



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de  
La Recherche Scientifique



**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire de fin d'étude  
En vue de l'obtention du diplôme de  
MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

**Thème**

**Sur quelques théorèmes de point fixe  
dans les résolutions d'un problème  
aux limites de second ordre**

Présenté par : CHEKIMA Ikram

IATIME Khadidja

Soutenu publiquement devant le jury composé de

|                            |           |            |               |
|----------------------------|-----------|------------|---------------|
| MENECEUR Bekker            | MCB/Prof. | Président  | Univ. El Oued |
| GUEDDA Lamine              | MCA/Prof. | Rapporteur | Univ. El Oued |
| GHENDIR AOUN<br>Abdellatif | MCB/Prof. | Examineur  | Univ. El Oued |

Année universitaire 2019 – 2020

# Remerciements

*Tout d'abord, nous remercions notre Dieu le tout puissant de nous avoir donné la force d'atteindre notre objectif et accomplir notre travail.*

*Nos vifs remerciements vont également à notre encadreur **Dr.Lamine Guedda** qui nous a guidé durant ce semestre par ses conseils et remarques qui étaient très utiles pour réaliser ce mémoire.*

*Nous remercions les autres membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.*

*Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.*

# Dédicace

**J**e dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :

**A**mes très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffré et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils, leur affection et leurs encouragements.

**J**e vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

Et je le dédie :

**A**tous les membres de ma famille,  
ma sœur ,  
mes deux frères .

**A**tous mes amis et mes collègues avec qui  
j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

**A**Tous les professeurs honorables  
pour leurs efforts avec nous tout au long de notre carrière universitaire.

CHEKIMA  
IKRAM

# Dédicace

**A**vec une énorme plaisir, un coeur ouvert et une immense joie .

**Q**ue je dédie ce mémoire

**A**mes très chers, respectueux et magnifiques parents ma mère et mon père, qui m'ont soutenus tout au long de ma vie .  
Par leur amour et leur encouragement .

**A**mes frères .

**A**mes sœurs .

**A**tous les membres de ma famille .

**A**tous mes amis et mes collègues avec qui  
j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

**A**touts mes enseignants et les collègues, pour leur utiles conseils et leur persévérance .

IATIME  
KHADIDJA

# Table des matières

|                                                                               |           |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction générale . . . . .                                               | 1         |
| <b>Chapitre 1 Notions préliminaires</b>                                       | <b>3</b>  |
| 1.1 Quelques éléments de la topologie . . . . .                               | 3         |
| 1.1.1 Espace métrique - Espace métrique généralisé . . . . .                  | 3         |
| 1.1.2 Boules, ouverts, fermés, adhérence . . . . .                            | 7         |
| 1.1.3 Espaces vectoriel normés . . . . .                                      | 11        |
| 1.1.4 Espace de Banach . . . . .                                              | 12        |
| 1.1.5 Applications contractantes . . . . .                                    | 13        |
| 1.1.6 Ensemble convexe - Fonction convexe . . . . .                           | 14        |
| 1.1.7 Espace compact . . . . .                                                | 14        |
| 1.2 Théorème Ascoli-Arzéla . . . . .                                          | 16        |
| 1.3 Matrice convergente . . . . .                                             | 18        |
| 1.4 Point fixe . . . . .                                                      | 20        |
| <b>Chapitre 2 Quelques théorèmes du point fixe</b>                            | <b>22</b> |
| 2.1 Principe de contraction de Banach . . . . .                               | 23        |
| 2.2 Théorème du point fixe de Schauder . . . . .                              | 27        |
| 2.3 Théorème du point fixe de Boyd–Wong . . . . .                             | 30        |
| 2.4 Théorème du point fixe de Perov . . . . .                                 | 31        |
| <b>Chapitre 3 Applications</b>                                                | <b>32</b> |
| 3.1 Résultats d’existence pour un problème aux limite à trois points [15] . . | 32        |
| 3.1.1 Reformulation du problème . . . . .                                     | 33        |
| 3.1.2 Application du principe de contraction de Banach . . . . .              | 36        |
| 3.1.3 Application du théorème du point fixe de Schauder . . . . .             | 39        |
| 3.1.4 Application du théorème du point fixe de Boyd-Wong . . . . .            | 40        |

|       |                                                                                                                  |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2   | Résultats d'existence pour un systèmes d'équations différentielles . . . .                                       | 42 |
| 3.2.1 | Application du théorème du point fixe de Perov . . . . .                                                         | 43 |
| 3.2.2 | Non-linéarités avec une croissance sous-linéaire. Application du<br>théorème de point fixe de Schauder . . . . . | 45 |
|       | Bibliographie . . . . .                                                                                          | 48 |

# Notations Générales

|                                  |                                                                                              |
|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\epsilon, \varepsilon, \lambda$ | : Des paramètres positives.                                                                  |
| $T$                              | : L'opérateur $T$ .                                                                          |
| $\emptyset$                      | : L'ensemble vide.                                                                           |
| $X, Y$                           | : Des ensembles non vide.                                                                    |
| $K$                              | : le corps $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ .                                                    |
| $\mathbb{R}$                     | : L'ensemble des nombres réels.                                                              |
| $\mathbb{R}^+$                   | : L'ensemble des nombres réels positifs.                                                     |
| $\mathbb{R}^n$                   | : L'espace Euclidien de dimension $n$ .                                                      |
| $\mathbb{N}$                     | : L'ensemble des nombres naturels.                                                           |
| $\mathbb{C}$                     | : L'ensemble des nombres complexes.                                                          |
| $C[E, F]$                        | : L'ensemble des fonctions continues de $E$ dans $F$ .                                       |
| $C^k$                            | : La classe des fonctions $k$ fois continument dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ . |
| $\sup f(x)$                      | : La borne supérieur de la fonction $f$ .                                                    |
| $ \cdot $                        | : Valeur absolue.                                                                            |
| $[a]$                            | : Partie entière de $a$ .                                                                    |
| $\cup$                           | : Réunion.                                                                                   |
| $\cap$                           | : Intersection.                                                                              |
| $M_n(\mathbb{R})$                | : L'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.                                 |
| $\ \cdot\ _\infty$               | : Norme infinie , $\ x\ _\infty = \sup\{ x(t)  : t \in [a, b]\}$ .                           |
| $\ \cdot\ _{c^1}$                | : La norme sur l'espace $c^1$ , $\ x\ _{c^1} = \sup\{\ x\ _\infty, \ x'\ _\infty\}$ .        |
| $B(x_j, \delta)$                 | : La boule ouverte de centre $x_j$ et rayon $\delta$ .                                       |
| $A^c$                            | : Complémentaire de $A$ .                                                                    |
| $\overline{A}$                   | : L'adhérence de $A$ .                                                                       |
| $\det(M)$                        | : Déterminant de la matrice $M$ .                                                            |
| $G(t, s)$                        | : La fonction de Green.                                                                      |

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'objectif de ce mémoire est l'étude de quelques théorèmes du point fixe pour des applications dans des espaces métriques. En analyse, un théorème du point fixe est un résultat qui permet d'affirmer que l'équation  $f(x) = x$  admet des solutions sous certaines conditions sur l'application  $f$ . Il est à signaler que la théorie du point fixe est fondamentale en mathématiques. En effet, la résolution de plusieurs problèmes mathématiques se ramène souvent à la recherche de point fixe pour certaines applications linéaires ou non linéaires. De plus, plusieurs problèmes intervenant en physique, chimie et en biologie sont modélisés par des systèmes d'équations différentielles ou d'équations intégrales. Ces systèmes peuvent s'écrire sous forme d'équations abstraites  $f(x) = x$  où  $f$  est une application définie d'un ensemble  $E$  dans lui même, d'où l'importance de l'étude et du développement de la théorie du point fixe. Le célèbre théorème du point fixe de Banach (principe de contraction de Banach) dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique. Ce théorème fournit aussi un algorithme d'approximation de ce point comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que l'application  $f$  est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur l'application et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer ce théorème. D'où la nécessité d'étendre et de généraliser le principe de contraction de Banach afin d'élargir son domaine d'applications d'une part, et de récupérer ses avantages, d'autre part. Contrairement d'autres théorèmes du point fixe (par exemple celui de Brouwer, Schauder, Krasnoselski,...), nous assurent seulement l'existence de points fixes sans savoir

aucun renseignement sur la multiplicité de solutions où indiquer comment les déterminer. Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante

**Premier chapitre,** Contient plusieurs définitions et propriétés concernant des notions topologiques comme : les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach, la compacité et l'équicontinuité. Ainsi la donnée de quelques théorèmes, dont le plus important est celui d'Ascoli- Arzela.

**Deuxième chapitre,** Ce chapitre est consacré pour la présentation de quelques théorèmes du point fixe (principe de contraction de Banach et de Boyd-Wong, celui de Perov et de Schauder ) qui sont utiles pour nos applications dans le troisième chapitre.

**Troisième chapitre,** nous étudions quelques problèmes d'existence où d'unicité de solution pour des équations différentielles et des systèmes différentiels non linéaires de second ordre avec des conditions aux limites à trois points. Pour ceci nous avons utilisé des théorèmes de point fixe choisis selon les conditions posées sur la nonlinéarité.

# CHAPITRE

## 1

# NOTIONS PRÉLIMINAIRES

**C**ommençons par rappeler quelques résultats généraux, qui nous seront utiles dans la suite de notre travail, concernant : les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach, les applications contractantes, la convexité, la compacité et théorème d'Ascoli Arzéla.

## 1.1 Quelques éléments de la topologie

### 1.1.1 Espace métrique - Espace métrique généralisé

**Définition 1.1.1** (*Distance*) [\[12\]](#)

Soit  $X$  un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur  $X$  est une application :  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\forall u, v \in X, \quad d(u, v) \geq 0 \quad \text{et} \quad d(u, v) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad u = v, \quad (\text{séparation}).$

- $d(u, v) = d(v, u)$ , (symétrique).
- $\forall u, v, w \in X, d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ , (inégalité triangulaire).

### Définition 1.1.2 (Espace métrique)

Un espace métrique est un couple  $(X, d)$  où  $X$  est un ensemble non vide et  $d$  une distance sur  $X$ .

### Définition 1.1.3 (Distance à valeur vectorielle)

Soit  $X$  un ensemble non vide. Une distance à valeur vectorielle sur  $X$  est une application :

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\forall u, v \in X, d(u, v) \geq 0$  et on a  $d(u, v) = 0$  si et seulement si  $u = v$ .
- $d(u, v) = d(v, u)$ .
- $\forall u, v, w \in X, d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ .

Si  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  deux éléments de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $u \leq v$  signifie que  $x_i \leq y_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dans ce cas  $(X, d)$  est dit espace métrique généralisé sur  $X$ , pour un tel espace la convergence et la compacité sont similaires à ces notions dans les espaces métriques usuels.

### Exemple 1.1.1

- Sur  $\mathbb{R}^n$  on peut considérer les distances suivantes :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

- Sur  $C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$ . On peut définir les distances suivant :

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt}.$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

- On peut définir une métrique sur un ensemble quelconque  $X$ , en posant pour  $x, y \in X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

on l'appelle métrique discrète.

- **Métrique induite :** Si  $(X, d)$  est un espace métrique et  $A$  un sous-ensemble de  $X$  la restriction :  $d|_{A \times A} : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$  définit une distance sur  $A$ . Par conséquent, tout sous-ensemble d'un espace métrique constitue un espace métrique qui est  $(A, d|_{A \times A})$ .
- **Métrique produit :** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques, on peut définir une métrique sur  $X \times Y$  par  $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$  :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

- Soit  $d$  une application définie par :

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = |x^3 - y^3|.$$

- Montrons que  $d$  est une distance sur  $\mathbb{R}$ .

1.

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x^3 - y^3| = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = y^3$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

2.  $d(x, y) = |x^3 - y^3| = |y^3 - x^3| = d(y, x).$

3.

$$\begin{aligned}
d(x, z) &= |x^3 - z^3| \\
&= |x^3 - y^3 + y^3 - z^3| \\
&\leq |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| \\
&= d(x, y) + d(y, z).
\end{aligned}$$

## Distances équivalentes

Pour comparer les structures topologiques définies par deux métriques différentes, on introduit la notion d'équivalence entre deux distances.

### Définition 1.1.4

Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux métriques sur l'ensemble  $X$ . On dit qu'elles sont équivalentes s'il existe deux constantes  $k_1, k_2 > 0$  telles que pour tout  $(x, y) \in X \times X$  on a :

$$k_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq k_2 d_1(x, y).$$

### Exemple 1.1.2

- Sur  $\mathbb{R}^n$  les distances  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_\infty$  sont deux à deux équivalentes.
- Sur  $C([0, 1], \mathbb{R})$ , les distances  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_\infty$  ne sont pas 2 à 2 équivalentes.

### Définition 1.1.5

Une partie  $S$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est dite bornée s'il existe une constante  $L > 0$  telle que  $|x| \leq L$  pour tout  $x \in S$ . Une fonction  $f$  à valeurs dans  $X$  est dite bornée si son image est une partie bornée de  $X$ .

## Suites dans les espaces métriques

### Définition 1.1.6 (*La convergence*)

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit qu'une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $X$  converge vers un point  $l \in X$ , si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$d(x_n, l) < \epsilon, \quad \text{pour tout } n \geq N_\epsilon.$$

On écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \quad \text{ou} \quad x_n \rightarrow l.$$

### Proposition 1.1.1

toute suite convergente est bornée.

**Preuve :**

Supposons que la suite  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , il existe alors,  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$n \geq N_\epsilon \implies |U_n - l| \leq 1,$$

alors,  $\forall n \geq N_\epsilon$  on a

$$|U_n| = |U_n - l + l| \leq 1 + |l|,$$

on a donc,  $|U_n| \leq 1 + |l|$ . Si on pose  $M = \max(|U_0|, |U_1|, \dots, |U_{N_\epsilon-1}|, 1 + |l|)$ , il vient  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq M$ .

Par conséquent, la suite  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

### 1.1.2 Boules, ouverts, fermés, adhérence

#### Définition 1.1.7 (*Boule*)

Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $a$  un point de  $X$  et  $r > 0$ , on définit la boule (ouverte) de centre  $a$  et rayon  $r$  par :

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$$

**Définition 1.1.8 (Sous-ensemble ouvert)**

Le sous ensemble  $U$  de l'espace métrique  $(X, d)$  est dit ouvert si :

$$\forall x \in U, \quad \exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \subset U.$$

**Définition 1.1.9 (Sous-ensemble fermé)**

Le sous ensemble  $F$  de l'espace métrique  $(X, d)$  est dit fermé si son complémentaire  $F^c$  est ouvert.

**Définition 1.1.10 (Adhérence d'un sous ensemble)**

Soit  $A \subset X$ , un sous-ensemble de l'espace métrique  $X$ . On définit l'adhérence  $\overline{A}$  de  $A$  par :

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

**Proposition 1.1.2**

- $A$  est fermé  $\iff A = \overline{A}$ .
- $\overline{A} = \left\{ x \in X \mid \exists \text{ une suite } (x_n)_n \subset A \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right\}$ .

**Exemple 1.1.3**

- L'adhérence du sous-ensemble  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$  est  $\mathbb{R}$  lui-même puisque tout nombre réel est limite d'une suite des rationnels.
- Soit  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ , alors  $\overline{A} = A \cup \{0\}$ .
- L'adhérence de l'intervalle  $]0,1[$  dans l'espace  $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  est l'intervalle  $]0,1[$  lui même (le point 0 est bien limite d'une suite dans  $]0,1[$ , mais il n'appartient pas à  $\mathbb{R}_+^*$ ). Cela montre qu'il est important de savoir dans quel espace on travaille lorsqu'on considère les notions d'ouvert, fermé, etc...

- Si  $A \subset \mathbb{R}$  est borné, alors  $\inf A, \sup A \in \overline{A}$ .

**Définition 1.1.11 (Continuité)**

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $a \in X$  on dit que  $f$  est continue au point  $a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in X, \quad d_X(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

**Définition 1.1.12 (Continuité uniforme)**

On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $X$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, x' \in X, \quad d_X(x, x') < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon,$$

$\alpha$  ne dépend pas de  $x, x'$ .

**Définition 1.1.13 (Suite de Cauchy)**

On dit que la suite  $(x_n)_n$  dans l'espace métrique  $(X, d)$  est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall n, m > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

on écrit alors

$$d(x_n, x_m) \rightarrow 0, \text{ quand } n, m \rightarrow +\infty.$$

**Exemple 1.1.4**

On munit l'espace  $C([0, 1], \mathbb{R})$  de la distance fondamentale  $d_1$  et on considère la suite  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \begin{cases} n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{n^2} \leq 1 \end{cases}$$

Soit  $\epsilon > 0$ , pour tout  $n$  et  $m$  de  $\mathbb{N}^*$ ; avec  $n > m$ , on a :

$$\begin{aligned}
 d_1(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n - m) dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - m \right) dx + \int_{\frac{1}{m^2}}^1 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\
 &= \left( \frac{1}{n} \right) - \left( \frac{m}{n^2} \right) + 2 \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) - m \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\
 &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \\
 &< \frac{1}{m}
 \end{aligned}$$

on prend  $N_\epsilon = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$ ; on trouve que

$$n > m \geq N_\epsilon \implies d(f_n, f_m) < \epsilon,$$

### Proposition 1.1.3

Toute suite convergente d'un espace métrique  $(X, d)$  est de Cauchy.

**Preuve :**

Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente vers  $l$ , cela veut dire que

$$\forall \epsilon > 0, \text{ il existe } N_\epsilon \text{ tel que } \forall n \geq N_\epsilon : d(x_n, l) < \frac{\epsilon}{2},$$

donc

$$\forall n, m \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}, d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(l, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Par conséquent,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.

### Remarque 1.1.1

Il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas, par exemple la suite  $\{1 - \frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans l'espace  $] -1, +1[$ , mais cette suite est convergente dans  $\mathbb{R}$  vers 1 dont  $1 \notin ] -1, +1[$ .

### 1.1.3 Espaces vectoriel normés

C'est une classe importante d'espaces métriques, dont les espaces euclidiens sont le modèle de base. En générale, un espace vectoriel normé est un espace vectoriel sur lequel il existe une métrique compatible avec la structure d'espace vectoriel.

**Définition 1.1.14** (*Espace vectoriel normé*)[6]

Un espace  $(X, \|\cdot\|)$  est dit espace vectoriel normé sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  s'il est muni d'une application  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

- $\forall x \in X, \quad \|x\| = 0 \quad \text{et} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{séparation}).$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x \in X, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\text{homogénéité})$  où  $|\lambda|$  désigne respectivement la valeur absolue si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou le module si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
- $\forall x, y \in X, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{l'inégalité triangulaire}).$

L'application  $\|\cdot\|$  ainsi définie est appelée norme.

**Exemple 1.1.5**

Si  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme  $\|\cdot\|$  par

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| :$$

- Sur  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir plusieurs normes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{la norme euclidienne}).$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

- L'espace vectoriel  $C([0, 1], \mathbb{R})$  peut être muni des normes :

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad (\text{norme de la convergence uniforme}).$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt}.$$

- Sur l'espace des suites numériques bornées (à valeur dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), on peut définir la norme

$$\|u\| = \sup_{n \geq 0} |u_n|.$$

- **Norme produit :** Si  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sont deux espaces normés, on peut définir une norme sur l'espace vectoriel  $X \times Y$  par :

$$\forall (x, y) \in X \times Y, \|(x, y)\| = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

### Définition 1.1.15

Soit  $X$  un espace vectoriel normé. Deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  de  $X$  sont dites équivalentes s'il existe  $c_1, c_2 > 0$  tels que, pour tout  $x \in X$  :

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

### Définition 1.1.16

Une partie  $A$  d'un espace normé  $(X, \|\cdot\|)$  est dite bornée s'il existe une constante  $L < \infty$  telle que  $\|x\| \leq L$  pour tout  $x \in A$ . Une fonction  $f$  à valeurs dans  $X$  est dite bornée si son image est une partie bornée de  $X$ .

## 1.1.4 Espace de Banach

Dans cette partie, nous étudierons quelques propriétés d'espace de Banach.

### Définition 1.1.17 (Espaces de Banach)

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance associée à sa norme. C'est à dire que dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente.

### Exemple 1.1.6

On note l'espace des suites multiples bornées par :

$$l^\infty(Z^N) = \left\{ x : Z^N \rightarrow K / \sup_{k \in Z^N} |x(k)| < \infty \right\}.$$

et pour tout  $x \in l^\infty(Z^N)$ , on pose

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in Z^N} |x(k)| < \infty.$$

Alors  $l^\infty(Z^N)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  est un espace de Banach.

### 1.1.5 Applications contractantes

#### Définition 1.1.18 ( Application Lipschitzienne )

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. On dit que  $f$  est Lipschitzienne s'il existe  $k \geq 0$  telle que :

$$\forall x, y \in X, \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y) \quad (1.1)$$

- Le plus petit réel  $k$  qui vérifie (1.1) est appelé constante de Lipschitz.
- Si  $k \in [0, 1[$ , l'application  $f$  est dite contractante.
- Si  $k = 1$ , l'application  $f$  est dite non-expansive.

#### Exemple 1.1.7

- L'homothétie dans un espace vectoriel normé  $x \mapsto kx$  avec  $k \geq 0$  est Lipschitzienne.
- Plus généralement, le théorème des accroissements finis permet de montrer qu'une fonction dérivable de dérivée bornée en norme par  $k \geq 0$  est Lipschitzienne, c'est par exemple le cas sur  $\mathbb{R}$  de l'application  $x \mapsto \frac{1}{3}(x + \sin x)$  avec  $k = \frac{2}{3}$ .

#### Définition 1.1.19 ( Application contractive )

Soit  $(X, d)$  un espace métrique, l'application  $f : X \rightarrow X$  est dite contractive si :

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \quad \forall x, y \in X \text{ avec } x \neq y.$$

#### Remarque 1.1.2

$$(f \text{ contraction}) \Rightarrow (f \text{ contractive}) \Rightarrow (f \text{ non expansive}).$$

#### Définition 1.1.20 ( Application contractante non linéaire )

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. L'application  $f : X \rightarrow X$  est dite contraction non linéaire s'il existe une fonction continue (croissante)  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tel que  $\varphi(r) < r$   $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$  et

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \quad \forall x, y \in X. \quad (1.2)$$

- Si  $\varphi(r) = kr$ ,  $0 \leq k < 1$ ,  $f$  est une contraction.
- Si  $\varphi(r) = r$ ,  $f$  est non-expansive.
- Si  $\varphi(r) = r$  et l'inégalité dans (1.2) est stricte,  $f$  est contractive.

### 1.1.6 Ensemble convexe - Fonction convexe

#### Définition 1.1.21 [20]

Un sous-ensemble  $C$  de  $\mathbb{R}$  est dit convexe si pour tout  $x, y \in C$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

#### Définition 1.1.22 (*La fonction convexe*)

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est convexe sur  $I$ , si pour tous  $x, y$  de  $I$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$  on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

#### Exemple 1.1.8

- les boules d'un espace vectoriel normé sont des parties convexes.
- les parties convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

### 1.1.7 Espace compact

#### Définition 1.1.23 (*Espace métrique compact*)

On dit que  $(X, d)$  est un espace métrique compact si toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  admet une suite extraite convergente vers un point de  $X$ .

#### Définition 1.1.24 (*Partie compacte*)

Une partie  $S$  de  $X$  est dite compacte si le sous-espace métrique  $(S, d)$  est compact.

#### Exemple 1.1.9

toute partie fermée et bornée de  $\mathbb{R}^n$  est compacte.

**Définition 1.1.25** (*Les parties relativement compactes*)

Une partie  $S$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est dite relativement compacte si l'adhérence de  $S$  est une partie compacte de  $X$ .

**Exemple 1.1.10**

Les parties relativement compactes de  $\mathbb{R}^n$  sont les parties bornées.

**Exemple 1.1.11**

Si on munit  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\|f\|_{c_1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$  alors les bornées de  $(C^1([0, 1], \mathbb{R}), \|f\|_{c_1})$  sont relativement compact dans  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Preuve :**

Soit  $X$  un bornée de  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $E \rightarrow B_{f, c_1}(0, M)$ . Comme la norme  $\|f\|_{\infty}$  est majorée par la norme  $\|f\|_{c_1}$  est clair qu'un bornée de  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$  est ponctuellement relativement compact.

**Définition 1.1.26** (*Application compacte*)

Soient  $E$  un espace de Banach et  $\Omega \subset E$ ,  $f : \Omega \rightarrow E$  une application.

- On dit que  $f$  est compacte si  $f(\bar{\Omega})$  est relativement compact.
- L'application  $f$  est dite totalement bornée si  $f(A)$  est relativement compacte pour tout sous ensemble borné  $A$  de  $E$ .
- L'application  $f$  est dite complètement continue si  $f$  est continue et totalement bornée.

**Remarque 1.1.3**

Toute application continue et compacte est complètement continue. La réciproque est vraie si  $\Omega$  est borné.

**Exemple 1.1.12**

Toute application de rang fini est compacte.

**Définition 1.1.27** (*Partie équicontinue*)

La famille d'applications  $T_\lambda : X \rightarrow Y$  où  $\lambda$  appartient à certain ensemble d'indices et  $X$  et  $Y$  sont deux espaces de Banach est dite équicontinue sur  $A$ , ( $A \subset X$ ), si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tel que quelque soient  $x, y \in A$  et quelque soit  $\lambda \in K$  nous avons :

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T_\lambda(y) - T_\lambda(x)\|_Y < \epsilon.$$

**1.2 Théorème Ascoli-Arzelà**

Soient  $(X, d_X)$  un espace métrique compact et  $(Y, d_Y)$  un espace métrique complet. Notons par  $C(X, Y)$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues  $f : X \rightarrow Y$ .

**Théorème 1.2.1**

la famille  $F \subset C(X, Y)$  est relativement compacte si et seulement si

- $F$  est équicontinue et
- pour tout  $t \in X$ , l'ensemble

$$M(t) = \{x(t); x(\cdot) \in F\}.$$

est relativement compact dans  $Y$ .

**Cas particuliers**

- Si  $Y$  est un espace de Banach de dimension fini, la deuxième condition du théorème d'Ascoli-Arzelà est équivalente à  $F$  est uniformément borné c'est à dire qu'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in F$

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in X} \|x(t)\| \leq M.$$

En particulier, pour  $Y = \mathbb{R}$  (En effet, dans ce cas, pour tout  $t \in X$ ,  $\overline{M(t)}$  est un fermé borné d'un espace de dimension fini  $Y$ ).

- Si  $Y$  est un espace métrique compact, alors le théorème d'Ascoli-Arzelà peut être exprimé comme le suivant : la famille  $F \subset C(X, Y)$  est relativement compacte si et seulement si  $F$  est équicontinu.

**Exemple 1.2.1**

Soit  $h : ([0, 1]) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, considérons l'équation intégrale

$$u(t) = \int_0^t h(s, u(s)) ds, \quad t \in [0, 1],$$

alors l'opérateur de Hammerstein

$$H : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$u \rightarrow Hu$$

tel que

$$Hu(t) = \int_0^t h(s, u(s)) ds$$

est compact.

**Preuve :**

Supposons l'ensemble  $A = \{h \in C([0, 1]), \|h\| \leq M\}$ . Comme  $h$  est continue et borné alors

$$\begin{aligned} |Hu(t)| &= \left| \int_0^t h(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |h(s, u(s))| ds \\ &\leq M \int_0^t ds = Mt \leq M, \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Donc  $H(A)$  est uniformément borné. On va montrer  $H(A)$  est équicontinue. On a

$$\begin{aligned} |Hu(t_1) - Hu(t_2)| &\leq \left| \int_0^{t_1} h(s, u(s)) ds - \int_0^{t_2} h(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq M \int_{t_1}^{t_2} ds \\ &\leq M|t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta \leq \frac{\epsilon}{M}$  tel que, pour tout  $t_1, t_2 \in [0, 1] : |t_2 - t_1| \leq \delta$  alors

$$|Hu(t_1) - Hu(t_2)| \leq M\delta \leq \epsilon,$$

d'où l'équicontinuité de  $H$ . D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà,  $H$  est compact dans  $A$ .

## 1.3 Matrice convergente

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude de quelques propriétés d'une matrice convergente.

### Définition 1.3.1

Une matrice carrée de nombres réels est dite convergente vers zéro si :

$$M^k \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad k \rightarrow \infty.$$

Un résultat classique en analyse matricielle est le théorème suivant :

### Théorème 1.3.1 [17]

Soit  $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a.  $M$  est une matrice convergente vers zéro.
- b. La matrice  $(I - M)$  est inversible et  $(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \cdots + M^k + \cdots$
- c. toutes les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $M$  sont situés l'intérieur de la boule unité ouverte du  $\mathbb{C}$  ( i.e.  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \det(M - \lambda I) = 0 \implies |\lambda| < 1$  ).
- d.  $(I - M)^{-1} |I - M| \leq I$ .

### Preuve :

Montrons que  $(d) \Rightarrow (a)$  :

Supposons  $(d)$ , alors on a :

$$S_k(I - M) = I - M^{k+1}$$

ce qui est vrai pour  $S_k = I + M + M^2 + \cdots + M^k$ . Puisque  $M$  et  $(I - M)^{-1}$  ont des éléments positifs, on en déduit que :

$$\begin{aligned} S_k &= (I - M^{k+1})(I - M)^{-1} \\ &= (I - M)^{-1} - M^{k+1}(I - M)^{-1} \\ &\leq (I - M)^{-1}. \end{aligned}$$

De plus,  $(S_k)_{k \geq 1}$  est une suite bornée. Puisqu'elle est croissante (sur des éléments) par définition, on conclut qu'elle est convergente. Par conséquent

$$M^k \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad k \rightarrow \infty.$$

**Définition 1.3.2** [17]

Soit  $(X, d)$  un espace métrique généralisé. L'opérateur  $N : X \rightarrow X$  est dit contractant s'il existe une matrice  $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$  qui converge vers zéro telle que :

$$d(N(x), N(y)) \leq M d(x, y),$$

pour tout  $x, y \in X$ . Pour  $n = 1$ , nous retrouvons le résultat classique de la contraction de Banach.

**Théorème 1.3.2** [1]

Soit  $(X, d)$  un espace métrique généralisé complet et  $N : X \rightarrow X$  un opérateur de contraction. Alors  $N$  a un point fixe unique  $x_*$  et pour chaque  $x_0 \in X$  nous avons

$$d(N^k(x_0), x_*) \leq M^k (I - M)^{-1} d(x_0, N(x_0)),$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et  $M$  est la matrice de Lipschitz.

**Définition 1.3.3**

On dit que la matrice non singulière  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$  a la propriété de valeur absolue si :

$$A^{-1}|A| \leq I,$$

où

$$|A| = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}_+).$$

**Quelques exemples de matrice convergente**

Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  vérifiant la propriété  $(I - A)^{-1}|I - A| \leq I$ ,

1.  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , où  $a, b \in \mathbb{R}^+$  et  $\max(a, b) < 1$ .
2.  $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , où  $a, b \in \mathbb{R}^+$  et  $a + b < 1, c < 1$ .
3.  $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$ , où  $a, b \in \mathbb{R}^+$  et  $|a - b| < 1, a > 1, b > 1$ .

**Lemme 1.3.1**

Soit

$$Q = \begin{pmatrix} a & -d \\ -c & d \end{pmatrix}$$

où  $a, b, c, d \geq 0$  et  $\det Q > 0$ . Alors  $Q^{-1}$  est un ordre de conservation .

**Définition 1.3.4**

Soit  $Q \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  un ordre de conservation (ou positif) si  $p_1 \geq p_0, q_1 \geq q_0$  implique

$$Q \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \leq Q \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

dans le sens des composants.

**1.4 Point fixe****Définition 1.4.1**

On dit que  $a$  est un point fixe pour une application  $f : X \rightarrow X$  s'il vérifie :

$$f(a) = a.$$

**Exemple 1.4.1**

Soit  $g$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 1 + 2x.$$

On va chercher les points fixes de l'application  $g$

$$g(x) = x \Leftrightarrow 1 + 2x = x \Leftrightarrow x = -1.$$

Alors  $g$  admet un seul point fixe dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.4.2**

Soit  $h$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

On cherche les points fixes de  $h$

$$h(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} - \arctan x = x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arctan x = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \arctan x.$$

Ce qui est impossible car la fonction  $\tan$  n'est pas définie au point  $\frac{\pi}{2}$ . Alors  $h$  n'a pas de point fixe dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.4.2**

On dit qu'un ensemble  $S$  d'un espace de Banach a la propriété de point fixe si toute application continue de  $S$  dans  $S$  admet un point fixe.

**Lemme 1.4.1**

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques. Si  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes (c'est à dire qu'il existe une application bijective bicontinue de  $X$  dans  $Y$ ), et si  $X$  a la propriété du point fixe, alors  $Y$  l'a également.

**Preuve :**

Soit  $h : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme et  $f : Y \rightarrow Y$  une application continue. On définit l'application continue

$$g = h^{-1} \circ f \circ h : X \rightarrow X,$$

puisque  $X$  a la propriété de point fixe, il existe un point  $x \in X$  tel que :  $g(x) = x$ .

Alors, on a :

$$f(h(x)) = h(g(x)) = h(x);$$

Donc,  $h(x)$  est un point fixe de  $f$ .

## CHAPITRE

### 2

# QUELQUES THÉORÈMES DU POINT FIXE

**D**ans ce chapitre, nous présentons quelques résultats concernant l'existence et l'unicité de point fixe pour des différents opérateurs, cette théorie joue un rôle important notamment dans la démonstration d'existence ou d'unicité des solutions des équations différentielles et problèmes aux limites.

On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux à savoir le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On établira ensuite le théorème du point fixe de Schauder, puis le théorème de Boyd-Wong, et on termine ce chapitre par la donnée du théorème de Perov.

## 2.1 Principe de contraction de Banach

### Introduction

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou encore théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922, dans l'article [19], dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduites par Liouville en 1837 et développée par la suite, par Picard en 1890. A cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier dans la branche des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach a connu différentes généralisations dans les espaces métriques et les espaces topologiques localement convexe.

#### Théorème 2.1.1 (*Principe de contraction de Banach, 1922*)

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet, soit  $F : X \rightarrow X$  une application contractante de constante de contraction  $k$ . Alors :

- a.  $F$  admet un unique point fixe  $\alpha \in X$ .
- b. Pour tout  $x \in X$ ,  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)$  où  $F^0(x) = x$  et  $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$ .
- c. La vitesse de convergence peut être estimée par :

$$d(F^n(x), \alpha) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x, F(x)).$$

#### Remarque 2.1.1

Dans le théorème 2.1, on peut considérer une application  $F : A \rightarrow A$ , où  $A$  est un fermé de  $X$ .

On va présenter deux démonstrations du théorème 2.1. La première est constructive c'est la démonstration originale de Banach qui donne l'approximation du point fixe, la deuxième est non-constructive, et démontre seulement l'existence et l'unicité du point fixe. Elle repose sur le principe des ensembles emboîtés de Cantor.

**Preuve :**

➡ **Méthode 1 :**

- L'unicité du point fixe : Soient  $\alpha, \alpha'$  deux points fixes de  $F$ , alors :

$$d(\alpha, \alpha') = d(F(\alpha), F(\alpha')) \leq k \cdot d(\alpha, \alpha')$$

ce qui est impossible sauf si  $d(\alpha, \alpha') = 0$  c'est-à-dire  $\alpha = \alpha'$ .

- L'existence du point fixe : Montrons que si  $x \in X$ , la suite  $(F^n(x))_n \subset X$  est de Cauchy. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$d(F^{n+1}(x), F^n(x)) \leq k d(F^n(x), F^{n-1}(x)) \leq \dots \leq k^n d(F(x), x).$$

Donc, pour tout  $n, p \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned} d(F^{n+p}(x), F^n(x)) &\leq d(F^{n+p}(x), F^{n+p-1}(x)) + \dots + d(F^{n+1}(x), F^n(x)) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \dots + k^{n+p-1}) d(F(x), x) \\ &\leq k^n (1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1}) d(F(x), x) \\ &\leq k^n \frac{1 - k^p}{1 - k} d(F(x), x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où la dernière inégalité s'obtient en calculant la somme d'une suite géométrique de raison  $k$ . On voit que si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $d(F^{n+p}(x), F^n(x)) \rightarrow 0$  et donc la suite  $(F^n(x))_n$  est de Cauchy dans  $X$ .

Par conséquent, comme  $X$  est complet, cette suite converge vers une limite que nous appellerons  $\alpha$ , que nous allons montrer que c'est un point fixe de  $F$ .

D'abord, remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x).$$

Ensuite, le fait que  $F$  est contractante entraîne qu'elle est continue, et donc

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(x)) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)) = F(\alpha).$$

Enfin, dans l'inégalité (2.1), si on fixe  $n$  et en fait tendre  $p$  vers l'infini on aura

$$d(\alpha, F^n(x)) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x, F(x)).$$

➡ **Méthode 2 :**

Soit  $a = \inf d(x, F(x)) : x \in X \geq 0$ , supposons que  $a > 0$ . Alors pour  $\epsilon > 0$ , il existe  $x \in X$  tel que  $d(x, F(x)) < a + \epsilon$ , on aura donc

$$a \leq d(F(x), F^2(x)) \leq kd(x, F(x)) < k(a + \epsilon),$$

ce qui nous ramène à une contradiction lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, d'où  $a = 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , considérons les ensembles

$$D_n = \{x \in X : d(x, F(x)) \leq \frac{1}{n}\}$$

- $D_n$  est non vide, car  $a = 0$ .
- $D_n$  est fermé, car toute suite de  $D_n$  convergente dans  $X$  a une limite dans  $D_n$ .
- De plus, les ensembles  $D_n$  forment une suite décroissante quand  $n \rightarrow \infty$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(D_n) = 0$ . En effet,  $\forall x, y \in D_n$

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, F(x)) + d(F(x), F(y)) + d(F(y), y) \\ &\leq \frac{2}{n} + kd(x, y). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$d(x, y) \leq \frac{2}{n(1-k)} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty.$$

Ensuite, le théorème des ensembles emboîtés de Cantor assure que l'intersection des  $D_n$  dans lequel  $n \in \mathbb{N}^*$  est réduite à un point qui est l'unique point fixe de  $F$ .

**Exemple 2.1.1**

- Soient  $X = [a, b]$  et l'application  $F : X \rightarrow X$  telle que  $F$  est dérivable en chaque  $x \in ]a, b[$  et  $|F'(x)| \leq k < 1$ . Alors, on déduit du théorème des accroissements finis que :  
 $\forall x, y \in X$ , il existe un point  $\varepsilon$  entre  $x$  et  $y$  tel que

$$F(x) - F(y) = F'(\varepsilon)(x - y),$$

Donc

$$|F(x) - F(y)| = |F'(\varepsilon)| |x - y| \leq k |x - y|.$$

Par conséquent,  $F$  est contractante et donc elle admet un unique point fixe.

- Soient  $X = \mathbb{R}$  et l'application  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Alors  $F$  est contractante et elle admet un unique point fixe  $x = 2$ .

### Remarque 2.1.2

Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème précédent est réellement utile.

- Si  $X$  n'est pas stable par  $F : F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  sur  $X = [0, 1]$ . On a  $X$  est fermé dans  $\mathbb{R}$  donc il est complet (car  $\mathbb{R}$  est complet). De plus  $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1$  ce qui implique que  $\sup_{x \in [0, 1]} |F'(x)| < 1$ , donc  $F$  est contractante sur  $[0, 1]$ . Mais  $F$  n'admet pas de point fixe car  $F([0, 1]) = [1, \sqrt{2}] \not\subset [0, 1]$ , i.e  $X$  n'est pas stable par  $F$ .
- Si  $F$  n'est pas contractante :  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  sur  $X = [0, +\infty[$ .  
On a  $F([0, +1]) \subset [0, +\infty[$  et  $X$  est un fermé dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $X$  est complet. Mais  $F$  n'a pas de point fixe car  $\sup_{x \in X} |F'(x)| = 1$ , i.e  $F$  n'est pas contractante.
- Si  $X$  n'est pas complet :  $F(x) = \frac{\sin x}{2}$  sur  $X = ]0, \frac{\pi}{4}]$ .  
On a  $F(]0, \frac{\pi}{4}]) = ]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset ]0, \frac{\pi}{4}]$  et  $\sup_{x \in X} |F'(x)| = \frac{1}{2} < 1$ , alors  $F$  est contractante. Mais  $F$  n'admet pas de point fixe car  $X$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}$  donc  $X$  n'est pas complet.

### Corollaire 2.1.1

Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $F : X \rightarrow X$  une application  $k$ -lipschitzienne (c'est à dire  $\exists k \geq 0$  tel que  $\forall x, y \in X, \|F(x) - F(y)\| \leq k \|x - y\|$ ) et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $|\lambda| > k$ . Alors pour tout  $a \in X$ , il existe une unique solution  $\alpha = \alpha(a)$  dans  $X$  de l'équation abstraite  $F(x) + \lambda x = a$ .

**Preuve :**

Soient  $g$  l'application définie par  $g(x) = \frac{a - F(x)}{\lambda}$  et  $x, y \in X$ , alors

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &= \left\| \frac{a - F(x) - a + F(y)}{\lambda} \right\| \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \|F(x) - F(y)\| \\ &\leq \frac{k}{|\lambda|} \|x - y\|, \end{aligned}$$

où  $|\lambda| > k$ , alors  $g$  est contractante, il existe donc une unique solution  $\alpha$  de l'équation  $g(x) = x$  en vertu du théorème 2.1, autrement dit une solution de l'équation  $F(\alpha) + \lambda\alpha = a$ .

**Remarque 2.1.3**

Si dans le théorème 2.1,  $k = 1$ , alors :

- L'application  $F$  n'admet pas nécessairement de point fixe. Par exemple la translation dans un espace de Banach :  $x \rightarrow x + v$  ( $v \neq 0$ ).
- Si  $F$  admet un point fixe, ce point fixe n'est pas nécessairement unique. Par exemple l'application identité.
- L'application  $F$  peut admettre un unique point fixe. Par exemple l'application

$$F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow 1 - x.$$

Dans la littérature, il existe diverses versions modifiées du théorème de contraction de Banach. Généralement, si l'une des hypothèses est affaiblie les autres doivent être renforcées. La complétude de l'espace est généralement indispensable. Dans ce qui suit, on présente quelques variantes du principe de contraction de Banach.

## 2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour la démonstration de l'existence d'un point fixe d'une application continue sur un sous ensemble convexe

compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

**Théorème 2.2.1 (Théorème du point fixe de Schauder) [5]**

Soient  $K$  un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach  $X$  et  $T : K \rightarrow K$  une application continue. Alors  $T$  admet un point fixe.

**Preuve :**

Soit  $T : K \rightarrow K$  une application continue. Comme  $K$  est compact, alors  $T$  est uniformément continue. Donc pour  $\epsilon$  fixé, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x, y \in K$  on a :

$$\|x - y\| \leq \delta \implies \|T(x) - T(y)\| \leq \epsilon.$$

De plus, il existe un ensemble fini de points  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset K$  tel que les boules ouvertes de rayon  $\delta$  centrées en  $x_i$  recouvrent  $K$ , c'est-à-dire,  $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$ .

Si on pose  $L \doteq \text{vect}(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ , alors  $L$  est de dimension finie, et  $K^* \doteq K \cap L$  est compact convexe de dimension finie. Pour  $1 \leq j \leq p$ , on définit la fonction continue  $\psi_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que  $\psi_j$  est strictement positive sur  $B(x_j, \delta)$  et nulle en dehors. On a donc pour tout  $x \in K$ ,  $\sum_{j=1}^p \psi_j(x) > 0$ , et par la suite on peut définir sur  $K$  les fonctions continues positives  $\varphi_j$  par :

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{j=1}^p \psi_j(x)}$$

pour les quelles on a  $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$ , pour tout  $x \in K$ .

Posons maintenant, pour  $x \in K$ ,

$$g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x) T(x_j).$$

La fonction  $g$  est continue (somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans  $K^*$  (car  $g$  est un barycentre des  $T(x_j)$ ).

Si on prend la restriction  $g/K^* : K^* \rightarrow K^*$ , (d'après le théorème de Brouwer [5])  $g$  possède un point fixe  $y \in K^*$ .

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) (T(y) - T(x_j)). \end{aligned}$$

Or si  $\varphi_j(y) \neq 0$  alors  $\|y - x_j\| < \delta$ , et par suite  $\|T(y) - T(x_j)\| < \epsilon$ . Donc, on a  $\forall j$

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) \|T(y) - T(x_j)\| \\ &\leq \epsilon \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) = \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier  $m$  on peut trouver un point  $y_m \in K$  tel que  $\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$ . Et puisque  $K$  est compact, alors de la suite  $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  on peut extraire une sous suite  $(y_{m_k})$  qui converge vers un point  $y^* \in K$ . Alors, comme  $T$  est continue, la suite  $(T(y_{m_k}))$  converge vers  $T(y^*)$ , et on conclut que  $T(y^*) = y^*$ , c'est-à-dire  $y^*$  est un point fixe de  $T$  sur  $K$ .

Pour les applications, la généralisation suivante s'avère utile.

### **Théorème 2.2.2 (Théorème du point fixe de Schauder généralise)[5]**

Soit  $F$  un sous-ensemble non vide fermé borné et convexe d'un espace de Banach  $X$  et soit  $T : F \rightarrow F$  une application complètement continue. Alors  $T$  admet un point fixe.

### **Théorème 2.2.3**

Supposons que  $T$  est une application continue entre deux espace de Banach  $X$  et  $Y$ . Si  $K$  est un ensemble compact dans  $X$  alors,  $T(K)$  est un ensemble compact dans  $Y$ .

**Preuve :** Voir [5].

## 2.3 Théorème du point fixe de Boyd–Wong

Maintenant, on va présenter la démonstration de quelques généralisations du théorème de contraction de Banach, dans lesquelles la constante de contraction  $k$  est remplacée par une fonction réelle.

### Théorème 2.3.1 [15]

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet, on suppose que  $f : X \rightarrow X$  satisfait

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(d(x, y)), \forall x, y \in X,$$

où  $0 \leq \psi(t) < t$  pour  $t > 0$  et  $\psi : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  est une fonction semi continue supérieurement à droite ( c'est-à-dire, pour tout suite  $t_n \rightarrow t, t \geq 0$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \psi(t_n) \leq \psi(t)). \text{ Alors, } f \text{ admet un point fixe unique.}$$

**Preuve :**

Soit  $x_0$  un élément quelconque mais fixé dans  $X$ . Définissons une suite récurrente  $(x_n)$  dans  $X$  par

$$x_n = f(x_{n-1}) = (f^n(x_0)), \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Soit  $a_n = d(x_{n-1}, x_n)$ , il est clair que la suite  $(a_n)$  est monotone décroissante et minorée donc elle est convergente. On pose  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Si  $a > 0$ , on obtient une contradiction en effet

$$a_{n+1} \leq \psi(a_n)$$

et ainsi  $a \leq \psi(a)$  ce qui contredit la propriété de  $\psi$ , par conséquent,  $a_n$  converge vers 0. Maintenant, nous montrons que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $m_k > n_k \geq k$  tels que nous avons la relation

$$d_k = d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon.$$

Bien sûr , nous pouvons supposer que  $d(x_m, x_{m-1}) \leq \epsilon$  et nous avons donc

$$d_k < d(x_{m_k}, x_{m_{k-1}}) + d(x_{m_{k-1}}, x_{n_k}) \leq a_{m_k} + \epsilon \leq a_k + \epsilon.$$

Ce qui implique que  $d_k \rightarrow 0$ .

D'autre part

$$\begin{aligned} d_k &\leq d(x_{m_k}, x_{m_{k+1}}) + d(x_{m_{k+1}}, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \\ &\leq 2a_k + \psi(d_k). \end{aligned}$$

On déduit que  $\epsilon \leq \psi(\epsilon)$ , ce qui est contradiction. Par conséquent  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dans  $X$ .

Puisque  $X$  est complet,  $x_n \rightarrow z \in X$ . Ainsi par la continuité de  $f$ , on obtient  $f(z) = z$ .

L'unicité de  $z$  découle de la condition de contraction.

## 2.4 Théorème du point fixe de Perov

### Théorème 2.4.1 (Théorème de Perov [18])

Soient  $(X, d)$  est un espace métrique complet généralisé et  $f : X \rightarrow X$  une application telle que pour tout  $u, v \in X$  on a :

$$d(f(u), f(v)) \leq Md(u, v)$$

où  $M$  est une matrice carré à composantes non négatives. Si la matrice  $M$  converge vers zéro, c'est-à-dire  $M^k \rightarrow 0$  quand  $K \rightarrow \infty$  alors  $f$  admet un point fixe unique  $u$  de plus on a :

$$d(f^k(u), f(v)) \leq M^k(I - M)^{-1}d(f(v), v)$$

pour tout  $v \in X$  et  $k \geq 1$ .

## CHAPITRE

### 3

## APPLICATIONS

**D**ans ce chapitre, on étudiera des équations et systèmes différentiels du second ordre avec des conditions aux limites non linéaires à trois points. L'existence de solutions est prouvée en utilisant les théorèmes de point fixe : principe de contraction de Banach et de Schauder, celui Boyd-Wong et de Perov.

### 3.1 Résultats d'existence pour un problème aux limites à trois points [15]

Dans cette section, on s'intéresse de l'étude du problème à valeurs aux limites du second ordre suivant :

$$\begin{cases} u'' = f(t, u, u'), & 0 < t < t_0, \\ u(0) = 0, & u(t_0) = g(u(\eta)). \end{cases} \quad (3.1)$$

### 3.1.1 Reformulation du problème

D'abord, nous remarquons que le problème (3.1) peut être reformulé de manière équivalente comme

$$u(t) = \int_0^{t_0} G(t, s) f(s, u(s), u'(s)) ds + \frac{t}{t_0} g(u(\eta)),$$

où  $G(t, s)$  est la fonction de Green définie par :

$$G(t, s) = \begin{cases} -\frac{t(t_0-s)}{t_0}, & 0 \leq t \leq s \leq t_0, \\ -\frac{s(t_0-t)}{t_0}, & 0 \leq s \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

En outre, on peut démontrer que :

$$\max_{t \in [0, t_0]} \int_0^{t_0} |G(t, s)| ds = \max_{t \in [0, t_0]} \frac{t(t_0-t)}{2} = \frac{t_0^2}{8}.$$

**Preuve :**

On a  $u'' = f(t, u, u')$  En intégrant deux fois de 0 à  $t$  les deux membre de cette équations. on obtient :

$$u'(t) - u'(0) = \int_0^t f(s, u(s), u'(s)) ds,$$

ce qui donne :

$$u'(t) = u'(0) + \int_0^t f(s, u(s), u'(s)) ds,$$

ensuite

$$u(t) - u(0) = u'(0)t + \int_0^t \int_0^t f(s, u(s), u'(s)) ds,$$

la première condition au limite entraine que

$$u(t_0) = u'(0)t_0 + \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} f(s, u(s), u'(s)) ds, \quad (3.2)$$

en remplaçant  $u(t_0)$  dans l'expression de  $g(u(\eta))$  :

$$g(u(\eta)) = u'(0)t_0 + \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} f(s, u(s), u'(s)) ds,$$

$$u'(0) = -\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} f(s, u(s), u'(s)) ds + \frac{1}{t_0} g(u(\eta)),$$

en remplaçant  $u'(0)$  dans l'équation (3.2), et  $t$  par  $t_0$ , on obtient :

$$u(t) = \left[ \frac{1}{t_0} g(u(\eta)) - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} f(s, u(s), u'(s)) ds \right] t + \int_0^t \int_0^t f(s, u(s), u'(s)) ds,$$

$$u(t) = \frac{t}{t_0} g(u(\eta)) - \frac{t}{t_0} \int_0^{t_0} (t_0 - s) f(s, u(s), u'(s)) ds + \int_0^t (t - s) f(s, u(s), u'(s)) ds,$$

$$u(t) = \frac{t}{t_0} g(u(\eta)) - \frac{t}{t_0} \int_0^t (t_0 - s) f(s, u(s), u'(s)) ds - \frac{t}{t_0} \int_t^{t_0} (t_0 - s) f(s, u(s), u'(s)) ds$$

$$+ \int_0^t (t - s) f(s, u(s), u'(s)) ds,$$

$$u(t) = \frac{t}{t_0} g(u(\eta)) + \int_0^t -\frac{s}{t_0} (t_0 - t) f(s, u(s), u'(s)) ds + \int_t^{t_0} -\frac{t}{t_0} (t_0 - s) f(s, u(s), u'(s)) ds,$$

$$\Rightarrow u(t) = \int_0^{t_0} G(t, s) f(s, u(s), u'(s)) ds + \frac{t}{t_0} g(u(\eta)),$$

où :

$$G(t, s) = \begin{cases} -\frac{t(t_0-s)}{t_0}, & 0 \leq t \leq s \leq t_0, \\ -\frac{s(t_0-t)}{t_0}, & 0 \leq s \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

D'une autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_0} |G(t, s)| ds &= \int_0^t \frac{s(t_0 - t)}{t_0} ds + \int_t^{t_0} \frac{t(t_0 - s)}{t_0} ds \\
 &= \frac{1}{t_0} (t_0 - t) \left[ \frac{s^2}{2} \right]_0^t + \frac{t}{t_0} \left[ t_0 s - \frac{s^2}{2} \right]_t^{t_0} \\
 &= \frac{1}{t_0} (t_0 - t) \frac{t^2}{2} + \frac{t}{t_0} \left( t_0^2 - \frac{t_0^2}{2} - t_0 t + \frac{t^2}{2} \right) \\
 &= \frac{t}{t_0} \left( \frac{t_0 t}{2} - \frac{t^2}{2} + t_0^2 - \frac{t_0^2}{2} - t_0 t + \frac{t^2}{2} \right) \\
 &= \frac{t}{t_0} \left( -\frac{t_0 t}{2} + \frac{t_0^2}{2} \right) \\
 &= \frac{t}{2} (t_0 - t).
 \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(t) = \frac{t}{2} (t_0 - t) = \frac{-t^2 + t_0 t}{2}$ ,  $t \in [0, t_0]$  atteint son maximum en  $t = \frac{t_0}{2}$  car c'est une fonction polynome de second degré dont le coefficient de  $t^2$  est négatif et  $\varphi'(\frac{t_0}{2}) = 0$  alors

$$\max_{t \in [0, t_0]} \left\{ \int_0^{t_0} |G(t, s)| ds \right\} = \max_{t \in [0, t_0]} \left\{ \frac{t}{2} (t_0 - t) \right\} = \frac{t_0^2}{8}.$$

En prenant le maximum, puisque  $t \leq t_0$ .

D'après cette nouvelle formulation de notre problème, on observe que  $u$  est une solution du problème (3.1) si et seulement si  $u$  est un point fixe de l'opérateur

$T : C^1[0, t_0] \rightarrow C^1[0, t_0]$ , défini par :

$$(Tu)(t) = \int_0^{t_0} G(t, s) f(s, u(s), u'(s)) ds + \frac{t}{t_0} g(u(\eta)),$$

où  $C^1[0, t_0]$  désigne l'espace de toutes les fonctions continument différentiables sur  $[0, t_0]$ , équipé de la norme

$$\|u\|_{C^1[0, t_0]} = \max \{ \|u\|_\infty, \|u'\|_\infty \}.$$

Ici,  $\|w\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq t_0} |w(t)|$  alors l'espace  $C^1 [0, t_0]$  est un espace de Banach par rapport à la norme  $\|u\|_{C^1 [0, t_0]}$ .

### 3.1.2 Application du principe de contraction de Banach

#### Théorème 3.1.1

Si la fonction  $f$  satisfait la condition suivant :

- il existe  $a, b, c > 0$  tels que :

$$[H1] \begin{cases} |f(t, u, v) - f(t, \bar{u}, \bar{v})| \leq a|u - \bar{u}| + b|v - \bar{v}|, \\ |g(u) - g(\bar{u})| \leq c|u - \bar{u}|, \end{cases}$$

pour  $t \in [0, t_0]$  et  $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$ ,

- pourvu que

$$\frac{a+b}{2}t_0 + \frac{c}{t_0} < 1, \quad (3.3)$$

alors le problème (3.1) admet une solution unique.

**Preuve :**

En utilisant (H1), nous avons :

$$\begin{aligned} \left| T(u)(t) - T(\bar{u})(t) \right| &= \left| \int_0^t G(t, s) f(s, u(s), u'(s)) ds + \frac{t}{t_0} g(u(\eta)) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t G(t, s) f(s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s)) ds - \frac{t}{t_0} g(\bar{u}(\eta)) \right| \\ &\leq \int_0^t |G(t, s)| \cdot |f(s, u(s), u'(s)) - f(s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s))| ds \\ &\quad + \frac{t}{t_0} |g(u(\eta)) - g(\bar{u}(\eta))| \\ &\leq \int_0^t |G(t, s)| \cdot (a|u(s) - \bar{u}(s)| + b|u'(s) - \bar{u}'(s)|) ds \\ &\quad + \frac{t}{t_0} \cdot c|u(\eta) - \bar{u}(\eta)|. \end{aligned}$$

Comme nous avons

$$\max_{t \in [0, t_0]} \left\{ \int_0^t |G(t, s)| ds \right\} = \max_{t \in [0, t_0]} \left\{ \frac{t}{2} (t_0 - t) \right\} = \frac{t_0^2}{8}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 \|T(u) - T(\bar{u})\|_{\infty} &\leq a \frac{t_0^2}{8} \|u - \bar{u}\|_{\infty} + b \frac{t_0^2}{8} \|u' - \bar{u}'\|_{\infty} + c \|u - \bar{u}\|_{\infty} \\
 &\leq a \frac{t_0^2}{8} \|u - \bar{u}\|_{C^1[0, t_0]} + b \frac{t_0^2}{8} \|u - \bar{u}\|_{C^1[0, t_0]} + c \|u - \bar{u}\|_{C^1[0, t_0]} \\
 &\leq \left( \frac{a+b}{8} t_0^2 + c \right) \|u - \bar{u}\|_{C^1[0, t_0]}.
 \end{aligned}$$

En outre

$$(Tu)'(t) = \int_0^{t_0} G_t(t, s) f(s, u(s), u'(s)) ds + \frac{1}{t_0} g(u(\eta)),$$

où

$$G_t(t, s) = \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) = \begin{cases} \frac{s}{t_0} - 1, & 0 \leq t \leq s \leq t_0, \\ \frac{s}{t_0}, & 0 \leq s \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \left| (Tu)'(t) - (T\bar{u})'(t) \right| &= \left| \int_0^{t_0} G_t(t, s) f(s, u(s), u'(s)) ds + \frac{1}{t_0} g(u(\eta)) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{t_0} G_t(t, s) f(s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s)) ds - \frac{1}{t_0} g(\bar{u}(\eta)) \right| \\
 &\leq \int_0^{t_0} |G_t(t, s)| \cdot |f(s, u(s), u'(s)) - f(s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s))| ds \\
 &\quad + \frac{1}{t_0} |g(u(\eta)) - g(\bar{u}(\eta))| \\
 &\leq \int_0^{t_0} |G_t(t, s)| \cdot (a|u(s) - \bar{u}(s)| + b|u'(s) - \bar{u}'(s)|) ds \\
 &\quad + \frac{1}{t_0} \cdot c|u(\eta) - \bar{u}(\eta)|.
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^{t_0} |G_t(t, s)| ds = \int_0^t \frac{s}{t_0} ds + \int_t^{t_0} \left(\frac{s}{t_0} - 1\right) ds \leq \frac{t_0}{2} \quad \text{pour tout } t \in [0, t_0],$$

il s'ensuit que

$$\left| (Tu)'(t) - (T\bar{u})'(t) \right| \leq a \frac{t_0}{2} \|u - \bar{u}\|_\infty + b \frac{t_0}{2} \|u' - \bar{u}'\|_\infty + \frac{c}{t_0} \|u - \bar{u}\|_\infty.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|T(u)' - T(\bar{u})'\|_\infty &\leq a \frac{t_0}{2} \|u - \bar{u}\|_\infty + b \frac{t_0}{2} \|u' - \bar{u}'\|_\infty + \frac{c}{t_0} \|u - \bar{u}\|_\infty \\ &\leq a \frac{t_0}{2} \|u - \bar{u}\|_{C^1[0, t_0]} + b \frac{t_0}{2} \|u - \bar{u}\|_{C^1[0, t_0]} + \frac{c}{t_0} \|u - \bar{u}\|_{C^1[0, t_0]} \\ &\leq \left( \frac{a+b}{2} t_0 + \frac{c}{t_0} \right) \|u - \bar{u}\|_{C^1[0, t_0]}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|Tu - T\bar{u}\|_{C^1[0, t_0]} \leq \max_{t_0 \leq 1} \left\{ \frac{a+b}{8} t_0^2 + c, \frac{a+b}{2} t_0 + \frac{c}{t_0} \right\} \|u - \bar{u}\|_{C^1(0, t_0)}.$$

De l'hypothèse  $t_0 \leq 1$ , nous déduisons que

$$\frac{a+b}{8} t_0^2 + c \leq \frac{a+b}{8} t_0^2 + \frac{c}{t_0} \leq \frac{a+b}{2} t_0 + \frac{c}{t_0},$$

et donc

$$\max_{t_0 \leq 1} \left\{ \frac{a+b}{8} t_0^2 + c, \frac{a+b}{2} t_0 + \frac{c}{t_0} \right\} = \frac{a+b}{2} t_0 + \frac{c}{t_0}.$$

On obtient ainsi que

$$\|Tu - T\bar{u}\|_{C^1[0, t_0]} \leq \left( \frac{a+b}{2} t_0 + \frac{c}{t_0} \right) \|u - \bar{u}\|_{C^1[0, t_0]}.$$

Puisque

$$\frac{a+b}{2} t_0 + \frac{c}{t_0} < 1,$$

alors l'opérateur  $T$  est une contraction et le principe de contraction de Banach peut être appliqué.

### 3.1.3 Application du théorème du point fixe de Schauder

#### Théorème 3.1.2

Si la fonction  $f$  vérifie la condition

- il existe  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2 > 0$  tel que :

$$[H2] \left\{ \begin{array}{l} |f(t, u, v)| \leq \alpha_1 |u| + \alpha_2 |v| + \alpha_3 \text{ et } |g(u)| \leq \beta_1 |u| + \beta_2, \\ \forall t \in [0, t_0] \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

- et

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} t_0 + \frac{\beta_1}{t_0} < 1. \quad (3.4)$$

Alors, le problème (3.1) admet au moins une solution.

**Preuve :**

Nous montrons que  $T$  a un point fixe dans un ensemble de la forme

$$B = \{u \in C^1[0, t_0] : u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \|u\|_{C^1[0, t_0]} \leq R\}$$

avec un  $R > 0$  approprié.

Notons tout d'abord que, pour  $u \in B$ ,  $u(0) = 0$  on a :

$$u(t) = \int_0^t u'(s) ds, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Alors

$$\|u\|_\infty \leq t \|u'\|_\infty \leq t_0 \|u'\|_\infty \leq \|u'\|_\infty,$$

et donc

$$\|u\|_{C^1[0, t_0]} = \max \{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\} = \|u'\|_\infty.$$

De plus,  $B$  est une boule fermée de rayon  $R$  donc c'est un sous-ensemble convexe fermé de  $C^1[0, t_0]$ .

Maintenant, à partir du résultat

$$\int_0^{t_0} |G_t(t, s)| ds \leq \frac{t_0}{2}.$$

On voit que

$$\begin{aligned}
 |(Tu)'(t)| &= \left| \int_0^{t_0} G_t(t, s) f(s, u(s), u'(s)) ds + \frac{1}{t_0} g(u(\eta)) \right| \\
 &\leq \frac{t_0}{2} \max_{0 \leq t \leq t_0} |f(s, u(s), u'(s))| + \frac{1}{t_0} |g(u(\eta))| \\
 &\leq \frac{t_0}{2} (\alpha_1 \|u\|_\infty + \alpha_2 \|u'\|_\infty + \alpha_3) + \frac{1}{t_0} (\beta_1 \|u\|_\infty + \beta_2).
 \end{aligned}$$

Alors, on a pour  $u \in B$ ,

$$\|Tu\|_{C^1[0, t_0]} = \max_{0 \leq t \leq t_0} |(Tu)'(t)| \leq \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} t_0 + \frac{\beta_1}{t_0} \right) \|u\|_{C^1[0, t_0]} + \frac{\alpha_3}{2} t_0 + \frac{\beta_2}{t_0}.$$

Comme nous avons  $\|u\|_{C^1[0, t_0]} \leq R$ , donc

$$\|Tu\|_{C^1[0, t_0]} \leq \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} t_0 + \frac{\beta_1}{t_0} \right) R + \frac{\alpha_3}{2} t_0 + \frac{\beta_2}{t_0},$$

et si

$$\left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} t_0 + \frac{\beta_1}{t_0} \right) R + \frac{\alpha_3}{2} t_0 + \frac{\beta_2}{t_0} \leq R.$$

D'après l'inégalité (3.4) le  $R$  strictement positif existe et vérifie  $T(B) \subset B$ . Du fait que  $f$  et  $g$  sont continues, alors l'opérateur  $T$  est continu de  $C^1[0, t_0]$  dans  $C^2[0, t_0]$  et envoie tout borné  $M$  de  $C^1[0, t_0]$  à un borné  $T(M)$  de  $C^2[0, t_0]$ . Et comme l'injection de  $C^2[0, t_0]$  dans  $C^1[0, t_0]$  est compacte, alors d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà,  $T(M)$  est relativement compact dans  $C^1[0, t_0]$ . D'après le théorème de point fixe de Schauder le problème donné admet au moins une solution dans  $B$ .

### 3.1.4 Application du théorème du point fixe de Boyd-Wong

Dans cette section, au lieu de la condition de Lipschitz sur  $f$  de (H1), nous considérons plus généralement des conditions de type Boyd-Wong.

**Théorème 3.1.3**

Nous supposons que les conditions suivantes sont remplies :

- il existe deux fonctions  $\Psi_1, \Psi_2 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  semi-continues supérieurement à droite et non décroissantes et une constante  $c > 0$  tel que :

$$[H3] \begin{cases} |f(t, u, v) - f(t, \bar{u}, \bar{v})| \leq \Psi_1 |u - \bar{u}| + \Psi_2 |v - \bar{v}|, \\ |g(u) - g(\bar{u})| \leq c |u - \bar{u}|, \end{cases}$$

- et

$$\Psi(t) \doteq \max \left\{ \frac{t_0^2}{8} (\Psi_1 + \Psi_2)(t) + ct, \frac{t_0}{2} (\Psi_1 + \Psi_2)(t) + \frac{c}{t_0} t \right\} < t, \quad (3.5)$$

alors le problème (3.1) admet une solution unique.

**Preuve :**

En utilisant (H3), nous avons :

$$\begin{aligned} \left| T(u)(t) - T(\bar{u})(t) \right| &= \left| \int_0^{t_0} G(t, s) f(s, u(s), u'(s)) ds + \frac{t}{t_0} g(u(\eta)) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_0} G(t, s) f(s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s)) ds - \frac{t}{t_0} g(\bar{u}(\eta)) \right| \\ &\leq \int_0^{t_0} |G(t, s)| \cdot |f(s, u(s), u'(s)) - f(s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s))| ds \\ &\quad + \frac{t}{t_0} |g(u(\eta)) - g(\bar{u}(\eta))| \\ &\leq \int_0^{t_0} |G(t, s)| \cdot (\Psi_1 |u(s) - \bar{u}(s)| + \Psi_2 |u'(s) - \bar{u}'(s)|) ds \\ &\quad + \frac{t}{t_0} \cdot c |u(\eta) - \bar{u}(\eta)|. \end{aligned}$$

En prenant le max et en utilisant l'inégalité (3.3) et le fait que  $\Psi_1, \Psi_2$  sont non décroissantes, on obtient

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(\bar{u})\|_\infty &\leq [\Psi_1 (\|u - \bar{u}\|_\infty) + \Psi_2 (\|u' - \bar{u}'\|_\infty)] \int_0^{t_0} |G(t, s)| ds + c \|u - \bar{u}\|_\infty \\ &\leq \frac{t_0^2}{8} (\Psi_1 + \Psi_2) (\|u - \bar{u}\|_{C^1(0, t_0)}) + c \|u - \bar{u}\|_{C^1(0, t_0)}. \end{aligned}$$

De même, nous obtenons que

$$\|(Tu)' - (T\bar{u})'\|_\infty \leq \frac{t_0}{2} (\Psi_1 + \Psi_2) (\|u - \bar{u}\|_{C^1[0,t_0]}) + \frac{c}{t_0} \|u - \bar{u}\|_{C^1[0,t_0]}.$$

Donc

$$\|Tu - T\bar{u}\|_{C^1[0,t_0]} \leq \max \left\{ \frac{t_0^2}{8} (\psi_1 + \psi_2) (\|u - \bar{u}\|_{C^1[0,t_0]}) + c\|u - \bar{u}\|_{C^1[0,t_0]}, \right. \\ \left. \frac{t_0}{2} (\psi_1 + \psi_2) (\|u - \bar{u}\|_{C^1[0,t_0]}) + \frac{c}{t_0} \|u - \bar{u}\|_{C^1[0,t_0]} \right\}.$$

Puisque

$$\Psi(t) \doteq \max \left\{ \frac{t_0^2}{8} (\Psi_1 + \Psi_2)(t) + ct, \frac{t_0}{2} (\Psi_1 + \Psi_2)(t) + \frac{c}{t_0} t \right\} < t, \text{ pour tout } t > 0,$$

alors le principe de contraction de Boyd-Wong peut être appliqué et  $T$  a un point fixe unique.

### Remarque 3.1.1

Le théorème 3.1.3 est une généralisation du théorème 3.1.1. En effet, pour

$$\Psi_1(t) = at \quad \text{et} \quad \Psi_2(t) = bt,$$

la condition  $[H3]$  devient  $[H1]$  et l'inégalité (3.5) est satisfaite si et seulement si l'inégalité (3.3) est vérifiée.

## 3.2 Résultats d'existence pour un systèmes d'équations différentielles

Nous abordons dans la suite un problème aux limites à trois points pour un système différentiel du second ordre du type :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), v(t)), \\ v''(t) = g(t, u(t), v(t)), \quad 0 < t < t_0, \\ u(0) = 0, u(t_0) = \phi(u(\eta), v(\eta)), \\ v(0) = 0, v(t_0) = \psi(u(\eta), v(\eta)). \end{cases} \quad (3.6)$$

Le problème (3.6) est équivalent au système intégral suivant dans

$$C[0, t_0]^2 \doteq C[0, t_0] \times C[0, t_0].$$

$$\begin{cases} u(t) = \int_0^{t_0} G(t, s) f(s, u(s), v(s)) ds + \frac{t}{t_0} \phi(u(\eta), v(\eta)), \\ v(t) = \int_0^{t_0} G(t, s) g(s, u(s), v(s)) ds + \frac{t}{t_0} \psi(u(\eta), v(\eta)). \end{cases}$$

Cela peut être considéré comme un problème de point fixe dans  $C[0, t_0]^2$

$$\begin{cases} u(t) = T_1(u(t), v(t)), \\ v(t) = T_2(u(t), v(t)), \end{cases}$$

pour un opérateur complètement continu  $T = (T_1, T_2)$ ,  $T : C[0, t_0]^2 \rightarrow C[0, t_0]^2$ , où  $T_1, T_2$  sont donnés par :

$$\begin{cases} T_1(u, v)(t) = \int_0^{t_0} G(t, s) f(s, u(s), v(s)) ds + \frac{t}{t_0} \phi(u(\eta), v(\eta)), \\ T_2(u, v)(t) = \int_0^{t_0} G(t, s) g(s, u(s), v(s)) ds + \frac{t}{t_0} \psi(u(\eta), v(\eta)). \end{cases}$$

### 3.2.1 Application du théorème du point fixe de Perov

Ici, l'existence de solutions au problème (3.6) est établie au moyen d'un théorème de point fixe.

#### Théorème 3.2.1

Supposons que la condition

$$\begin{cases} |f(t, u, v) - f(t, \bar{u}, \bar{v})| \leq a_1 |u - \bar{u}| + b_1 |v - \bar{v}|, \\ |g(t, u, v) - g(t, \bar{u}, \bar{v})| \leq a_2 |u - \bar{u}| + b_2 |v - \bar{v}|, \\ |\phi(u, v) - \phi(\bar{u}, \bar{v})| \leq c_1 |u - \bar{u}| + d_1 |v - \bar{v}|, \\ |\psi(u, v) - \psi(\bar{u}, \bar{v})| \leq c_2 |u - \bar{u}| + d_2 |v - \bar{v}|. \end{cases} \quad (3.7)$$

pour  $t \in [0, t_0]$ ,  $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$  et certains  $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, d_1, c_2, d_2 > 0$  soit vérifiée. Si la matrice

$$M \doteq \begin{bmatrix} \frac{a_1}{8} t_0^2 + c_1 & \frac{b_1}{8} t_0^2 + d_1 \\ \frac{a_2}{8} t_0^2 + c_2 & \frac{b_2}{8} t_0^2 + d_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

converge vers zéro, alors le problème (3.6) a une solution unique dans  $C[0, t_0]^2$ .

**Preuve :**

Nous allons appliquer le théorème du point fixe de Perov dans  $C[0, t_0]^2$  muni de la norme à valeurs vectorielles  $\|\cdot\|_{C[0, t_0]}^2$  définie par

$$\|x\|_{C[0, t_0]}^2 = \begin{bmatrix} \|u\|_\infty \\ \|v\|_\infty \end{bmatrix}$$

pour  $x = (u, v)$   $u, v \in C[0, t_0]$  et

$$\|u\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq t_0} |u(t)|.$$

Nous devons prouver que  $T$  est une contraction généralisée, c'est à dire que

$$\|T(x) - T(\bar{x})\|_{C[0, t_0]} \leq M \|x - \bar{x}\|_{C[0, t_0]}$$

pour tout  $x = (u, v)$ ,  $\bar{x} = (\bar{u}, \bar{v}) \in C[0, t_0]^2$  où  $M$  est une matrice convergente vers zéro. Soit  $(u, v)$ ,  $(\bar{u}, \bar{v})$  deux éléments quelconques de  $C[0, t_0]^2$ . En utilisant la condition (3.7) nous avons

$$\begin{aligned} \left| T_1(u, v)(t) - T_1(\bar{u}, \bar{v})(t) \right| &= \left| \int_0^t G(t, s) f(s, u(s), v(s)) ds + \frac{t}{t_0} \phi(u(\eta), v(\eta)) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t G(t, s) f(s, \bar{u}(s), \bar{v}(s)) ds - \frac{t}{t_0} \phi(\bar{u}(\eta), \bar{v}(\eta)) \right| \\ &\leq \int_0^t |G(t, s)| \cdot |f(s, u(s), v(s)) - f(s, \bar{u}(s), \bar{v}(s))| ds \\ &\quad + \frac{t}{t_0} |\phi(u(\eta), v(\eta)) - \phi(\bar{u}(\eta), \bar{v}(\eta))| \\ &\leq \int_0^t |G(t, s)| \cdot (a_1 |u(s) - \bar{u}(s)| + b_1 |v(s) - \bar{v}(s)|) ds \\ &\quad + \frac{t}{t_0} \cdot (c_1 |u(\eta) - \bar{u}(\eta)| + d_1 |v(\eta) - \bar{v}(\eta)|). \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque  $t < t_0$ ,

$$\|T_1(u, v) - T_1(\bar{u}, \bar{v})\|_\infty \leq \left( \frac{a_1}{8} t_0^2 + c_1 \right) \|u - \bar{u}\|_\infty + \left( \frac{b_1}{8} t_0^2 + d_1 \right) \|v - \bar{v}\|_\infty. \quad (3.9)$$

De même,

$$\|T_2(u, v) - T_2(\bar{u}, \bar{v})\|_\infty \leq \left( \frac{a_2}{8} t_0^2 + c_2 \right) \|u - \bar{u}\|_\infty + \left( \frac{b_2}{8} t_0^2 + d_2 \right) \|v - \bar{v}\|_\infty. \quad (3.10)$$

Maintenant, l'équation (3.9) et l'équation (3.10) peuvent être assemblées et réécrites de manière équivalente comme

$$\begin{bmatrix} \|T_1(u, v) - T_1(\bar{u}, \bar{v})\|_\infty \\ \|T_2(u, v) - T_2(\bar{u}, \bar{v})\|_\infty \end{bmatrix} \leq M \begin{bmatrix} \|u - \bar{u}\|_\infty \\ \|v - \bar{v}\|_\infty \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Alors l'inégalité (3.11) équivaut à

$$\|T(x) - T(\bar{x})\|_{C[0, t_0]}^2 \leq M \|x - \bar{x}\|_{C[0, t_0]}^2,$$

où  $x = (u, v)$ ,  $\bar{x} = (\bar{u}, \bar{v}) \in C[0, t_0]^2$ . Selon le théorème du point fixe de Perov, le problème (3.6) admet une unique solution dans  $C[0, t_0]^2$ .

### 3.2.2 Non-linéarités avec une croissance sous-linéaire. Application du théorème de point fixe de Schauder

Ici, l'existence de solutions pour le problème (3.6) est établie au moyen du théorème de point fixe dans le cas où  $f, g$  satisfaisants une croissance sous-linéaire, c'est-à-dire

$$\begin{cases} |f(t, u, v)| \leq \tilde{a}_1|u| + \tilde{b}_1|v| + \tilde{c}_1, \\ |g(t, u, v)| \leq \tilde{a}_2|u| + \tilde{b}_2|v| + \tilde{c}_2, \\ |\phi(u, v)| \leq \tilde{a}_{01}|u| + \tilde{b}_{01}|v| + \tilde{c}_{01}, \\ |\psi(u, v)| \leq \tilde{a}_{02}|u| + \tilde{b}_{02}|v| + \tilde{c}_{02}. \end{cases} \quad (3.12)$$

pour tous  $t \in [0, t_0]$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$  et certaines  $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}_i, \tilde{a}_{0i}, \tilde{b}_{0i}, \tilde{c}_{0i} > 0, i = 1, 2$ .

#### Théorème 3.2.2

Si la condition (3.12) est remplie et la matrice

$$M_S \doteq \begin{bmatrix} \frac{\tilde{a}_1}{8}t_0^2 + \tilde{a}_{01} & \frac{\tilde{b}_1}{8}t_0^2 + \tilde{b}_{01} \\ \frac{\tilde{a}_2}{8}t_0^2 + \tilde{a}_{02} & \frac{\tilde{b}_2}{8}t_0^2 + \tilde{b}_{02} \end{bmatrix}$$

converge vers zéro, alors le problème (3.6) a au moins une solution dans  $C[0, t_0]^2$ .

**Preuve :**

Pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder, il faut chercher un sous-ensemble

non vide, borné, fermé et convexe  $B$  de  $C[0, t_0]^2$  pour que  $T(B) \subset B$ .

Soit  $u, v$  deux éléments quelconques de  $C[0, t_0]$ . Nous avons

$$\begin{aligned} |T_1(u, v)(t)| &= \left| \int_0^t G(t, s) f(s, u(s), v(s)) ds + \frac{t}{t_0} \phi(u(\eta), v(\eta)) \right| \\ &\leq \int_0^t |G(t, s)| \cdot |f(s, u(s), v(s))| ds + \frac{t}{t_0} \cdot |\phi(u(\eta), v(\eta))| \\ &\leq \int_0^t |G(t, s)| \cdot (\tilde{a}_1 |u(s)| + \tilde{b}_1 |v(s)| + \tilde{c}_1) ds \\ &\quad + \frac{t}{t_0} (\tilde{a}_{01} |u(s)| + \tilde{b}_{01} |v(s)| + \tilde{c}_{01}). \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque  $t < t_0$ , nous obtenons

$$\|T_1(u, v)\|_\infty \leq \left( \frac{\tilde{a}_1}{8} t_0^2 + \tilde{a}_{01} \right) \|u\|_\infty + \left( \frac{\tilde{b}_1}{8} t_0^2 + \tilde{b}_{01} \right) \|v\|_\infty + \tilde{d}_1 \quad (3.13)$$

où  $\tilde{d}_1 = \frac{\tilde{c}_1}{8} t_0^2 + \tilde{c}_{01}$ .

De même,

$$\|T_2(u, v)\|_\infty \leq \left( \frac{\tilde{a}_2}{8} t_0^2 + \tilde{a}_{02} \right) \|u\|_\infty + \left( \frac{\tilde{b}_2}{8} t_0^2 + \tilde{b}_{02} \right) \|v\|_\infty + \tilde{d}_2 \quad (3.14)$$

où  $\tilde{d}_2 = \frac{\tilde{c}_2}{8} t_0^2 + \tilde{c}_{02}$ .

Maintenant, (3.13) et (3.14) peuvent être assemblés et réécrits de manière équivalente comme

$$\begin{bmatrix} \|T_1(u, v)\|_\infty \\ \|T_2(u, v)\|_\infty \end{bmatrix} \leq M_S \begin{bmatrix} \|u\|_\infty \\ \|v\|_\infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, nous recherchons deux nombres positifs  $R_1, R_2$  tels que si  $\|u\|_\infty \leq R_1$ ,

$\|v\|_\infty \leq R_2$ , alors  $\|T_1(u, v)\|_\infty \leq R_1, \|T_2(u, v)\|_\infty \leq R_2$ . Pour cela, il suffit que

$$\begin{cases} \left( \frac{\tilde{a}_1}{8} t_0^2 + \tilde{a}_{01} \right) R_1 + \left( \frac{\tilde{b}_1}{8} t_0^2 + \tilde{b}_{01} \right) R_2 + \tilde{d}_1 \leq R_1 \\ \left( \frac{\tilde{a}_2}{8} t_0^2 + \tilde{a}_{02} \right) R_1 + \left( \frac{\tilde{b}_2}{8} t_0^2 + \tilde{b}_{02} \right) R_2 + \tilde{d}_2 \leq R_2 \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$M_S \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \geq (I - M_S)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \end{bmatrix}.$$

Notez que  $(I - M_S)$  est inversible et son inverse  $(I - M_S)^{-1}$  a des éléments non négatifs puisque  $M_S$  converge vers zéro. Ainsi, si

$$B = \{(u, v) \in C[0, t_0]^2 : \|u\| \leq R_1, \|v\| \leq R_2\}$$

alors  $T(B) \subset B$  et le théorème du point fixe de Schauder peut être appliqué. Il suffit de démontrer que l'opérateur  $T$  est complètement continu.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] **A.I. Perov** ,« *On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations* » , Pribliz. Met. Reshen. Differ. Uravn. 2 (1964), 115–134 (in Russian).
- [2] **Abdul Latif** , « *2014 Banach Contraction Principle and Its Generalizations . In Topics in fixed point theory* » .Springer,33-64.
- [3] **D.R. Smart**,« *Fixed Point Théorems* » , Cambridge Univ. Press 1973.
- [4] **D. W. Boyd & S.W.Wong** , « *On nonlinear contractions* » , Proc. Amer. Math. Soc 20 (1969).
- [5] **E.Zeidler** , « *Non linear functional analysis and its applications fixed point theorems* » , Springer-Verlag, New york Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.
- [6] **F. Paulin** ,« *Topologie, analyse et calcul différentiel* » , Cours de troisième année de licence École Normale Supérieure Année 2008-2009.
- [7] **H. Brezis**, « *Analyse fonctionnelle théorie et applications* » , Edition Masson, Paris, 1983.

- 
- [8] **I. Derradjia**, « *Existence et stabilité par le théorème de point fixe de Krasnoselskii-Burton pour certaines équations différentielles fonctionnelles à retard* » , Doctorat (LMD) en Mathématiques, U. Annaba, 2014.
- [9] **J. Dixmier**, « *Topologie générale* » , collection Puf, presses universitaires de France, Paris (1981).
- [10] **J. K. Hale & S. Verduyn** , « *Introduction to Functional Differential Equations* » , Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [11] **Laurent Schwartz** , « *Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle* » .
- [12] **M.L. Sinacer & J. J Nieto & A. Ouahab**, « *Random fixed point theorem in generalized Banach space and applications* » , Random Oper. Stoch. Equ. 24 (2016), 93–112.
- [13] **M. Marel** , « *la topologie des espaces métriques* , Elservier Science publishers » B . V .1988
- [14] **Nawfal El Hage Hassan** , « *Topologie générale et espaces normés* » .
- [15] **Octavia Nica**, « *Existence Results for Second order three-point Boundary value Problems, Diff.Eq* » . Applications, Volume 4, Number 4 (2012), 547 – 570.
- [16] **R. P. Agarwal & D. O'Regan & D. R. Sahu**, « *Fixed point theory for lipschitzian-type mapping with applications* » , Vol 6. Cambridge university Press Springer, 2000 .
- [17] **R. Precup**, « *Methods in nonlinear integral equations* » , Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2002), 232 pp.

- [18] **R. Precup** ,« *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems* » , Mathematical and Computer Modelling ,(2009) 703-708 .
- [19] **S. Banach**,« *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application* » , Fund. Math. 3(1922).
- [20] **S. Carl & S.Heikkila** ,« *Fixed point theory in ordered sets and applications* » , Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.

## Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions pour des équations et systèmes différentiels du second ordre avec des conditions aux limites non linéaires à trois points. Pour ceci nous avons utilisé les théorèmes de point fixe : principe de contraction de Banach et de Boyd-Wong, celui de Perov et de Schauder selon des conditions convenables sur les éléments composants l'équation différentielle.

**mots clés :** Point fixe, Espaces métrique, Principe de contraction de Banach, Théorème du Schauder, Théorème du Boyd-Wong, Théorème Perov.

## Abstract

In this paper we studied the existence and uniqueness of solutions to a nonlinear differential equations and systems of the second order with nonlinear bound conditions in three points. For this we used the fixed point theorem : Banach contraction principle and of Boyd-Wong, That of Perov and of Schauder according to proper conditions on elements components differential equation.

**keywords :** fixed point, Metric spaces, Banach contraction principle, Schauder theorem, Boyd – Wong theorem, Perov theorem.

## ملخص

في هذه المذكرة درسنا الوجود والوحدانية لحلول معادلات ونظم تفاضلية من الرتبة 2 مرفقة بشروط حدية غير خطية عند ثلاث نقاط. فقد أثبتنا الوجود والوحدانية لبعض المعادلات التفاضلية وذلك بإستعمال مبدأ التقصص لبناخ ونظرية بويد ويونغ، وكذلك بيروف و شاورر وفقا لشروط ملائمة على العناصر التي تشكل المعادلة التفاضلية.

**الكلمات المفتاحية:** النقطة الصامدة، الفضاء المترى، مبدأ التقصص لبناخ، نظرية شاورر، نظرية بويد – يونغ، نظرية بيروف.