N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Inverse de Drazin

Propriétés et applications

Présenté par:Lekhoua Houda
Mestour Safia

Soutenu devant le jury composé de

Fareh Abdelfetah	MCB	Présidente	Univ. D'El Oued
Mansour Abdelouahab	MCA	Rapporteur	Univ. D'El Oued
Hariz Bekar Lourabi	MAA	Examinatrice	Univ. D'El Oued
Hafouda Blhadi	MAB	Examinatrice	Univ. D'El Oued

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Nous remercions tout d'abord Dieu qui nous à éclaire le chemin du savoir.

Toutes nos gratitudes et remerciements les plus vifs s'adressent "M. MANSOUR Abdel ouahab", à l'université d'El Oued, pour son encadrement, ces conseils, sa modestie et disponibilité, pour réaliser ce travail..

Ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'El oued.

Nous tenons a remercie tous les étudiants de La promotion 2014/2015 de Math de l'université d'El-oued.

Safia Houda

Table des matières

Introduction générale

Il est bien connu qu'une matrice sur un corps a un inverse, si elle est carrée de déterminant non nul. Cependant, dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées on a besoin de quelques types d'inverses partiels d'une matrice singulière, ou même rectangulaires. Par exemple, les solutions d'un système linéaire peuvent exister même si la matrice définissant ce système est singulière. Ce qui conduit à l'inverse ainsi nommé généralisé d'une matrice ou l'inverse de Drazin.

L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématique, beaucoup de proplèmes sont interprétés par une équation du type $Ax = y$, où A est une transformation linéaire donnée, qui est dans notre situation une matrice de type $m \times n$ sur $\Bbbk$ (un opérateur linéaire défini d'un espace vectoriel E dans un autre F de dimensions respective n et m): comme l'analyse numérique, l'optimisation, la théorie de contrôle, théorie de codage, la statistique et les modèles linéaires, ce problème est aussi manipulé via le concept d'un inverse généralisé (ou le pseudo inverse) d'une matrice (ou d'un opérateur linéaire). Devant des questions de ce type on cherche un opérateur ayant le maximum de propriétés dont l'inverse usuel réjouit, et d'une manière que cet inverse existe pour une classe aussi large d'opérateurs lintéaires.

Dans ce mémoire, on s'interesse à l'etude des propriétés de l'inverse de Drazin avec quelques exemple.

Dans le premier chapitre on donne quelques rappels sur la théorie des opérateurs.

Dans le chapitre deux, on donne les définitions du spectres et resolvantes avec quelques propriétés.

Le troisiéme chapitre est consacré à l'etude des propriétés de l'inverse de Drazin, et on donne quelques applications dans le quatrième chapitre.

Et on achève notre mémoire par une liste de références.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Espace de Banach

On rappelle dans ce chapitre quelques définitions et propriétés utiles.

1.1.1 Espace métrique complet

Définition 1.1.1 *On rappelle qu'un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et d une distanse sur E, c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^{+}$qui vérifie pour tout $(x, y, z) \in E^3$ les propriétès suivantes:*

* $d\ (x, y) = 0$ *si seulment si* $x = y$.
* $d\ (x, y) = d\ (y, x)$ *(commutativité).*
* $d\ (x, z) \leq d(x, y) + d\ (y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.1.2 *On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet lorsque toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.*

1.1.2 Norme et espace vectoriel normé

Définition 1.1.3 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\Bbbk$ qui sera soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réel ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Une norme sur E et une application $N : E \to \mathbb{R}_{+}$, définie sur E à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}_{+}$ des nombres réels positifs, vérifiant les quatre propriétés suivantes:*

* $\forall u \in E : N(u) \geq 0$ *(positivité).*

* $N(u) = 0$ *implique* $u = 0$ *(séparation).*

* $\forall u \in E, \forall \lambda \in \Bbbk : N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ *(homogénéité).*

* $\forall\ u \in E, \forall v \in E : N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ *(inégalité triangulaire).*

Pour $u \in E$ *donné, le nombre réel positif* $N(u)$ *est appelé norme de* u.

Définition 1.1.4 *Un espace vectoriel normé réel (resp. Complexe) est un couple constitué par un espace vectoriel* E *réel (resp.complexe) et par une norme* $\|.\|$ *sur l'espace vectoriel* E.

On abrégera souvent espace vectoriel normé en e.v.n. Un e.v.n. sera noté $(E, \|.\|)$ ou $E_{\|.\|}$.

Il ne faut pas qu'il yait la moindre ambiguité sur le corps des scalaires de E; Si l'on ne précise pas le corps, cela signifie que les résultats concernent aussi bien un e.v.n. réel qu'un e.v.n. complexe.

Définition 1.1.5 *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet, sur le corps* K *des rééls ou des complexes.* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{C}^n$, *avec leurs normes usuelles sont des Banach.*

1.1.3 Produit scalaire

Définition 1.1.6 *Soit* E *un espace vectoriel sur le corps des nombres réel.*

Un produit scalaire sur E *est une fonction* $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, *définie sur le produit cartésien* $E \times E$ *à valeurs dans l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels, vérifiant les cinq propriétés:*

1- $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \omega \in E : f(u+v, \omega) = f(u, \omega) + f(v, \omega)$ *(additivité par rapport à la premiére variable, la seconde étant fixée quelconque).*

2- $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda u, v) = \lambda.f(u,v)$ *(homogénénéité par rapport à la premiére variable étant fixée, quelconque).*

3- $\forall u \in E, \forall v \in E : f(u,v) = f(u,v)$ *(symétrie).*

4- $\forall u \in E : f(u,v) \geq 0$ *(positivité).*

5- $f(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$ *(séparation, mais on dit plutot que* f *est définie).*

Pour $u \in E, v \in E$ *donnés le nombre réel* $(> 0, < 0, \text{ou} = 0)$ $f(u,v)$ *s'appelle le produit scalaire de* u *et* v *(ou bien de* u *par* v*).*

Définition 1.1.7 *Soit E un espace vectoriel réel et soit $(. \mid .)$ un produit scalaire sur E. On associe au produit scalaire une norme (dite associée) en posant*

$$\forall u \in E : \|u\| = \sqrt{(u \mid u)} = [(u \mid u)]^{\frac{1}{2}} .$$

Remarque 1.1.1 *Si E un espace vectoriel complexe, la condition 3 est remplacée par la condition $\forall u \in E$: $h(v,u)$ = conjugué complexe de $h(u,v) = \overline{h(u,v)}$ (symétrie hermitienne) .*

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.1.8 *Soit E un espase vectoriel sur K une forme sesquilinéair sur E, est tout application $(.)$ de $E \times E$ dans K quelque soint α,β dans K et x, y, z dans E verifiant*

a) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.
b)$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$.
On dit que $(,)$est hermitienne si elle vérifie de plus
c)$(x, y) = \overline{(y, x)}$,$\forall x, y \in E$.
d)$(x, x) \geq 0$, $\forall x \in E$.

Théorème 1.1.1 *Toute forme bilinéaire symetrique $(,)$ verifie:*

$$4(x, y) = (x + y, x + y) - (x - y, x - y).\forall x, y \in H$$

Toute forme sesquilinéaire$(,)$ (hermitienne ou non) verifie:

$$4(x, y) = (x + y, x + y) - (x - y, x - y) + i(x + iy, x + iy) - i(x + iy, x + iy).$$

Théorème 1.1.2 *Soit $(,)$ une forme hermitienne sur E si $(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in H$ alors elle verifie les propriétés fondamentales suivantes:*

i) L'inégalité de Cauchy-Schwartz:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| .$$

ii)L'inégalité de Minkowski:

$$(x + y, x + y)^{\frac{1}{2}} \leq (x, x)^{\frac{1}{2}}(y, y)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Définition 1.1.9 *Un produit scalaire sur E est une forme hermitienne positive et non dégénérée.*

Définition 1.1.10 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur K qui est complet pour la distance défini par: $d(x,y) = \|x-y\|$.*

Un espace de Hilbert est donc encore un espace de Banach.

1.2 Opérateurs linéaires bornés

1.2.1 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

Définitions et exemples

Définition 1.2.1 *Une application T définie d'un espace de Hilbert H dans $\Bbbk$ est dit "Opérateur linéaire" si T satisfait les deux propriétés suivantes:*

1) $\forall x, y \in H, T(x+y) = T(x) + T(y)$.(Additivité)

2) $\forall x \in H$, $\forall \alpha \in \Bbbk, T(\alpha x) = \alpha T(x)$.(Homogénité)

L'opérateur identité I est défini par $Ix = x$ pour tout $x \in H$.

L'opérateur nul 0 est défini par $0x = 0$, pour tout $x \in H$.

Le noyau de T notée $ker(T)$ et image de T, notée $R(T)$ sont définis par:

Soit $T : H \longrightarrow K, \{y \in K; \exists x \in H : y = Tx\}$.

$Ker(T) = \{x \in H, Tx = 0\}$ et $R(T) = \{Tx, x \in H\}$.

Définition 1.2.2 *Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

L'application $T_\lambda : H \to H$ définie pour $x \in H$ par

$$T_\lambda(x) = \lambda x$$

est un opérateur linéaire. En effet, pour $x_1, x_2 \in H$ et $\alpha \in C$, On a

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha x_1 + x_2) &= \lambda(\alpha x_1 + x_2) \\ &= \alpha(\lambda x_1) + (\lambda x_2) \\ &= \alpha T_\lambda(x_1) + T_\lambda(x_2) \end{aligned}$$

Cet opérateur est appelé une homothétie de rapport λ de l'espace linéaire H. Si H est un espace linéaire tel que $dim(X) = 1$,alors tout opérateur linéaire de H vers H est une dilatation.

Définition 1.2.3 *L'opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert H est dit borné s'il existe un nombre positif c tel que:*

$$\|Tx\| \leqslant c\|x\| \text{ pour tout } x \in H.$$

Exemple 1.2.1 $H = L^2(]0,1]), T : H \longrightarrow H$

$$f \longmapsto Tf(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$$

T est borné?

$$\begin{aligned} \|Tf\|^2 = \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx &= \int_0^1 \left| \int_0^x (x-t) f(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |x-t|^2 dt \cdot \int_0^x |f(t)|^2 dt \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} \int_0^x |f(t)|^2 dt \right] dx \\ &\leq \tfrac{1}{3} \|f\|^2 \text{,d'on } \|Tf\|^2 \leq \tfrac{1}{3}\|f\|^2, \forall f \in L^2([0,1]) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \|Tf\| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \|f\|$

donc T est borné.

Définition 1.2.4 *On dénote par $B(H)$ ou $\mathcal{L}(H)$* ***l'espace des Opérateurs linéaires bornés*** *définis sur un espace de Hilbert H.*

Définition 1.2.5 *On définit la norme de l'opérateur linéaire borné T par*

$$\|T\| = \inf\{c \succ 0 : \|Tx\| \leq c\|x\| ; \forall x \in H\}.$$

Théorème 1.2.1 *Soit $T \in B(H)$. la norme de T est donnée par*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Démonstration. On démontre les inégalités dans le deux sens.

1)Posons $a = \sup \{\|Tx\|, x \in H, \|x\| = 1\}$, si l'opérateur T est borné, alors:

$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| = \|T\|$ pour $\|x\| = 1$

donc $a \leq \|T\|$ d'aprés la définition de $\|T\|$.

2) Pour tout vecteur $x \in H$ on a:

$$\|Tx\| = \left\| T \left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| \quad \leq a \|x\|$$

d'où

$$\|T\| \leq a = \sup \{\|Tx\|, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

En combinant les deux inégalités dans 1) et 2) on obtient l'"égalité désirée. ■

Théorème 1.2.2 *Pour tout opérateur linéaire sur un espace de Hilbert H,*

les assertions suivantes sont equivalentes

1) T est borné.

2) T est continu sur l'espace H.

3) T est continu en un point x_0 (x_0 est un vecteur)de l'espace H.

Théorème 1.2.3 *Soit H un espace de Hilbert, et f est une forme linéaire continue sur H. Il existe un vecteur $a \in H$ et un seul, tel que:*

$$\forall x \in H, f(x) = \langle a, x \rangle .$$

1.2.2 Inverse d'un opérateur

Définition 1.2.6 *On dit que l'opérateur $T \in B(H)$ est inversible sur l'espace de Hilbert H, s'il existe un opérateur $S \in B(H)$ qui vérifie:*

$$ST = TS = I$$

où I est l'opérateur identité dans H.

On écrit $S = T^{-1}$et est dit l'opérateur inverse de T.

1.2.3 Quelques classes d'opérateurs

adjoint d'un opérateur

Théorème 1.2.4 *Pour $T \in B(H)$, il existe un unique opérateur $T^* \in B(x)$, pour tout $x, y \in H$, on a*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle .$$

Preuve. Soit y donné dans H, l'application $x \longmapsto \langle Tx, y\rangle$ est forme linéaire contine sur H. Par le théorème (1.2.3), il existe un uniue $z \in\in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ .On note $z = T^*y.T^*$,est bien défini, et ce de manière unique, en tant q'application de H dans H car pour y donné, on définit z, liimage de y par T*, de façon unique.

Montrons que T^* est linéaire:

soit $T \in B(H)$, $y \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a $\forall x \in H$:

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle \\ &= \langle Tx, \alpha y_1\rangle + \langle Tx, \beta y_2\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle Tx, y_1\rangle + \overline{\beta}\langle Tx, y_2\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle x, T^*y_1\rangle + \overline{\beta}\langle x, T^*y_2\rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2\rangle \end{aligned}$$

d'où pour tout $x \in H$,

$$\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle = \langle x, \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2\rangle$$

Montrons maintenant que T^* est borné.

soit $x = T^*y$, alors

$$\|T^*y\|^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle TT^*y, y\rangle \leq \|TT^*\| \|y\| \leq \|T\| \|T^*y\| \|y\|$$

$\Longrightarrow \|T^*y\| \leq \|T\| \|y\| \Longrightarrow T^*$ est borné et de plus

$$\|T^*\| \leq \|T\|$$

il suit que $T^* \in B(H)$. ■

Proposition 1.2.1 *Si S et T sont deux opérateurs définis sur un espace de Hilbert H, alors leurs adjoints T^* et S^* sont aussi deux opérateurs sur H et les propriétés suivantes sont verifiées :*

1)$\|T^*\| = \|T\|$.
2)$(T+S)^* = T^* + S^*$.
3)$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$; $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.
4)$(T^*)^* = T$.
5)$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ si T est inversibles .
6)$(ST)^* = T^*S^*$

Preuve. 2),3),4),5) claire

1)

$$\begin{aligned} \|(T^*)^*\| &\leq \|T^*\| \\ \|T\| &\leq \|T^*\| \\ &\Longrightarrow \|T^*\| = \|T\| \end{aligned}$$

6)

$$\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle$$

d'où $(ST)^* = T^*S^*$. ■

Définition 1.2.7 *Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur $T \in B(H)$ est dit* ***auto-adjoint*** *si*

$$T^* = T.$$

Exemple 1.2.2 *Pour tout $T \in B(H)$, l'opérateur $T^*T \in B(H)$ est auto-adjoint, car $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$.*

Corollaire 1.2.1 *Pour $T \in B(H)$ on a:*

1)$\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.
2)$T^*T = 0 \Longleftrightarrow T = 0$.
1)$\|TT^*\| \leq \|T\| \cdot \|T^*\| = \|T\|^2$

d'autre part on a:

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= |\langle Tx, Tx\rangle| \\
&= |\langle x, T^*Tx\rangle| \\
&\leq \|x\| \, \|T^*T\| \, \|x\| \\
&\leq \|T^*T\| \, \|x\|^2 \\
\|Tx\| &\leq \|T^*T\|^{\frac{1}{2}} \, \|x\|
\end{aligned}$$

Passons au supermun

$\sup\{\|Tx\|, x \in H, \|x\| = 1\} \leq \sup \|T\| = \|T\|$

$$\begin{aligned}
\|T\| &\leq \|T^*T\|^{\frac{1}{2}} \\
\|T\| &\leq \|T^*T\|
\end{aligned}$$

d'où $\|TT^*\| = \|T\|^2$.

2)$T^*T = 0 \Longleftrightarrow T = 0$

[$\Leftarrow$] évident

[$\Rightarrow$]

$$\begin{aligned}
T^*T &= 0 \Rightarrow T = 0 \\
\|TT^*\| &= 0 \Longleftrightarrow \langle T^*Tx, x\rangle = 0, \ \forall x \in H \\
&\Longleftrightarrow \langle Tx, Tx\rangle = 0 \ , \ \forall x \in H \\
&\Longleftrightarrow Tx = 0 \ , \forall x \in H \\
&\Longleftrightarrow T = 0.
\end{aligned}$$

Théorème 1.2.5 *Soient X et Y deux espace de Banach et $T : X \to Y$ opérateur linéaire borné alors:*

$$\ker(T^*) = R(T)^{\perp} \, et \, (KerT)^{\perp} = R(T^*).$$

Démonstration. Soit $y \in Ker(T^*) \Leftrightarrow T^*y = 0$.

Soit $z \in R(T)$ c-à-d $(\exists x \in X : z = Tx)$

$$T^*y = 0 \Leftrightarrow \langle x, T^*y\rangle = 0, \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow \langle Tx, y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle z, y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow y \in R(T)^{\perp}.$$

■

Proposition 1.2.2 *Pour $T \in B(H)$, auto-adjoint le produit scalaire $\langle Tf, f \rangle$ est un nombre réel $\forall f \in H$.*

Preuve. Si T est auto-adjoint dans $B(H)$, alors:

$$\langle Tf, f \rangle = \langle f, Tf \rangle = \langle f, Tf \rangle = \overline{\langle Tf, f \rangle}.$$

donc $\langle Tf, f \rangle$ est un nombre réel pour tout $f \in H$.
Inversement si on suppose que $\langle Tf, f \rangle$ est un nombre réel pour tout $f \in H$.
ça nous donne $\langle Tf, f \rangle = \overline{\langle Tf, f \rangle}$, mais

$$\overline{\langle Tf, f \rangle} = \overline{\langle f, T^* f \rangle} = \langle T^* f, f \rangle.$$

d'où $\langle Tf, f \rangle = \langle T^* f, f \rangle$, donc T est auto-adjoint. ■

Théorème 1.2.6 *Soit H un espace de Hilbert complexe, si T est un opérateur dans $B(H)$*

1) T est normal si et seulement si $\|Tx\| = \|T^*x\|$, pour tout $x \in H$.

2) T est unitaire si et seulement si $\|Tx\| = \|T^*x\| = \|x\|$, pour tout $x \in H$.

3) T est hyponormal si et seulement si $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$.

Opérateurs unitaires

Définition 1.2.8 *Soit H un espace de Hilbert. $U \in B(H)$. On dit que U est un opérateur unitaire si U est inversible et son inverse $U^{-1} = U^*$.*

Opérateur isometrique

D'autre part, on dit qu'un opérateurs $T \in B(H)$ est isométrique si T préserve les distances: $\|Tv\| = \|v\|$ pour tout $v \in H$.

Proposition 1.2.3 *Soient $U, V \in B(H)$ des opérateurs unitaires. Alors:*

(i) U est isométrique .

(ii) $\|U\| = 1$.

(iii) U^{-1} et U^* sont unitaires.

(iv) UV est unitaire.

Démonstration. (i) Pour tout $v \in H$, on a bien

$$\|Uv\|^2 = \langle Uv, Uv\rangle =, \langle U^*Uv, v\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2 .$$

(ii) Si $\|Uv\| = \|v\|$ pour tout $v \in H$, alors

$$\|U\| = \sup_{v\in H} \frac{\|Uv\|}{\|v\|} = 1.$$

(iii) C'est une conséquence immédiate de la définition(1.2.9).

(iv) On a bien $(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} = V^*U^* = (UV)^*$.

Pour contre, une application linéaire isométrique n'est pas forcément unitaire. ∎

Opérateurs normaux

Définition 1.2.9 *Soit H un espace de Hilbert, $N \in B(H)$. On dit que N est un opérateur normal si $N^*N = NN^*$, telque N^* est l'adjoint de N.*

Clairement, un opérateur $T \in B(H)$ auto-adjoint ou unitaires est normal, mais la réciproque est fausse .

<u>**Exemples**</u>:

1) $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{C}$

$T^*T = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}a & 0 \\ 0 & \overline{b}b \end{pmatrix}$

$TT^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} & 0 \\ 0 & b\overline{b} \end{pmatrix}$

2) $T_\varphi : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, l'opérateur de multiplication

$f \to f\varphi$

$\varphi \in \mathsf{C}\left([0,1]\right),\, T^{*}\varphi = ?$

$\langle T_{\varphi}f, g\rangle = \langle f, g\rangle = \left\langle f, T_{\varphi}^{*}g\right\rangle \quad f, g \in L^{2}\left([0,1]\right)$

$\langle T_{\varphi}f, g\rangle = \langle f\varphi, g\rangle = \int_0^1 f\left(t\right)\varphi\left(t\right)\overline{g}\left(t\right)dt = \int_0^1 f\left(t\right)\overline{\overline{\varphi}\left(t\right)g\left(t\right)}dt$

$T_{\varphi}^{*}g = \overline{\varphi}g = T_{\varphi}^{*}g \;\;,\, T_{\varphi}^{*} = T_{\varphi}^{*}$

$\left(T_{\varphi}^{*}T_{\varphi}\right)f = T_{\varphi}^{*}(T_{\varphi}f) = T_{\varphi}^{*}(\varphi f) = \overline{\varphi}\varphi f = \left(\varphi\right)^{2}f$

$\left(T_{\varphi}T_{\varphi}^{*}\right)f = T_{\varphi}(T_{\varphi}^{*}f) = T_{\varphi}(\overline{\varphi}f) = \varphi\overline{\varphi}f = \left(\varphi\right)^{2}f$

donc T_{φ} est normal.

3) $S : \ell^{2} \rightarrow \ell^{2}$, le shift

$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$

$\langle SX, Y\rangle = \langle X, S^{*}Y\rangle \quad\quad X, Y \in \ell^{2}$

On pose $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad , \quad\quad Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$

$$\begin{aligned}\langle SX, Y\rangle &= \langle (0, x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)\rangle \\ &= 0\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + \ldots\end{aligned}$$

On pose $S^{*}Y = (z_1, z_2, z_3, \ldots)$

$\langle X, S^{*}Y\rangle = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \ldots$

$$\begin{cases} \overline{z_1} = \overline{y_2} \rightarrow z_1 = y_2 \\ \overline{z_2} = \overline{y_3} \rightarrow z_2 = y_3 \\ \overline{z_3} = \overline{y_4} \rightarrow z_3 = y_4 \\ \qquad\vdots \\ \quad \overline{z_n} = \overline{y_{n+1}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\left(SS^{*}\right)X = S(S^{*}X) &= S(x_2, x_3, x_4, \ldots) \\ &= (0, x_2, x_3, x_4, \ldots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S^{*}S)X = S^{*}(SX) &= S^{*}(0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \ldots)\end{aligned}$$

$SS^{*} \neq S^{*}S$

L'opérateur S n'est pas normal.

Chapitre 2

Spectres et Résolvantes

Dans ce chpitre, on définit les notions du spectre et de la résolvante des opérateurs sur des espaces de Hilbert et on en donne les propriétés élémentaires.

2.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition 2.1.1 *Soit V un éspace vectoriel sur un corps K et T un opérateur linéaire sur V.*

Un scalaire $\lambda \in K$ est une **valeur propre** de T s'il existe un vecteur $v \in V$ non nul tel que:

$$(T - \lambda I)v = 0 \iff Tv = \lambda v.$$

Le vecteur v est alors appelé un **vecteur propre** de T correspondant à la valeur propre λ.

Théorème 2.1.1 *Pour $T \in B(H)$, H est un espace de Hilbert si T auto-adjoint alors toute les valeurs propres de T sont réelles.*

Démonstration. Soit T auto-adjoint dans $B(H)$ et λ une valeur propre de T
$(Tx = \lambda x, x \neq 0)$

on a

$$\begin{aligned}\lambda \langle x, x\rangle &= \langle \lambda x, x\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle \\ &= \langle x, T^* x\rangle \\ &= \langle x, Tx\rangle \\ &= \langle x, \lambda x\rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle x, x\rangle\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda \langle x, x\rangle = \overline{\lambda} \langle x, x\rangle$, mais $x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ alors $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

2.2 Spectres et résolvantes

L'ensemble des valeurs propres forme une partie d'un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, qui est inclu ou égale à un sous ensemble de $\mathbb{C}$ que l'on applle spectre de T , et on note par $\sigma(T)$.

2.2.1 Rappels et définitions

Définition 2.2.1 *Le **spectre** d'un opérateur $T \in B(H)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par:*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Définition 2.2.2 *On appelle **rayon spectral** $r(T)$ de l'opérateur T est le scalaire:*

$$r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Définition 2.2.3 *L'ensemble résolvant de T est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du spectre de T.*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \quad \text{est inversible}\}.$$

Définition 2.2.4 *On appelle **application résolvante** de T l'application $\Re(., T)$ défini :*

$$\begin{aligned}\Re(., T) : \rho(T) &\longrightarrow B(H) \\ \lambda &\longmapsto \Re(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}.\end{aligned}$$

2.2.2 Classification des points des spectraux d'un opérateur auto-adjoint

Soit T un opérateur auto-adjoint son spectre $\sigma(T)$ admet la décomposition en plusieurs composantes disjointes :

1-**Le Spectre ponctuel** de T est l'ensemble:

$$\sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

(l'ensemble des valeurs propre isolés d'ordre fini).

2-**Le Spectre Continu** de T est l'ensemble:

$$\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (T - \lambda I)^{-1}, (T - \lambda I)^{-1} \text{ non borné } \right\}$$

ou

$$\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) = \{0\}, \overline{Range(T - \lambda I)} = H, Range(T - \lambda I) \neq H\right\}.$$

3-**Le Spectre résiduel**: de T est l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_p(T), \overline{(\lambda I - T)(H)} \neq H\right\}.$$

4- **Le Spectre essentiel**: Le spectre essentiel d'un opérateur linéaire fermé est l'ensemble

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A) \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0\}.$$

6-**Le Spectre approché:** de T est l'ensemle:

$$\sigma_a(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset H : \|x_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (T - \lambda I)x_n = 0\right\}.$$

2.2.3 Inverse généralisé

Inversibilité

Définition 2.2.5 *En matemathique et plus particuliêrement en algébre linéaire une matrice, si $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ A d'ordre n est dite inversible ou régulière ou oncore non singulière.S'il existe une matrice B d'ordre n appeleé matrice inverse de A et noteé $B = A^{-1}$ telle que:$AB = BA = I_n$.*

une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul i.e $\det(A) \neq 0$, où I est la matrice identité, une telle matrice B est unique.

Exemple 2.2.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *Alors*

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ainsi, A et B sont inversiles et sont inverses l'une de l'autre.

Remarque 2.2.1 A^{-1} *est'unique.*

Propriétés

*Les deux matrices B_1 et B_2 inverses de la même matrice A sont égales.

*Si deux matrices A et B sont inversibles leur produit est l'inversible et inverse du produit est le produit des inverses effectué dans l'ordre inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

*Déterminant de l'inverse d'une matrice $\det |A^{-1}| = \frac{1}{\det |A|}$.

*Une matrice carrée n'admettant pas d'inverse est dit singulière.Une matrice carrée admettant une inverse est dite inversible ou régulière.

$A^{-1}A = AA^{-1} = Id.$

$(A^{-1})^{-1} = A.$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$

Il existe plusieures techniques pour calculer l'inverse d'une matrice carée suivante quelque methode pour sa:

2.2.4 Adjointe d'une matrice

Soit A une matrice carrée $n \times n$ et (i, j) un couple d'entiers entre 1 et n.

On appelle mineur de A_{ij} de déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la j-ème colonne de A.

On note $\triangle_{ij}^{A}$ le mineur de A_{ij}.

On appelle cofacteur de A_{ij} le scalaire $(-1)^{i+j}\triangle_{ij}^{A}$.

On appelle comatrice de A notée $com(A)$ la matrice des cofacteurs de A.

Théorème 2.2.1 *Soit A une matrice carée $n \times n$ alors:*

$A^T.com(A) = com(A).A = (\det A).Id.$

Ce théorème montre que A est inversible si et seulement si son déterminant est inversible c'est -à-dire non nul pour des matrices à coefficients dans un corps commutatif et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} com^T(A).$$

Exemple 2.2.2 *Pour ne rien oublier il peut être bon de faire le calcul en 3 étapes.*

Nous les illustrerons avec le matrice suivant on cherche à obtenir la matrice A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*On calcule $\det(A)$.

Si $\det(A) = 0$ la matrice A n'est pas inversible.

Si $\det(A) \neq 0$ la matrice A est inversible et l'on peut commencer le calcul de la matrice inverse.

Pour notre exemple $\det(A) = -3$ et A est inversible.

*On commence à remplir la "coquille" de la matrice inverse avec les signes alternés,l'inverse du déterminant sans oublier la transposition

$$\tfrac{1}{-3} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}^T.$$

On compléte avec les mineurs pour obtenir l'inverse:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{-3} \begin{pmatrix} +3 & -(-3) & +6 \\ -1 & +0 & -1 \\ +(-7) & -9 & +(-13) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

2.2.5 Matrices élémentaire (pivot de gauss)

Opérations élémentaires sur les matrices

Gauss a inventé une technique algorithmique trepuissante pour faire des transformations autorisées sur les matrices Jordan a affiné cette méthode afin de detterminer l'inverse d'une matrice carrée.

Cette méthode consiste par différentes manipulations sur les lignes formant la matrice, tel que les termes de la diagonale principale sont tous egale à un et les autres termes sont tous nuls, et de faire subir en même temps le même processus de transformation sur la matrice identité.

Ainsi on passe de la matrice A à la matrice identité I_d et de la matrice I_d à la matrice que l'on cherche A^{-1}.

Pour cela, il a même inventé une notation particulière, la voici: $L_i + \alpha L_j \to L_i$ signifie qu'on multiplie la ligne L_j par le coefficient α, qu'on l'additionne à la ligne L_i et on réinjecte le tout dans L_i.

On a aussi $\alpha L_i \to L_i$ qui multiplie la ligne L_i par α et le réinjecte dans L_i, on peut aussi permuter deux lignes ainsi:$L_i \leftrightarrow L_j$:cela peut paraitre inutile mais vous allez voir qu'il est nécessaire d'opérer ainsi pour toujours avoir un pivot non nul.

Exemple 2.2.3 *Cherchons si elle existe l'inverse de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour cela on adopte la notation suivante, dans la quelle on associe dans une même simili-matrice la matice A à gauche et la matrice identité I_d à droite.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On s'occupe d'abord d'introduire des 0 dans les première colonne, puis dans la deuxième et enfin dans la troisième, pour cela on pivote toujours par rapport éléments de la diagonale qui sont donc les pivots.

Etape01: Pivote: le 2 de la ligne 1.

$L_3 - L_1 \rightarrow L_3$

$2L_2 - L_1 \rightarrow L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Etape02: Pivote:le 5 de la ligne 2:

$5L_3 + 2L_2 \rightarrow L_3$

$5L_1 - L_2 \rightarrow L_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & -8 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -7 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Etape03: Pivote:le 21 de la ligne 3:

$21L_1 + 8L_3 \rightarrow L_1$

$7L_2 - L_3 \rightarrow L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 210 & 0 & 0 & 70 & -10 & 40 \\ 0 & 35 & 0 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 21 & -7 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Etape04: On fait apparaître des s sur la diagonale

$\frac{1}{210}L_1 \rightarrow L_1$

$\frac{1}{35}L_2 \rightarrow L_2$

$\frac{1}{21}L_3 \rightarrow L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \end{array}\right).$$

Etape05: Le résultat
$$A^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.6 Inverse de Moore-Penrose

L'inverse de Moore-Penrose est une généralisation de la notation du l'inverse qui contient l'inverse de matrice non carrée ou une matrice de determinant nul. Ces matrices ne sont pas inversibles au sens classique .

Cette méthode a fourni la première fois par Alickm Moore en 1920 et Roger Penrose en 1950.

inverse de Moore-Penrose est souvent désigné par A^+

Définition 2.2.6 *L'importance de la définition est que toute matrice non nulle peut être exprimée en termes de factorisation préservant le rang, et que l'inverse de Moore-Penrose d'un tel produit est le produit de l'inverse correspondant dans l'ordre inverse.*

Définition 2.2.7 *chaque produit EFG avec E $(m \times n)$, F $(r \times r)$ et G $(r \times n)$ est appelle à factorisation préservant le rang si chacune des matrices E, F et G est de rang r.*

Théorème 2.2.2 *pour chacune matrice A verifiée les quatre équations:*

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^T = AX, \quad (XA)^T = XA.$$

donc la solution uniqe $X = A^+$.
Si $A = 0_{mn}$ est la $(m \times n)$ matrice null, $A^+ = 0_{nm}$.
Si $A \neq 0_{mn}$, alors pour tout factorisation préservant le rang EFG de A,

$$A^+ = G^+ F^{-1} E^+.$$

Démonstration. Si $A = 0_{mn}$, puis

$$XAX = X$$

implique$X = A^+ = 0_{nm}$ Si A est $(n \times m)$. Pas la matrice nulle, alors pour tout factorisation préservant le rang

$A = EFG$ il suit, par définition, que E est de rang de la colonne préservant, F est non singulière et G a rangée rang plein. Ainsi $E^+ = (E^T E)^{-1} E^T$ et $G^+ = G^T (GG^T)^{-1}$, par (2,3)[3], avec E^+ est un inverse à gauche de E, G^+ est un inverse à droite de G. Alors si

$$X = G^+ F^{-1} E^+,$$

$$XA = G^+ G$$

et

$$AX = EE^+$$

sont hermitienne. En outre,

$$AXA = A$$

et

$$XAX = X$$

de sorte que

$$X = A^{+}.$$

Il convient de noter que, bien que l'existence d'un factorisation préservant le rang $A = EG$ a été établi pour toute non nulle.

Une matrice, ce qui ne fournit pas un calcul systématique procédure pour construire une factorisation. cependant, après que nous avons examiné la relation entre A^{+} et Moore-Penrose inverse de matrices obtenues par permutation des lignes ou des colonnes ou les lignes et les colonnes de A.

Remarquons, par ailleurs, que si $Ax = b$ est un système d'équations avec $A = EG$ un factorisation de rang plein, et si $Y = GX$, alors $y = E^{+}b$ est les moindres carrés solution à $EY = b$. Maintenant, le système d'équations $GX = E^{+}b$ est toujours cohérente et a solution de norme minimale

$X = G^{+}E^{+}b$, . Par conséquent, nous pouvons combiner les résultats en disant que $X = A^{+}b$ est le solution des moindres carrés d'$AX = b$ avec $\|x\|^{2}$ minime. Bien d'intérêt mathématique , la plus part des applications pratiques des moindres carrés exigent que les problèmes être formulées de telle sorte que la matrice est de rang de la colonne complète. ■

Lemme 2.2.1 *soit A un matrice d'ordre $(m \times n)$ alors:*

a) A $(m \times n)$ implique A^{+} $(n \times m)$.

b) $A = 0$ implique $A^{+} = 0$.

c) $A^{++} = A$.

d) $A^{T+} = A^{+T}$.

e) $A^{+} = \left(A^{T}A\right)^{+} A^{T} = A^{T}\left(AA^{T}\right)^{+}$.

f) $\left(A^{T}A\right)^{+} = A^{+}A^{T+}$.

g) $(\alpha A)^{+} = \alpha^{+}A^{+}$ pour tout scalaire α, où $\alpha^{+}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha} & ,\text{si } \ \alpha\neq 0\\ 0 & ,\text{si } \ \alpha=0\end{cases},$

h) si U et V sont des matrices unitaires,

$(UAV)^{+}=V^{T}A^{+}U^{T}$

i) si $A=\sum_{i=1}^{n}A_{i}$ ou $A_{i}^{T}\ A_{j}\ =0$

quand $i\neq j$, $A^{+}=\sum_{i=1}^{n}A_{i}^{+}$.

j)si A est normal , $A^{+}A=AA^{+}$

k) A,A^{+},AA^{+} et AA^{+} tout ont rang égal $trace\,(A^{+}A)$

Démonstration. Propriétés (a) et (b) ont été noté précédemment dans théoréme .

Les relations dans (c) et (d) de suivre en observant qu'il n'y a complèté la duatité dans les rôles de A et x dans les équations définissant .

Pour établir la première expression pour A^{+} dans (e) laisser

$$X=\left(A^{T}A\right)^{+}A^{T}.$$

Puis

$$XA=\left(A^{T}A\right)^{+}A^{H}A$$

est Hermitien, et aussi

$$AX=A\left(A^{T}A\right)^{+}A^{T}$$

par utilisation de (d).

en outre,

$$XAX=X$$

et

$$AXA=A\left(A^{T}A\right)^{+}A^{T}A=A^{T+}A^{T}A\left(A^{T}A\right)^{+}A^{T}A=A^{T+}A^{T}A=A.$$

La seonde expression dans (e) suite par un type similaire d'argument, comme le font les expressions dans (g) et (h).

prouver (f) nous avons

$$A^{T}=A\left(A^{T}A\right)^{+}$$

par (d) et (e) puis

$$A^{+}A^{T+}=\left(A^{T}A\right)^{+}A^{T}A\left(A^{T}A\right)^{+}=\left(A^{T}A\right)^{+}$$

Prouver (i) observer d'abord que

$$A_i^T A_j = A_i^+ A_i^{+T} A_i^T A_j = 0$$

et aussi $A_j^+ A_i = 0$ depuis $A_j^T A_i = 0$.

Maintenant, nous pouvons à nouveau montre que A et A^+ satisfaire la définition équation.

Ce (j) détient suit par l'utilisation de (e) à écrire

$$A^+ A = \left(A^T A\right)^+ A^T A = \left(AA^T\right)^+ = AA^T = A^{T+} A^T = \left(AA^+\right)^T = AA^+.$$

Pour montrer $A, A^+, A^+ A$ et AA^+ tous on le même rang .

Nous pouvons appliquer le fait que le rang d'un produit de matrices ne dépasse jamais le rang d'un facteur aux équations

$$AA^+ A = A$$

et

$$A^+ AA^+ = A^+.$$

Puis $rang(A) = trace(A^+ A)$ détient de puis $rang(E) = trace(E)$ pour toute matrice idempotente E. ■

Exemple 2.2.4 *Laisser*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

puis

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (BA)^+,$$

depuis BA est hermitienne et idempotente, nous avons aussi

$$A^+ = (A^+ A)^{-1} A^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B^+ = B^T(BB^T)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A^+B^+ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq (BA)^+.$$

2.2.7 Quelques propriétés sur l'inversibilite des opérateurs

Soient E , F deux espace normés $T \in \mathcal{L}(E,F)$. L'operateur T est dit inversible si pour tout $y \in F$ l'équation

$Tx = y$ a une solution et une seul.

On dit que $T \in B(H)$ est inversible s'il est bijectif et si son inverse est continu

Définition 2.2.8 *L'operateur T^{-1}, inverse d'un operateur linéaire T, est aussi linéaire.*

1.L'operateur I est inversible, et $I^{-1} = I$.

2.L'exemple suivant montre que l'inverse d'un opérateur borné n'est pas forcement borné.

Soit $E = L^2(\mathbb{C})$. L'opérateur T défini par :

$T\left(x_1, x_2, ...\right) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right)$.

T est borné, car

$$\|T(x_1, x_2, ...)\| = \sqrt{\sum_{i\geq 1} \frac{|x_i|^2}{i^2}} \leq \sqrt{\sum_{i\geq 1} |x_i|^2} = \|(x_1, x_{2hs}, ...)\|$$

et son inverse est donné par

$$T^{-1}(x_1, x_2, ...) = (x_1, 2x_2, ..., nx_x, ...).$$

Cependant, T^{-1} est non borné. En effet, , si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite défini par:

$$e_n = (x_1^n, x_2^n, ...) \quad \text{avec } x_i^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = n \\ 0 & \quad\text{si no} \end{cases}$$

On a $\|e_n\| = 1$ et $\|T^{-1}e_n\| = n$, d'où T^{-1} n'est pas borné.

Donc l'operateur T n'est pas inversible.

L'inversibilité d'un opérateur linéaire a beaucoup l'importance dans la résolution des équations d'opérateurs.

Si T est un opérateur linéaire borné. La trace de T est la somme des éléments diagonaux de la matrice de l'opérateur T dans une base quelconque, on la note trT.

Remarque 2.2.2 *Si $T \in B(H)$, la trace de l'opérateur inverse de T,*

$$trT^{-1} = \frac{1}{trT}$$

Lemme 2.2.2 *Soit $T \in B(H)$, si T est inferieurment borné, alors son image $R(T)$ est fermée.*

Preuve. Soit $T \in B(H)$ telle que $\exists k \succ 0$

$$\|Tx\| > k\,\|x\|\,; \qquad \forall x \in H$$

Soit $y_n \in R(T)$, $y_n = Tx_n$ telle que $y_n \to y_0$

où

$$\|y_m - y_n\| = \|Tx_m - Tx_n\| = \|T\,(x_m - x_n)\| \geq k\,\|x_m - x_n\|$$

$\{y_n\}$ est de Cauchy dans $R(T) \Longrightarrow \{x_n\}$ l'est aussi,

$\{x_n\}$ est de Cauchy des un Hilbert, donc elle est convergent vers un $x_0 \in H$.

on a

$$\begin{aligned}
\|y_0 - Tx_0\| &= \|y_0 - Tx_n + Tx_n - Tx_0\| \\
&\leq \|Tx_n - y_0\| + \|Tx_n - Tx_0\| \\
&\leq \|y_n - y_0\| + \|T\|\,\|x_n - x_0\| \overrightarrow{n \longrightarrow +\infty}\ 0
\end{aligned}$$

donc $y_0 = Tx_0 \Rightarrow y_0 \in R(T)$

et $R(T)$ est fermé. $(\overline{R(T)} = R(T))$. ■

Théorème 2.2.3 *$T \in B(H)$; Hilbert T est inversible si et seulment si :*

i)T est inferieurement borné.

ii) $\overline{R(T)} = H$ dense.

Preuve. i)⇒ii) soit $T \in GL\,(B\,(H))$ (opérateurs inversible dans $B(H)$)
soit $y \in H \Rightarrow \exists x \in H : x = T^{-1}y$ $(y = Tx)$ alors $H = T(H) = R(H)$
donc $\overline{R(T)} = H$; (ii)
on a

$$\begin{aligned} x &= T^{-1}Tx \Longrightarrow \|x\| = \left\|T^{-1}Tx\right\|;\ \forall x \in H \\ &\Rightarrow \|x\| \leq \left\|T^{-1}\right\|.\|Tx\| \\ &\Rightarrow \frac{1}{\|T^{-1}\|}.\|x\| \leq \|Tx\| \\ &\Rightarrow \exists k > 0 \left(k = \frac{1}{\|T^{-1}\|}\right) : \|Tx\| \geq k\,\|x\| \qquad \forall x \in H \end{aligned}$$

alors T est inferieurement borné.
⇐) soit T $\in B(H)$ telle que i) et ii) verifiées
$\overline{R(T)} = H$ et $\overline{R(T)} = R(T)$
$\Rightarrow R(T) = H$. ■
Si $Tx_1 = Tx_2$ alors

$$\begin{aligned} 0 &= \|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \geq k\,\|x_1 - x_2\| \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

alors $\forall y \in H, \exists! x \in H : y = Tx$
Il existe une transformation $S : H \longrightarrow H$

$$y \longmapsto x$$

$$\begin{aligned} Sy &= x \\ \|y\| &= \|Tx\| \geq C\,\|x\|\,; C \succ 0 \\ \|y\| &\geq C\,\|Sy\| \\ \|Sy\| &\leq \frac{1}{C}\,\|y\| \end{aligned}$$

d'où $\|S\| \leq \frac{1}{C}$ et

$$STx = Sy = x; \forall x \in H$$

$$TSy = Tx = y; \forall y \in H$$

d'où $ST = TS = I$; T est inversible et son inversible est S.

Définition 2.2.9 *Un opérateur $T \in B(H)$ est dit contractant (ou de contraction) si et seulment si $\|T\| \leq 1$.*

Théorème 2.2.4 *(serie de Neumann)*

Soit T un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|T\| \leq 1$, et soit I l'opérateur identité dans E.

Alors, l'opérateur $I - T$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

de plus

$$\left\|(I - T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$$

Démonstration. De la relation $\|T\| \leq 1$. On a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|T^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

■

Dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$ (l'espace $\mathcal{L}(E)$ de tous les opérateur linéaire continus sur E dans lui-même.), par conséquent la serie da Neumann converge en norme et définie un opérateur linéaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k,$$

avec la relation

$$\|S\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$$

de plus S est l'inverse de $(I - T)$.

En effet, utilisons les notations $\left(T^0 = I \text{ et } T^k = TT^{k-1}\right)$,

on peut voir que:

$$S\,(I - T) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} T^k\,(I - T) = \lim_{n \to \infty} \left(I - T^{n-+1}\right) = I$$

aussi

$$(I - T)\,S = (I - T) \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} T^k = \lim_{n \longrightarrow \infty} (I - T^{k+1}) = I$$

puisque la norme

$$\left\|T^{n+1}\right\| \leq \|T\|^{n+1} \longrightarrow 0, \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Corollaire 2.2.1 *Si* $\|I - T\| < 1 \Rightarrow T$ *est inversible.*

Chapitre 3

Inverse de Drazin

3.1 Preliminaires et définitions

3.1.1 Indice d'une matrice:

Soit k un entier non négatife.

Définition 3.1.1 *On appele indice de la matrice A le plus petit entier positif k tel que $rang(A^{k+1}) = rang(A^k)$,(range de A c'est le nombre des vecteurs linéaires independantes soit les colonnes où lignes).*

Exemple 3.1.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ *rang de A est:*

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 0 \\ -\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

alors $rang(A) = 2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A.$$

$rang(A^2) = rang(A) \rightarrow$donc $ind(A) = 1$.

Définition 3.1.2 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ d'indice k (ind(A)=k) on dit que la matrice A^D d'ordre n est l'inverse de Drazin de A si les conditions suivantes sont verifiées :*

$$AA^D = A^D A,$$

$$A^D AA^D = A^D,$$

$$A^k A^D A = A^k.$$

Proposition 3.1.1 *Si A^D est l'inverse de Drazin de la matrice A on a les égalités suivants sont equivalents:*

$$(1) \quad A^k A^D A = A^k,$$

$$(2) \; AA^D A^k = A^k,$$

$$(3) \quad A^{k+1} A^D = A^k,$$

$$(4) \quad A^D A^{k+1} = A^k.$$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2)

$$A^k = A^k A^D A = A.A.A \cdots AA^D A$$

$$\underbrace{AAA \cdots}_{k-1} A^D A^2 = \underbrace{AAA \cdot \cdot}_{k-2} \cdot A^D A^3$$

$$= \cdots = AAA^D A^{k-1} = AA^D A^k.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Evident.

(2) $\Rightarrow$ (3) (On a (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (4))

$$AA^D A^k = A^k \Rightarrow A^k = A^k A^D A$$

$$= A^k (AA^D) = A^{k+1} A^D.$$

(3) $\Rightarrow$ (4)

$$A^k = A^{k+1} A^D = A^k AA^D = A^k A^D A = A^{k-1} AA^D A$$

$$= A^{k-1} A^D A^2 = \cdots = A^D A^{k+1}.$$

■

Proposition 3.1.2 *a)* $(A^*)^D = \left(A^D\right)^*$.

b) $\left(A^T\right)^D = \left(A^D\right)^T$.

c) $\left(A^l\right)^D = \left(A^D\right)^l$ *si* $l = 1, 2, ...$

d) si A *est indicek,* A^l *est indice* 1.

e) $\left(A^D\right)^D = A$ *si et seulement si* A *est* $ind(A) = 1$.

f) $\left(\left(A^D\right)^D\right)^D = A^D$.

Proposition 3.1.3 A^D *est un inverse de* A*,* $ind(A) = k$ *alors*

$$A^k (A^D)^{k+1} = A^D.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} A^k (A^D)^{k+1} &= A^k (A^D)^k A^D = (AA^D)^k A^D \\ &= AA^D A^D \\ &= A^D A A^D = A^D. \end{aligned}$$

■

3.2 L'inverse de Drazin d'une matrice carrée

Dans cette section, nous considérons un autre type de l'inverse généralisée pour les matrices complexes carrés. L'inverse dans le théorème (3.1.1), en raison de Drazin [2], a une variété d'applications.

Théorème 3.2.1 *[3]Pour toute matrice carrée* A*, il existe une matrice unique* X *de telle sorte que*

$$(1) \quad A^k = A^{k+1} X,$$

pour k un entier positif.

$$(2) \quad X^2 A = X,$$

$$(3) \quad AX = XA.$$

Preuve. Si $A = 0$ est la matrice nulle, alors A et $X = 0$ satisfont (1), (2) et (3).

Supposons $A \neq 0$ est tout $n \times n$ matrice. Alors il existe scalaires $d_1, ..., d_t$, pas tous égaux à zéro, de telle sorte que

$$\sum_{i=1}^{t} d_i A^i = 0,$$

où $t \leq n^2 + 1$ depuis le A^i peut être considérée comme vecteurs avec n^2 éléments, et d_k le premier coefficient non nul. On peut ecrire

$$(4) \qquad A^k = A^{k+1} U$$

où

$$U = -\frac{1}{d_k} \left(\sum_{i=1+k}^{t} d_i A^{i-k-1} \right).$$

On U est un polynôme en A, U et A commuete. En outre, la multiplication de deux côtés de (4) par AU donne

$$A^k = A^{k+2} U^2 = A^{k+3} U^3 = \cdots\cdot,$$

Et ainsi

$$(5) \qquad A^k = A^{k+m} U^m$$

pour tout $m \geq 1$.Soit $X = A^k U^{k+1}$. Ensuite, pour ce choix de X,

$$A^{k+1} X = A^{2k+1} U^{k+1} = A^k$$

et

$$X^2 A = A^k U^{k+1} A^k U^{k+1} A = \left(A^{2k+1} U^{k+1}\right) U^{k+1} = A^k U^{k+1} = X,$$

par utilisation de (5).

En outre, X et A commute U et A aussi. Ainsi, les conditions (1), (2) et (3) sont valables pour cette X.

Pour montrer que X est unique, supposons que Y est également un solution de (1), (2) et (3), où X correspond à un k_1 d'exposant et Y correspondent à un exposant dans k_2 (1).Laissez $\hat{y}$= maximale (k_1, k_2). Ensuite, il suit en utilisant (1), (2), (3) et (5):

$$X = X^2 A = X^3 A^2 = \cdots = X^{\hat{y}+1} A^{\hat{y}} = X^{\hat{y}+1} A^{\hat{y}+1} Y$$

$$= XAY = \cdots = XA^{\hat{y}+1}Y^{\hat{y}+1} = A^{\hat{y}}Y^{\hat{y}+1}$$

$$= \cdots = AY^2 = Y^2A = Y$$

Ce qui nous donne l'unicité. ■

Nous allons appeler la matrice unique de X dans le théorème (3.1.1) l'inverse de Drazin de A et on écrire $X = A^D$, on appele aussi le plus petit entiér k l'indice de A.

Ce A^D est une inverse généralisée de A est apparente par notant que (1) est vérifiée avec $k = 1$ lorsque $X = A^{-1}$ existe et également (2) et (3) tenir. Observez, par ailleurs, que dans générale (1) peut être réécrite comme

$$(6) \qquad A^k XA = A^k$$

et (2) devient $XAX = X$, par utilisation de (3), de sorte que l' équations définissant dans Théorème (3.1.1) peuvent être considérées comme une alternative à celles utilisées pour A^+ dans laquelle $AXA = A$ est remplacée par (6), (2) reste inchangée, et

$$(1^*) \cdots \cdot (AX)^H = AX,$$

et

$$(2^*) \cdots (XA)^H = XA$$

sont remplacée par la condition de (3) que A et X trajet.

Comme on le verra ci-après la démonstration du lemme(3.1.1), factorisations de rang plein de A peuvent être utilisés efficacement dans la construction de A^D '

Lemme 3.2.1 *on a $B, C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ Pour toute factorisation*

$$A = BC, A^D = B\left[(CB)^D\right]^2 C.$$

Preuve. On remarque que pour toute matrice carrée A et k entier positif, m et n, nous devons homme $(A^D)^m = A^n = (A^D)^{m-n}$ si $m > n$ et $A^{m+n}(A^D)^n = A^m$ si $m \geq k$ et k a indice A.

Notons k le plus grand de l'indice de BC et de la Indice de CB.

Puis

$$A^D = (BC)^D = (BC)^{k+1}\left[(BC)^D\right]^{k+2} = B(CB)^k C\left[(BC)^D\right]^{k+2}$$

$$= B\left[(CB)^D\right]^{k+2}(CB)^{2k+2}C\left[(BC)^D\right]^{k+2}$$
$$= B\left[(CB)^D\right]^{k+2}C(BC)^{2k+2}\left[(BC)^D\right]^{k+2}$$
$$= B\left[(CB)^D\right]^{k+2}C(BC)^k$$

$$= B\left[(CB)^D\right]^{k+2}(CB)^kC$$
$$= B\left[(CB)^D\right]^2C.$$

■

Supposons maintenant que $A = B_1C_1$ est une factorisation de rang plein où $rang(A) = r_1$.

Formant la matrice C_1B_1 de r_1 dans r_1 , puis soitC_1B_1 est inversible, ou $C_1B_1 = 0$, ou le rang $(C_1B_1) = r_2$ où $0 < r_2 < r_1$.

Dans le premier cas, avec C_1B_1 inversible, $(C_1B_1)^D = (C_1B_1)^{-1}$sorte que

$$A^D = B_1(C_1B_1)^{-2}C_1,$$

par le lemme (3.2.1), où

$$(C_1B_1)^D = \left[(C_1B_1)^{-1}\right]^2.$$

D'autre part, si $C_1B_1 = 0$ alors $(C_1B_1)^D = 0$ et donc $A^D = 0$ par nouveau en utilisant le lemme (3.2.1).

Enfin, si rang $(C_1B_1) = r_2, 0 < r_2 < r_1$, alors pour tout factorisation préservant le rang $C_1B_1 = B_2C_2$, nous avons

$$(C_1B_1)^D = B_2\left[(C_2B_2)^D\right]^2C_2$$

de sorte que A^D le meme chose dans le lemme (3.2.1) devient

$$A^D = B_1B_2\left[(C_2B_2)^D\right]^3C_2C_1.$$

Le meme argument vaut maintenant C_2B_2 qui est, soit C_2B_2 est non singulière et

$$\left[(C_2B_2)^D\right]^3 = (C_2B_2)^{-3},$$

ou $C_2B_2 = 0$ et donc $A^D = 0$, ou le rang $(C_1B_1) = r_3$ où $o < r_3 < r_2$ et $C_2B_2 = B_3C_3$ le mem rang factorisation et complet à Lemme (3.2.1) qui peut être appliquée.

Pour suive dans cette manière donc

$$rang(B_iC_i) \geq rang(C_iB_i) = rang(B_{i+1}C_{i+1}), i = 1, 2, \cdots,$$

alors soit $B_mC_m = 0$ pour un indice m, et ainsi de $A^D = 0$, ou $rang(B_mC_m) = rang(C_mB_m) > 0$ pour un indice m, dans ce cas,

$$(B_mC_m)^D = B_m(C_mB_m)^{-2}C_m.$$

Et ainsi

$$(7) \qquad A^D = B_1B_2 \cdots B_m(C_mB_m)^{-m-1}C_mC_{m-1} \cdots C_1$$

dans le lemme (3.2.1). Observer, par ailleurs, que $A = B_1C_1$,

$$A_2 = B_1C_1B_1C_1 = B_1B_2C_2C_1 \cdot \cdot\cdot, A^m = B_1B_2 \cdots B_mC_mC_{m-1} \cdots C_1$$

et

$$(8) \quad A^{m+1} = B_1B_2 \cdots B_m(C_mB_m)C_mC_{m-1} \cdots C_1$$

nous avons $A^m = A^{m+1} = 0$, où A^D former dans (7), chaque B_i a rang colonne plein et chaque C_i a rang ligne,

$$B_{m-1} + \cdots B_1 + A^mC_1 + \cdots C_{m-1} + = B_mC_m$$

et

$$B_m + \cdots B_1 + A^{m+1}C_1 + \cdots C_m + = C_mB_m.$$

Par conséquent, dans les deux cas, nous avons $rang(A^m) = rang(A^{m+1})$.

En outre, il suit dans les deux cas que (1) est valable pour $k = m$ et ne tient pas pour tout $k < m$.

Cela revient à dire, k dans (1) est la plus petite integer positif tel que A^k et A^{k+} avoir le même rang.

3.2.1 Une extension Matrices rectangulaires

L'inverse de Drazin une matrice A, tel que défini dans Théorème (3.1.1), existe seulement si A est carrée, et une question évidente est de savoir comment cette définition peut être étendue à des matrices rectangulaires.

Une solution à ce problème est d'observer que, si B est un $m \times n$ avec $m > n$, par exemple, alors B peut être augmentée par des colonnes $m - n$ de zéros pour former une matrice carrée A.

Maintenant formant A^D nous pourrait alors prendre ces colonnes de chose qui correspondent à l'emplacements des colonnes de B en A comme une définition de " L'inverse de Drazin" de B.

Comme on le voit dans l'exemple suivant, cependant, la difficulté de cette approche est qu'il existe des $\begin{pmatrix} m \\ m-n \end{pmatrix}$ comme matrices A, obtenu en considérant tous possible arrangements de n colonnes de B (prises sans permutations) et les $m - n$ colonnes de zéros, et qui annonce peut être différent dans chaque cas.

Exemple 3.2.1 *Si*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{et}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

puis

$$(A_1)^D = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}, (A_2)^D = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, (A_3)^D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

sont obtenues en appliquant le lemme (3.1.1) pour les matrices $A_i = BC_i$ où

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observez dans l'exemple (3.1.1) que les colonnes non nulles de chaque matrice $(A_i)^D$ correspond au produit $B\left[(C_iB)^D\right]^2$. En conséquence, en utilisant les colonnes non nulles de $(A_i)^D$ pour définir le "Inverse de Drazin" de B implique que la matrice résultante est une fonction de C_i.

Que ces matrices sont déterminés de façon unique par un ensemble d'équations définissant et sont des cas particuliers d'une classe de inverses généralisées qui peut être construit pour toute matrice B sera apparent du théorème (3.1.2).

Théorème 3.2.2 *[3]Pour toute matrice B de $m \times n$ et toute matrice$W$ de $n \times m$, il existe une matrice X unique, de telle sorte que*

$$(1.1) \quad (BW)^k = (BW)^{k+1}XW, \textit{pour } k \textit{ un entier positif.}$$

$$(1.2) \quad XWBWX = X.$$

$$(1.3) \quad BWX = XWB.$$

Preuve. Soit $X = \left[B(WB)^D\right]^2$. Puis, avec

$$XW = B\left[(WB)^D\right]^2 W = (BW)^D$$

par le lemme(3.1;1), (1;1) détient avec k l'indice de BW. Aussi,

$$XWBWX = B\left[(WB)^D\right]^2 WBWB\left[(WB)^D\right]^2 = B\left[(WB)^D\right]^2 = X$$

et

$$BWX = BWB\left[(WB)^D\right]^2 WB = XWB,$$

de telle sorte que (1.2) et (1.3) détiennent.

Pour "montrer que X est unique, nous pouvons procéder comme dans la preuve du théorème (3.1.1).

Ainsi, supposons X_1 et X_2 sont des solutions de (1.1), (l.2) et (1.3) correspondant à des nombres entiers positifs k_1 et k_2 'respectivement, dans (1.1).

Puis, avec k =maximale (k_1, k_2) il en résulte que

$$X_1 = X_1WBWX_1 = BWX_1WX_1 = (BW)^2(X_1W)^2X_1$$

$$= \cdots = (BW)^k(X_1W)^kX_1 = (BW)^{k+1} + X_2W(X_1W)^kX_1$$

$$= X_2(WB)^{k+1}W(X_1W)^kX_1$$

$$= X_2WBW(BW)^k(X_1W)^kX_1$$

$$= X_2WBWX_1.$$

Poursuite d'une manière similaire avec

$$X_2 = X_2WBWX_2 = X_2WX_2WB = X_2(WX_2)^2(WB)^2$$

$$= \cdots = X_2(WX_2)^{k+1}(WB)^{k+1}$$

puis

$$X_2WBWX_1 = X_2(WX_2)^{k+1}(WB)^{k+1}WBWX_1$$

$$= X_2(WX_2)^{k+1}W(BW)^{k+1}X_1WB$$

$$= X_2(WX_2)^{k+1}W(BW)^kB$$

$$= X_2(WX_2)^{k+1}(WB)^{k+1} = X_2$$

Par conséquent, avec $X_1 = X_2$ la solution à (1.1), (l.2) et (1.3) est unique. ■

La matrice unique X, dans le théorème(3.1.2) sera appelé l'inverse de Drazin de B $W-$pondéré et sera écrit en que $X = (BW)^D$

Le choix de la nomenclature W-pondéré inverse de Drazin B est facilement visible en notant que, avec

$$(BW)^D = B\left[(WB)^D\right]^2,$$

puis $(B_W)^D = B^D$ lorsque B est carré et W est la matrice d'identité.

En outre, plus généralement observer que, avec la bande B et $(BW)^D$ de la même taille et avec W et WBW la taille de la B^H, la relation

$$BW(B_W)^D = (B_W)^DWB$$

dans (1.3) peut être considéré comme un généralisée condition de commutativité, et

$$(B_W)^DWBW(B_W)^D = (B_W)^D$$

dans (1.2) est analogue à (2) lorsqu'il est écrit sous la forme $XAX = X$.

Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

est la matrice dans l'exemple (3.1.1), et

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

puis

$$(B_{W_1})^D = \frac{1}{(91)^2} \begin{bmatrix} 169 & 339 \\ 60 & 169 \\ 87 & -169 \end{bmatrix}, (B_{W_2})^D = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Expressions relatives A^D et A^+

Il est une conséquence immédiate que si $W = B^H$ et ainsi

$$(B_W)^D = B^{H+}B^+B^{H+}$$

puis

$$B^+ = W(B_W)^D W.$$

Ainsi, en utilisant W-pondéré inverses de Drazin avec $W = B^H$, $(\mathrm{B}_W)^D$ et B^+ sont liés directement en termes de produits de matrices ce qui implique que $(B_W)^D$ et B^+ ont le même rang.

En revanche, pour toute matrice carrée, A, nous avons

$$rang(A^D) = rang(A^k) = rang(A^{k+1}),$$

avec l'indice k de A, alors que le $rang(A^+) = rang(A)$.

En conséquence, $rang(A^D) \leq rang(A^+)$ avec l'égalité maintenant si et seulement si A a un inverse de groupe.

Le résultat suivant peut être utilisé pour donner une expression générale de l'inverse de Drazin une matrice, A, en termes de puissances de A et un inverse Moore-Penrose .

Théorème 3.2.3 *Pour toute matrice carrée A d'indice k,*

$$(1.4) \qquad A^D = A^k Y A^k$$

pour chaque matrice Y de telle sorte que

$$(1.5) \qquad A^{2k+1} Y A^{2k+1} = A^{2k+1}.$$

[3].

Preuve. A partir de la droite de (1.4), nous avons

$$A^k Y A^k = (A^D)^{k+1} A^{2k+1} Y A^{2k+1} (A^D)^{k+1}$$

$$= (A^D)^{k+1} A^{2k+1} A^{2k+1} (A^D)^{k+1}$$

$$= (A^D)^{2k+2} A^{2k+1} = A^D.$$

■

Observez dans (1.5) que l'on choix évident de Y est $(A^{2k+1})^+$, et il suit alors que A^l, $(A^l)^+$ et A^D ont la même rang pour tout entier positif $l \geq k$. Dans ce cas, différentes relations entre les A^l, $(\mathrm{A}^l)^+$ et A^D peuvent être établie.

Par exemple, on peut montrer que, pour tout$l \geq k$, il existe une matrice X satisfaisant unique,

$$(1.6) \qquad A^l X A^l = A^l, X A^l X = X$$

et

$$(1.7) \qquad (X A^l)^H = X A^l, A^l X = A A^D\cdot$$

Dually, il existe une matrice X satisfaisant uniques (1.6) et

$$(1.8) \qquad (A^l X)^H = A^l X, X A^l = A A^D.$$

Les solutions uniques de (1.6) et (1.7) et de (1.6) et (1.8) sont appelés les inverses de puissance gauche et droite de A^l.

3.2.3 Autres théorèmes sur l'inverse de Drazin et ses propriètés

Lemme 3.2.2 *[6]*

Si Y est un inverse de A satisfait:

$$A^{l+1} Y = A^l,$$

$$AY = YA$$

alors $X = A^l Y^{l+1}$ est un inverse de Drazin de A.

Preuve.

$$A^l XA = A^l \cdot A^l Y^{l+1} \cdot A = A^{2l+1} Y^{l+1} = A^l \cdot \underbrace{A^{l+1} Y}_{A^l} \cdot Y^l$$

$$= A^{2l} \cdot Y^l = A^{2l-1} \cdot Y^{l-1} = \cdots = A^{l+1} Y = A^l.$$

$$AX = A^l Y^{l+1} A A^l Y^{l+1} = A^{2l+1} Y^{2l+2} = A^l A^{l+1} Y \cdot Y^{2l+1}$$

$$= A^{2l} Y^{2l+1} = \cdots = A^l Y^{l+1} = X$$

$$= 1.$$

$$AX = A \cdot A^l Y^{l+1} = A^{l+1} Y^{l+} = (AY)^l (AY)$$

$$= (AY)^l \cdot (YA)$$

$$= A^l Y^{l+1} \cdot A$$

$$= XA.$$

donc X est une inverse de Drazin de A. ■

Lemme 3.2.3 *[6]*

Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ind($A$)=$k$ alors:

1) $\mathbb{C}^n = R(A^k) \oplus N(A^k)$.

2)La restriction $A/R(A^k) \in \mathcal{L}(R(A^k), R(A^k))$, est inversible.

Lemme 3.2.4 *Soit $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ définie par:*

$$X_u = \begin{cases} A^{-1}/R(A^k) \cdot u, & \text{si } u \in R(A^k); \\ 0, & \text{si } u \in N(A^k). \end{cases}$$

alors X est inverse de Drazin de A.

Corollaire 3.2.1 *[6] A^D est inverse de Drazin de A,ind(A)=k.*

1) $A^D A$, AA^D soit des projecteurs sur $R(A^D)$.

2) $R(A^D) = R(A^k)$ et $N(A^D) = N(A^k)$.

3) Si A est inversible alors $A^D = A^{-1}$.

4) Si ind(A)=1,alors $A^D = A^\sharp$ (groupe inverse).

Preuve. L'égalité $A^D A = AA^D$

$(A^D A)^2 = A^D AA^D A = A^D A$ donc $A^D A$ est un projection sur $R(A^D)$,

on a:

$$A^D A^{k+1} = A^k \Rightarrow R(A^k) \subset R(A^D) \cdots (1).$$

D'aprés projections (2)

$$A^k (A^D)^{k+1} = A^D \Rightarrow R(A^D) \subset R(A^k) \cdots (2)$$

de (1) et (2)$\Rightarrow$

$$R(A^D) = R(A^k).$$

Maintenant, les equations:

$$A^{k+1} A^D = A^k, (A^D)^{k+1} A^k = A^D \Rightarrow N(A^D) \subset N(A^k), N(A^k) \subset N(A^D),$$

entrainemt $\quad N(A^D) = N(A^k)$. ■

Théorème 3.2.4 *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice non singulier, alors $ind(A) = 0$.*

Preuve. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est un matrice non singulier, alors

$rang(A) = rang(I_n) = n \Rightarrow rang(A) = rang(A^0) = n$

$$\Rightarrow ind(A) = 0.$$

Si A est non singulier matrice d'$ind(A) = 0$,

d'après la proposition(3.1.1)

$$A^{k+1} A^D = A^k \Rightarrow AA^D = A^0 = I_n$$

$$\Rightarrow A^D = A^{-1}.$$

■

Théorème 3.2.5 *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice d'indice $ind(A) = 1$, alors $rang(A) = rang(A^\sharp)$.*

Preuve.

$$rang(A^\sharp) = rang(A^\sharp A A^\sharp) \leq rang(AA^\sharp) \leq rang(A)...(1),$$

d'aprés

$$rang(A) = rang(AA^\sharp A) \leq rang(A^\sharp A) \leq rang(A^\sharp)...(2),$$

d'aprés (1) et (2) on a

$$rang(A) = rang(A^\sharp).$$

■

Théorème 3.2.6 *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice symetrique d'indice est égal a 1, alors $A^\sharp = (A^\sharp)^T$.*

Preuve. Comme $A^\sharp$ est un groupe inverse de A, on a

$$AA^\sharp = A^\sharp A, A^\sharp AA^\sharp = A^\sharp, AA^\sharp A = A,$$

et $A = A^T$ (car A est symetrique).

$$(A^\sharp)^T A = (A^\sharp)^T A^T = A^T (A^\sharp)^T = A(A^\sharp)^T$$

$$(A^\sharp)^T A (A^\sharp)^T = (A^\sharp)^T A^T (A^\sharp)^T = (A^\sharp A A^\sharp)^T = (A^\sharp)^T.$$

$$A(A^\sharp)^T A = A^T (A^\sharp)^T A^T = (AA^\sharp A)^T = A^T = A.$$

■

Théorème 3.2.7 *Si λ est un valeur propre de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ alors $1/\lambda$ est un valeur propre de A^D (inverse de Drazin).*

Preuve. λ est un valeur propre de $A \Rightarrow Ax = \lambda x \quad (x \neq 0)$

$$\Rightarrow A^D Ax = A^D \lambda x$$
$$\Rightarrow AA^D x = \lambda A^D x$$
$$\Rightarrow A^D AA^D x = \lambda A^D A^D x$$
$$\Rightarrow A^D x = 1/\lambda x. \quad ■$$

Chapitre 4

Application

4.1 Exemple01:

On a le système suivent:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ 3x + 5y - 3z = 0 \quad ....(I) \\ 3x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Résoudre ce système:

la matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

a)L'inverse de A.

On calcule le déterminant:

$\det(A) = 24 - 24 = 0$,

donc la matrice A n'est pas inversible, et le système (I) n'admet pas donc de solution ou admet une infinité des solutions.

b)L'inverse de Drazin de A:

Si A est la matrice singulière.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

la factorisation de rang plein

$$A = B_1C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

puis

$$C_1B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix},$$

est non singulière, de sorte que A a une indice, et

$$A^D = B_1(C_1B)^{-2}C_1 = \tfrac{1}{64} \begin{bmatrix} 6 & -26 & 30 \\ 3 & 35 & -33 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

donc A^D l'inverse de Drazin de la matrice A.

Il n'existe pas de l'inverse normale de la matrice A mais il existe l'inverse de Drazin de A.

4.2 Exemple02:

On a la matrice suivante:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1)L'inverse de la matrice B est:

a) On calcule $\det(B)$.

Si $\det(B) = 0$ la matrice B n'est pas inversible.

Si $\det(B) \neq 0$ la matrice B est inversible et l'on peut commencer le calcul de la matrice inverse.

$\det(B) = -3$ et B est inversible.

b) L'inverse du déterminant sans oublier la transposition

$$\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} +3 & -(-3) & +6 \\ -1 & +0 & -1 \\ +(-7) & -9 & +(-13) \end{pmatrix}^T,$$

donc l'inverse de B:

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$.

2) L'inverse de Drazin de B :

On a la matrice suivante

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$, rang de B^{-1} est:

$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} -\alpha + 1/3\beta = 0 \\ -\alpha = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = 0 \\ 1/3\beta = 0 \end{cases} \to \alpha = \beta = 0,$

$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7/3 \\ 3 \\ 13/3 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} -\alpha + 7/3\beta = 0 \\ -\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -2/3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \to \alpha = \beta = 0,$

$\alpha \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7/3 \\ 3 \\ 13/3 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} 1/3\alpha + 7/3\beta = 0 \\ 3\beta = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \beta = 0 \\ 1/3\alpha = 0 \end{cases} \to \alpha = \beta = 0,$

alors $rang(B^{-1}) = 3$.

$(B^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4/9 & 79/9 \\ -5 & 2/3 & 32/3 \\ -7 & 7/9 & 136/9 \end{pmatrix}$,

rang de $(B^{-1})^2 = 3$ le même soulution de B^{-1}

$rang((B^{-1})^2) = rang(B^{-1}) \to$donc $ind(B^{-1}) = 1$, et $k = 1$.

Vérifie que:

$$B^{-1} = B^D, \text{(inverse de Drazin de } B).$$

En appliquant le proposition (3.1.1)

$$\begin{aligned}(1)\quad B^k B^D B &= B^k \\ &\Rightarrow B^1 B^D B = B.\end{aligned}$$

On calcule la relation (1):

$$BB^D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$BB^D B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

donc la relation (1) est vérifiée.

Le proposition (3.1.1)

$$\begin{aligned}(3)\quad B^{k+1} B^D &= B^k \\ &\Rightarrow B^2 B^D = B.\end{aligned}$$

On calcule la relation (3):

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 1 & -10 \\ 8 & 9 & -11 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$B^2 B^D = \begin{pmatrix} 16 & 1 & -10 \\ 8 & 9 & -11 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

donc la relation (3) est vérifiéé.

Le résultat il existe l'inverse de Drazin d'une matrice B le même l'inverse normal de B

$$B^{-1} = B^D, \text{(inverse de Drazinde } B).$$

4.3 Exemple03:

Si A est la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = 0$,la matrice A n'est pas inversible.

On calcule l'inverse de Drazin:

avec $A = B_1C_1$ factorisation de rang plein

$$A = B_1C_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

où

$$C_1B_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$rang(C_1B_1) = 2$ et

$$C_1B_1 = B_2C_2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

est une factorisation de rang plein. poursuivant

$$C_2B_2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

aussi,

$$C_2B_2 = B_3C_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

est une factorisation de rang plein avec $C_3B_3 = 7$.

Donc A trois indice et A^D devient

$$A^D = B_1B_2B_3(C_3B_3)^{-4}C_3C_2C_1$$

$$= \frac{1}{2401} \begin{bmatrix} 343 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour le cas particulier des matrices avec un indice que nous avons

$$AA^DA = A,$$

$$A^DAA^D = A^D,$$

$$AA^D = A^DA, et(A^D)^D = A.$$

On vérifiéé que:

$$A^D = A^{-1}.$$

On calcule la relation suivante:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_d.$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

donc $A^{-1}A = AA^{-1}$ mais $A^{-1}A \neq I_d$ la matrice A n'est pas inversible.

Bibliographie

[1] Ben-Israel A. Greville T. Generalized inverses Theory and applications (2002), RUTCOR–Rutgers Center for Operations Research, Rutgers University, 640 Bartholomew Rd, Piscataway, NJ 08854-8003.

[2] H. Bomaza, B.colas, S. collion, M. dellinger, Z. faget, L. lazzarini, F. schffhauser; Mathématique L3 Analyse, Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés; PERON Education,10 Juin 2009.

[3] R.Bhatia, Matrix Analysis, Springer-Verlag, Newyork, (1997), Graduate Texts in Mathematics.

[4] H.J.Chouan, On the generalized quasi-hyponormal operator, J.Math. Wuhan 5(1985), 23-32.

[5] J. B. Conway, A Course in Operator Theory, American Mathematical Society, Providence R.I (1999), Graduate Studies in Mathematics, Volume (21).

[6] Drazin, M.P. 1958. Pseudo-inverses in associative rings and semi-groups. Amer. Math. Monthly 65:506-513.

[7] N. Dunford and J. T. Shcwarz, Linear Operators, part I, II et III, Interscience, Newyork, 1964.

[8] M. Guesda, sur quelques équations intégrales non linéaire, 2012.

[9] P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jerse, (1967).

[10] G. Lumer and M. Rosenblum, Linear operator equations, Proc. Amer. Math. Soc. 10(1959)32-41.

[11] A. Mansour, Solvability of $AXB - CXD = E$ in the operator algebra B(H), Lobachevskii journal of mathematics, vol.31, N3(2010)257-261.

[12] A. Mansour Equations D'opérateurs $AXB - XD = E$, Université Mohamed Khider, Biskra, 2009.

[13] Randall E.Clin, elements of the theory of generalized inverses for matrices, Mathematics Department University of Tennessee Knoxville, Tennessee 37916.

Résumé

Dans ce mémoire , on étudie quelques méthodes de l'inverse d'une matrice si le déterminant est non nul, et beaucoup plus on s'intéresse à l'étude de l'inverse de Drazin si le déterminant est nul.

ملخص

ندرس في هذه المذكرة بعض طرق معكوس مصفوفة إذا كان محدد المصفوفة غير معدوم، ونخص بالدراسة معكوس Drazin إذا كان المحدد معدوم.

Abstract

In our work, we study some ways of the inverse of matrices when the determinant is not zero. And we specify in our study the Drazin inverse when the determinant is zero.