi)| \leq \frac{\bar{c}_K}{4} \|\nabla\mathbf{u}^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\bar{E}}{\bar{c}_K} \|\nabla\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \quad (4.19)$$

Et en appliquant les inégalités de Cauchy- Schwartz et de Poincaré on obtient

$$\begin{aligned} |(\mathbf{f}^\varepsilon, \phi)| &\leq \varepsilon h^* \|\mathbf{f}^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\nabla\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon} \\ &\leq \frac{(\varepsilon\bar{h})^2}{2\bar{c}_K} \|\mathbf{f}^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\bar{c}_K}{2} \|\nabla\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

En utilisant (4.17) – (4.20) puis en multipliant le deux membre par ε , on obtient

$$\frac{\bar{c}_K}{4} \varepsilon \|\nabla\mathbf{u}^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq \frac{\bar{E}}{\bar{c}_K} \varepsilon \|\nabla\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{(\varepsilon\bar{h})^2}{\bar{c}_K} \varepsilon \|\mathbf{f}^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\bar{c}_K}{2} \varepsilon \|\nabla\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_\omega k |\phi - s| dx \quad (4.21)$$

alors après passage au domain fixe dans la deuxieme member de (4.21), on choisit $\hat{\phi} = G$ telle que $G \in H^1(\Omega)^3$ est un relèvement de g sur Ω vérifiant

$$G = g \text{ sur } \Gamma_L, \quad G \cdot \nu = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1.$$

on obtient donc

$$\frac{\bar{c}_K}{4} \varepsilon \|\nabla\mathbf{u}^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq \frac{(\bar{h})^2}{\bar{c}_K} \|\hat{f}^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 + \left(\frac{\bar{E}}{\bar{c}_K} + \frac{\bar{c}_K}{2} \right) \|\nabla G\|_{0,\Omega}^2 + c(\Omega) \|\hat{k}\|_{\infty,\omega} \|G\|_{0,\Omega}$$

telle que $c(\Omega) \succ 0$ est une constante de l'application de trace. On trouve finalement

$$\begin{aligned} &\varepsilon \|\nabla\mathbf{u}^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 + \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C \end{aligned}$$

où

$$C = \frac{4}{\bar{c}_K} \left[\frac{(\bar{h})^2}{\bar{c}_K} \|\hat{f}^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 + \left(\frac{\bar{E}}{\bar{c}_K} + \frac{\bar{c}_K}{2} \right) \|\nabla G\|_{0,\Omega}^2 + c(\Omega) \|\hat{k}\|_{\infty,\omega} \|G\|_{0,\Omega} \right].$$

D'où (4.15). Pour démontrer (4.16) portant l'inégalité de Poincaré en particulier dans (4.15). \square

4.3 Résultats de convergence et problème limite

Lemme 4.3.1. Sous les hypothèses du lemme 4.2.1. , il existe $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*) \in V_z$, tel que pour toute sous suite de $\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon$ notée encore $\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon$ on a les résultats de convergences suivants :

$$\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon \rightharpoonup u^* \text{ dans } V_z \quad (4.22)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } \alpha = 1, 2. \quad (4.23)$$

Preuve. D'après (4.16), u^* est borné dans V_z , c'est-à-dire que l'existence de u^* dans V_z tel que $\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon$ converge faiblement vers u^* dans V_z . Grâce au (4.15) on a :

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right\|_{0,\Omega} \leq c \quad i = 1, 2, 3$$

donc $\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_\alpha}$ converge vers $\frac{\partial u_i^*}{\partial x_\alpha}$, ce qui donne (4.23). □

Dans la suite, nous donnons les équations satisfaites u^* en Ω et les inégalités pour la trace de la vitesse et la contrainte sur ω .

Lemme 4.3.2. Sous les hypothèses du lemme 4.3.1. , on a l'inégalité variationnelle suivants :

alors

$$\begin{aligned} & \left\langle E^* \frac{\partial u^*}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi} - u^*) \right\rangle + \int_\omega k (|\hat{\phi} - s| - |u^* - s|) dx \\ & \geq \int_\Omega \hat{f}^\varepsilon (\hat{\phi} - u^*) dx dz, \end{aligned} \quad (4.24)$$

Où

$$E^* = \begin{pmatrix} 4\hat{E}_{1313} & 4\hat{E}_{1323} & 2\hat{E}_{1333} \\ 4\hat{E}_{2313} & 4\hat{E}_{2323} & 2\hat{E}_{2333} \\ 2\hat{E}_{3313} & 2\hat{E}_{3323} & \hat{E}_{3333} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit dualité dans $L^2(\Omega)^3$.

Preuve. En passant le terme $\hat{a}^\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon)$ et $\int_\omega \hat{k} |\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon| dx$ sur la gauche dans l'inégalité variationnelle (4.12). Puis, on applique le $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$ sur la gauche et le $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ la droite, en

utilisant les résultats de convergence (4.22) – (4.23) du Lemme 4.3.1., on en déduit

$$\begin{aligned}
 & 4 \int_{\Omega} \hat{E}_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial u_{\gamma}^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi}_{\alpha} - u_{\alpha}^*) dx dz + 2 \int_{\Omega} \hat{E}_{\alpha 3 3 3} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi}_{\alpha} - u_{\alpha}^*) dx dz \\
 & + 2 \int_{\Omega} \hat{E}_{3 3 \alpha 3} \frac{\partial u_{\alpha}^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi}_3 - u_3^*) dx dz + 2 \int_{\Omega} \hat{E}_{3 3 3 3} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi}_3 - u_3^*) dx dz + \\
 & \int_{\omega} k (|\hat{\phi} - s| - |u^* - s|) dx \geq \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \hat{f}_i^{\varepsilon} (\hat{\phi}_i - u_i^*) dx dz
 \end{aligned}$$

ce qui bien démontré (4.24) et (4.25). □

Théorème 4.3.1. Avec les mêmes hypothèses du lemme 4.3.2. , u^* vérifie

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ 4\hat{E}_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial u_{\gamma}^*}{\partial z} + 2\hat{E}_{\alpha 3 3 3} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right\} &= \hat{f}_{\alpha}^{\varepsilon} \\
 -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ 2\hat{E}_{3 3 \alpha 3} \frac{\partial u_{\alpha}^*}{\partial z} + \hat{E}_{3 3 3 3} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right\} &= \hat{f}_3^{\varepsilon}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

dans $L^2(\Omega)$.

Preuve. On choisit maintenant dans l'inéquation variationnelle (4.12)

$$\hat{\phi}_i = u_i^* \pm \psi_i, \quad \psi_i \in H_0^1(\Omega) \quad i = 1, 2, 3$$

et en utilisant la formule de Green, on trouve :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 4\hat{E}_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial u_{\gamma}^*}{\partial z} + 2\hat{E}_{\alpha 3 3 3} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right\} \psi_{\alpha} dx dz + \\
 & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 2\hat{E}_{3 3 \alpha 3} \frac{\partial u_{\alpha}^*}{\partial z} + \hat{E}_{3 3 3 3} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right\} \psi_3 dx dz \\
 & = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \hat{f}_i^{\varepsilon} \psi_i dx dz
 \end{aligned}$$

en choisissant $\psi_3 = 0$ et $\psi_{\alpha} \in H_0^1(\Omega)$, puis $\psi_{\alpha} = 0$ et $\psi_3 \in H_0^1(\Omega)$, on obtient (4.26). □

Théorème 4.3.2. Sous les mêmes hypothèses du théorème 4.3.1. , on a :

$$\int_{\omega} k |\psi + s^* - s| - |s^* - s| dx - \int_{\omega} \pi^* \psi dx \geq 0 \quad \forall \psi \in L^2(\omega)^3 \tag{4.27}$$

$$\begin{cases} |\pi^*| < k \Rightarrow s^* = s \\ |\pi^*| = k \Rightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } s^* = s + \beta \pi^* \end{cases} \tag{4.28}$$

avec

$$s^*(x) = u^*(x, 0) \tag{4.29}$$

et

$$\begin{aligned} \pi^* &= (\pi_\alpha^*, \pi_3^*) \quad \text{où} \\ \pi_\alpha^*(x) &= \left[4\hat{E}_{\alpha 3\gamma 3} \frac{\partial u_\gamma^*}{\partial z} + 2\hat{E}_{\alpha 333} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right] (x, 0) \\ \pi_3^*(x) &= \left[2\hat{E}_{33\alpha 3} \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial z} + 2\hat{E}_{3333} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right] (x, 0) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Preuve. On choisit maintenant dans l'inéquation variationnelle (4.12)

$$\hat{\phi}_i = u_i^* + \psi_i, \quad \psi_i \in H_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}^1(\Omega) \quad i = 1, 2, 3$$

puis en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 4\hat{E}_{\alpha 3\gamma 3} \frac{\partial u_\gamma^*}{\partial z} + 2\hat{E}_{\alpha 333} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right\} \psi_\alpha dx dz - \\ & \int_{\omega} \left(4\hat{E}_{\alpha 3\gamma 3} \frac{\partial u_\gamma^*}{\partial z} + 2\hat{E}_{\alpha 333} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right)_{|_{\omega}} (\psi_\alpha)_{|_{\omega}} dx \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 2\hat{E}_{33\alpha 3} \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial z} + 2\hat{E}_{3333} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right\} \psi_3 dx dz - \\ & \int_{\omega} \left(2\hat{E}_{33\alpha 3} \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial z} + 2\hat{E}_{3333} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right)_{|_{\omega}} (\psi_3)_{|_{\omega}} dx \\ & \int_{\omega} k (|\psi + s^* - s| - |u^* - s|) dx \geq \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \hat{f}_i^\varepsilon \psi_i dx dz \end{aligned}$$

D'autre part grâce à (4.26) , on trouve

$$\int_{\omega} k (|\psi + s^* - s| - |s^* - s|) dx - \int_{\omega} \pi^* \psi dx \geq 0 \quad (4.31)$$

L'inégalité (4.31) est aussi valable pour tout $\psi \in (\mathbf{e}(\omega))^3$ et par densité de $\mathbf{e}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$, on trouve (4.27).

Pour (4.28), on utilisons l'analogie de [1]

Théorème 4.3.3. La solution u^* du problème limite (4.24)-(4.30) est unique dans V_z .

Preuve. Supposons qu'il existe deux solution u^* et v^* de l'inéquation variationnelle (4.24), (4.25), et on prend $\hat{\phi} = v^*$ puis $\hat{\phi} = u^*$ dans l'inéquation relative à v^* puis en sommant les deux inéquation, on obtient :

$$\left\langle E^* \cdot \frac{\partial}{\partial z} (v^* - u^*), \frac{\partial}{\partial z} (v^* - u^*) \right\rangle \leq 0$$

A partir de (4.13) – (4.14) on choisit $\bar{\zeta} = (\xi_{13}, \xi_{23}, \xi_{33})$ $\bar{\zeta}_i = \xi_{i3}$ pour $i = 1, 2, 3$ et le reste des éléments de ζ est supposée qu'ils sont nuls, on a donc

$$\begin{aligned} E_{ij}^* \bar{\zeta}_i \bar{\zeta}_j &= 4\hat{E}_{\alpha 3\beta 3} \bar{\zeta}_\alpha \bar{\zeta}_\beta + 2\hat{E}_{\alpha 333} \bar{\zeta}_\alpha \bar{\zeta}_3 + 2\hat{E}_{33\alpha 3} \bar{\zeta}_3 \bar{\zeta}_\alpha + \hat{E}_{3333} \bar{\zeta}_3 \bar{\zeta}_3 \\ &= \hat{E}_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c |\xi|^2 = c |\bar{\zeta}|^2 \end{aligned}$$

ce qui montre que E^* est coercive pour la même constante d'ellipticité de \hat{E} et par conséquent on a

$$c \left\| \frac{\partial}{\partial z} (v^* - u^*) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq 0.$$

Par Poincaré, on trouve :

$$\|v^* - u^*\|_{0,\Omega} \leq c \left\| \frac{\partial}{\partial z} (v^* - u^*) \right\|_{0,\Omega} = 0,$$

donc l'unicité dans V_z .

□

Bibliographie

- [1] G. Bayada, M. Boukrouche, On a free boundary problem for the Reynolds equation derived from the Stokes systems with Tresca boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 282 (2003), pp. 212-231.
- [2] G. Bayada and K. Lhalouani, Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with Coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer, *Asymptot. Anal.* 25 (2001), pp. 329-362.
- [3] A. Benseghir, H. Benseridi, M. Dilmi, On the asymptotic study of transmission problem in a thin domain, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 27 (2018), pp. 53-65.
- [4] H. Benseridi, M. Dilmi, Some inequalities and asymptotic behavior of a dynamic problem of linear elasticity, *Georgian Math. J.* 20 (2013), pp. 25-41.
- [5] D. Benterki, H. Benseridi and M. Dilmi, Asymptotic Study of a Boundary Value Problem Governed by the Elasticity Operator with Nonlinear Term, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 6(2) (2014), pp. 191-202.
- [6] M. Boukrouche, G. Lukaszewicz, On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions, *Math Mod and Meth in Applied Sciences*, 14(6) (2004), pp. 913-941.
- [7] M. Boukrouche and R. El Mir, On a non-isothermal, non-Newtonian lubrication problem with Tresca law : Existence and the behavior of weak solutions, *Analysis : Real World Applications*, 9 (2008), pp. 674-692.
- [8] R. Bunoui, S. Kesavan, Asymptotic behavior of a Bingham uid in thin layers, *J. Math. Anal. Appl.* 293(2) (2004), pp. 405-418.
- [9] O. Chau, D. Motreanu and M. Sofonea, Quasistatic frictional problems for elastic and viscoelastic materials, *Applications of Mathematics*, Vol. 47(4) (2002), pp. 341-360.
- [10] G. Duvant, J. L. Lions, *les Inéquations en Mécanique et en physique*, Dunod, Paris, (1972).
- [11] Y. Letoufa, H. Benseridi, M. Dilmi. On the asymptotic behavior of an interface problem in a thin domain, *M. Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci.*, 89(2) (2019), pp. 1-10.
- [12] Y. Letoufa, S. M. Boulaaras, H. Benseridi, M. Dilmi and A. Alharbi, A Study of the Anisotropic Static Elasticity System in Thin Domain, *Journal of Function Spaces*. Vol. 2021, Article ID 9918243, 8 pages, <https://doi.org/10.1155/2021/9918243>.

- [13] F. Murat, A. Sili, Asymptotic behavior of solutions of the anisotropic heterogeneous linearized elasticity system in thin cylinders, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série, I*, 328(2) (1999), pp. 179-184.
- [14] A. Saadallah, H. Benseridi, M. Dilmi and S. Drabla, Estimates for the asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction, *Georgian Math. J*, 23(3) (2016), pp. 435-446.
- [15] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge University Press, Cambridge, (2012).
- [16] J.M.Viano, A. Rodriguez-Areos, M. Sofonea, Asymptotic derivation of quasistatic frictional contact models with wear for elastic rods, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 401 (2013), pp. 641-653.
- [17] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea : Quasistatic nonlinear viscoelastic contact with normal compliance and friction. *J. Elasticity*51(1998), 105–126.
- [18] M. Sofonea, M. Shillor :Variational analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with friction. *Comm. Appl. Anal.*5(2001), 135–151.
- [19] H. Brézis : Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. *Ann. Inst. Fourier*18(1968), 115–175.
- [20] H. Brézis :Problèmes unilatéraux. *J. Math. Pures et Appl.*51(1972), 1–168.
- [21] W. Han, B.D. Reddy : *Plasticity : Mathematical Theory and Numerical Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [22] D. Motreanu, M. Sofonea : Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials. *Abstract Appl. Anal.*4(1999), 255–279.
- [23] A. Strozzi, Formulation of three lubrication problems in term of complementarity. *Wear*. 104 (1985), 103–119.
- [24] R. Pit, *Mesure locale de la vitesse à l'interface solide-liquide simple : Glissement et rôle des interactions*. Thèse Physique Université Paris XI, 1999.
- [25] O. Reynolds, On the theory of lubrication and its application to Mr Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil, *Phil. Trans. Roy. Soc., A* 117 (1886), 157-234.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude du problème d'un corps élastique anisotrope et non homogène qui occupe une domaine 3D avec des conditions de contact bilatéral avec frottement sur une base solide. Nous prouvons d'abord les résultats d'existence et d'unicité pour la solution faible, puis nous étudions la comportement asymptotique de ces solutions lorsqu'une dimension du domaine tendent vers zéro. Les 2D équations de conservation et la loi de frottement sont obtenue. L'existence et l'unicité de la solution du problème limite est démontré, donc le problème limite est bien défini et a un sens.

Mots-clés : Problèmes aux limites, Anisotrope, Comportement asymptotique, Visco-élasticité,

AMS Classification : 35R35, 76F10, 78M35.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of the problem of an anisotropic and non-homogeneous elastic body which occupies a 3D domain with conditions of bilateral contact with friction on a solid base. We first prove the existence and uniqueness results for the weak solution, then we study the asymptotic behavior of these solutions when one dimension of the domain tends to zero. The 2D conservation equations and the friction law are obtained. The existence and uniqueness of the solution of the limit problem is demonstrated, so the limit problem is well defined and has a meaning.

Keywords : Free boundary problems, Anisotropic, Asymptotic behavior, Visco-elasticity.

AMS Subject Classification : 35R35, 76F10, 78M35.

ملخص

في هذه الأطروحة ، نحن مهتمون بدراسة مشكلة الجسم المرن متباين الخواص وغير المتجانس والذي يشغل مجالا ثلاثي الابعاد مع ظروف التلامس الثنائي مع الاحتكاك على قاعدة صلبة . ثبت اولا وجود وتناجج التفرد للحل الضعيف ، ثم ندرس السلوك المقارب لهذه الحلول عندما يميل أحد أبعاد المجال إلى الصفر. تم الحصول على معادلات الحفظ ثنائية الابعاد وقانون الاحتكاك. تم إثبات وجود وتفرد حل مشكلة الحد ، وبالتالي فإن المشكلة النهائية محددة جيدا ولها معنى .
كلمات المفتاح : الشروط الحدية، تباين الخواص ، سلوك مقارب، المرونة واللزوجة.