



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

**Thème**

***Problème du potentiel multi saut  
à trois dimensions***

Présenté par: Chouia Abdallah  
Bedida Ali

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Meftah M. T

Ben Ali Brahim

Zaouche El-Mehdi

Prof.

MCB

MCB

Président

Rapporteur

Examineur

Univ. Oruagla

Univ. El Oued

Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

## Dédicace

Au nom du dieu le clément et le miséricordieux louange à **ALLAH** le tout puissant.

Je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour, a la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur , maman que j'adore.

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous mes frères **Messaoud, Ahmed, Sami, Ilyase, Mouhamed Riyad, Moussa, Nizar** et ma sœur **Asma**.

A toute ma famille et toute la famille **BEDIDA**.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, mes aimables amis, collègues d'étude, et frères de cœur, toi **Bachir** , **Mehieddine** et **Afaf**.

A mon binôme **Abdallah**.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

ALI

Je dédie ce modeste travail à :

A mes parents .Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour Dont ils ne cessent de me combler.

Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet : Ma femme, et bien sur A mes frères, sans oublié ma grand-mère et mes beaux-parents que j'aime.

A toute ma famille et toute la famille **CHOUIA**, mes amis. A mon binôme **Ali** Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

**ABDALLAH**

# Remerciements

Tout d'abord, nous remercions *Dieu*, notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail.

Nous adressons un grand remerciement à notre rapporteur *Dr. Ben Ali Brahim* qui nous a proposé ce thème de mémoire, pour ses conseils et ses directives du début à la fin de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de juger notre travail.

D'ailleurs, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos familles surtout nos parents pour leur effort et leur fatigue, nos enseignants dès la primaire jusqu'à l'université, nos amis et nos proches.

En fin, Nous remercions tous qui nous ont aidés de près ou de loin à l'élaboration de cette étude.

# Notations générales

$\langle, \rangle$	Le produit scalaire.
$\partial$	La dérivée partielle.
$A^*$	L'adjoint d'un opérateur $A$ .
$G(x, \xi)$	La fonction de Green.
$G^*(x, \xi)$	La fonction de Green d'un problème auto-adjoint.
$W(g, f)$	Le wronskien.
$\Delta$	Le laplacien.
$\eta_{l,3}$	La fonction de Neuman.
$j_{l,3}$	La fonction de Bessel.
$k_{l,3}$	La fonction de Bessel modifiée associée à $\eta_{l,3}$
$i_{l,3}$	La fonction de Bessel modifiée associée à $j_{l,3}$
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$E$	Energie.
$V(r, \theta, \phi)$	Le potentiel.
$V_1, V_2, V_3$	Constant.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Notions de base</b>	<b>3</b>
1.1 Équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n$	3
1.2 Construction de la fonction de Green pour les équations différentielles ordinaires d'ordre $n$	5
1.2.1 Définition de la fonction de Green	5
1.2.2 Théorème d'existence et unicité	6
1.3 Cas des équations différentielles du second ordre	10
1.3.1 Un cas particulier important	12
1.4 Résolution du problème aux limites à l'aide de la fonction de Green	14
1.5 Problèmes adjoint et auto-adjoint	16
1.6 Équation de Bessel	18
1.6.1 Propriétés	20
<b>2 Résolution le problème du potentiel multi saut à trois dimensions</b>	<b>22</b>
2.1 Section A : $E > V_0$	24
2.1.1 Région ( $r, r' > b$ )	24
2.1.2 Région ( $a \leq (r, r') \leq b$ )	26
2.1.3 Région ( $r, r' < a$ )	28
2.1.4 Calcul des coefficients $\alpha$ et $\gamma$	29
2.1.5 Calcul de coefficient $\xi$	31
2.1.6 Région Mixte	33

2.2	Section B : $0 < E < V_0$ . . . . .	39
2.2.1	Région ( $r, r' > b$ ) : . . . . .	39
2.2.2	Région ( $a \leq (r, r') \leq b$ ) : . . . . .	40
2.2.3	Région ( $0 \leq r, r' \leq a$ ) : . . . . .	41
2.2.4	Calcul des coefficients $\alpha_3$ et $\gamma_3$ . . . . .	41
2.2.5	Région ( $0 \leq r, r' \leq a$ ) : . . . . .	43
2.2.6	Région Mixte . . . . .	44

# Introduction générale

Les mathématiques sont aujourd'hui utilisées dans plusieurs domaines des sciences contemporaines. L'application des mathématiques, et spécialement comme les équations différentielles, joue un rôle considérable en physique. En physique, on rencontre les équations différentielles lors de la construction d'un modèle pour une situation physique donnée. Ainsi les équations aux dérivées partielles et les équations différentielles linéaires du second ordre jouent un rôle important en mécanique et en physique. Ces équations peuvent servir par exemple à résoudre les problèmes des petites oscillations mécaniques, la propagation des ondes, de la théorie du potentiel, de la fonction de Green etc... On appelle fonction de Green en physique ce que les mathématiciens appellent solution élémentaire d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Ces fonctions sont introduites par George Green en 1828 pour les besoins de l'électromagnétisme, utilisées par Neumann dans sa théorie du potentiel Newtonien et par Helmholtz en acoustique, elles sont un outil puissant en théorie quantique des champs après que Feynman les a popularisées sous le nom de propagateur dans sa formulation en intégrale de chemin de l'électrodynamique quantique. La méthode de fonction de Green est bien adaptée à ce genre de problème. Ces « fonctions » de Green, sont le plus souvent des distributions.

L'équation de Schrödinger conçue par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1925, est une équation fondamentale en mécanique quantique. Elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive non relativiste, et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique.

Au premier chapitre, nous définissons tout d'abord la notion d'équation différentielle linéaire homogène (définitions, théorèmes). Ensuite, nous avons développé la théorie de la

construction de la fonction de Green pour une équation différentielle ordinaire en appuyant la théorie par quelques exemples. Finalement, nous avons donné un aperçu sur le problème auto-adjoint, ainsi que les fonctions de Bessel et leurs propriétés.

Au deuxième chapitre, nous avons construit la fonction de Green relative à l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans l'espace à trois dimensions. Pour cela, nous avons la continuité de la fonction de Green et de sa dérivée au bord des régions que nous avons considérées. Le problème étudié, concerne l'étude d'une particule quantique qui se déplace dans un potentiel axe-symétrique en trois dimensions. Tous les résultats trouvés, sont basés, comme il est attendu dans ce genre de problème, sur les fonctions de Bessel.

# Chapitre 1

## Notions de base

### 1.1 Équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n$

Considérons une équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y = 0. \quad (1.1)$$

On suppose que  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  sont des constantes. Avant d'indiquer une méthode de résolution de l'équation (1.1), nous donnerons deux définitions qui nous seront utiles par la suite.

**Définition 1.1.1.** 1. Si on a pour tous les  $x$  du segment  $[a, b]$  l'égalité

$$\varphi_n(x) = A_1 \varphi_1(x) + A_2 \varphi_2(x) + \dots + A_{n-1} \varphi_{n-1}(x),$$

où  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  sont des constantes non nulles, on dit que  $\varphi_n(x)$  est une combinaison linéaire des fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ .

2. Les  $n - 1$  fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$  sont dites linéairement indépendantes si aucune d'elles ne peut être représentée comme combinaison linéaire des autres. [4]

**Remarque 1.1.1.** Il résulte de ces définitions que si les fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$  sont linéairement dépendantes, il existe alors des constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  non toutes nulles et telles que l'on a, quel que soit  $x$  pris sur le segment  $[a, b]$ ,

$$C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) \equiv 0.$$

Passons maintenant à la solution de l'équation (1.1), on a pour cette équation le théorème suivant :

**Théorème 1.1.1.** *Si les fonctions  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.1), sa solution générale est de la forme :*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

où  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sont des constantes arbitraires.

Si les coefficients de l'équation (1.1) sont constants, on trouve la solution générale tout comme pour l'équation du second ordre.

1. On forme l'équation caractéristique

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

2. On trouve les racines de l'équation caractéristique  $k_1, k_2, \dots, k_n$ .

3. Suivant le caractère des racines, on écrit les solutions particulières linéairement indépendantes en partant de ce qui suit :

(a) Il correspond à toute racine réelle simple  $k$  une solution particulière  $e^{kx}$ .

(b) Il correspond à toute couple de racines complexes conjuguées simples  $k^{(1)} = \alpha + i\beta$  et  $k^{(2)} = \alpha - i\beta$  deux solutions particulières  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  et  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

(c) Il correspond à toute racine réelle  $k$  d'ordre de multiplicité  $r$  autant de solutions particulières linéairement indépendantes

$$e^{kx}, x e^{kx}, \dots, x^{r-1} e^{kx}.$$

(d) Il correspond à tout couple de racines complexes conjuguées  $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ ,  $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ , d'ordre de multiplicité  $\mu$ ,  $2\mu$  solutions particulières :

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Le nombre de ces solutions est égal au degré de l'équation caractéristique (qui est aussi l'ordre de l'équation différentielle proposée).

4. Ayant trouvé  $n$  solutions linéairement indépendantes  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , on écrit la solution générale de l'équation différentielle proposée sous la forme :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

où  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sont des constantes arbitraires. [4]

## 1.2 Construction de la fonction de Green pour les équations différentielles ordinaires d'ordre $n$

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles.

Nous considérons le cas particulièrement important pour la physique, des équations différentielles du second ordre, et nous commençons par l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$ .

Soit l'équation différentielle d'ordre  $n$

$$L[y] = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad (1.2)$$

où les fonctions  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  sont continues sur  $[a, b]$ ,  $p_0(x) \neq 0$ , sur  $[a, b]$  avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} V_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \dots \\ + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.3)$$

les formes linéaires  $V_1, V_2, \dots, V_n$  en  $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$  étant linéairement indépendantes.

Supposons que le problème aux limites homogène (1.2) – (1.3) admet la seule solution triviale  $y(x) = 0$ .

### 1.2.1 Définition de la fonction de Green

On dit fonction de Green du problème aux limites (1.2) – (1.3), toute fonction satisfait les conditions suivantes [3] :

- a .  $G(x, \xi)$  est continue et possède des dérivées continues par rapport à  $x$  jusqu'à l'ordre  $(n - 2)$  inclus pour  $a \leq x \leq b$ .
- b . Sa  $(n - 1)$  - ième dérivée par rapport à  $x$  présente au point  $x = \xi$  une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur  $\frac{1}{p_0(\xi)}$ , i.e

$$\frac{\partial^{(n-1)}G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{(n-1)}G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}} \Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

- c . Dans chacun des intervalles  $[a, \xi)$  et  $(\xi, b]$  la fonction  $G(x, \xi)$  considérée comme une fonction de  $x$  est solution de l'équation (1.2) :

$$L[G] = 0.$$

- d .  $G(x, \xi)$  vérifie les conditions aux limites (1.3) :

$$V_k(G) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

## 1.2.2 Théorème d'existence et unicité

**Théorème 1.2.1.** *Si le problème aux limites (1.2) – (1.3) n'a pas de solution autre que la solution triviale  $y(x) = 0$ , l'opérateur  $L$  a une fonction de Green  $G(x, \xi)$  et une seule. [3]*

**Preuve.** Soient  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  les solutions linéairement indépendantes de l'équation  $L[y] = 0$ . Sur les intervalles  $[a, \xi)$  et  $(\xi, b]$  la fonction cherchée  $G(x, \xi)$  doit être de la forme :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x) & \text{pour } a \leq x \leq \xi, \\ b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x) & \text{pour } \xi \leq x \leq b. \end{cases}$$

avec  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  sont des fonctions de  $\xi$ . En vertu de la continuité au point  $x = \xi$  de la fonction  $G(x, \xi)$  et de ses premières  $(n - 2)$  dérivées par rapport à  $x$ , nous avons

$$\begin{aligned} \left[ b_1 y_1(\xi) + \dots + b_n y_n(\xi) \right] - \left[ a_1 y_1(\xi) + \dots + a_n y_n(\xi) \right] &= 0, \\ \left[ b_1 y_1'(\xi) + \dots + b_n y_n'(\xi) \right] - \left[ a_1 y_1'(\xi) + \dots + a_n y_n'(\xi) \right] &= 0, \\ &\dots\dots \\ \left[ b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + b_n y_n^{(n-2)}(\xi) \right] - \left[ a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + a_n y_n^{(n-2)}(\xi) \right] &= 0, \end{aligned}$$

et la condition (b) s'écrit

$$\left[ b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + b_n y_n^{(n-1)}(\xi) \right] - \left[ a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_n y_n^{(n-1)}(\xi) \right] = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Posons  $C_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Il vient le système des équations linéaires par rapport à  $C_k(\xi)$  :

$$\begin{cases} C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) + \dots + C_n y_n(\xi) = 0 \\ C_1 y_1'(\xi) + C_2 y_2'(\xi) + \dots + C_n y_n'(\xi) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + C_2 y_2^{(n-2)}(\xi) + \dots + C_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0 \\ C_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + C_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)} \end{cases} \quad (1.4)$$

Le déterminant du système (1.4) est égal à la valeur en  $x = \xi$  du wronskien  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , il n'est donc pas nul.

Aussi, le système (1.4) détermine-t-il de façon unique les fonctions  $C_k(\xi)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Déterminons les fonctions  $a_k(\xi)$  et  $b_k(\xi)$  moyennant les conditions aux limites (1.3).

Notons  $V_k(y)$  sous la forme :

$$V_k(y) = A_k(y) - B_k(y), \quad (1.5)$$

où

$$A_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a), \beta_k(y) = \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \dots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b).$$

En vertu des conditions (d) nous obtenons alors

$$V_k(G) = a_1 A_k(y_1) + a_2 A_k(y_2) + \dots + a_n A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + \dots + b_n B_k(y_n) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Compte tenu de  $a_k = b_k - C_k$ , nous avons

$$(b_1 - C_1) A_k(y_1) + (b_2 - C_2) A_k(y_2) + \dots + (b_n - C_n) A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + \dots + b_n B_k(y_n) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

D'où, en vertu de (1.5)

$$b_1 V_k(y_1) + b_2 V_k(y_2) + \dots + b_n V_k(y_n) = C_1 A_k(y_1) + C_2 A_k(y_2) + \dots + C_n A_k(y_n), \quad (1.6) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Notons que le système (1.6) est linéaire en  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Son déterminant est :

$$\det \begin{pmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \dots & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \dots & V_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & \dots & V_n(y_n) \end{pmatrix} \neq 0$$

étant donné l'hypothèse de l'indépendance linéaire des formes  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Ainsi, le système d'équation (1.6) admet une solution unique en  $b_1(\xi), b_2(\xi), \dots, b_n(\xi)$ , et comme  $a_k(\xi) = b_k(\xi) - C_k(\xi)$ , les quantités  $a_k(\xi)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) sont également définies de façon unique. Nous venons donc de démontrer l'existence et l'unicité de la fonction de Green  $G(x, \xi)$  et de fournir un procédé de sa construction.  $\square$

**Exemple 1.2.1.** *Construisons la fonction de Green pour l'équation :*

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0.$$

Toutes les solutions sont de la forme  $y(x) = ax^2 + bx + c$ , elles vérifient les conditions si  $a = b = c = 0$ .

Soit

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi)x^2 + b_1(\xi)x + c_1(\xi), & \text{pour } 0 \leq x \leq \xi, \\ a_2(\xi)x^2 + b_2(\xi)x + c_2(\xi), & \text{pour } \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de  $G$  :

1.  $G(x, \xi)$  est continue au point  $x = \xi$ , on a :

$$G(\xi^-, \xi) = G(\xi^+, \xi),$$

c'est-à-dire :

$$a_1(\xi)\xi^2 + b_1(\xi)\xi + c_1(\xi) = a_2(\xi)\xi^2 + b_2(\xi)\xi + c_2(\xi),$$

$\Rightarrow$

$$(a_1(\xi) - a_2(\xi))\xi^2 + (b_1(\xi) - b_2(\xi))\xi + (c_1(\xi) - c_2(\xi)) = 0, \quad (1.7)$$

2.  $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \xi)$  est discontinue au point  $x = \xi$  :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\xi^-, \xi) = 1$$

donc

$$2a_2(\xi) - 2a_1(\xi) = 1$$

enfin

$$a_2(\xi) - a_1(\xi) = \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

3. Les propriétés de la fonction de Green entraînent

$$\begin{cases} c_1(\xi) = 0 \\ b_1(\xi) = 0 \\ c_2(\xi) + a_2(\xi) + b_2(\xi) = 0 \\ 2a_2(\xi) + b_2(\xi) = 0 \end{cases}$$

Soit maintenant

$$\begin{cases} c_1(\xi) = b_1(\xi) = 0 \\ c_2(\xi) = a_2(\xi) \\ b_2(\xi) = -2a_2(\xi) \end{cases} \quad (1.9)$$

La substitution de (1.9) et (1.8) de l'équation (1.6) donne :

$$\frac{1}{2}\xi^2 + 2a_2(\xi)\xi - a_2(\xi) = 0 \quad (1.10)$$

$\Rightarrow$

$$a_2(\xi) = -\frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)}$$

alors

$$\begin{cases} a_1(\xi) = -\frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)} \\ b_2(\xi) = \frac{\xi^2}{(2\xi - 1)} \\ c_2(\xi) = -\frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)} \end{cases}$$

donc

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)}x^2, & \text{pour } 0 \leq x \leq \xi \\ -\frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)}x^2 + \frac{\xi^2}{(2\xi - 1)}x - \frac{\xi^2}{2(2\xi - 1)}. & \text{pour } \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

### 1.3 Cas des équations différentielles du second ordre

Soient  $p_0, p_1, p_2$  trois fonctions continues sur  $[a, b]$

$$L(y) = p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(b) = 0 \\ \beta_0 y(a) + \beta_1 y'(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(b) = 0. \end{cases}$$

On construit la fonction de Green sur la base de deux solutions non proportionnelles  $y_1$  et  $y_2$  de (1.11) de la façon suivant : Il existe donc pour chaque  $\xi$  des réels  $a(\xi), b(\xi), c(\xi)$  et  $d(\xi)$ , tels que [3] :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a(\xi)y_1(x) + b(\xi)y_2(x), & \text{pour } x \in ]a, \xi[ \\ c(\xi)y_1(x) + d(\xi)y_2(x). & \text{pour } x \in ]\xi, b[ \end{cases}$$

**Exemple 1.3.1.** *Construisons la fonction de Green pour l'équation :*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Toutes les solutions sont de la forme  $y(x) = ax + b$ , elles vérifient les conditions si  $a = 0$  et  $b = 0$  :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi)x + b_1(\xi), & \text{pour } 0 \leq x \leq \xi \\ a_2(\xi)x + b_2(\xi). & \text{pour } \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de  $G$  :

1.  $G(x, \xi)$  est continue au point  $x = \xi$ , on a :

$$G(\xi^-, \xi) = G(\xi^+, \xi)$$

c'est-à-dire :

$$a_1(\xi)\xi + b_1(\xi) = a_2(\xi)\xi + b_2(\xi)$$

$\Rightarrow$

$$(a_2(\xi) - a_1(\xi))\xi + (b_2(\xi) - b_1(\xi)) = 0, \quad (1.12)$$

2.  $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi)$  est discontinue au point  $x = \xi$  :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-, \xi) = 1$$

d'où

$$a_2(\xi) - a_1(\xi) = 1, \quad (1.13)$$

3.

$$G(0, \xi) = 0 \Rightarrow b_1(\xi) = 0, \quad (1.14)$$

$$G(1, \xi) = 0 \Rightarrow a_2(\xi) + b_2(\xi) = 0, \quad (1.15)$$

La substitution de (1.13) et (1.14) dans l'équation (1.12) donne :

$$\xi + b_2(\xi) = 0$$

donc

$$b_2(\xi) = -\xi, \quad (1.16)$$

La substitution de (1.16) dans l'équation (1.15) donne :

$$a_2(\xi) - \xi = 0$$

alors

$$a_2(\xi) = \xi, \quad (1.17)$$

La substitution de (1.17) et dans l'équation (1.13) donne :

$$-a_1(\xi) + \xi = 1$$

puis

$$a_1(\xi) = \xi - 1 \quad (1.18)$$

enfin

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(\xi - 1), & \text{si } x \in ]0, \xi[ \\ \xi(x - 1), & \text{si } x \in ]\xi, 1[ \end{cases} \quad (1.19)$$

### 1.3.1 Un cas particulier important

Construisons la fonction de Green pour l'équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\begin{aligned} (p(x)y')' + q(x)y &= 0, \\ p(x) &\neq 0 \text{ sur } [a, b] \quad p(x) \in C^1[a, b], \end{aligned} \tag{1.20}$$

avec les conditions aux limites

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{1.21}$$

Supposons que  $y_1(x)$  est une solution de l'équation (1.20) définie par les conditions initiales

$$y_1(a) = 0, y_1'(a) = \alpha \neq 0.$$

D'une façon générale, cette solution ne vérifie pas nécessairement la seconde condition aux limites, ce qui nous autorise à supposer que  $y_1(b) \neq 0$ . Les fonctions de la forme  $C_1 y_1(x)$  avec  $C_1$  une constante quelconque sont évidemment solutions de (1.20) et vérifient la condition aux limites

$$y(a) = 0.$$

Trouvons de même une solution  $y_2(x) \neq 0$  de (1.20) telle que :

$$y_2(b) = 0.$$

Cette condition est vérifiée par toutes les solutions de la forme  $C_2 y_2(x)$ , où  $C_2$  est une constante.

Cherchons la fonction de Green relative au problème (1.20)-(1.21) sous la forme

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1 y_1(x), & \text{pour } a \leq x \leq \xi \\ C_2 y_2(x), & \text{pour } \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de  $G$  :

(a)  $G$  est continue au point  $x = \xi$ , on a

$$C_1 y_1(\xi) = C_2 y_2(\xi)$$

c'est-à-dire :

$$C_2 y_2(\xi) - C_1 y_1(\xi) = 0,$$

(b)  $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi)$  est discontinue au point  $x = \xi$  :

$$C_2 y_2'(\xi) - C_1 y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}$$

donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) = 0, \\ -C_1 y_1'(\xi) + C_2 y_2'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Le déterminant du système (1.22) est le wronskien  $W[y_1(x), y_2(x)] = W(x)$  calculé en  $x = \xi$  pour les solutions linéairement indépendantes  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  de l'équation (1.20), donc

$$W(\xi) \neq 0,$$

de sorte que  $C_1$  et  $C_2$  de (1.22) se définissent de suite :

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}$$

Alors finalement [3]

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, & \text{pour } a \leq x \leq \xi \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(\xi)}. & \text{pour } \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

**Remarque 1.3.1.** *Le problème aux limites pour l'équation du second ordre de la forme :*

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0, \quad (1.23)$$

*et les conditions aux limites*

$$y(a) = A, \lim_{x \rightarrow b} y(x) = B,$$

*se ramène au problème considéré (1.20)-(1.21) :*

1 En multipliant l'équation (1.23) par  $P(x)$ , où  $P(x) = e^{\int p_1(x)dx}$  et on prend  $q(x) = P(x)p_2(x)$

2 En utilisant la changement linéaire de fonction suivant :

$$Z(x) = Y(x) - \frac{B - A}{b - a}(x - a) - A,$$

on ramène les conditions aux limites (1.36) aux conditions nulles (1.21) mais au lieu de (1.20) on obtient l'équation avec le second membre  $L[Z] = f(x)$ , où

$$f(x) = -\left[A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)\right]q(x) - \frac{B-A}{b-a}P(x)p_1(x).$$

On construit cependant la fonction de Green relative au problème aux limites homogène

$$L[Z] = 0, Z(a) = Z(b) = 0,$$

qui coïncide complètement avec le problème (1.20)-(1.21). [3]

## 1.4 Résolution du problème aux limites à l'aide de la fonction de Green

Soit l'équation différentielle non homogène

$$L[y] = p'(x)y(n) + p_1(x)y(n-1) + \dots + p_n(x)y, \quad (1.24)$$

où  $L[y] = g(x)$

et les conditions aux limites

$$V_1(y) = 0, V_2(y) = 0, \dots, V_n(y) = 0, \quad (1.25)$$

les formes linéaires  $V_1, V_2, \dots, V_n$  et  $y(a), y'(a), \dots, y^{n-1}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{n-1}(b)$  étant linéairement indépendantes.

**Théorème 1.4.1.** Si  $G(x, \xi)$  est la fonction de Green du problème aux limites homogène :

$$L[G] = 0, V_k(G) = 0, (k = 1, 2, \dots, n),$$

la solution du problème aux limites (1.30)-(1.31) est donnée par la formule [6]

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi)d\xi.$$

**Preuve.** Montrons que  $G(x, \xi)$  nous sert à déterminer la solution du problème linéaire non homogène suivant :

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = g(x), & a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Considérons le système :

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = g(x) & (1) \\ (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1), considérons  $y(x)$  une solution de (1.26) et comme  $G(x, \xi)$  vérifie l'équation homogène, on remplace  $y(x) = G(x, \xi)$  dans (2) on obtient :

$$\left( p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right)' + h(x)G(x, \xi) = 0 \quad \text{pour } a \leq \xi \leq b \quad (3)$$

multiplions (1) par  $-G(x, \xi)$  et (3) par  $y(\xi)$ , et on obtient

$$-G(x, \xi)(p(x)y'(x))' + y(\xi) \left( p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} \right)' = G(x, \xi)g(\xi)$$

s'écrit comme suite

$$\frac{d}{d\xi} [p(\xi)(y(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))] = G(x, \xi)g(\xi)$$

intégrons de  $a$  à  $b$  on obtient :

$$[p(\xi)(y(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))]_a^b = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi)d\xi$$

compte tenu des conditions aux limites, et le fait que  $G(x, \xi)$  est discontinue au point  $x = \xi$

$$\begin{aligned} [p(\xi)(y(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))]_a^b &= [p(\xi)(y(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))]_a^x \\ &\quad + [p(\xi)(y(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi)y'(\xi))]_x^b \\ &= p(x)[(y(x) \frac{\partial G(x, x_-)}{\partial \xi} - G(x, x)y'(x))] - p(a)[y(a) \frac{\partial G(x, a)}{\partial \xi} - G(x, a)y'(a)] \\ &\quad + p(b)[y(b) \frac{\partial G(x, b)}{\partial \xi} - G(x, b)y'(v)] - p(x)[(y(x) \frac{\partial G(x, x_+)}{\partial \xi} - G(x, x)y'(x))] \\ &= p(x)y(x) \left[ \frac{\partial G(x, x_-)}{\partial \xi} - \frac{\partial G(x, x_+)}{\partial \xi} \right] \\ &= p(x)y(x) \frac{1}{p(x)} \\ &= y(x) \end{aligned}$$

donc la solution du problème linéaire (1.26) est donnée par :

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi)d\xi.$$

□

**Exemple 1.4.1.** Soit le problème aux limites non homogène

$$y'' + y = \cos x, \quad (1.27)$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (1.28)$$

On a la fonction de Green du problème aux limites homogène (1.27)-(??) est

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\cos\xi \sin x & \text{si } x \in ]0, \xi[ \\ -\sin\xi \cos x & \text{si } x \in ]\xi, \frac{\pi}{2}[ \end{cases}$$

D'après le théorème (1.4.1), la solution du problème aux limites non homogène (1.26) est donnée par la formule

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) \cos \xi d\xi.$$

$\implies$

$$y(x) = - \int_0^x \sin \xi \cos x \cos \xi d\xi - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos \xi \sin x \cos \xi d\xi.$$

Alors

$$y(x) = - \int_0^x \frac{\sin x}{4} (\pi - 2x).$$

## 1.5 Problèmes adjoint et auto-adjoint

Soit  $A$  un opérateur linéaire dans  $\mathbb{R}^n$ . L'opérateur adjoint  $A^*$  est défini par la relation  $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$ . Il est donné par la transposée  $A^T$  de la matrice  $A$ .

Dans le contexte des équations différentielles, considérons le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

sur  $C([a, b])$  (où  $[a, b]$  est un intervalle compact) et un problème aux limites donné par  $L, B_1, B_2$ , tel que

$$\langle Ly, z \rangle = \langle y, L^*z \rangle,$$

pour toutes fonctions  $y, z \in C^2([a, b])$  satisfaisant  $B_1y = B_2y = 0$  et  $B_1^*z = B_2^*z = 0$ .

**Théorème 1.5.1.** *Considérons le problème*

$$Ly = 0, B_1y = 0, B_2y = 0,$$

où  $L$  satisfait les hypothèses est  $\alpha_2 \in C^2([a, b])$ ,  $\alpha_1 \in C^2([a, b])$  et  $\alpha_0 \in C^0([a, b])$  avec  $\alpha_2(x) \neq 0$  sur  $[a, b]$ ,  $\beta_2 \in C^2([a, b])$ ,  $\beta_1 \in C^2([a, b])$  et  $\beta_0 \in C^0([a, b])$  avec  $\beta_2(x) \neq 0$  sur  $[a, b]$  et où les vecteurs  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  et  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$  définissant  $B_1$  et  $B_2$  sont linéairement indépendants.

Alors il existe

$$B_1^* = \gamma_1 z(a) + \gamma_2 z'(a) + \gamma_3 z(b) + \gamma_4 z'(b), B_2^* = \delta_1 z(a) + \delta_2 z'(a) + \delta_3 z(b) + \delta_4 z'(b), \quad (1.29)$$

les coefficients  $\gamma_i$  et  $\delta_i$  ne sont pas uniques, mais l'espace des fonctions  $z$  qui satisfont  $B_1^* = B_2^* = 0$  est unique.[2]

**Définition 1.5.1.** *Si le problème  $L, B_1, B_2$  satisfait les hypothèses du théorème (1.5.1), on appelle  $L^*, B_1^*, B_2^*$ , le problème aux limites adjoint.[2]*

*Le problème est auto adjoint, si  $L^* = L$  et si les conditions  $B_1^* = B_2^* = 0$  sont équivalents à  $B_1 = B_2 = 0$ .*

*En développant l'expression pour  $L^*z$  on obtient*

$$L^*z = \alpha_2(x)z'' + (\alpha_2'(x) - \alpha_1(x))z' + (\alpha_2''(x) - \alpha_1'(x) + \alpha_0(x))z.$$

*L'opérateur  $L$  est donc auto adjoint, si et seulement si  $\alpha_2'(x) = \alpha_1(x)$ , c-à-d, s'il est de la forme*

$$L^*y = (\alpha_2(x)y')' + \alpha_0(x)y.$$

**Proposition 1.5.1.** *Sous les hypothèses du théorème (1.5.1) le problème  $Ly = 0$ ,  $B_1y = 0, B_2y = 0$ , possède une solution unique, si et seulement si le problème adjoint  $L^*z = 0, B_1^*z = 0, B_2^*z = 0$ , possède une solution unique.*

*Les fonctions de Green pour les deux problèmes satisfont alors*

$$G^*(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (1.30)$$

*En particulier, la fonction de Green d'un problème auto-adjoint est symétrique. [2]*

**Preuve.** Supposons que  $Ly = 0, B_1y = 0, B_2y = 0$ , possède une solution unique et notons par  $z$  une solution de  $L^*z = 0, B_1^*z = 0, B_2^*z = 0$ . Avec  $y(x)$ , solution de  $Ly = z, B_1y = 0, B_2y = 0$ , on obtient

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \langle Ly, z \rangle = \langle y, L^*z \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0.$$

Donc  $z = 0$  et l'unicité de la solution du problème adjoint sont démontrées.

Pour démontrer la relation (1.30), considérons deux fonctions continues  $f(x)$  et  $g(x)$  et définissons

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, z(x) = \int_a^b G^*(x, \xi) g(\xi) d\xi,$$

Par la définition de la fonction de Green, les fonctions  $y$  et  $z$  satisfont  $Ly = f, B_1y = B_2y = 0$ , et  $L^*z = g, B_1^*z = B_2^*z = 0$ . La relation  $\langle Ly, z \rangle = \langle y, L^*z \rangle$  (c - à - d,  $\langle f, z \rangle = \langle y, g \rangle$ ) implique alors

$$\int_a^b \int_a^b (G^*(x, \xi) - G(\xi, x)) f(x) g(\xi) d\xi dx = 0.$$

Comme cette relation est vérifiée pour toutes fonctions continues  $f$  et  $g$  on en déduit la relation (1.30) □

## 1.6 Équation de Bessel

Soit l'équation

$$y'' + t^{-1}y' + (1 - n^2t^{-2})y = 0, \quad (1.31)$$

cette équation s'appelle équation de Bessel d'ordre  $n$ . Pour  $n$  entier, la fonction de Bessel  $J_n$  est définie par une série et est solution de l'équation différentielle (1.31).

**Définition 1.6.1.** Soit  $n$  entier, la série

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}, \quad (1.32)$$

est absolument convergente pour  $t \in \mathbb{C}$  et est solution de l'équation différentielle (1.31) pour  $t \in \mathbb{R}$ . La fonction  $J_n$  est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ . [5]

**Proposition 1.6.1.** Les fonctions de Bessel  $J_n, n \geq 1$  vérifient les relations de récurrence

$$J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t), \quad (1.33)$$

$$J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) = 2J'_n(t), \quad (1.34)$$

de plus,  $J'_0 = -J_1$ . [5]

**Théorème 1.6.1.** La famille des fonctions de Bessel  $(J_n) / n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  est caractérisée par l'une des deux représentations suivantes [5] :

1. Les  $J_n$  sont données par la fonction génératrice

$$J(x, t) = \exp\left(\left(x - \frac{1}{x}\right)t\right) = J_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(t)[x + (-x^{-1})]^n, \quad t > 0. \quad (1.35)$$

2. La fonction  $J_n$  est donnée par la série entière (1.32). De plus, la suite  $(J_n)_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence

$$tJ_{n-1}(t) = 2nJ_n(t) - tJ_{n+1}(t). \quad (1.36)$$

La fonction  $J_n$  a comme équivalents aux bornes de l'intervalle  $(0; +\infty)$

$$J_n(t)_{t \rightarrow 0} \sim \frac{t^n}{2^n n!}; \quad J_n(t)_{t \rightarrow +\infty} \sim \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(t - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right). \quad (1.37)$$

**Remarque 1.6.1.** Pour  $t \in \mathbb{R}$  et en prenant la variable  $\theta$  telle que  $x = e^{i\theta}$ , la relation (1.35) s'écrit comme un développement en série de Fourier

$$e^{itsin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t)e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (1.38)$$

Ainsi

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{itsin\theta - in\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(ts\sin\theta - n\theta) d\theta, \quad (1.39)$$

d'après (1.39) on a

$$J_{-n}(t) = J_n(-t), \quad (1.40)$$

et

$$J_n(-t) = (-1)^n J_n(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.41)$$

lorsque  $n$  non entier égal à  $\nu$  la fonction  $J_{-\nu}$  est une solution de l'équation (1.31), et linéairement indépendante à  $J_\nu$ . [5]

**Proposition 1.6.2.** Soit  $\nu$  un réel, l'équation différentielle (1.31) est

$$y'' + t^{-1}y' + (1 - \nu^2 t^{-2})y = 0, \quad (1.42)$$

a deux solutions linéairement indépendantes  $J_\nu, Y_\nu$ . Cette seconde est appelée la fonction de Bessel de deuxième espèce. Elles sont définies par [5] :

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad (1.43)$$

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu(t) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu \pi}, \quad (1.44)$$

et leurs développements asymptotiques sont

$$J_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left( \cos\left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right), \quad (1.45)$$

et

$$Y_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left( \sin\left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right), t \rightarrow +\infty \quad (1.46)$$

**Théorème 1.6.2.** Soit l'équation différentielle

$$y'' + t^{-1}y' - (1 + \nu^2 t^{-2})y = 0. \quad (1.47)$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel modifiées. La solution finie à l'origine et notée  $I_\nu(t)$ , et la seconde solution notée  $K_\nu(t)$ . Ces fonctions sont reliées par la relation [5]

$$K_\nu(t) = \frac{\pi(I_{-\nu}(t) - I_\nu(t))}{2\sin \nu \pi}. \quad (1.48)$$

### 1.6.1 Propriétés

En utilisant la référence [5] on a :

1. Les fonctions  $I_\nu(t)$  et  $K_\nu(t)$  vérifient les relations de récurrence (1.33), (1.34), (1.41).
2. Si nous prenons l'argument des fonctions de Bessel  $J_\nu(t)$  et  $H_\nu^{(1)}(t)$  imaginaire, nous obtenons

$$J_\nu(it) = i^\nu I_\nu(t), K_\nu(t) = \frac{\pi i}{2} H_\nu^{(1)}(it),$$

où la fonction  $H_\nu^{(1)}(t)$  s'appelle la fonction de Hankel ou fonction de Bessel de troisième espèce, ainsi la fonction  $H_\nu^{(2)}(t)$  est la fonction de Hankel, elles sont définies par

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(t) &= J_\nu(t) + iY_\nu(t), \\ H_\nu^{(2)}(t) &= J_\nu(t) - iY_\nu(t). \end{aligned}$$

3. Les fonctions de Bessel spherique sont difnis comme suit :

$$j_{l,3}(t) = \left(\frac{\pi}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(t),$$

$$\eta_{l,3}(t) = \left(\frac{\pi}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(t).$$

aussi les fonction modifier sont donnés par :

$$i_{l,3}(t) = j_{l,3}(it),$$

$$k_{l,3}(t) = \eta_{l,3}(it).$$

4. Les Wronskiens des fonctions de Bessel précédentes sont donnés par :

$$W(J_\nu(t), Y_\nu(t)) = 2/\pi t,$$

$$W(I_\nu(t), K_\nu(t)) = -1/t,$$

$$W(H_\nu^{(1)}(t), H_\nu^{(2)}(t)) = -4i/\pi t,$$

$$W(j_{l,3}(t), \eta_{l,3}(t)) = \frac{1}{t^2},$$

$$W(i_{l,3}(t), k_{l,3}(t)) = \frac{-1}{t^2}.$$

## Chapitre 2

# Résolution le problème du potentiel multi saut à trois dimensions

Dans ce chapitre, nous allons calculer la fonction de Green pour le problème du potentiel multi saut à trois dimensions cette problème est défini comme suit :

$$\left(-\frac{\Delta_3}{2} + V(r, \theta, \phi) - E\right) \psi(r, \theta, \phi) = 0, \quad (2.1)$$

où

$$r \in \mathbb{R}_+ \quad \theta, \phi \in \mathbb{R}$$

avec

$$V(r, \theta, \phi) = \begin{cases} V_1 & \text{si } r < a \\ V_2 & \text{si } a \leq r \leq b \\ V_3 & \text{si } r > b \end{cases}$$

où

$$\Delta_3 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\Lambda_3^2}{r^2}(\theta, \phi),$$

et

$$\Lambda_3^2 Y(\theta, \phi) = l(l+1)Y(\theta, \phi),$$

on pose

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi),$$

En substituant la valeur de  $\psi$  dans l'équation (2.1) on arrive :

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{\Lambda_3^2}{r^2}(\theta, \phi) + V(r, \theta, \phi) - E \right) R(r)Y(\theta, \phi) = 0, \quad (2.2)$$

en substituant  $\Lambda_3^2$  dans (2.2) on obtient :

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) R(r)Y(\theta, \phi) + \frac{1}{2r^2} R(r)(l(l+1)Y(\theta, \phi)) + V(r, \theta, \phi)R(r)Y(\theta, \phi) - ER(r)Y(\theta, \phi) = 0,$$

cela implique que

$$\left( -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{l(l+1)}{2r^2} + V(r, \theta, \phi) - E \right) R(r)Y(\theta, \phi) = 0,$$

en divisant l'équation précédant sur  $Y(\theta, \phi) \neq 0$  et on obtient :

$$\left( -\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{l(l+1)}{r^2} + 2(V(r, \theta, \phi) - E) \right) R(r) = 0, \quad (2.3)$$

avec

$$V(r, \theta, \phi) = \begin{cases} V_1 & \text{si } r < a \\ V_2 & \text{si } a \leq r \leq b \\ V_3 & \text{si } r > b \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ V_0 & \text{si } a \leq r \leq b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases} \quad (2.4)$$

sachant qu'on a l'équation de Schrodinger :

$$\left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{l(l+1)}{r^2} + 2(V(r, \theta, \phi) - E) \right) G(r, r') = \delta^{(3)}(\vec{r}'),$$

tel que :

$$\delta^{(3)}(\vec{r}') = \frac{1}{|J|} \delta(r) \delta(\theta) \delta(\phi) \quad \text{et} \quad |J| = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta,$$

$$\delta^{(3)}(\vec{r}') = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r) \delta(\theta) \delta(\phi),$$

posons

$$\delta^{(3)}(\vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r),$$

d'après l'équation (2.3) et le système (2.4), on obtient le système :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2E \right) G(r, r') = \delta^{(3)}(\vec{r}'), \\ \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2(E - V_0) \right) G(r, r') = \delta^{(3)}(\vec{r}'), \\ \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2E \right) G(r, r') = \delta^{(3)}(\vec{r}'). \end{cases} \quad (2.5)$$

## 2.1 Section A : $E > V_0$

### 2.1.1 Région ( $r, r' > b$ ) :

D'après le système (2.5) dans cette région on a l'équation :

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2E \right) G^{l,3,3}(r, r') = \frac{\delta(r-r')}{r^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) G^{l,3,3}(r, r') + r^2 \left( 2E - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) G^{l,3,3}(r, r') = \delta(r-r'),$$

on pose

$$G^{l,3,3}(r, r') = g_{l,3}(r) \quad \text{et} \quad r \neq r'$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) g_{l,3}(r) + r^2 \left( 2E - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_{l,3}(r) = \delta(r-r'),$$

$$2r \frac{\partial}{\partial r} g_{l,3}(r) + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} g_{l,3}(r) + r^2 \left( 2E - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_{l,3}(r) = \delta(r-r'),$$

on divise l'équation homogène par  $r^2$  on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} g_{l,3}(r) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} g_{l,3}(r) + \left( 2E - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_{l,3}(r) = 0, \quad (2.6)$$

on change le variable  $z = kr$  et  $k^2 = 2E$  on obtient

$$k^2 \frac{d^2}{dz^2} g_{l,3}(z) + \frac{2k^2}{z} \frac{d}{dz} g_{l,3}(z) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)k^2}{z^2} \right] g_{l,3}(z) = 0,$$

on divisant l'équation précédente sur  $k^2 \neq 0$  on obtient :

$$\frac{d^2}{dz^2} g_{l,3}(z) + \frac{2}{z} \frac{d}{dz} g_{l,3}(z) + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{z^2} \right] g_{l,3}(z) = 0, \quad (2.7)$$

l'équation (2.7) et l'équation de Bessel, qui admet deux solutions linéairement indépendantes notées  $j_{l,3}(kr)$  et  $\eta_{l,3}(kr)$ .

La fonction de Green correspondant à cette solutions définis par :

$$G^{l,3,3}(r, r') = \begin{cases} C(r') \left[ \eta_{l,3}(kr) - \beta j_{l,3}(kr) \right], & b < r < r' \\ D(r') j_{l,3}(kr), & r' < r < \infty \end{cases}$$

puisque il n'y a pas de réflexion d'onde on a :

$$\beta(r') = 0,$$

c-à-d :

$$G^{l,3,3}(r, r') = \begin{cases} C(r')\eta_{l,3}(kr), & b < r < r' \\ D(r')j_{l,3}(kr), & r' < r < \infty \end{cases}$$

d'après la continuité de la fonction de Green au point  $r = r'$  on obtient

$$G^{l,3,3}(r'_+, r') - G^{l,3,3}(r'_-, r') = 0,$$

alors

$$D(r')j_{l,3}(kr') - C(r')\eta_{l,3}(kr') = 0, \quad (2.8)$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport  $r$  de la fonction de Green au point  $r = r'$  on a :

$$\frac{d}{dr}G^{l,3,3}(r'_+, r') - \frac{d}{dr}G^{l,3,3}(r'_-, r') = \frac{1}{r'^2}, \quad (2.9)$$

d'où

$$kD(r')j'_{l,3}(kr') - kC(r')\eta'_{l,3}(kr') = \frac{1}{r'^2},$$

on divisant l'équation précédente sur  $k \neq 0$  on arrive :

$$C(r')\eta'_{l,3}(kr') - D(r')j'_{l,3}(kr') = -\frac{1}{kr'^2}, \quad (2.10)$$

d'après l'équation (2.8)

$$D(r') = \frac{C(r')\eta'_{l,3}(kr')}{j_{l,3}(kr')}, \quad (2.11)$$

en substituant (2.11) dans (2.10) on obtient :

$$C(r')\eta'_{l,3}(kr') - \frac{C(r')\eta_{l,3}(kr')}{j_{l,3}(kr')}j'_{l,3}(kr') = -\frac{1}{kr'^2},$$

alors

$$\frac{C(r')\left[\eta'_{l,3}(kr')j_{l,3}(kr') - \eta_{l,3}(kr')j'_{l,3}(kr')\right]}{j_{l,3}(kr')} = -\frac{1}{kr'^2}, \quad (2.12)$$

sachant que la wronskien est donné par

$$W[j_{l,3}(kr'), \eta_{l,3}(kr')] = j_{l,3}(kr')\eta'_{l,3}(kr') - \eta_{l,3}(kr')j'_{l,3}(kr') = \frac{1}{(kr')^2}, \quad (2.13)$$

d'après (2.13) et (2.12) on obtient :

$$\frac{C(r')}{(kr')^2} = -\frac{j_{l,3}(kr')}{kr'^2},$$

cela implique que

$$C(r') = -kj_{l,3}(kr'), \quad (2.14)$$

aussi, en substituant (2.14) dans (2.11) on obtient :

$$D(r') = -k\eta_{l,3}(kr'),$$

enfin

$$G^{l,3,3}(r, r') = \begin{cases} -k\eta_{l,3}(kr)j_{l,3}(kr'), & b \leq r \leq r' \\ -k\eta_{l,3}(kr')j_{l,3}(kr). & r' \leq r \leq \infty \end{cases} \quad (2.15)$$

### 2.1.2 Région ( $a \leq (r, r') \leq b$ ) :

D'après le système (2.5) dans cette région on a l'équation :

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2(E - V_0) \right) G^{l,2,2}(r, r') = \frac{\delta(r - r')}{r^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) G^{l,2,2}(r, r') + r^2 \left( 2(E - V_0) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) G^{l,2,2}(r, r') = \delta(r - r'),$$

on pose

$$G^{l,2,2}(r, r') = g_{l,3}(r) \quad \text{et} \quad r \neq r'$$

alors

$$2r \frac{\partial}{\partial r} g_{l,3}(r) + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} g_{l,3}(r) + r^2 \left( 2(E - V_0) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_{l,3}(r) = \delta(r - r'),$$

on divise l'équation homogène par  $r^2$  on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} g_{l,3}(r) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} g_{l,3}(r) + \left( 2(E - V_0) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_{l,3}(r) = 0,$$

on change le variable  $z = \mu r$  et  $\mu^2 = 2(E - V_0)$  on trouve

$$\mu^2 \frac{d^2}{dz^2} g_{l,3}(z) + \frac{2\mu^2}{z} \frac{d}{dz} g_{l,3}(z) + \left[ \mu^2 - \frac{l(l+1)\mu^2}{z^2} \right] g_{l,3}(z) = 0, \quad (2.16)$$

on divisant l'équation précédente sur  $\mu^2 \neq 0$  on obtient :

$$\frac{d^2}{dz^2} g_{l,3}(z) + \frac{2}{z} \frac{d}{dz} g_{l,3}(z) + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{z^2} \right] g_{l,3}(z) = 0, \quad (2.17)$$

l'équation (2.17) est une l'équation de Bessel, qui admet deux solutions linéairement indépendantes notées  $j_{l,3}(\mu r)$  et  $\eta_{l,3}(\mu r)$ .

La fonction de Green correspondant à cette solutions définis par :

$$G^{l,2,2}(r, r') = \begin{cases} A_2(r') \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \alpha j_{l,3}(\mu r) \right], & a \leq r \leq r' \\ B_2(r') \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \gamma j_{l,3}(\mu r) \right], & r' \leq r \leq b \end{cases}$$

d'après la continuité de la fonction de Green au point  $r = r'$

$$G^{l,2,2}(r'_+, r') - G^{l,2,2}(r'_-, r') = 0,$$

alors

$$B_1(r') \left[ \eta_{l,3}(\mu r') - \gamma j_{l,3}(\mu r') \right] - A_1(r') \left[ \eta_{l,3}(\mu r') - \alpha j_{l,3}(\mu r') \right] = 0,$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport  $r$  de la fonction de Green au point  $r = r'$  on a :

$$\frac{d}{dr} G^{l,2,2}(r'_+, r') - \frac{d}{dr} G^{l,2,2}(r'_-, r') = \frac{1}{r'^2},$$

d'où

$$\mu B_1(r') \left[ \eta'_{l,3}(\mu r') - \alpha j'_{l,3}(\mu r') \right] - \mu A_1(r') \left[ \eta'_{l,3}(\mu r') - \gamma j'_{l,3}(\mu r') \right] = \frac{1}{r'^2},$$

on divisant l'équation précédente sur  $\mu \neq 0$ , on donne :

$$B_1(r') \left[ \eta'_{l,3}(\mu r') - \alpha j'_{l,3}(\mu r') \right] - A_1(r') \left[ \eta'_{l,3}(\mu r') - \gamma j'_{l,3}(\mu r') \right] = \frac{1}{\mu r'^2},$$

sachant que la wronskien est donné par

$$W[j_{l,3}(\mu r'), \eta_{l,3}(\mu r')] = \frac{1}{(\mu r')^2}, \quad (2.18)$$

d'où

$$B_2(r') = \frac{\mu \left[ \eta_{l,3}(\mu r') - \alpha j_{l,3}(\mu r') \right]}{(\gamma - \alpha)},$$

et

$$A_2(r') = \frac{\mu \left[ \eta_{l,3}(\mu r') - \gamma j_{l,3}(\mu r') \right]}{(\gamma - \alpha)},$$

enfin

$$G^{l,2,2}(r, r') = \frac{1}{\gamma - \alpha} \begin{cases} \mu \left[ \eta_{l,3}(\mu r') - \gamma j_{l,3}(\mu r') \right] \left[ (\eta_{l,3}(\mu r) - \alpha j_{l,3}(\mu r)) \right], & a \leq r \leq r' \\ \mu \left[ \eta_{l,3}(\mu r') - \alpha j_{l,3}(\mu r') \right] \left[ (\eta_{l,3}(\mu r) - \gamma j_{l,3}(\mu r)) \right]. & r' \leq r \leq b \end{cases} \quad (2.19)$$

### 2.1.3 Région ( $r, r' < a$ ) :

D'après le système (2.5) dans cette région on a le même manière le région  $r, r' \geq b$

$$G^{l,1,1}(r, r') = \begin{cases} A_3(r') j_{l,3}(kr), & 0 \leq r \leq r' \\ B_3(r') \left[ \eta_{l,3}(kr) - \xi j_{l,3}(kr) \right], & r' \leq r \leq a \end{cases}$$

d'après la continuité de la fonction de Green au point  $r = r'$

$$G^{l,1,1}(r'_+, r') - G^{l,1,1}(r'_-, r') = 0,$$

alors

$$B_3(r') \eta_{l,3}(kr') - \left[ A_3(r') + \xi B_3(r') \right] j_{l,3}(kr') = 0,$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport  $r$  de la fonction de Green au point  $r = r'$  on a :

$$\frac{d}{dr} G^{l,1,1}(r'_+, r') - \frac{d}{dr} G^{l,1,1}(r'_-, r') = \frac{1}{r'^2},$$

par suite

$$B_3(r') \eta'_{l,3}(kr') - \left[ \xi A_3(r') + B_3(r') \right] j'_{l,3}(kr') = \frac{1}{kr'^2},$$

sachant que la wronskien est donné par

$$\begin{aligned} W[j_{l,3}(kr'), \eta_{l,3}(kr')] &= j'_{l,3}(kr') \eta_{l,3}(kr') - \eta'_{l,3}(kr') j_{l,3}(kr') \\ &= -\frac{1}{(kr')^2}, \end{aligned}$$

alors

$$B_3(r') = kj_{l,3}(kr'),$$

et

$$A_3(r') = k \left[ \eta_{l,3}(kr') - \xi j_{l,3}(kr') \right],$$

enfin

$$G^{l,1,1}(r, r') = \begin{cases} k \left[ \eta_{l,3}(kr') - \xi j_{l,3}(kr') \right] j_{l,3}(kr), & 0 \leq r \leq r' \\ kj_{l,3}(kr') \left[ \eta_{l,3}(kr) - \xi j_{l,3}(kr) \right], & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.20)$$

#### 2.1.4 Calcul des coefficients $\alpha$ et $\gamma$

Selon les conditions de Dirichet-Neuman de la fonction de Green au point  $r = r' = b$  on obtient

$$G^{l,2,2}(b_-, b) = G^{l,3,3}(b_+, b),$$

donc

$$\frac{\mu}{\gamma(b) - \alpha(b)} \left[ \eta_{l,3}(\mu b) - \alpha(b) j_{l,3}(\mu b) \right] \left[ \eta_{l,3}(\mu b) - \gamma(b) j_{l,3}(\mu b) \right] = -k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb), \quad (2.21)$$

et

$$\frac{d}{dr} G^{l,2,2}(b, r') \Big|_{r=b_-} = \frac{d}{dr} G^{l,3,3}(b, r') \Big|_{r=b_+},$$

d'où

$$\frac{\mu^2}{\gamma(b) - \alpha(b)} \left[ \eta_{l,3}(\mu b) - \alpha(b) j_{l,3}(\mu b) \right] \left[ \eta'_{l,3}(\mu b) - \gamma(b) j'_{l,3}(\mu b) \right] = -k^2 \eta'_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb), \quad (2.22)$$

on divise les équations (2.22) par (2.21) on donne :

$$\frac{\mu \left[ \eta'_{l,3}(\mu b) - \gamma(b) j'_{l,3}(\mu b) \right]}{\eta_{l,3}(\mu b) - \gamma(b) j_{l,3}(\mu b)} = \frac{k \eta'_{l,3}(kb)}{\eta_{l,3}(kb)},$$

alors

$$\gamma(b) \left[ \mu(b) \mu \eta_{l,3}(kb) j'_{l,3}(\mu b) - k j_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \right] = \mu \eta_{l,3}(kb) \eta'_{l,3}(\mu b) - k \eta_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb),$$

en suite

$$\gamma(b) = \frac{\mu \eta_{l,3}(kb) \eta'_{l,3}(\mu b) - k \eta_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb)}{\mu \eta_{l,3}(kb) j'_{l,3}(\mu b) - k j_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb)}, \quad (2.23)$$

d'après l'équation (2.21) on obtient :

$$\begin{aligned} & \alpha(b) \left[ k\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) + \mu j_{l,3}(\mu b) [\eta_{l,3}(\mu b) - \gamma(b)j_{l,3}(\mu b)] \right] \\ &= \gamma(b)k\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) + \mu\eta_{l,3}(\mu b) \left[ \eta_{l,3}(\mu b) - \gamma(b)j_{l,3}(\mu b) \right], \end{aligned}$$

donc

$$\alpha(b) = \frac{\gamma(b) \left[ k\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(\mu b)j_{l,3}(\mu b) \right] + \mu\eta_{l,3}^2(\mu b)}{k\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) + \mu j_{l,3}(\mu b)\eta_{l,3}(\mu b) - \gamma\mu j_{l,3}^2(\mu b)},$$

Posons

$$\alpha(b) = \frac{U(\mu, b, k)}{V(\mu, b, k)}, \quad (2.24)$$

telle que

$$\begin{cases} U = \gamma(b) \left[ k\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(\mu b)j_{l,3}(\mu b) \right] + \mu\eta_{l,3}^2(\mu b), \\ V = k\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) + \mu j_{l,3}(\mu b)\eta_{l,3}(\mu b) - \gamma\mu j_{l,3}^2(\mu b), \end{cases} \quad (2.25)$$

on pose  $\tau = \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) - k\eta'_{l,3}(kb)j_{l,3}(\mu b)$

en substituant (2.23) dans (2.25) on obtient :

$$\begin{cases} \tau U = \left[ \mu\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(\mu b) - k\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) \right] \left[ k\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(\mu b)j_{l,3}(\mu b) \right] \\ \quad + \mu\eta_{l,3}^2(\mu b) \left[ \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) - k\eta_{l,3}^2(kb)j_{l,3}(\mu b) \right], \\ \tau V = \left[ k\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) + \mu\eta_{l,3}(\mu b)j_{l,3}(\mu b) \right] \left[ \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) - k\eta_{l,3}^2(kb)j_{l,3}(\mu b) \right] \\ \quad - \left[ \mu\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(\mu b) - k\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) \right] \mu j_{l,3}^2(\mu b), \end{cases}$$

d'après certain calcule on a le système

$$\begin{cases} \tau U = \mu k\eta_{l,3}^2(kb)\eta'_{l,3}(\mu b)j_{l,3}(kb) - k^2\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb)\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) \\ \quad + \mu^2\eta_{l,3}(kb)\eta_{l,3}(\mu b) \left[ \eta_{l,3}(\mu b)j'_{l,3}(\mu b) - \eta'_{l,3}(\mu b)j_{l,3}(\mu b) \right], \\ \tau V = \mu k\eta_{l,3}^2(kb)j_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) - k^2\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb)j_{l,3}(\mu b) \\ \quad + \mu^2\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(\mu b) \left[ \eta_{l,3}(\mu b)j'_{l,3}(\mu b) - j_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(\mu b) \right], \end{cases} \quad (2.26)$$

sachant que la wronskien est donné par

$$W[j_{l,3}(\mu b), \eta_{l,3}(\mu b)] = j_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(\mu b) - \eta_{l,3}(\mu b)j'_{l,3}(\mu b) = \frac{1}{(\mu b)^2}, \quad (2.27)$$

et en substituant (2.27) dans (2.26) on obtient :

$$\begin{cases} \tau U = -\frac{1}{b^2}\eta_{l,3}(kb)\eta_{l,3}(\mu b) + \eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) \left[ \mu k\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(kb) - k^2\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) \right], \\ \tau V = -\frac{1}{b^2}\eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(\mu b) + \eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) \left[ \mu k\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) - k^2\eta'_{l,3}(kb)j_{l,3}(\mu b) \right], \end{cases} \quad (2.28)$$

enfin, la substituant (2.28) dans (2.24) on obtient :

$$\alpha(b) = \frac{-\eta_{l,3}(\mu b) + b^2j_{l,3}(kb) \left[ \mu k\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(kb) - k^2\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) \right]}{-j_{l,3}(\mu b) + b^2j_{l,3}(kb) \left[ \mu k\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) - k^2\eta'_{l,3}(kb)j_{l,3}(\mu b) \right]}, \quad (2.29)$$

## 2.1.5 Calcul de coefficient $\xi$

Selon les conditions de Dirichet-Neuman de la fonction de Green au point

$$r = r' = a$$

$$G^{l,1,1}(a_-, a) = G^{l,2,2}(a_+, a),$$

donc

$$\frac{kj_{l,3}(ka) \left[ \eta_{l,3}(ka) - \xi(a)j_{l,3}(ka) \right]}{\frac{\mu}{\gamma(a) - \alpha(a)} \left[ \eta_{l,3}(\mu a) - \gamma(a)j_{l,3}(\mu a) \right]} \left[ \eta_{l,3}(\mu a) - \alpha(a)j_{l,3}(\mu a) \right], \quad (2.30)$$

et

$$\frac{d}{dr}G^{l,1,1}(a, r')|_{r=a_-} = \frac{d}{dr}G^{l,2,2}(a, r')|_{r=a_+},$$

d'où

$$\frac{k^2j_{l,3}(ka) \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right]}{\frac{\mu^2}{\gamma(a) - \alpha(a)} \left[ \eta_{l,3}(\mu a) - \gamma(a)j_{l,3}(\mu a) \right]} \left[ \eta'_{l,3}(\mu a) - \alpha(a)j'_{l,3}(\mu a) \right], \quad (2.31)$$

on divise les équations (2.31) par (2.30) on trouve :

$$\frac{k \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right]}{\eta_{l,3}(ka) - \xi(a)j_{l,3}(ka)} = \frac{\mu \left[ \eta'_{l,3}(\mu a) - \alpha(a)j'_{l,3}(\mu a) \right]}{\eta_{l,3}(\mu a) - \alpha(a)j_{l,3}(\mu a)},$$

alors

$$\begin{aligned} & \xi \mu j_{l,3}(ka) \left[ \eta'_{l,3}(\mu a) - \xi \alpha(a)j'_{l,3}(\mu a) \right] - k j'_{l,3}(ka) \left[ \eta_{l,3}(\mu a) - \alpha(a)j_{l,3}(\mu a) \right] \\ &= \mu \eta_{l,3}(ka) \left[ \eta'_{l,3}(\mu a) - \alpha(a)j'_{l,3}(\mu a) \right] - k \eta'_{l,3}(ka) \left[ \eta_{l,3}(\mu a) - \alpha(a)j_{l,3}(\mu a) \right], \end{aligned}$$

par suite

$$\xi(a) = \frac{\mu\eta_{l,3}(ka)\eta'_{l,3}(\mu a) - \alpha(a)\mu\eta_{l,3}(ka)j'_{l,3}(\mu a) - k\eta'_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(\mu a) + \alpha(a)k\eta'_{l,3}(ka)j_{l,3}(\mu a)}{\mu j_{l,3}(ka)\eta'_{l,3}(\mu a) - \alpha(a)\mu j_{l,3}(ka)j'_{l,3}(\mu a) - k j'_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(\mu a) + \alpha(a)k j'_{l,3}(ka)j_{l,3}(\mu a)} \\ = \frac{\alpha(a)(k\eta'_{l,3}(ka)j_{l,3}(\mu a) - \mu\eta_{l,3}(ka)j'_{l,3}(\mu a)) + \mu\eta_{l,3}(ka)\eta'_{l,3}(\mu a) - k\eta'_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(\mu a)}{\alpha(a)(k j'_{l,3}(ka)j_{l,3}(\mu a) - \mu j_{l,3}(ka)j'_{l,3}(\mu a)) + \mu j_{l,3}(ka)\eta'_{l,3}(\mu a) - k j'_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(\mu a)},$$

Posons

$$\xi(a) = \frac{Z(\mu, k, a)}{w(\mu, k, a)}, \quad (2.32)$$

d'après le calcul précédent la formule (2.29)s'exprime

$$\alpha(a) = \frac{-\eta_{l,3}(\mu a) + a^2 j_{l,3}(ka) \left[ \mu k \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) - k^2 \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) \right]}{-j_{l,3}(\mu a) + a^2 j_{l,3}(ka) \left[ \mu k \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) - k^2 \eta'_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) \right]}, \quad (2.33)$$

en substituant (2.33) dans (2.32) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} V(a)Z = \left[ -j_{l,3}(\mu a) + a^2 j_{l,3}(ka) \left( \mu k \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) - k^2 \eta'_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) \right) \right] \\ \left[ \mu \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) - k \eta'_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a) \right] - \left[ \eta_{l,3}(\mu a) - a^2 j_{l,3}(ka) \left( \mu k \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \right. \right. \\ \left. \left. - k^2 \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) \right) \right] \left[ k \eta'_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) - \mu \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) \right], \\ V(a)w = \left[ -\eta_{l,3}(\mu a) + a^2 j_{l,3}(ka) \left( \mu k \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) - k^2 \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) \right) \right] \\ \left[ (k j'_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) - \mu j_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a)) \right] - \left[ j_{l,3}(\mu a) - a^2 j_{l,3}(ka) \left( \mu k \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) \right. \right. \\ \left. \left. - k^2 \eta'_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) \right) \right] \left[ (\mu j_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) - k j'_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a)) \right], \end{array} \right.$$

d'après certain calcule on a le système

$$\left\{ \begin{array}{l} V(a)Z = \mu \eta_{l,3}(ka) \left[ -W[j_{l,3}(\mu a), \eta_{l,3}(\mu a)] \right] + a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \times \\ W[j_{l,3}(\mu a), \eta_{l,3}(\mu a)] + a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \left[ -W[j_{l,3}(\mu a), \eta_{l,3}(\mu a)] \right], \\ V(a)w = \mu j_{l,3}(ka) \left[ -W[j_{l,3}(\mu a), \eta_{l,3}(\mu a)] \right] + a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(ka) \times \\ W[j_{l,3}(\mu a), \eta_{l,3}(\mu a)] + a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \left[ -W[j_{l,3}(\mu a), \eta_{l,3}(\mu a)] \right], \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} V(a)Z = -\frac{1}{\mu a^2} \eta_{l,3}(ka) + \frac{k^2}{\mu} j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) - \frac{k^2}{\mu} j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka), \\ V(a)w = -\frac{1}{\mu a^2} j_{l,3}(ka) + \frac{\mu}{k^2} j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(ka) - \frac{k^2}{\mu} j_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka), \end{array} \right.$$

alors

$$\xi(a) = \frac{-\eta_{l,3}(ka)}{-j_{l,3}(ka) + a^2 k^2 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(ka) - a^2 k^2 j_{l,3}^2(ka) \eta'_{l,3}(ka)}, \quad (2.34)$$

d'après, la substitution des expressions de  $\xi(a)$ ,  $\alpha(b)$  et  $\gamma(b)$  dans les systèmes (2.15), (2.19) et (2.20) respectivement, on trouve :

$$G^{l,3,3}(r, r') = -k \begin{cases} \eta_{l,3}(kr) j_{l,3}(kr'), & b \leq r \leq r' \\ \eta_{l,3}(kr') j_{l,3}(kr), & r' \leq r \leq \infty \end{cases}$$

et

$$G^{l,2,2}(r, r') = \frac{\mu}{T} \begin{cases} j_{l,3}(\mu r) \left[ \eta_{l,3}(\mu r') - \frac{c}{t} j_{l,3}(\mu r') \right] \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \frac{c_1}{t_1} \right], & a \leq r \leq r' \\ \left[ \eta_{l,3}(\mu r') - \frac{c_1}{t_1} j_{l,3}(\mu r') \right] \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \frac{c}{t} j_{l,3}(\mu r) \right], & r' \leq r \leq b \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} c &= \mu \eta_{l,3}(kb) \eta'_{l,3}(\mu b) - k \eta_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \\ t &= \mu \eta_{l,3}(kb) j'_{l,3}(\mu b) - k j_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \\ c_1 &= -\eta_{l,3}(\mu b) + b^2 j_{l,3}(kb) [\mu k \eta_{l,3}(kb) \eta'_{l,3}(kb) - k^2 \eta_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb)] \\ t_1 &= -j_{l,3}(\mu b) + b^2 j_{l,3}(kb) [\mu k \eta_{l,3}(kb) j'_{l,3}(\mu b) - k^2 \eta'_{l,3}(kb) j_{l,3}(\mu b)] \\ T &= \gamma(b) - \alpha(b), \end{aligned}$$

aussi

$$G^{l,1,1}(r, r') = k \begin{cases} j_{l,3}(kr) \left[ \frac{j_{l,3}(kr') \eta_{l,3}(ka)}{m} + \eta_{l,3}(kr') \right], & 0 \leq r \leq r' \\ j_{l,3}(kr') \left[ \frac{j_{l,3}(kr) \eta_{l,3}(ka)}{m} + \eta_{l,3}(kr) \right], & r' \leq r \leq a \end{cases}$$

où

$$m = -j_{l,3}(ka) + a^2 k^2 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(ka) - a^2 k^2 j_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka)$$

## 2.1.6 Région Mixte

1) Région  $a \leq r \leq b \leq r'$  :

$$G^{l,2,3}(r, r') = H_1(\mu r) Z_1(kr'),$$

où

$$H_1(\mu r) = \frac{1}{\gamma_1 - \alpha_1} \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \gamma_1 j_{l,3}(\mu r) \right],$$

et

$$Z_1(kr') = -k j_{l,3}(kr'),$$

donc

$$G^{l,2,3}(r, r') = \frac{-k}{\gamma_1 - \alpha_1} \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \gamma_1 j_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'),$$

d'après le condition de Dirichlet de la fonction de Green au point  $r = b$

$$G^{l,2,3}(b, r')|_{r'=b} = G^{l,3,3}(b, r')|_{r'=b},$$

$\implies$

$$\frac{-k}{\gamma_1 - \alpha_1} \left[ \eta_{l,3}(\mu b) - \gamma_1 j_{l,3}(\mu b) \right] j_{l,3}(kb) = -k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb), \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{dr} G^{l,2,3}(b, r')|_{r'=b} = \frac{d}{dr} G^{l,3,3}(b, r')|_{r'=b},$$

alors

$$\frac{-k\mu}{\gamma_1 - \alpha_1} \left[ \eta'_{l,3}(\mu b) - \gamma_1 j'_{l,3}(\mu b) \right] j_{l,3}(kb) = -k^2 \eta'_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb), \quad (2.36)$$

on divise l'équation (2.36) par (2.35) on trouve :

$$\frac{\mu \left[ \eta'_{l,3}(\mu b) - \gamma_1 j'_{l,3}(\mu b) \right]}{\eta_{l,3}(\mu b) - \gamma_1 j_{l,3}(\mu b)} = \frac{k \eta'_{l,3}(kb)}{\eta_{l,3}(kb)},$$

par suite

$$\mu \eta_{l,3}(kb) \eta'_{l,3}(\mu b) - \gamma_1 \mu \eta_{l,3}(kb) j'_{l,3}(\mu b) = k \eta_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) - \gamma_1 k j_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb),$$

donc

$$\gamma_1(b) = \frac{k \eta_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) - \mu \eta_{l,3}(kb) \eta'_{l,3}(\mu b)}{k j_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) - \mu \eta_{l,3}(kb) j'_{l,3}(\mu b)}, \quad (2.37)$$

selon l'équation (2.35)

$$\eta_{l,3}(\mu b) - \gamma_1 j_{l,3}(\mu b) = (\gamma_1 - \alpha_1) \eta_{l,3}(kb),$$

alors

$$\alpha_1(b) = \frac{\gamma_1 \left[ \eta_{l,3}(\mu b) - j_{l,3}(\mu b) \right] - \eta_{l,3}(\mu b)}{\eta_{l,3}(kb)}, \quad (2.38)$$

en substituant (2.37) dans (2.38) on obtient :

$$\alpha_1(a) = \frac{\left[ k\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(\mu b) \right] \left[ \eta_{l,3}(\mu b) - j_{l,3}(\mu b) \right]}{\eta_{l,3}(kb) \left[ kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) \right]} - \frac{kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) - \left[ kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) \right] \eta_{l,3}(\mu b)}{\eta_{l,3}(kb) \left[ kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) \right]},$$

donc

$$\alpha_1(a) = \frac{\eta_{l,3}(kb) \left[ k\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(\mu b) + \mu W[j_{l,3}(\mu b), \eta_{l,3}(\mu b)] \right]}{\eta_{l,3}(kb) \left[ kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) \right]},$$

d'où

$$\alpha_1(a) = \frac{k\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(\mu b) - \frac{1}{\mu b^2}}{kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b)},$$

et

$$\gamma_1 - \alpha_1 = \frac{1}{\mu b^2 \left[ kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) \right]},$$

alors

$$G^{l,2,3}(r, r') = -k\mu b^2 \left[ kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) \right] \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \frac{k\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(\mu b)}{kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b)} j_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'),$$

enfin

$$G^{l,2,3}(r, r') = -k\mu b^2 \left[ \left( kj_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)j'_{l,3}(\mu b) \right) \eta_{l,3}(\mu r) - \left( k\eta_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)\eta'_{l,3}(\mu b) \right) j_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'),$$

**Remarque 2.1.1.** Pour la région  $\leq r' \leq b \leq r$  le même calcul le cas précédent conduit à la fonction de Green  $G^{l,2,3}(r, r')$

**2) Région  $0 \leq r' \leq a \leq r \leq b$  :**

$$G^{l,2,1}(r, r') = H_2(\mu r) Z_2(kr'),$$

ou

$$H_2(\mu r) = \frac{1}{\gamma_2 - \alpha_2} \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \alpha_2 j_{l,3}(\mu r) \right],$$

et

$$Z_2(kr') = k j_{l,3}(kr'),$$

donc

$$G^{l,2,1}(r, r') = \frac{k}{\gamma_2 - \alpha_2} \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \alpha_2 j_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'),$$

d'après le condition de Dirichlet de la fonction de Green au point  $r = a$

$$G^{l,2,1}(a, r')|_{r'=a} = G^{l,1,1}(a, r')|_{r'=a},$$

$$\frac{k}{\gamma_2 - \alpha_2} \left[ \eta_{l,3}(\mu a) - \alpha_2 j_{l,3}(\mu a) \right] j_{l,3}(ka) = k j_{l,3}(ka) \left[ \eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka) \right], \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dr} G^{l,2,1}(a, r')|_{r'=a} = \frac{d}{dr} G^{l,1,1}(a, r')|_{r'=a},$$

alors

$$\frac{k\mu}{\gamma_2 - \alpha_2} \left[ \eta'_{l,3}(\mu a) - \alpha_2 j'_{l,3}(\mu a) \right] j_{l,3}(ka) = k^2 j_{l,3}(ka) \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right], \quad (2.40)$$

on divise l'équation (2.40) par (2.39) on trouve :

$$\frac{\mu \left[ \eta'_{l,3}(\mu a) - \alpha_2 j'_{l,3}(\mu a) \right]}{\eta_{l,3}(\mu a) - \alpha_2 j_{l,3}(\mu a)} = \frac{k \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right]}{\eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka)},$$

par suite

$$\begin{aligned} & \mu \eta'_{l,3}(\mu a) \left[ \eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka) \right] - \alpha_2 \mu j'_{l,3}(\mu a) \left[ \eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka) \right] \\ &= k \eta_{l,3}(\mu a) \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right] - k \alpha_2 j_{l,3}(\mu a) \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \left[ k j_{l,3}(\mu a) \left( \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right) - \mu j'_{l,3}(k\mu) \left( \eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka) \right) \right] \\ &= k \eta_{l,3}(\mu a) \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right] - \mu \eta'_{l,3}(\mu a) \left[ \eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka) \right], \end{aligned}$$

alors

$$\alpha_2 = \frac{\xi \left[ \mu \eta'_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) - k \eta_{l,3}(\mu a) j'_{l,3}(ka) \right] + k \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) - \mu \eta'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka)}{\xi \left[ \mu j_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) - k j_{l,3}(\mu a) j'_{l,3}(ka) \right] + k j_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) - \mu j'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka)}, \quad (2.41)$$

Posons

$$\alpha_2 = \frac{M(\mu, k, a)}{N(\mu, k, a)},$$

en substitution  $M$  dans (2.34) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} wM = a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) + a^2 k^3 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \times \\ \eta_{l,3}(\mu a) j'_{l,3}(ka) - a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka) - a^2 k^3 j_{l,3}^2(ka) \times \\ \eta'_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) - \mu \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) + k \eta_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a) \times \\ j'_{l,3}(ka) - k j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) + \mu j_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka), \\ \\ wN = a^2 k^3 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a) j'_{l,3}(ka) - a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(ka) \times \\ \eta'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka) - a^2 k^3 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) j'_{l,3}(ka) + a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \times \\ \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) - \mu \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) + k \eta_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) \times \\ j'_{l,3}(ka) - k j_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) + \mu j_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka), \end{array} \right.$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} wM = k \eta_{l,3}(\mu a) \left[ -W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right] + a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) \times \\ W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] + a^2 k^3 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) \left[ -W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right], \\ \\ wN = k j_{l,3}(\mu a) \left[ -W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right] + a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) \times \\ W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] + a^2 k^3 j_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) \left[ -W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right], \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} wM = -\frac{1}{ka^2} \eta_{l,3}(\mu a) + \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) - k j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka), \\ \\ wN = -\frac{1}{ka^2} j_{l,3}(\mu a) + \mu \eta_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) - k j_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka), \end{array} \right. \quad (2.42)$$

alors, la substituant (2.42) dans (2.41) on obtient :

$$\alpha_2 = \frac{-\eta_{l,3}(\mu a) + a^2 k \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) - a^2 k^2 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka)}{-j_{l,3}(\mu a) + a^2 k \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) - a^2 k^2 j_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka)}, \quad (2.43)$$

d'après l'équation (2.39)

$$\gamma_2 - \alpha_2 = \frac{\eta_{l,3}(\mu a) - \alpha_2 j_{l,3}(\mu a)}{\eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka)},$$

d'où

$$\gamma_2 - \alpha_2 = \frac{\eta_{l,3}(\mu a) - \frac{M}{N} j_{l,3}(\mu a)}{\eta_{l,3}(ka) - \frac{Z}{w} j_{l,3}(ka)},$$

alors

$$\gamma_2 - \alpha_2 = \frac{\left( N\eta_{l,3}(\mu a) - Mj_{l,3}(\mu a) \right) w}{\left( w\eta_{l,3}(ka) - Zj_{l,3}(ka) \right) N},$$

posons

$$\gamma_2 - \alpha_2 = \frac{X(\mu, a, k)}{Y(\mu, a, k)}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} X &= (N\eta_{l,3}(\mu a) - Mj_{l,3}(\mu a))w \\ &= \left[ -\eta_{l,3}(\mu a)j_{l,3}(\mu a) + a^2 k \mu \eta_{l,3}(\mu a)j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka)j'_{l,3}(\mu a) - a^2 k^2 \eta_{l,3}(\mu a)j_{l,3}(ka) \times \right. \\ &\quad \left. j_{l,3}(\mu a)\eta'_{l,3}(ka) + \eta_{l,3}(\mu a)j_{l,3}(\mu a) - a^2 k \mu j_{l,3}(\mu a)j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka)\eta'_{l,3}(\mu a) \right. \\ &\quad \left. + a^2 k^2 j_{l,3}(\mu a)j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(\mu a)\eta'_{l,3}(ka) \right] w \\ &= \left[ a^2 k \mu j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka) \left( -W[j_{l,3}(\mu a), \eta_{l,3}(\mu a)] \right) \right] w, \end{aligned}$$

donc

$$X = -\frac{k}{\mu} j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka)w, \quad (2.45)$$

et

$$\begin{aligned} Y &= \left[ w\eta_{l,3}(ka) - Zj_{l,3}(ka) \right] N \\ &= \left[ -\eta_{l,3}(ka)j_{l,3}(ka) + a^2 k^2 \eta_{l,3}(ka)j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka)j'_{l,3}(ka) \right. \\ &\quad \left. - a^2 k^2 \eta_{l,3}(ka)j_{l,3}(ka)j_{l,3}(ka)\eta'_{l,3}(ka) + j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka) \right] N \\ &= \left[ a^2 k^2 j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka) \left( -w[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right) \right] N, \end{aligned}$$

alors

$$Y = -j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka)N, \quad (2.46)$$

d'après les équations (2.45) et (2.46), on a :

$$\gamma_2 - \alpha_2 = \frac{-\frac{k}{\mu} j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka)w}{-j_{l,3}(ka)\eta_{l,3}(ka)N},$$

afin que

$$\gamma_2 - \alpha_2 = \frac{k w}{\mu N}, \quad (2.47)$$

donc

$$G^{l,2,1}(r, r') = \frac{k}{\gamma_2 - \alpha_2} \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \alpha_2 j_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'),$$

alors

$$G^{l,2,1}(r, r') = \frac{k}{T_1} \left[ \eta_{l,3}(\mu r) - \frac{m_1}{m_2} \right] j_{l,3}(kr'),$$

où

$$\begin{aligned} m_1 = & \eta_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(\mu r) - a^2 k \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(\mu r) \\ & + a^2 k^2 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu r), \end{aligned}$$

et

$$m_2 = j_{l,3}(\mu a) - a^2 k \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(\mu a) + a^2 k^2 j_{l,3}(ka) j_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka),$$

avec

$$T_1 = \gamma_2 - \alpha_2,$$

**Remarque 2.1.2.** Pour la région  $r \leq a \leq r' \leq b$  a un calcul similaire au calcul précédent conduit à la fonction de Green  $G^{l,2,1}(r, r')$ .

## 2.2 Section B : $0 < E < V_0$

### 2.2.1 Région ( $r, r' > b$ ) :

Puisque il n'est y a pas de changement dans cette région entre le deux section (A,B) on a admit le résultat de section A

$$G^{l,3,3}(r, r') = \begin{cases} -k \eta_{l,3}(kr) j_{l,3}(kr'), & b \leq r \leq r' \\ -k \eta_{l,3}(kr') j_{l,3}(kr), & r' \leq r \leq \infty \end{cases} \quad (2.48)$$

## 2.2.2 Région ( $a \leq (r, r') \leq b$ ) :

D'après l'équation (2.16)

Posons  $\mu'^2 = -\mu^2$  ou  $\mu^2 = 2(E - V_0) > 0$  et  $\mu' = i\mu$ , on a :

$$\mu^2 \frac{d^2}{dz^2} g_{l,3}(z) + \frac{2\mu^2}{z} \frac{d}{dz} g_{l,3}(z) - \left[ \mu^2 + \frac{l(l+1)\mu^2}{z^2} \right] g_{l,3}(z) = 0,$$

cette équation est une équation de Bessel modifier, qui admet deux solutions linéairement indépendantes notées  $i_{l,3}(\mu r)$  et  $k_{l,3}(\mu r)$  :

$$i_{l,3}(\mu r) = j_{l,3}(i\mu r),$$

$$k_{l,3}(\mu r) = \eta_{l,3}(i\mu r),$$

La fonction de Green correspondant à cette solutions définis par :

$$G_1^{l,2,2}(r, r') = \begin{cases} A_2(r') \left[ k_{l,3}(\mu r) - \alpha_3 i_{l,3}(\mu r) \right], & a \leq r \leq r' \\ B_2(r') \left[ k_{l,3}(\mu r) - \gamma_3 i_{l,3}(\mu r) \right], & r' \leq r \leq b \end{cases}$$

d'après la continuité de la fonction de Green au point  $r = r'$  on arrive

$$G_1^{l,2,2}(r'_+, r') - G_1^{l,2,2}(r'_-, r') = 0,$$

alors

$$B_2(r') \left[ k_{l,3}(\mu r') - \gamma_3 i_{l,3}(\mu r') \right] - A_2(r') \left[ k_{l,3}(\mu r') - \alpha_3 i_{l,3}(\mu r') \right] = 0,$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport  $r$  de la fonction de Green au point  $r = r'$  on a :

$$\frac{d}{dr} G_1^{l,2,2}(r'_+, r') - \frac{d}{dr} G_1^{l,2,2}(r'_-, r') = \frac{1}{r'^2},$$

d'où

$$\mu B_2(r') \left[ k'_{l,3}(\mu r') - \alpha_3 i'_{l,3}(\mu r') \right] - \mu A_2(r') \left[ k'_{l,3}(\mu r') - \gamma_3 i'_{l,3}(\mu r') \right] = \frac{1}{r'^2},$$

on divisant l'équation précédente sur  $\mu \neq 0$  et on obtient :

$$B_2(r') \left[ k'_{l,3}(\mu r') - \alpha_3 i'_{l,3}(\mu r') \right] - A_2(r') \left[ k'_{l,3}(\mu r') - \gamma_3 i'_{l,3}(\mu r') \right] = \frac{1}{\mu r'^2},$$

sachant que la wronskien est donné par

$$W \left[ (k_{l,3}(\mu r') - \gamma_3 i_{l,3}(\mu r')), (k_{l,3}(\mu r') - \alpha_3 i_{l,3}(\mu r')) \right] = \frac{(\gamma_3 - \alpha_3)}{(\mu r')^2},$$

alors

$$B_2(r') = \frac{\mu(k_{l,3}(\mu r') - \alpha_3 i_{l,3}(\mu r'))}{(\alpha_3 - \gamma_3)},$$

et

$$A_2(r') = \frac{\mu(k_{l,3}(\mu r') - \gamma_3 i_{l,3}(\mu r'))}{(\alpha_3 - \gamma_3)},$$

enfin

$$G_1^{l,2,2}(r, r') = \begin{cases} \frac{\mu [k_{l,3}(\mu r') - \gamma_3 i_{l,3}(\mu r')]}{(\alpha_3 - \gamma_3)} [k_{l,3}(\mu r) - \alpha_3 i_{l,3}(\mu r)], & a \leq r \leq r' \\ \frac{\mu [k_{l,3}(\mu r') - \alpha_3 i_{l,3}(\mu r')]}{(\alpha_3 - \gamma_3)} [k_{l,3}(\mu r) - \gamma_3 i_{l,3}(\mu r)], & r' \leq r \leq b \end{cases} \quad (2.49)$$

### 2.2.3 Région ( $0 \leq r, r' \leq a$ ) :

Puisque  $\xi$  ne dépend pas de  $\mu$ , donc  $G_1^{l,1,1}(r, r') \equiv G^{l,1,1}(r, r')$

$$G_1^{l,1,1}(r, r') = \begin{cases} k [\eta_{l,3}(kr') - \xi j_{l,3}(kr')] j_{l,3}(kr), & 0 \leq r \leq r' \\ k j_{l,3}(kr') [\eta_{l,3}(kr) - \xi_1 j_{l,3}(kr)], & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.50)$$

### 2.2.4 Calcul des coefficients $\alpha_3$ et $\gamma_3$

Selon les conditions de Dirichet-Neuman de la fonction de Green au point  $r = r' = b$ , on obtient

$$G_1^{l,2,2}(b_-, b) = G_1^{l,3,3}(b_+, b),$$

donc

$$\frac{\mu}{\gamma_3(b) - \alpha_3(b)} [k_{l,3}(\mu b) - \alpha_3(b) i_{l,3}(\mu b)] [k_{l,3}(\mu b) - \gamma_3(b) i_{l,3}(\mu b)] = -k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb), \quad (2.51)$$

et

$$\frac{d}{dr} G_1^{l,2,2}(b, r')|_{r=b_-} = \frac{d}{dr} G_1^{l,3,3}|_{r=b_+},$$

d'où

$$\frac{\mu^2}{\gamma_3(b) - \alpha_3(b)} [k_{l,3}(\mu b) - \alpha_3(b) i_{l,3}(\mu b)] [k'_{l,3}(\mu b) - \gamma_3(b) i'_{l,3}(\mu b)] = -k^2 \eta'_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb), \quad (2.52)$$

on divise les équations (2.52) par (2.51) on trouve :

$$\frac{\mu [k'_{l,3}(\mu b) - \gamma_3(b) i'_{l,3}(\mu b)]}{k_{l,3}(\mu b) - \gamma_3(b) i_{l,3}(\mu b)} = \frac{k \eta'_{l,3}(kb)}{\eta_{l,3}(kb)},$$

alors

$$\gamma_3(b) \left[ \mu(b) \mu \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k i_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \right] = \mu \eta_{l,3}(kb) k'_{l,3}(\mu b) - k k_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb),$$

en suite

$$\gamma_3(b) = \frac{\mu \eta_{l,3}(kb) k'_{l,3}(\mu b) - k k_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb)}{\mu \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k i_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb)}, \quad (2.53)$$

d'après l'équation (2.51)

$$\begin{aligned} & \mu \left[ k_{l,3}(\mu b) - \alpha_3(b) i_{l,3}(\mu b) \right] \left[ k_{l,3}(\mu b) - \gamma_3(b) i_{l,3}(\mu b) \right] \\ &= \gamma_3(b) k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb) - \alpha_3(b) k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \alpha_3(b) \left[ k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb) - \mu i_{l,3}(\mu b) \left( k_{l,3}(\mu b) - \gamma_3(b) i_{l,3}(\mu b) \right) \right] &= \gamma_3(b) k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb) \\ & - \mu k_{l,3}(\mu b) \left[ k_{l,3}(\mu b) - \gamma_3(b) i_{l,3}(\mu b) \right], \end{aligned}$$

enfin

$$\alpha_3(b) = \frac{\gamma_3(b) [k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb) + \mu k_{l,3}(\mu b) i_{l,3}(\mu b)] - \mu k_{l,3}^2(\mu b)}{k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb) - \mu i_{l,3}(\mu b) k_{l,3}(\mu b) + \gamma_3 \mu i_{l,3}^2(\mu b)},$$

on pose

$$\alpha_3(b) = \frac{U_1(\mu, b, k)}{V_1(\mu, b, k)}, \quad (2.54)$$

posons aussi  $\tau_1 = \mu \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k \eta'_{l,3}(kb) i_{l,3}(\mu b)$ ,

en substituant (2.53) dans (2.54) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 U_1 = \left[ \mu \eta_{l,3}(kb) k'_{l,3}(\mu b) - k k_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \right] \left[ k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb) + \mu k_{l,3}(\mu b) i_{l,3}(\mu b) \right] \\ \quad - \mu k_{l,3}^2(\mu b) \left[ \mu \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k \eta'_{l,3}(kb) i_{l,3}(\mu b) \right], \\ \tau_1 V_1 = \left[ k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb) - \mu k_{l,3}(\mu b) i_{l,3}(\mu b) \right] \left[ \mu \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k \eta'_{l,3}(kb) i_{l,3}(\mu b) \right] \\ \quad + \left[ \mu \eta_{l,3}(kb) j'_{l,3}(\mu b) - k k_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \right] \mu i_{l,3}^2(\mu b), \end{array} \right.$$

d'après certain calcul on a le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 U_1 = \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb) \left[ \mu k \eta_{l,3}(kb) k'_{l,3}(\mu b) - k^2 k_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \right] \\ \quad + \mu^2 \eta_{l,3}(kb) k_{l,3}(\mu b) W[i_{l,3}(\mu b), k_{l,3}(\mu b)], \\ \tau_1 V_1 = \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb) \left[ \mu k \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k^2 \eta'_{l,3}(kb) i_{l,3}(\mu b) \right] \\ \quad + \mu^2 \eta_{l,3}(kb) i_{l,3}(\mu b) W[i_{l,3}(\mu b), k_{l,3}(\mu b)], \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{cases} \tau_1 U_1 = \eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) \left[ \mu k \eta_{l,3}(kb) k'_{l,3}(\mu b) - k^2 k_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \right] \\ \quad - \frac{1}{b^2} \eta_{l,3}(kb) k_{l,3}(\mu b), \\ \tau_1 V_1 = \eta_{l,3}(kb)j_{l,3}(kb) \left[ \mu k \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k^2 \eta'_{l,3}(kb) i_{l,3}(\mu b) \right] \\ \quad - \frac{1}{b^2} \eta_{l,3}(kb) i_{l,3}(\mu b), \end{cases} \quad (2.55)$$

enfin, la substituant (2.55) dans (2.54) on obtient :

$$\alpha_3(b) = \frac{-k_{l,3}(\mu b) + b^2 j_{l,3}(kb) \left[ \mu k \eta_{l,3}(kb) k'_{l,3}(\mu b) - k^2 k_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \right]}{-i_{l,3}(\mu b) + b^2 j_{l,3}(kb) \left[ \mu k \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k^2 \eta'_{l,3}(kb) i_{l,3}(\mu b) \right]}, \quad (2.56)$$

### 2.2.5 Région ( $0 \leq r, r' \leq a$ ) :

Puisque  $\xi$  ne dépend pas de  $\mu$  , donc  $G_1^{l,1,1}(r, r') \equiv G^{l,1,1}(r, r')$

$$G^{l,1,1}(r, r') = \begin{cases} k \left[ \eta_{l,3}(kr') - \xi j_{l,3}(kr') \right] j_{l,3}(kr), & 0 \leq r \leq r' \\ k j_{l,3}(kr') \left[ \eta_{l,3}(kr) - \xi j_{l,3}(kr) \right], & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.57)$$

alors, la substitution des expressions de  $\xi(a)$  ,  $\alpha_3(b)$  et  $\gamma_3(b)$  dans les systèmes (2.15),(2.19) et (2.20) respectivement, on trouve :

$$G^{l,3,3}(r, r') = -k \begin{cases} \eta_{l,3}(kr) j_{l,3}(kr'), & b \leq r \leq r' \\ \eta_{l,3}(kr') j_{l,3}(kr), & r' \leq r \leq \infty \end{cases}$$

et

$$G^{l,2,2}(r, r') = \frac{1}{T} \begin{cases} \mu \left[ k_{l,3}(\mu r') - \frac{m_3}{m_4} i_{l,3}(\mu r') \right] \left[ k_{l,3}(\mu r) - \frac{m_5}{m_6} i_{l,3}(\mu r) \right], & a \leq r \leq r' \\ \mu \left[ k_{l,3}(\mu r') - \frac{m_5}{m_6} i_{l,3}(\mu r') \right] \left[ k_{l,3}(\mu r) - \frac{m_3}{m_4} i_{l,3}(\mu r) \right], & r' \leq r \leq b \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} m_3 &= \mu \eta_{l,3}(kb) k'_{l,3}(\mu b) - k k_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \\ m_4 &= \mu \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k i_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \\ m_5 &= -k_{l,3}(\mu b) + b^2 j_{l,3}(kb) \left[ \mu k \eta_{l,3}(kb) k'_{l,3}(kb) - k^2 k_{l,3}(\mu b) \eta'_{l,3}(kb) \right] \\ m_6 &= -i_{l,3}(\mu b) + b^2 j_{l,3}(kb) \left[ \mu k \eta_{l,3}(kb) i'_{l,3}(\mu b) - k^2 \eta'_{l,3}(kb) i_{l,3}(\mu b) \right] \end{aligned}$$

et

$$T = \alpha_3(b) - \gamma_3(b),$$

aussi

$$G^{l,1,1}(r, r') = \begin{cases} \left[ \frac{j_{l,3}(kr')\eta_{l,3}(ka)}{m} + \eta_{l,3}(kr') \right] k j_{l,3}(kr), & 0 \leq r \leq r' \\ \left[ \frac{j_{l,3}(kr)\eta_{l,3}(ka)}{m} + \eta_{l,3}(kr) \right] k j_{l,3}(kr'), & r' \leq r \leq a \end{cases}$$

## 2.2.6 Région Mixte

1) Région  $a \leq r \leq b \leq r'$  :

$$G_1^{l,2,3}(r, r') = H_3(\mu r) Z_3(kr'),$$

et

$$H_3(\mu r) = \frac{1}{\alpha_4 - \gamma_4} \left[ k_{l,3}(\mu r) - \gamma_4 i_{l,3}(\mu r) \right],$$

où

$$Z_3(kr') = -k j_{l,3}(kr'),$$

donc

$$G_1^{l,2,3}(r, r') = \frac{-k}{\alpha_4 - \gamma_4} \left[ k_{l,3}(\mu r) - \gamma_4 i_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'),$$

d'après le condition de Dirichlet de la fonction de Green au point  $r = b$

$$G_1^{l,2,3}(b, r')|_{r'=b} = G_1^{l,3,3}(b, r')|_{r'=b},$$

$\implies$

$$\frac{-k}{\alpha_4 - \gamma_4} \left[ k_{l,3}(\mu b) - \gamma_4 i_{l,3}(\mu b) \right] j_{l,3}(kb) = -k \eta_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb), \quad (2.58)$$

$$\frac{d}{dr} G_1^{l,2,3}(b, r')|_{r'=b} = \frac{d}{dr} G_1^{l,3,3}(b, r')|_{r'=b},$$

alors

$$\frac{-k\mu}{\alpha_4 - \gamma_4} \left[ k'_{l,3}(\mu b) - \gamma_4 i'_{l,3}(\mu b) \right] j_{l,3}(kb) = -k^2 \eta'_{l,3}(kb) j_{l,3}(kb), \quad (2.59)$$

on divise l'équation (2.59) par (2.58) on trouve :

$$\frac{\mu \left[ k'_{l,3}(\mu b) - \gamma_4 i'_{l,3}(\mu b) \right]}{k_{l,3}(\mu b) - \gamma_4 i_{l,3}(\mu b)} = \frac{k \eta'_{l,3}(kb)}{\eta_{l,3}(kb)},$$

donc

$$\gamma_4(b) = \frac{kk_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)k'_{l,3}(\mu b)}{ki_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)i'_{l,3}(\mu b)}, \quad (2.60)$$

selon l'équation (2.58)

$$k_{l,3}(\mu b) - \gamma_4 i_{l,3}(\mu b) = (\alpha_4 - \gamma_4)\eta_{l,3}(kb),$$

alors

$$\begin{aligned} \eta_{l,3}(kb)(\alpha_4 - \gamma_4) &= \frac{\mu\eta_{l,3}(kb)W[i_{l,3}(\mu b), k_{l,3}(\mu b)]}{ki_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)i'_{l,3}(\mu b)} \\ &= -\frac{1}{(\mu b)^2 \left[ ki_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)i'_{l,3}(\mu b) \right]}, \end{aligned}$$

donc

$$\alpha_4(a) = \frac{kk_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)k'_{l,3}(\mu b) - \frac{1}{(\mu b)^2}}{ki_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)i'_{l,3}(\mu b)},$$

d'où

$$\begin{aligned} G_1^{l,2,3}(r, r') &= -k\mu b^2 \left[ ki_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)i'_{l,3}(\mu b) \right] \left[ k_{l,3}(\mu r) \right. \\ &\quad \left. - \frac{kk_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)k'_{l,3}(\mu b)}{ki_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)i'_{l,3}(\mu b)} i_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'), \end{aligned}$$

enfin

$$\begin{aligned} G_1^{l,2,3}(r, r') &= k\mu b^2 \left[ \left( ki_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)i'_{l,3}(\mu b) \right) k_{l,3}(\mu r) \right. \\ &\quad \left. - \left( kk_{l,3}(\mu b)\eta'_{l,3}(kb) - \mu\eta_{l,3}(kb)k'_{l,3}(\mu b) \right) i_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'), \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.1.** Pour la région  $a \leq r' \leq b \leq r$  a un calcul similaire au calcul précédent conduit à la fonction de Green  $G_1^{l,2,1}(r, r')$ .

**2) Région  $0 \leq r' \leq a \leq r \leq b$  :**

$$G_1^{l,2,1}(r, r') = H_4(\mu r)Z_4(kr'),$$

et

$$H_4(\mu r) = \frac{1}{\alpha_5 - \gamma_5} \left[ k_{l,3}(\mu r) - \alpha_5 i_{l,3}(\mu r) \right],$$

où

$$Z_4(kr') = kj_{l,3}(kr'),$$

donc

$$G_1^{l,2,1}(r, r') = \frac{k}{\alpha_5 - \gamma_5} \left[ k_{l,3}(\mu r) - \alpha_5 i_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'),$$

d'après le condition de Dirichlet de la fonction de Green au point  $r = a$  on obtient

$$\begin{aligned} G_1^{l,2,1}(r, a)|_{r=a} &= G_1^{l,1,1}(r, a)|_{r=a}, \\ \frac{k}{\alpha_5 - \gamma_5} \left[ k_{l,3}(\mu a) - \alpha_5 i_{l,3}(\mu a) \right] j_{l,3}(ka) &= kj_{l,3}(ka) \left[ \eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka) \right], \\ \frac{d}{dr} G_1^{l,2,1}(r, a)|_{r=a} &= \frac{d}{dr} G_1^{l,1,1}(r, a)|_{r=a}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

alors

$$\frac{k\mu}{\alpha_5 - \gamma_5} \left[ k'_{l,3}(\mu a) - \alpha_5 i'_{l,3}(\mu a) \right] j_{l,3}(ka) = k^2 j_{l,3}(ka) \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right], \quad (2.62)$$

on divise l'équation (2.62) par (2.61) on trouve :

$$\frac{\mu \left[ k'_{l,3}(\mu a) - \alpha_5 i'_{l,3}(\mu a) \right]}{k_{l,3}(\mu a) - \alpha_5 i_{l,3}(\mu a)} = \frac{k \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right]}{\eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka)},$$

par suite

$$\begin{aligned} &\alpha_5 \left[ ki_{l,3}(\mu a) \left( \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right) - \mu i'_{l,3}(\mu a) \left( \eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka) \right) \right] \\ &= kk_{l,3}(\mu a) \left[ \eta'_{l,3}(ka) - \xi j'_{l,3}(ka) \right] - \mu k'_{l,3}(\mu a) \left[ \eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka) \right], \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\alpha_5 \left[ \xi \left[ \mu i_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) - k i_{l,3}(\mu a) j'_{l,3}(ka) \right] + k i_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) - \mu i'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka) \right] \\ &= \xi \left[ k'_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) - k_{l,3}(\mu a) j'_{l,3}(ka) \right] + k k_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) - \mu k'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka), \\ \alpha_5 &= \frac{\xi \left[ \mu k'_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) - k k_{l,3}(\mu a) j'_{l,3}(ka) \right] + k k_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) - \mu k'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka)}{\xi \left[ \mu i_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) - k i_{l,3}(\mu a) j'_{l,3}(ka) \right] + k i_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) - \mu i'_{l,3}(\mu a) \eta_{l,3}(ka)}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

Posons

$$\alpha_5 = \frac{M_1(\mu, k, a)}{N_1(\mu, k, a)}, \quad (2.64)$$

en substitution  $\xi$  dans (2.64) et certain calcule, on a le système :

$$\begin{cases} wM_1 = kk_{l,3}(\mu a) \left( -W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right) + a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) k'_{l,3}(\mu a) \times \\ \quad W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] + a^2 k^3 j_{l,3}(ka) k_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) \left( -W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right), \\ wN_1 = ki_{l,3}(\mu a) \left( -W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right) + a^2 k^2 \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) i'_{l,3}(\mu a) \times \\ \quad W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] + a^2 k^3 j_{l,3}(ka) i_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) \left( -W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right), \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} wM_1 = -\frac{1}{ka^2} k_{l,3}(\mu a) + \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) k'_{l,3}(\mu a) - k j_{l,3}(ka) k_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka), \\ wN_1 = -\frac{1}{ka^2} i_{l,3}(\mu a) + \mu \eta_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) i'_{l,3}(\mu a) - k j_{l,3}(ka) i_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka), \end{cases} \quad (2.65)$$

alors, la substituant (2.65) dans (2.63) on obtient :

$$\alpha_5 = \frac{-k_{l,3}(\mu a) + a^2 k \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) k'_{l,3}(\mu a) - a^2 k j_{l,3}(ka) k_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka)}{-i_{l,3}(\mu a) + a^2 k \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) i'_{l,3}(\mu a) - a^2 k j_{l,3}(ka) i_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka)}, \quad (2.66)$$

d'après l'équation (2.61)

$$\alpha_5 - \gamma_5 = \frac{k_{l,3}(\mu a) - \alpha_5 i_{l,3}(\mu a)}{\eta_{l,3}(ka) - \xi j_{l,3}(ka)},$$

d'où

$$\alpha_5 - \gamma_5 = \frac{k_{l,3}(\mu a) - \frac{M_1}{N_1} i_{l,3}(\mu a)}{\eta_{l,3}(ka) - \frac{Z}{w} j_{l,3}(ka)},$$

alors

$$\alpha_5 - \gamma_5 = \frac{\left[ N_1 k_{l,3}(\mu a) - M_1 i_{l,3}(\mu a) \right] w}{\left[ w \eta_{l,3}(ka) - Z j_{l,3}(ka) \right] N_1},$$

posons

$$\alpha_5 - \gamma_5 = \frac{X_1(\mu, a, k)}{Y_1(\mu, a, k)}, \quad (2.67)$$

où

$$\begin{aligned} X_1 &= \left[ N_1 k_{l,3}(\mu a) - M_1 i_{l,3}(\mu a) \right] w \\ &= \left[ -k_{l,3}(\mu a) i_{l,3}(\mu a) + a^2 k \mu k_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) i'_{l,3}(\mu a) - a^2 k k_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) \times \right. \\ &\quad \left. i_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) + i_{l,3}(\mu a) k_{l,3}(\mu a) - a^2 k \mu i_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) k'_{l,3}(\mu a) \right. \\ &\quad \left. + a^2 k i_{l,3}(\mu a) j_{l,3}(ka) k_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) \right] w \\ &= \left[ a^2 k \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) - W[i_{l,3}(\mu a), k_{l,3}(\mu a)] \right] w, \end{aligned}$$

donc

$$X_1 = \frac{k}{\mu} j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) w, \quad (2.68)$$

et

$$\begin{aligned} Y_1 &= \left[ w \eta_{l,3}(ka) - Z j_{l,3}(ka) \right] N_1 \\ &= \left[ -\eta_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) + a^2 k^2 \eta_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(ka) - a^2 k \eta_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) \times \right. \\ &\quad \left. j_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) + j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) - a^2 k^2 j_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \right. \\ &\quad \left. + a^2 k j_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \right] N_1 \\ &= a^2 k^2 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) \left( -W[j_{l,3}(ka), \eta_{l,3}(ka)] \right) N_1, \end{aligned}$$

alors

$$Y_1 = -j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) N_1, \quad (2.69)$$

d'après les équations (2.68) et (2.69), on a :

$$\alpha_5 - \gamma_5 = \frac{\frac{k}{\mu} j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) w}{-j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) N_1},$$

afin que

$$\alpha_5 - \gamma_5 = \frac{k w}{\mu N_1}, \quad (2.70)$$

alors

$$G_1^{l,2,1}(r, r') = \frac{k}{\alpha_5 - \gamma_5} \left[ k_{l,3}(\mu r) - \alpha_5 i_{l,3}(\mu r) \right] j_{l,3}(kr'),$$

d'après (2.66) et (2.70) on obtient

$$G_1^{l,2,1}(r, r') = \mu j_{l,3}(kr') \frac{a_1 - a_2 - a_3}{b_1}.$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= -k_{l,3}(\mu r) i_{l,3}(\mu a) + a^2 k k_{l,3}(\mu r) \mu j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) i'_{l,3}(\mu a) \\ b_1 &= -j_{l,3}(ka) + a^2 k^2 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(ka) - a^2 k^2 j_{l,3}(ka) j_{l,3}(ka) \eta'_{l,3}(ka) \\ a_2 &= a^2 k^3 k_{l,3}(\mu r) j_{l,3}(ka) i_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) + j_{l,3}(ka) - a^2 k^2 j_{l,3}(ka) \eta_{l,3}(ka) j'_{l,3}(ka) \\ a_3 &= a^2 k^2 i_{l,3}(\mu r) j_{l,3}(ka) k_{l,3}(\mu a) \eta'_{l,3}(ka) \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.2.** *Pour la région  $0 \leq r \leq a \leq r' \leq b$  a un calcul similaire au calcul précédent conduit à la fonction de Green  $G_1^{l,1,2}(r, r')$*

# Conclusion générale

Dans notre travail, nous avons abordé le calcul explicite de la fonction de Green pour un problème concret de la mécanique quantique : le problème du potentiel à trois dimensions. Les conditions aux limites utilisées sont celles qu'on rencontre en mécanique quantique dans les problèmes de diffusion et aussi pour les états liés. En mécanique quantique, si le potentiel présente un saut dans l'espace, la solution de l'équation de Schrödinger et de sa dérivée sont continues sur la limite (le bord) du domaine. Ainsi nous avons calculé les différents types de fonctions de Green dans les diverses régions de l'espace et les différentes constantes de couplage du potentiel c-à-d ( $V = 0$  pour  $r < a$ ,  $V = V_0$  pour  $a < r < b$  et  $V = 0$  pour  $r > b$ ). Nous comptons que ces résultats peuvent faire l'objet d'une publication à soumettre à un journal international. Comme perspective, nous allons aussi prolonger cette méthode à l'étude des autres problèmes pour des potentiels autres multi-sauts, autre forme, etc. . .

# Bibliographie

- [1] M. Begui, M. T. Meftah, B. Benali, Quantum green's function in N-dimensional Space with Spherically piecewise continuous potentials Vol.11.No.7, 337- 355(2017).
- [2] E. Hairer, Calcul différentiel équations différentielles, Genève 24, Juin 1999.
- [3] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, Équations Intégrales - Traduction française Editions Mir 1977, Moscou.
- [4] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral tome 2- Traduction française Editions Mir 1980. Moscou.
- [5] M. R. Spiegel, Ph. D, Theory and Problems of Fourier Analysis with Application to Boundary Value Problems, Editions McGraw-Hill, America, 1974.
- [6] H. Reinhard, Équations aux dérivées partielles-Bordas, Paris, 1991.

## المخلص

من خلال بحثنا هذا توصلنا إلى إيجاد دالة قرين لمسألة جهد متعدد العتبات باستعمال الشروط الحدية التي لها تفسيرات في فيزياء الكم, بالإضافة إلى استعمال المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية. وقد قمنا بحساب دالة قرين من أجل الطاقة الكامنة  $V(r, \theta, \phi)$  في فضاء ذو ثلاث بعاد المساوي لـ  $V_0$  في مجال حلقي ( بين نصفي القطرين  $a$  و  $b$  حيث  $a < b$ ), ومعدوم خارج القرص ذو نصف قطر  $b$  و داخل القرص ( $r < b$ ) وذلك باستغلال استمرارية دالة قرين ومشتقها الأول عند الحافتين ( $r = ba = r$ ).

**الكلمات المفتاحية:** معادلة تفاضلية , دالة قرين , معادلة بيسل , معادلة شرودنجر

## Résumé

Dans ce travail, nous avons montré l'existence de la solution pour un problème où l'opérateur énergie potentielle est continu par morceau. En effet nous avons calculé entièrement la fonction de Green sur les différents domaines .

L'énergie potentielle est nulle à l'intérieur d'un disque de rayon  $a$ , et  $V_0$  sur la couronne ( $a < r < b$ ) et aussi nulle à l'extérieur ( $r < a$ ). Ce calcul explicite a été accompli en utilisant les conditions aux limites, qui ont une interprétation précise en physique quantique.

**Mots clés:** équation différentielle , fonction de Green , équation de Bessel , équation de Schrodinger

## Abstract

In this work, we have shown the existence of the solution for a problem where the potential energy is a piecewise continuous operator. We have calculated the Green's function on the different domains: Potential energy is zero inside a disc of radius  $a$ , and  $V_0$  on the crown ( $a < r < b$ ) and zero outside ( $r > b$ ). This explicit calculation was performed using boundary conditions, which have a precise interpretation in quantum physics.

**Key words:** differential equation , Green function , Bessel function , Schrodinger equation