



N° d'ordre :

N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
ELOUED**

FACULTÉ DESSCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

**Méthodes de Résolution d'équations
Différentielles Linéaires du Second Ordre**

Présenté par:

HAMIDANI Abderraouf

REGUIA Elhadi

ZEGUEB Saddam

Sous la supervision de:

Mr. GHAMAM Hamed laid

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Nos remerciements vont tout premièrement à dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a donnée durant toutes ces longues années.

nous exprimons nos profondes gtatitudes à nos parents pour leurs encouragements, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré.

Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur monsieur "***GHAMAM Hamed laid***" pour avoir d'abord proposé ce thème, pour le suivi continue tout le long de la réalisation de cette thèse et qui n'a pas cessée de nous donner ses conseils et remarques.

nous remercions les membres de jury d'examen pour l'honneur qu'ils nous font en participant au jugement de ce travail.

nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidé à élaborer et réaliser ce mémoire , ainse à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin à accomplir ce travail.

Nous remercions vont aussi à tous les enseignants du départemente de mathématiques et informatique qui ont contribué à notre formation.

Enfin nous tenons à exprimer notre reconnaissance à tous nous amis et collègues pour leur soutient moral et matériel.

L'importance de l'objet

En premier lieu le sujet élaborer, pour rechercher au niveau du sujet destiner au étudiant du licence académique en tant que initiative de projet du recherche destiné à organiser et reaganien du savoir scientifiques en particulier le domaine des équation différentielle (eu abrège **ED**) et néanmoins la spécificité de ce domain dans la pratique et pour cela, devient l'importance et la commodité théorique et pratique de **ED** surtout pour les étudiant du licence science technique, science de matière, science en générique eu général, G. mécanique, G. procédéetc.

Pour cela nous avons accomplis ce sujet par des exemples et exemples concrets de résolution de **ED** d'ordre un et d'ordre deux et des systèmes différentielles pour clôturer notre recherche, à fin d'éclaircir et ajoutée un savoir faire étudiant con cernée. Par conséquent le sujet est enrichi par du support du cours , déjà étudié dans convias licence.

En outre des idées des référentiels pour laisser un impact théoriques et un valeur ajoutée pour notre mémoire.

Afin de respect le plan du travail du projet et leur efficacité dans la venir en tant que valeur ajoutée pour la bibliothèque de l'étudiant soit licence ou master.

Table des matières

Introduction	1
1 Équations différentielles du premier ordre	2
1.1 Généralités	2
1.1.1 Méthode de résolution	4
1.2 Équations différentielles du premier ordre	4
1.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre(EDL1)	5
1.3.1 Résolution de l'équation sans second membre	5
1.3.2 Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants sans second membre	7
1.3.3 Résolution de l'équation avec second membre	7
1.4 Résolution de (1.3.1) par la méthode de lagrange(ou de variation de la constante):	8
1.4.1 Problème de Cauchy	10
1.5 Équations remarquables du premier ordre	11
1.5.1 Équations à variables séparées	11
1.5.2 Équations homogènes	12
1.5.3 Équations de Bernoulli	13
1.5.4 Équations de Ricatti	15
1.5.5 Équations de Lagrange	17
1.5.6 Équations de Clairaut	19

2	Méthodes de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre	22
2.1	Équations différentielles linéaires du second ordre aux coefficients constants	22
2.1.1	Équations sans second membre	22
2.1.2	Équations avec second membre	25
2.1.3	Recherche d'une solution particulière pour les équations à seconds membres remarquables	27
2.1.4	Méthode de lagrange (ou de variation de la constante)	28
2.2	Équations linéaires du second ordre(EDL2)	31
2.2.1	Équations sans second membre	32
2.2.2	Équations avec second membre	33
2.2.3	Équation d'Euler (d'ordre 2)	33
2.3	Applications (équations linéaires du second ordre)	37
3	Systèmes différentiels linéaires du premier ordre	41
3.1	Définitions	41
3.2	Système différentiel du premier ordre	43
3.3	Équation différentielle linéaire d'ordre n	45
3.3.1	Équation différentielle d'ordre n	45
3.3.2	Équation différentielle linéaire d'ordre n	47
	Conclusion	48
	Bibliographie	49

Notation

$\varphi(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$: fonction implicite.

$M_{(n \times n)}$: les matrices carrés d'ordre n

$\mathbb{R}$: corps de nombres réels .

$\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$: Corps de nombres complexe .

$f = \sum_{i=1}^n f_k$: la somme fonction partiels.

$\frac{d}{dx}$: la dérivée totale par rapport à x .

$\frac{\partial}{\partial x}$: la dérivée partielle par rapport à x .

$\vec{x}$: au lieu de x .

y : fonction de x .

y' : dérivées premières .

y'' : dérivées secondes.

$\frac{dy}{dx}$: dérivée y par rapport à x .

$]a; b[\times]c; d[$: rectangle.

W : Wronskien.

ED: équation différentielle

EDL1: équations différentielles linéaires du premier ordre

EDL2: équations différentielles linéaires du second ordre

Introduction

Après suite de notre étude de module équations différentielles(**ED**) . on a remarqué l'importance de l'utilisation de ce dernier par les étudiants et les chercheurs à quelques méthodes du résolution des équations différentielles a étudié certains formes des équations différentielles d'ordre un .Avec des exemples d'application .

On a pris aussi les méthodes du résolution des équations différentielles d'ordre deux .Avec l'exemples physiques et électriques puis on a ajouter a cette étude le système équations différentielles et quelques méthodes de résolution

Enfin nous avons exprime l'idéal exploitation du méthode de résolution du **ED** du électro statique et au quelques formulation variationelle exigé la solution particulière par la condition du Cauchy pour que ce travail du recherche devient en rishi du références et savoir scientifiques pour les étudiants du licence

Pour référence travail d'être riche et précieux des références , destiner aux étudiants licence

Chapitre 1

Équations différentielles du premier ordre

1.1 Généralités

Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle (par exemple x), une fonction qui dépend de cette variable (par exemple y) et un certain nombre de ses dérivées successives. Lorsque la dérivée de plus haut degré de la fonction (qui apparaît réellement) est la n ème ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que l'équation différentielle est d'ordre n .

* $yy'' = x - x^2y'$ est une équation différentielle d'ordre 2 où y est une fonction de la variable x . on peut aussi l'écrire

$$y'' = \frac{x - x^2y'}{y}$$

* $x'' - tx' + x^2 = 1$ est une équation différentielle d'ordre 2 où x est une fonction de la variable t .

* $t' - tx + x^2 = 1$ est une équation différentielle d'ordre 1 où t est une fonction de la variable x .

* Une équation différentielle d'ordre n peut donc s'écrire sous la forme :

$$\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ ou encore } \varphi(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

où y est donc une fonction qui dépend de x et φ est une fonction des $n + 2$ variables $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Nous nous intéresserons aux fonctions y à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

* Il nous arrivera de rencontrer $\frac{dy}{dx}$ à la place de y' et nous pourrions avoir des équations de la forme $2xdx = y^2dy$.

Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle $\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ tout entier, c'est trouver toutes les fonctions f telles que :

- a. f soit n fois dérivable sur I
- b. $\forall x \in I, \varphi(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$

Une fonction qui vérifie les conditions (a) et (b) est appelée solution (ou intégrale) particulière de l'équation différentielle et sa courbe représentative est appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.

On appelle solution (ou intégrale) générale de l'équation, l'ensemble de toutes les fonction solutions.

On appelle courbes intégrales d'une équation différentielle l'ensemble des courbes représentatives de toutes les solutions de cette équation différentielle.

* En pratique, on suppose souvent que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

* Si Id_I désigne l'application identité de $\mathbb{R}$ restreint à I , on peut aussi écrire $\varphi(Id_I, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ où 0 désigne la fonction nulle sur I .

* Dans certains cas, à partir de la solution générale d'une équation différentielle, on peut rechercher une solution particulière satisfaisant à certaines conditions appelées conditions initiales. En général, ces conditions concernent les valeurs prises par la fonction ou certaines dérivées en une valeur x_0 .

* La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + xy' - 5y = 2 - 3x^2$.

* Les courbes intégrales de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les droites du plan non parallèles à l'axe des ordonnées.

* $y = \int_2^x t dt = \frac{1}{2}x^2 - 2$ est la solution particulière de l'équation différentielle $y' = x$ qui vérifie condition initiale $y(2) = 0$.

Une fonction f définie sur I est dite une solution maximale d'une équation différentielle (E) s'il n'existe pas d'intervalle $I \subset J$ et de fonction g telle que $g|_I = f$ qui soit aussi solution de (E).

On appelle équation simplifiée toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $\varphi(x, y^{(n)}) = 0$.

1.1.1 Méthode de résolution

Si on peut mettre l'équation sous la forme $y^{(n)} = g(x)$ alors il suffit d'intégrer n fois la fonction g .

Exemple 1.1.1 : *On cherche à résoudre l'équation différentielle $xy' - 1 = 0$.*

A priori, cette équation est définie sur $\mathbb{R}$. Toutefois, si $x = 0$, alors aucune fonction ne convient.

On peut donc la résoudre soit sur $] -\infty; 0[$ soit sur $] 0; +\infty[$. Pour simplifier, on prend $] 0; +\infty[$.

On obtient $y' = \frac{1}{x}$ et donc $y = \ln x + a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Les courbes intégrales de l'équation s'obtiennent de celle de $\ln x$ par une translation parallèlement à l'axe des ordonnées.

1.2 Équations différentielles du premier ordre

Soit $f : (u; v) \rightarrow (u, v)$ une application réelle de deux variables réelles définies sur un ensemble D de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi : x \rightarrow \varphi(x)$ une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle $[t_0; t_1]$ dont l'image par l'application $x \rightarrow (x; \varphi(x))$ est contenue dans D .

On dit que la fonction est solution de l'équation différentielle du premier ordre suivante (on dit aussi intégrale de l'équation) si elle vérifie sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ l'égalité :

$$\varphi'(x) = f(x; \varphi(x)) \quad (1.2.1)$$

L'équation (1.2.1) est dite linéaire si f est de la forme suivante :

$$f(u, v) = v.A(u) + B(v)$$

Où A et B sont des fonctions réelles.

Exemple 1.2.1 Soit l'équation : $y' = f(x)$, f étant une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$, alors la solution de l'équation est donnée par :

$$y(x) = \int_a^x f(t)dt + c$$

1.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre(EDL1)

Définition 1.3.1 On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme:

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (1.3.1)$$

Où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I .

L'équation sans second membre associée à (1.3.1)est l'équation :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (1.3.2)$$

1.3.1 Résolution de l'équation sans second membre

Soit y une solution non nulle de l'équation (1.3.2), alors on a:

$$\frac{y'}{y} = -a(x)$$

$$\text{Log}|y| = - \int a(t) dt + cte, \text{ soit } A(x) = \int a(t) dt$$

donc

$$y = ke^{-A(x)}, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Théorème 1.3.1 :

1.3. Équations différentielles linéaires du premier ordre(EDL1)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue,

$A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a . L'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' + a(x)y = 0$$

Est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$\varphi(x) = Ke^{-A(x)} \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit : $I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, posons:

$$k(x) = \varphi(x)e^{A(x)}$$

On a :

$$k'(x) = [\varphi(x)A'(x) + \varphi'(x)]e^{A(x)} = [\varphi(x)a(x) + \varphi'(x)]e^{A(x)}$$

$$\text{où } \varphi(x)a(x) + \varphi'(x) = 0$$

Est solution de

$$(1.3.2) \Leftrightarrow k'(x) = 0, x \in I \Leftrightarrow k(x) = cte = k \Leftrightarrow \varphi(x) = Ke^{-A(x)}$$

■

Exemple 1.3.1 $y' + x^3y = 0$

$$\varphi(x) = Ke^{\frac{-x^4}{4}}, K \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{1-x^2}y' = y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow \log|y| = \arcsin(x) + C \Rightarrow |y| = e^{\arcsin(x)+C} \Rightarrow y = ke^{\arcsin(x)+C}, K \in \mathbb{R}$$

Poson

$$y(x) = k(x)e^{\arcsin(x)+C} \Rightarrow y'(x) = k'(x)e^{\arcsin(x)+C} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}k(x)e^{\arcsin(x)+C}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \left[k'(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} k(x) \right] e^{\arcsin(x)+C} &= k(x) e^{\arcsin(x)+C} \\ \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \left[k'(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} k(x) \right] &= k(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} k'(x) = 0 \Rightarrow k(x) = cte = k \Rightarrow \varphi(x) = k e^{\arcsin(x)+C}, K \in \mathbb{R}$$

1.3.2 Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants sans second membre

Définition 1.3.2 On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$$y' + ay = 0$$

a constante réelle. Alors on a :

$$y(x) = K e^{-a(x)}, K \in \mathbb{R}$$

1.3.3 Résolution de l'équation avec second membre

Théorème 1.3.2 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et φ_1 une solution de l'équation :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (1.3.1)$$

Pour qu'une fonction dérivable : $I \rightarrow \mathbb{R}$ soit solution de φ_1 il faut et il suffit que $\varphi - \varphi_1$ soit solution de l'équation sans second membre associée à (1.3.1) .

Preuve. On a :

$$\varphi_1'(x) + a(x)\varphi_1(x) = b(x)$$

$\forall x \in I$ φ est solution de (1.3.1)

1.4. Résolution de (1.3.1) par la méthode de lagrange(ou de variation de la constante):

$$\varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = b(x)$$

Par suite :

$$\varphi'(x) - \varphi_1'(x) + a(x)[\varphi(x) - \varphi_1(x)] = 0 \quad \blacksquare$$

Commentaire(1) : On dit que la solution générale de (1.3.1) est égale à la somme d'une solution particulière de (1.3.1) et de la solution générale de (1.3.2) .

1.4 Résolution de (1.3.1) par la méthode de lagrange(ou de variation de la constante):

On peut procéder de la façon suivante pour la recherche de la solution générale de l'équation (1.3.1):

On cherche la solution sous la forme:

$$y(x) = K(x) e^{-A(x)}$$

Où A est une primitive de a .

$$y'(x) = [k'(x) - k(x)a(x)] e^{-A(x)}$$

$$(1.3.1) \iff (k' - ka)(x)e^{-A(x)} + a(x)K(x)e^{-A(x)} = b(x)$$

$$\iff k'(x) = b(x)e^{A(x)}$$

$$K(x) = \int b(t)e^{A(t)} dt$$

Par conséquent la solution générale de (1.3.1) est :

$$y(x) = e^{-A(x)} \int b(t)e^{A(t)} dt$$

Exemple 1.4.1 :

(i) $y' + y = 3x^2 + x - 4$

a) Méthode de la recherche d'une solution particulière :

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y(x) = Ke^{-x}, K \in \mathbb{R}$$

Cherchons une solution de (i) sous la forme :

$$y_1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Après calcul on trouve $\alpha = 3, \beta = -5, \gamma = 1$

La solution générale de (i) est $y(x) = 3x^2 - 5x + 1 + Ke^{-x}, K \in \mathbb{R}$

b) Méthode de la variation de la constante

Posons

$$y(x) = k(x)e^{-x}$$

$$\rightarrow y'(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} = [k'(x) - k(x)]e^{-x}$$

$$[k'(x) - k(x)]e^{-x} + k(x)e^{-x} = (3x^2 + x - 4)$$

$$k'(x) = (3x^2 + x - 4)e^x$$

$$k(x) = (3x^2 - 5x + 1)e^x + k, k \in \mathbb{R}$$

(ii) $y' - \frac{3}{x}y = x$ on prend $I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$

a) Méthode de la recherche d'une solution particulière

L'équation sans second membre a pour solution

$$y = Ke^{\int \frac{3}{t} dt} = Ke^{3 \log x} = Kx^3, k \in \mathbb{R}$$

Cherchons y_1 sous la forme λx^2 , on obtient:

$$2\lambda x - \frac{3\lambda x^2}{x} = x \iff \lambda = -1$$

1.4. Résolution de (1.3.1) par la méthode de lagrange(ou de variation de la constante):

Ce qui donne la solution:

$$y = -x^2 + Kx^3, k \in \mathbb{R}.$$

b) Méthode de la variation de la constante

$$\begin{aligned} \text{On pose } y(x) = K(x)x^3 \rightarrow y' &= k'(x)x^3 + 3k(x)x^2 \rightarrow k'(x)x^3 + 3k(x)x^2 - \frac{3}{x}K(x)x^3 = x \\ k'(x)x^3 &= x \rightarrow k'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow k(x) = \frac{-1}{x} + c, c \in \mathbb{R} \rightarrow y(x) = -x^2 + cx^3, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.4.1 Problème de Cauchy

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une fonction et une seule telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = b(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Commentaire (2):

On dit que l'équation (1.4.1) admet une solution unique vérifiant la condition initiale $\varphi(x_0) = y_0$.

Preuve. Posons

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$$

La solution générale de (1.4.1) s'écrit :

$$\varphi(x) = Ke^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt$$

■

Exemple 1.4.2 : $\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ La solution de l'équation est :

a) Résolution de l'équation sans second membre :

$$xy' + 2y = 0 \Rightarrow xy' = -2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-2dx}{x} \Rightarrow \log|y| = -2\log|x| + c \Rightarrow |y| = \frac{e^c}{x^2} \Rightarrow y = \frac{k}{x^2}$$

b) Résolution de l'équation avec second membre:

$$y(x) = \frac{k(x)}{x^2} \Rightarrow y'(x) = \frac{xk'(x) - 2k(x)}{x^3} \Rightarrow x \left(\frac{xk'(x) - 2k(x)}{x^3} \right) + 2\frac{k(x)}{x^2} = 4x^2 \Rightarrow k'(x) = 4x^3 \Rightarrow k(x) = x^4 + c$$

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = \frac{x^4+c}{x^2} \implies y(x) = x^2 + \frac{c}{x^2} \quad c \in \mathbb{R}$$

La solution qui convient correspond à $c = 1$ alors $y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Théorème 1.4.1 (*admis*):

Soit f une fonction définie et continue sur un rectangle $]a; b[\times]c; d[$ ayant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur le même rectangle.

Alors pour tout couple $(x_0, y_0) \in]a; b[\times]c; d[$, il existe h_0 tel que

$]x_0 - h; x_0 + h[\subset]a; b[$ et une solution unique de l'équation :

$$y' = f(x), x \in]x_0 - h; x_0 + h[\text{ et } y(x_0) = y_0$$

$$y' = f(x), x \in]x_0 - h; x_0 + h[\text{ et } y(x_0) = y_0$$

1.5 Équations remarquables du premier ordre

1.5.1 Équations à variables séparées

On appelle équation à variables séparables toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme:

$$a(x) + b(y)y' = 0$$

Où a et b sont des applications continues sur des intervalles à préciser.

1.5.1.1 Méthode de résolution

Soient A et B des primitives respectivement de a et de b sur un intervalle I où a et b sont continues.

En intégrant l'égalité, on obtient

$$A(x) + B(y) = cste$$

Si B admet une application réciproque B^{-1} , on a

$$y = B^{-1}(-A(x) + cste)$$

Exemple 1.5.1 : On cherche à résoudre l'équation différentielle $x^2 y' = e^y$.

Si $x = 0$, alors aucune fonction ne convient.

On peut donc la résoudre soit sur $] - \infty; 0[$ soit sur $]0; +\infty[$.

On a $-y'e^{-y} = \frac{-1}{x^2}$ et en intégrant $e^{-y} = \frac{1}{x} + c$ où $c \in \mathbb{R}$. Donc $y = -\log\left(\frac{1}{x} + c\right)$ où $c \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de la fonction y dépend de c .

Pour avoir une solution sur $]0; +\infty[$, il faut que $c > 0$. Il n'est pas de solution sur $] - \infty; 0[$ tout entier, car il faut $\frac{1}{x} + c > 0$ c'est-à-dire $c > 0$ et $x \in \left] \frac{-1}{c}; 0 \right[$.

Il arrivera que l'on ne puisse pas obtenir y en fonction de x .

1.5.2 Équations homogènes

On appelle équation homogène toute équation différentielle qui ne change pas lorsque l'on remplace x par λx et y par λy pour tout réel λ .

Une équation homogène peut se mettre sous la forme $\varphi(y', \frac{y}{x}) = 0$ et parfois sous la forme

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.5.1)$$

1.5.2.1 Méthode de résolution

Nous nous bornerons aux équations homogènes que l'on peut mettre sous la forme (1.5.1).

Dans ce cas, on pose $y = tx$ où t est donc une fonction de x .

On obtient alors une équation à variables séparables.

Exemple 1.5.2 On veut résoudre l'équation différentielle $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $]0; +\infty[$.

On peut mettre cette équation sous la forme (1.5.1) en effet, on a

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \left(\frac{y}{x}\right)$$

On pose donc

$$y = tx \text{ et } y' = t'x + t.$$

$$x(t'x + t) - tx = \sqrt{x^2 + t^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow t'x + t - t = \sqrt{1 + t^2} \Leftrightarrow \frac{t'}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \log \left[t + \sqrt{1 + t^2} \right] = \log(kx) \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{ou} \quad \operatorname{argsh}(t) = \log(x) + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow t + \sqrt{1 + t^2} = kx \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{ou} \quad \operatorname{argsh}(t) = \log(kx) \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + t^2} = kx - t \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{ou} \quad t = \frac{e^{\ln(kx)} - e^{-\ln(kx)}}{2} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow 1 + t^2 = k^2x^2 - 2kxt + t^2 \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{ou} \quad t = \frac{kx - \frac{1}{kx}}{2} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{k^2x^2 - 1}{2kx} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^*$$

Et donc

$$y = (tx) = \frac{k^2x^2 - 1}{2k} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^*$$

1.5.3 Équations de Bernoulli

On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^\alpha = 0$$

Où a, b et c sont des applications continues sur des intervalles à préciser et α est un réel fixé avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

Remarque 1.5.1 Dans un cadre quelconque, il faut $y > 0$.

1.5.3.1 Méthode de résolution

On pose

$$t = y^{1-\alpha}$$

On obtient

$$t' = (1 - \alpha)y'y^{-\alpha} = (1 - \alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$$

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^\alpha = 0 \Leftrightarrow a(x)\frac{y'}{y^\alpha} + b(x)\frac{y}{y^\alpha} + c(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x)\frac{t'}{1 - \alpha} + b(x)t + c(x) = 0$$

On obtient donc une équation linéaire du premier ordre en t .

Exemple 1.5.3 On cherche à résoudre $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$

On peut intégrer l'équation sur $] - \infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$.

On a $\alpha = 5$. On divise par y^5 :

$$\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{2xy^4} = 5x^2$$

Remarque 1.5.2 On pose $t = y^{-4}$ d'où

$$t' = -4y'y^{-5}$$

On obtient

$$\frac{-1}{4}t' - \frac{t}{2x} = 5x^2$$

C'est-à-dire

$$t' + \frac{2}{x}t = -20x^2$$

C'est une équation linéaire du premier ordre et l'équation sans second membre est .

$$t' + \frac{2}{x}t = 0$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Une primitive de $\frac{2}{x}$ est $\log(x^2)$.

D'où les solutions de l'équation sans second membre sont $t = \frac{c}{x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière :

On pose

$$t_0 = \frac{1}{x^2} c(x)$$

$$t'_0 = c'(x) \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} c(x)$$

On obtient :

$$t'_0 + \frac{1}{2x} t_0 = c'(x) \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} c(x) + \frac{2}{x} \left(\frac{1}{x^2} c(x) \right) = c'(x) \frac{1}{x^2} = -20x^2$$

D'où

$$c'(x) = -20x^4$$

Et

$$c(x) = -4x^5 \text{ et } t_0 = -4x^3$$

La solution générale est donc $t = \frac{c}{x^2} - 4x^3$ où $c \in \mathbb{R}$.

On obtient donc

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{c}{x^2} - 4x^3}} \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Attention : Ensemble de définition et solution maximale.

1.5.4 Équations de Ricatti

On appelle équation de Ricatti toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

Où a, b et c sont des applications continues sur des intervalles à préciser

Remarque 1.5.3 On ne sait résoudre ce type d'équation que si l'on connaît déjà une solution particulière y_1 .

1.5.4.1 Méthode de résolution

On pose

$$y = y_1 + \frac{1}{t}$$

Avec

$$y_1' = a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x)$$

Et t ne s'annulant pas sur l'intervalle de résolution.

On a

$$y' = y_1' - \frac{t'}{t^2}$$

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

$$\Leftrightarrow y_1' - \frac{t'}{t^2} = a(x) \left(y_1 + \frac{1}{t} \right)^2 + b(x) \left(y_1 + \frac{1}{t} \right) + c(x)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t'}{t^2} = 2a(x)\frac{y_1}{t} + a(x)\frac{1}{t^2} + b(x)\frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow t' + (2a(x)y_1 + b(x))t = -a(x)$$

On obtient une équation linéaire du premier ordre en t .

Exemple 1.5.4 On cherche à résoudre $2x^2y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy$ sur $]0; +\infty[$.

On peut mettre l'équation sous la forme :

$$y' = \frac{(x-1)}{2x^2}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{(x-1)}{2}$$

$y = x$ est une solution particulière.

On pose $y = x + \frac{1}{t}$ où t est une fonction qui ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$.

On a

$$y' = 1 - \frac{t'}{t^2}$$

On obtient

$$2x^2 \left(1 - \frac{t'}{t^2} \right) = (x-1) \left[\left(x + \frac{1}{t} \right)^2 - x^2 \right] + 2x \left(x + \frac{1}{t} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x^2 \frac{t'}{t^2} = (x-1) \left(x^2 + 2x \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - x^2 \right) + 2x^2 + 2x \frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 \frac{t'}{t^2} = (x-1) \left(2x \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) + 2x \frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 \frac{t'}{t^2} = 2x^2 \frac{1}{t} + x \frac{1}{t^2} - 2x \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + 2x \frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 \frac{t'}{t^2} = 2x^2 \frac{1}{t} + x \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 t' + 2x^2 t = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow t' + t = \frac{1-x}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}$$

La solution de l'équation sans second membre est $t = ce^{-x}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière est $t_0 = \frac{-1}{2x}$.

D'où la solution générale est : $t = ce^{-x} - \frac{1}{2x}$ où $c \in \mathbb{R}$

Et

$$y = x + \frac{1}{ce^{-x} - \frac{1}{2x}} = x + \frac{2x}{2cxe^{-x} - 1} = \frac{2cx^2e^{-x} + x}{2cxe^{-x} - 1} = x \cdot \frac{kxe^{-x} + 1}{kxe^{-x} - 1} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Danger : Ensemble de définition

1.5.5 Équations de Lagrange

On appelle équation de Lagrange toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$$y = xf(y') + g(y')$$

Où f et g sont des applications continûment dérivables sur des intervalles à préciser.

1.5.5.1 Méthode de résolution

On pose

$$t = y' = \frac{\partial y}{\partial x}$$

L'équation devient

$$y = xf(t) + g(t) = x(t)f(t) + g(t)$$

On la dérive par rapport à t :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x'(t)f(t) + x(t)f'(t) + g'(t)$$

Or

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = tx'(t)$$

Donc

$$tx'(t) = x'(t)f(t) + x(t)f'(t) + g'(t)$$

Equation que l'on peut considérer comme une équation linéaire de premier ordre en prenant pour la variable t et pour la fonction x .

Exemple 1.5.5 On cherche à résoudre $xy' + y + y^2 = 0$

On pose

$$y' = t.$$

L'équation devient $y = -tx(t) - t^2$

D'où

$$-x(t) - tx'(t) - 2t = \frac{\partial y}{\partial t} = tx'(t) \text{ et } 2tx'(t) + x(t) = -2t$$

L'équation sans second membre est

$$2tx'(t) + x(t) = 0$$

Ou encore sur tout intervalle où t ne s'annule pas. La solution générale est

$$x = ke^{-\frac{1}{2} \log |t|} = k|t|^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{\sqrt{|t|}} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

On cherche maintenant une solution particulière de

$$2tx'(t) + x(t) = -2t$$

Du type $x_0 = at + b$.

$$x'_0 = a \text{ et } 2at + at + b = -2t$$

D'où $b = 0$ et $a = \frac{-2}{3}$.

C'est-à-dire

$$x_0 = \frac{-2}{3}t$$

La solution générale de

$$2tx'(t) + x(t) = -2t$$

Est donc

$$x(t) = \frac{k}{\sqrt{|t|}} - \frac{2}{3}t \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Or

$$y = -tx - t^2 = -t \left(\frac{k}{\sqrt{|t|}} - \frac{2}{3}t \right) - t^2$$

On a donc

$$y = -t \frac{k}{\sqrt{|t|}} - \frac{1}{3}t^2 \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

On obtient uniquement un paramétrage des courbes intégrales. Il aurait été plus "intéressant" d'obtenir t en fonction de x .

1.5.6 Équations de Clairaut

On appelle équation de Clairaut toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$$y = xy' + f(y')$$

Où f est une application continûment dérivable sur des intervalles à préciser.

Remarque 1.5.4 *C'est un cas particulier des équations de Lagrange.*

1.5.6.1 Méthode de résolution

On pose

$$y' = t$$

L'équation devient

$$y = xt + f(t)$$

On la dérive par rapport à x :

$$y' = xt' + t + t'f(t) = t$$

(t est une fonction de x).

D'où

$$xt' + t'f(t) = 0 = t'(x + f(t))$$

Si $t' = 0$, alors $t = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

D'où

$$y = cx + f(c)$$

Car $y = xt + f(t)$.

Si $x + f(t) = 0$ et si f' est inversible, alors

$$t = (f')^{-1}(-x)$$

Exemple 1.5.6 On cherche à résoudre $y = xy' + \frac{y'}{y'+1}$ sur $] -\infty; 0[$

On pose

$$y' = t$$

L'équation devient

$$y = xt + \frac{t}{t+1}$$

D'où

$$y' = xt' + t + \frac{t'(t+1) - tt'}{(t+1)^2} = t$$

$$\iff t' \left(x + \frac{1}{(t+1)^2} \right) = 0$$

Si $t' = 0$, alors $t = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

D'où

$$y = cx + \frac{c}{c+1}$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

Si $x + \frac{1}{(t+1)^2} = 0$, alors

$$t = \frac{1}{\sqrt{-x}} - 1$$

D'où

$$y = xt + \frac{t}{t+1} = -\sqrt{-x} - x + \frac{\frac{1}{\sqrt{-x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{-x}}} = -2\sqrt{-x} - x + 1$$

Chapitre 2

Méthodes de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre

2.1 Équations différentielles linéaires du second ordre aux coefficients constants

2.1.1 Équations sans second membre

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre toute équation différentielle de la forme:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.1.1}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec a non nul et y la fonction inconnue .

Le polynôme $P(r) = ar^2 + br + c$ s'appelle le polynôme caractéristique associé à (2.1.1).

Notons S l'ensemble des solutions de (2.1.1).

Proposition 2.1.1 *S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Si y et z deux solutions de (2.1.1), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha y + \beta z$ est solution de (2.1.1) car on a:

2.1. Équations différentielles linéaires du second ordre aux coefficients constants

$$a(\alpha y + \beta z)'' + b(\alpha y + \beta z)' + c(\alpha y + \beta z) = \alpha a y'' + \beta a z'' + \alpha b y' + \beta b z' + \alpha c y + \beta c z = \\ \alpha (a y'' + b y' + c y) + \beta (a z'' + b z' + c z) = 0 \quad \blacksquare$$

Proposition 2.1.2 Soit $r \in \mathbb{C}$ alors la fonction $z : x \rightarrow e^{rx}$ est solution de (2.1.1) si et seulement si r est une racine du polynôme caractéristique P .

Preuve. $z'(x) = r e^{rx}$, $z''(x) = r^2 e^{rx}$

$$a r^2 e^{rx} + b r e^{rx} + c e^{rx} = 0 \iff a r^2 + b r + c = 0$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, on a la proposition suivante $\blacksquare$

Proposition 2.1.3 On suppose $\Delta \neq 0$ Soit r_1 et r_2 les racines distinctes du polynôme caractéristique, les deux solutions

$z_1 : x \rightarrow e^{r_1 x}$ et $z_2 : x \rightarrow e^{r_2 x}$ sont linéairement indépendantes.

Preuve. Soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda z_1 + \mu z_2 = 0$

$$\text{C.a.d} \quad \lambda z_1(x) + \mu z_2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

$$\lambda z_1'(x) + \mu z_2'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} = z_1(x) z_2'(x) - z_1'(x) z_2(x) = r_2 e^{(r_1+r_2)x} - r_1 e^{(r_1+r_2)x} = (r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$$

Ce qui implique que $\lambda = \mu = 0$ $\blacksquare$

Proposition 2.1.4 Soit $r \in \mathbb{R}$ et $z_{1,r}$ la fonction $x \rightarrow x e^{rx}$. La fonction $z_{1,r}$ est solution de (2.1.1) si et seulement si r est la racine double du polynôme caractéristique P .

Preuve. $z_{1,r}(x) = x e^{rx} \rightarrow z_{1,r}'(x) = e^{rx} + r x e^{rx} = (1 + r x) e^{rx}$

$$z_{1,r}''(x) = r e^{rx} + r(1 + r x) e^{rx} = (2r + r^2 x) e^{rx}$$

$$(2.1.1) \iff [a(2r + r^2 x) + b(1 + r x) + c x] e^{rx} = 0 \iff a(2r + r^2 x) + b(1 + r x) + c x = 0$$

$$\iff (ar^2 + br + c)x + 2ar + b = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff ar^2 + br + c = 0 \text{ et } r = -\frac{b}{2a} \quad \blacksquare$$

Proposition 2.1.5 *On suppose $\Delta = 0$. Soit r la racine double du polynôme caractéristique P .*

Les solutions $z_r : x \rightarrow e^{rx}$ et $z_{1,r} : x \rightarrow xe^{rx}$ sont linéairement indépendantes .

Preuve. En procédant de façon analogue que pour la preuve de la proposition (2.1.3), nous obtenons que le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} z_r(x) & z_{1,r}(x) \\ z'_r(x) & z'_{1,r}(x) \end{vmatrix} = (1 + rx)e^{2rx} - rxe^{2rx} = e^{2rx} \neq 0$$

non nul, d'où l'indépendance linéaire des deux solutions. ■

Théorème 2.1.1 *Soit $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$, S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :*

$$(2.1.1) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

Alors on a les résultats suivants :

(i) S est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si $\Delta > 0$, les racines r_1, r_2 de P sont réelles , et l'on a :

$$s = \{y/y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}, \forall x \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$$

(iii) Si $\Delta = 0$, soit r la racine double de P , alors on a:

$$s = \{y/y(x) = (k_1 + k_2 x) e^{rx}, \forall x \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$$

(iv) Si $\Delta < 0$, notons $r_1 = -\frac{b}{2a} + i\omega$ et $r_2 = -\frac{b}{2a} - i\omega$, avec $\left(\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$, les deux racines complexes du polynôme P , alors on a:

$$s = \left\{ y/y(x) = (k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x) e^{-\frac{b}{2a}x}, \forall x \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Preuve. (i) Supposons $\Delta \neq 0$, et soient r_1 et r_2 les racines de P , soit z une solution de (2.1.1). Soient k_1 et k_2 deux fonctions solutions du système :

$$k_1(x) z_{r_1}(x) + k_2(x) z_{r_2}(x) = z(x), \forall x$$

$$k_1(x) z'_{r_1}(x) + k_2(x) z'_{r_2}(x) = z'(x)$$

On obtient :

$$k_1(x) = \frac{(zz'_{r_2} - z'z_{r_1})(x)}{(z_{r_1}z'_{r_2} - z'_{r_1}z_{r_2})(x)} \quad k_2(x) = \frac{(zz'_{r_2} - z'z_{r_1})(x)}{(z_{r_1}z'_{r_2} - z'_{r_1}z_{r_2})(x)}$$

On calcule $k'_1(x)$ et $k'_2(x)$, et on utilise le fait que z , z_{r_1} et z_{r_2} sont solutions de (2.1.1), ce qui donne:

$k'_1(x) = k'_2(x) = 0$ d'où $k_1(x) = k_1$ et $k_2(x) = k_2$ donc $z(x) = k_1 z_{r_1}(x) + k_2 z_{r_2}(x)$, donc $\{z_{r_1}, z_{r_2}\}$ base de S .

Même démarche si $\Delta = 0$, en considérant z_r et $z_{1,r}$, où r est la racine double du polynôme caractéristique P ■

Théorème 2.1.2 (*problème de Cauchy*)

Etant donné un nombre réel x_0 et deux nombres complexes y_0 et z_0 , il existe une solution et une seule y de l'équation: $ay'' + by' + cy = 0$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$

Preuve. 1^{er} cas: $\Delta \neq 0$, s'agit de trouver deux constantes réelles k_1 et k_2 telles que:

$$\begin{cases} k_1 e^{r_1 x_0} + k_2 e^{r_2 x_0} = y_0 \\ k_1 r_1 e^{r_1 x_0} + k_2 r_2 e^{r_2 x_0} = z_0 \end{cases}$$

Le système est de Cramer d'après **la proposition** (2.1.3)

2^{ème} cas: $\Delta = 0$, on est conduit à étudier le système:

$$\begin{cases} k_1 e^{r_1 x_0} + k_2 e^{r_2 x_0} = y_0 \\ k_1 r_1 e^{r_1 x_0} + k_2 r_2 e^{r_2 x_0} = z_0 \end{cases}$$

Le système étant de Cramer d'après **la proposition** (2.1.5), la solution existe et elle est unique. ■

2.1.2 Équations avec second membre

Soit $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$, nous nous proposons de résoudre l'équation différentielle:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (2.1.2)$$

On appelle équation sans second membre (ou équation homogène) associée à (2.1.2) l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.1.1)$$

Notons S_g l'ensemble des solutions de (2.1.2); on suppose que g est choisie de telle façon que S_g soit non vide.

Soit S l'ensemble des solutions de (2.1.2) ; on suppose que g est choisie de telle façon que S_g soit non vide.

Soit S l'ensemble des solutions de (2.1.1).

Etant donné une solution particulière φ_1 de (2.1.2), pour que φ soit solution de (2.1.2), il faut et il suffit que $\varphi - \varphi_1$ soit solution de (2.1.1).

$$S_g = \varphi_1 + S \Leftrightarrow \forall \varphi \in S_g, \exists \psi \in S : \varphi = \varphi_1 + \psi$$

Corollaire 2.1.1 : *Problème de Cauchy*

Etant donné trois nombres réels x_0 , y_0 et z_0 , il existe une solution et une seule y de (2.1.2) telle que :

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = z_0$$

Preuve. Soit φ_1 une solution particulière de (2.1.2) On cherche sous la forme $\varphi = \varphi_1 + \psi$

$$y_0 = \varphi(x_0) = \varphi_1(x_0) + \psi(x_0) \quad \text{et} \quad z_0 = \psi'(x_0) = \varphi_1'(x_0) + \psi'(x_0)$$

$$\psi(x_0) = y_0 - \varphi_1(x_0)$$

$$\psi'(x_0) = z_0 - \varphi_1'(x_0)$$

La solution est unique d'après le théorème de Cauchy ■

Remarque 2.1.1 : *Principe de superposition*

Si y_k est solution de l'équation :

$ay'' + by' + cy = f_k$, $1 \leq k \leq n$, n entier fixé et si $f = \sum_{k=1}^n f_k$, alors $y = \sum_{k=1}^n y_k$ est solution de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = f$$

2.1.3 Recherche d'une solution particulière pour les équations à seconds membres remarquables

a) $ay'' + by' + cy = p_n(x)$, où P_n est une fonction polynôme de degré n . Cherchons une solution particulière notée y_0 de l'équation ci-dessus. Trois cas sont possibles :

- (i) Si $c \neq 0$, on prend $y_0(x) = Q_n(x)$, $\deg Q_n = n$
- (ii) Si $c = 0$ et $b \neq 0$, $y_0(x) = Q_{n+1}(x)$, $\deg Q_{n+1} = n + 1$
- (iii) Si $c = b = 0$, $y_0(x) = Q_{n+2}(x)$, $\deg Q_{n+2} = n + 2$

Exemple 2.1.1 Résoudre l'équation $y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Chercher une solution particulière de l'équation avec second membre qui soit un polynôme

L'équation homogène s'écrit $y'' + y' + y = 0$. Le polynôme caractéristique correspondant $P(x) = X^2 + X + 1$ a pour racines les nombres $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ et $\bar{j} = \exp(-\frac{2i\pi}{3})$. Toute solution de l'équation homogène est de la forme:

$y(x) = \lambda e^{\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mu e^{\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. L'équation complète a une solution particulière P qui est un polynôme de degré 3. On trouve facilement $P(x) = X^3 + 1$. Cette solution vérifie les conditions initiales. L'unicité de la solution permet de conclure que $y(x) = X^3 + 1$.

Les coefficients du polynôme Q_m sont déterminés par identifications.

b) $ay'' + by' + cy = De^{t\lambda}$, où D et λ sont des constantes réelles.

Trois cas sont possibles :

(i) Si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on prend:

$$y_0(x) = \frac{D}{a\lambda^2 + b\lambda + c} e^{t\lambda}$$

(ii) Si λ est une racine simple du polynôme caractéristique, on prend:

$$y_0(x) = \frac{D}{2a\lambda + b} x e^{t\lambda}$$

(iii) Si λ est racine double du polynôme caractéristique, on prend :

$$y_0(x) = \frac{D}{2a} x^2 e^{t\lambda}$$

c) $ay'' + by' + cy = p_n(x) e^{\lambda x}$, P_n de degré n , constante réelle.

Trois cas sont possibles :

(i) Si n'est pas racine du polynôme caractéristique, on prend:

$$y_0(x) = Q_n e^{\lambda x} \text{ avec } \deg Q_n = n$$

(ii) Si est une racine simple du polynôme caractéristique, on prend :

$$y_0(x) = Q_{n+1} e^{\lambda x} \text{ avec } \deg Q_{n+1} = n + 1$$

(iii) Si est racine double du polynôme caractéristique, on prend :

$$y_0(x) = Q_{n+2} e^{\lambda x} \text{ avec } \deg Q_{n+2} = n + 2$$

Les coefficients du polynôme Q_m sont déterminés par identifications.

d) $ay'' + by' + cy = e^{\lambda x} \cdot (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$, A et B étant des constantes réelles.

Deux cas sont possibles :

(i) Si $\lambda + i\omega$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on prend comme solution particulière:

$$y_0(x) = e^{\lambda x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$$

(ii) Si $\lambda + i\omega$ est une racine du polynôme caractéristique, on prend comme solution particulière:

$$y_0(x) = x e^{\lambda x} (C \cos \omega x + D \sin \omega x)$$

Les constantes réelles C et D sont déterminées par identifications en utilisant le fait que les fonctions $x \rightarrow e^x \cos \omega x$ et $x \rightarrow e^x \sin \omega x$ sont linéairement indépendantes.

2.1.4 Méthode de lagrange (ou de variation de la constante)

Soit à résoudre l'équation:

(2.1.2) $ay'' + by' + cy = f$ $a \in \mathbb{R}^*$, f étant une fonction continue. Discutons suivant le discriminant Δ :

1^{er} cas: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$:

Soit r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation $ar^2 + br + c = 0$

La solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (2.1.2) est de la forme:

$$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

On cherche alors la solution de (2.1.2) en considérant :

$$y(x) = k_1(x) e^{r_1 x} + k_2(x) e^{r_2 x}$$

2.1. Équations différentielles linéaires du second ordre aux coefficients constants

On a :

$$y'(x) = \left(r_1 k_1(x) + k_1'(x) \right) e^{r_1 x} + \left(r_2 k_2(x) + k_2'(x) \right) e^{r_2 x}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left(r_1^2 k_1(x) + r_1 k_1'(x) \right) e^{r_1 x} + \left(r_2^2 k_2(x) + r_2 k_2'(x) \right) e^{r_2 x} + \left(r_1 k_1'(x) + k_1''(x) \right) e^{r_1 x} \\ &\quad + \left(r_2 k_2'(x) + k_2''(x) \right) e^{r_2 x} \end{aligned}$$

Nous imposons la condition:

$$k_1'(x) e^{r_1 x} + k_2'(x) e^{r_2 x} = 0$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (ar_1^2 + br_1 + c) k_1(x) e^{r_1 x} + (ar_2^2 + br_2 + c) k_2(x) e^{r_2 x} \\ &\quad + a \left(r_1 k_1'(x) e^{r_1 x} + r_2 k_2'(x) e^{r_2 x} \right) = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{où } (ar_1^2 + br_1 + c) = 0 \text{ et } (ar_2^2 + br_2 + c) = 0$$

$$\Rightarrow a \left(r_1 k_1'(x) e^{r_1 x} + r_2 k_2'(x) e^{r_2 x} \right) = f(x)$$

La fonction

$$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

sera solution de (2.1.2) si k_1 et k_2 vérifient le système :

$$\begin{cases} k_1'(x) e^{r_1 x} + k_2'(x) e^{r_2 x} = 0 \\ r_1 k_1'(x) e^{r_1 x} + r_2 k_2'(x) e^{r_2 x} = \frac{f(x)}{a} \end{cases}$$

$$k_1'(x) = \frac{1}{a(r_1 - r_2)} e^{-r_1 x} f(x)$$

$$k_2'(x) = \frac{1}{a(r_1 - r_2)} e^{-r_2 x} f(x)$$

La solution générale de (2.1.2) s'obtient de la façon :

$$y(x) = k_1(x) e^{r_1 x} + k_2(x) e^{r_2 x} + K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$$

$$y(x) = (k_1(x) + K_1) e^{r_1 x} + (k_2(x) + K_2) e^{r_2 x}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Finalement la solution générale est la suivante :

$$y(x) = \frac{1}{a(r_1 - r_2)} \left[e^{r_1 x} \int_a^x e^{-r_1 t} f(t) dt - e^{r_2 x} \int_a^x e^{-r_2 t} f(t) dt \right] + K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$$

2^{ème} cas: $\Delta > 0$

La solution générale de l'équation homogène associée à (2.1.2) peut s'écrire :

$$y(x) = (K_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x) e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}$$

où $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

On cherche la solution de (2.1.2) sous la forme :

$$y(x) = (K_1(x) \cos \omega x + k_2(x) \sin \omega x) e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}$$

En procédant de façon analogue au cas précédent, on obtient le système :

$$\begin{cases} (\cos \omega x) k_1'(x) + (\sin \omega x) k_2'(x) = 0 \\ -(\sin \omega x) k_1'(x) + (\cos \omega x) k_2'(x) = \frac{1}{a\omega} f(x) e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} k_1'(x) = -\frac{1}{a\omega} f(x) e^{+\left(\frac{b}{2a}\right)x} (\sin \omega x) \\ k_2'(x) = \frac{1}{a\omega} f(x) e^{+\left(\frac{b}{2a}\right)x} (\cos \omega x) \end{cases}$$

La solution générale de (2.1.2) est donnée par la formule suivante :

$$y(x) = -\frac{1}{a\omega} (\cos \omega x) e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \int_a^x f(t) e^{+\left(\frac{b}{2a}\right)t} (\sin \omega t) dt + \frac{1}{a\omega} (\sin \omega x) e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \int_a^x f(t) e^{+\left(\frac{b}{2a}\right)t} (\cos \omega t) dt + (K_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x) e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

3^{ème} cas: $\Delta = 0$, la solution générale de (2.1.2) est donnée par :

$$y(x) = \frac{1}{a} e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \left[\int_a^x f(t) e^{+\left(\frac{b}{2a}\right)t} dt - \int_a^x t f(t) e^{+\left(\frac{b}{2a}\right)t} dt \right] (K_1 + k_2 x) e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Remarque 2.1.2 La résolution de l'équation (2.1.2) peut s'effectuer de la façon suivante:

2.2. Équations linéaires du second ordre(EDL2)

1^{er} cas: $\Delta \geq 0$.

Soit r une racine du polynôme caractéristique. On cherche une solution de (2.1.2) sous la forme:

$$y(x) = z(x) e^{rx}$$

Nous obtenons une équation différentielle en z :

$$az'' + (2ar + b)z' = f(x) e^{-rx}$$

En posant $u = z'$, nous avons une équation différentielle linéaire en u :

$$au' + (2ar + b)u = f(x) e^{-rx}$$

La résolution de l'équation ci-dessus permettra la détermination de z .

2^{ème} cas: $\Delta < 0$.

Soit $\alpha + i\beta$ une racine du polynôme caractéristique. Cherchons une solution de (2.1.2) sous la forme:

$$y(x) = z(x) e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$$

L'équation obtenue est la suivante:

$$z'' e^{\alpha x} \cos x - 2\beta z' e^{\alpha x} \sin \beta x = f(x)$$

En posant $u = z'$, nous avons une équation différentielle linéaire en u :

$$u' e^{\alpha x} \cos x - 2\beta u e^{\alpha x} \sin \beta x = f(x)$$

La résolution de l'équation ci-dessus permettra de déterminer la fonction u et d'en déduire z ensuite.

2.2 Équations linéaires du second ordre(EDL2)

Une équation différentielle linéaire du second ordre est de la forme :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (2.2.1)$$

Où p , q et g sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I =]\alpha, \beta[$

2.2.1 Équations sans second membre

L'équation homogène associée à (2.2.1) s'écrit :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.2.2)$$

Soit S l'ensemble des solutions de (2.2.2), on a le résultat suivant:

(i) Soient $y_1, y_2 \in S$, alors y_1 et y_2 sont linéairement indépendants si et seulement si $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour un $x \in I$, avec

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x).y_2'(x) - y_2(x).y_1'(x)$$

(ii) Soient y_1 et $y_2 \in S$ vérifiant la condition (i), alors:

$$S = \{y / y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Méthode de la réduction de l'ordre

Soit y_1 une solution de l'équation (2.2.2)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

On cherche la solution sous la forme :

$$y = \nu.y_1$$

En effectuant les calculs, on obtient l'équation :

$$\nu'' + \left(p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)\nu' = 0 \quad (2.2.3)$$

En posant $w = \nu'$, on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre.

2.2.2 Équations avec second membre

On reprend l'équation initiale:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (2.2.1)$$

Soit y_p une solution particulière de (2.2.1) : y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de (2.2.2) , alors la solution générale de (2.2.1) s'écrit :

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Méthode de la réduction

Partant d'une solution particulière y_1 de (2.2.2) , on cherche la solution de (2.2.1) sous la forme $y = \nu \cdot y_1$, nous obtenons l'équation différentielle suivante qui peut se transformer en une équation linéaire du premier ordre en posant $w = \nu'$:

$$y_1 \nu'' + 2(y_1' + y_1 p) \nu' = g$$

Remarque :

a) L'espace vectoriel des solutions de l'équation :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.2.2)$$

p, q continues est de dimension ≤ 2 .

Il existe au plus une solution telle que: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$

b) Deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (2.2.2) sont linéairement indépendantes si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \text{ est différent de } 0 \text{ pour tout } x.$$

2.2.3 Équation d'Euler (d'ordre 2)

Définition 2.2.1 On appelle équation d'Euler (d'ordre 2) toute équation de la forme :

2.2. Équations linéaires du second ordre(EDL2)

$$at^2 y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0 \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.2.4)$$

Méthode de la résolution :

Deux techniques de résolution :

1) Rechercher des solutions sous la forme $y(t) = t^r$ avec $r \in \mathbb{C}$, comme ci-contre.

2) On pose $y(t) = z(\ln t)$.

On obtient une équation en z à coefficients constants.

Résoudre l'équation d'Euler : (E₀): $at^2 y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0$

Méthode 1 : On recherche des solutions sous la forme $y(t) = t^r$ avec $r \in \mathbb{C}$

On a alors :

$$at^2 r(r-1)t^{r-2} + btrt^{r-1} + ct^r = 0$$

Et comme $t > 0$:

$$a(r^2 - r) + br + c = 0$$

On obtient l'équation caractéristique d'Euler :

$$(\varsigma) : ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

Si (ς) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 alors, on obtient deux solutions :

$$y_1(t) = t^{r_1} \quad \text{et} \quad y_2(t) = t^{r_2}$$

On vérifie que ces deux solutions sont indépendantes en calculant leur Wronskien :

$$\forall t \in I, W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} t^{r_1} & t^{r_2} \\ r_1 t^{r_1-1} & r_2 t^{r_2-1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)t^{r_1-1} \neq 0 \text{ car } r_1 \neq r_2$$

D'où : $S_0(I) = \{y : t \in I \rightarrow At^{r_1} + Bt^{r_2}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

Si (ς) admet une racine double r_0 alors on obtient une première solution : $y_1(t) = t^{r_0}$

Cette solution ne s'annulant pas sur I , on peut appliquer la méthode de Lagrange pour trouver une seconde solution y_2 indépendante de y_1 :

Posons :

2.2. Équations linéaires du second ordre(EDL2)

$$y_2(t) = \lambda(t)t^{r_0} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}^2(I)$$

On a successivement :

$$y_2'(t) = \lambda'(t)t^{r_0} + r_0\lambda(t)t^{r_0-1}$$

$$y_2''(t) = \lambda''(t)t^{r_0} + 2r_0\lambda'(t)t^{r_0-1} + r_0(r_0-1)\lambda(t)t^{r_0-2}$$

En remplaçant dans l'équation d'Euler, on obtient :

$$at^2 (\lambda''(t)t^{r_0} + 2r_0\lambda'(t)t^{r_0-1} + r_0(r_0-1)\lambda(t)t^{r_0-2}) + bt (\lambda'(t)t^{r_0} + r_0\lambda(t)t^{r_0-1}) + c (\lambda(t)t^{r_0}) = 0$$

$$a\lambda''(t)t^{r_0+2} + (2ar_0 + b) t^{r_0+1}\lambda'(t) + (ar_0(r_0-1) + br_0 + c) t^{r_0}\lambda(t) = 0$$

Et comme r_0 vérifie $ar_0(r_0-1) + br_0 + c = 0$, il reste :

$$a\lambda''(t)t^{r_0+2} + (2ar_0 + b) t^{r_0+1}\lambda'(t) = 0$$

Or, r_0 est racine double de (ς) donc

$$2ar_0 + (b - a) = 0$$

D'où

$$a\lambda''(t)t^{r_0+2} + at^{r_0+1}\lambda'(t) = 0$$

Et comme $at^{r_0+2} \neq 0$:

$$\lambda''(t) + \frac{1}{t}\lambda'(t) = 0$$

Posons $m = \mu$, ainsi nous avons une équation du premier ordre en μ :

$$\mu'(t) + \frac{1}{t}\mu(t) = 0$$

D'où

$$\mu(t) = k_1 e^{-\ln t} = \frac{k_1}{t}$$

$$\lambda(t) = k_1 \ln t + k_2$$

Et finalement :

$$y_2(t) = (k_1 \ln t + k_2) t^{r_0}$$

Une base de $S_0(I)$ est donc : $(t \rightarrow t^{r_0}, t \rightarrow t^{r_0} (\ln t))$

Méthode 2 : On pose

$$y = z \circ \ln$$

C'est-a-dire

$$y(t) = z(\ln(t))$$

On a alors

$$y'(t) = \frac{1}{t} z'(\ln(t))$$

En remplaçant(E_0) et en posant $x = \ln t$

$$az''(x) - az'(x) + bz'(x) + cz(x) = 0$$

On obtient équation en z à coefficients constants

Notons

$$(\varsigma) : ar^2 + (b - a)r + c = 0$$

Si (ς) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 alors:

$$z(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

$$y(t) = z(\ln(t)) = At^{r_1} + Bt^{r_2}$$

Si (ς) admet une racine double r_0 alors:

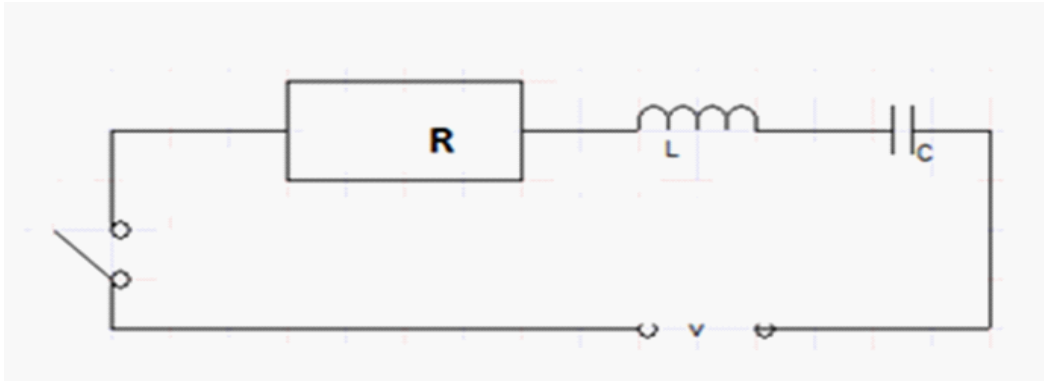
$$z(x) = (A + Bx) e^{r_0 x} \quad \Rightarrow \quad y(t) = z(\ln(t)) = (A + B \ln t) t^{r_0}$$

2.3 Applications (équations linéaires du second ordre)

Exemple 2.3.1 circuit R, L, C en régime transitoire . On maintient aux bornes A et B du circuit ci-dessous une différence de potentiel V constante . C est régie par l'équation différentielle

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V \quad (2.3.1)$$

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, on ferme le circuit et que la charge de C à cet instant est 0. calculer la charge q du condensateur en fonction du temps



Posons: $\delta = \frac{1}{2L} \left| R^2 - \frac{4L}{C} \right|^{\frac{1}{2}}$ et $\alpha = -\frac{R}{2L}$

l'équation(2.3.1) a une solution particulière constante : $q = CV$.

Si $R^2 > \frac{4L}{C}$, les racines du polynôme caractéristique sont $-\alpha \pm \delta$ et toute solution de l'équation(2.3.1) est de la forme : $q(t) = e^{-\alpha t}(\lambda e^{\delta t} + \mu e^{-\delta t}) + CV$, ou $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. les conditions initiales $q(0) = 0, q'(0) = 0$ s'écrivent:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -CV \\ -\alpha(\lambda + \mu) + \delta(\lambda - \mu) = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système ,on aboutit à :

$$q(t) = CV \left[1 - e^{-\alpha t} \left(ch \delta t + \frac{\alpha}{\delta} sh \delta t \right) \right]$$

Cette solution est dite **apériodique**

2.3. Applications (équations linéaires du second ordre)

Si $R^2 < \frac{4L}{C}$, les racines du polynôme caractéristique sont complexes conjuguées et valent $-\alpha \pm i\delta$. On exprime alors la solution avec des fonctions circulaires et à l'aide des conditions initiales, on trouve :

$$q(t) = CV [1 - e^{-\alpha t} (\cos \delta t + \sin \delta t)]$$

Cette solution est dite **pseudo-périodique** de pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\delta}$

Si $R^2 = \frac{4L}{C}$, la solution s'écrit :

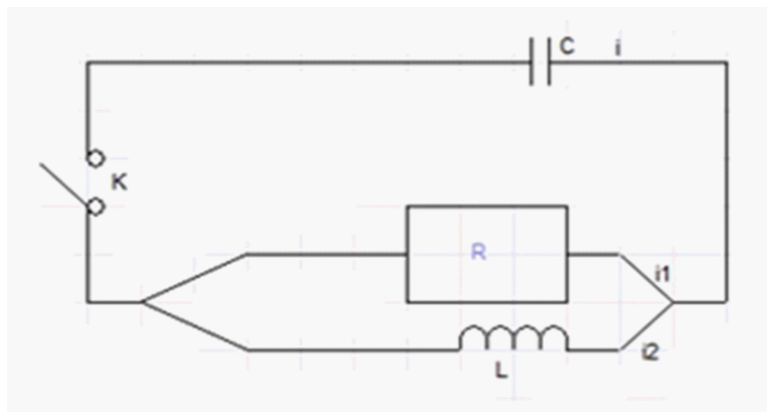
$$q(t) = CV [1 - e^{-\alpha t} (1 + \alpha t)]$$

On remarquera que cette dernière solution est la limite des premières lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Dans les trois cas traités, on constate que lorsque $t \rightarrow +\infty$, $q(t) \rightarrow CV$. lorsque le condensateur est chargé, le courant

$$i(t) = q'(t) = 0$$

Exemple 2.3.2 Décharge d'un condensateur dans un circuit comportant une dérivation



Dans un circuit ci-dessus, l'interrupteur K est fermé à l'instant $t = 0$ et la charge du condensateur est égale à cet instant à q_0 .

Calculer le courant i en fonction du temps. Montrer que $i(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

2.3. Applications (équations linéaires du second ordre)

Désignons respectivement par i_1 et i_2 les intensités des courants circulant dans l'arésistance R et dans la bobine L .

soit $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t les soit l'électrocinétique impliquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} Ri_1 = L \frac{di_2}{dt} = -\frac{q}{C} \\ i = i_1 + i_2 \\ i = \frac{dq}{dt} \end{array} \right.$$

Eliminons le courant i , nous obtenons le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_2}{dt} = -\frac{q}{CL} \\ \frac{dq}{dt} = i_2 - \frac{q}{CR} \end{array} \right.$$

Eliminons i_2 en écrivant la deuxième équation:

$$CR \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} + \frac{R}{L}q = 0 \quad (2.3.2)$$

cette équation est à résoudre avec les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} q(0) = q_0 \\ q'(0) = i(0) = 0 \end{array} \right.$$

Soit $\Delta = 1 - 4\frac{CR^2}{L}$ le discriminant du plynôme caractéristique de l'équation (2.3.2) .trois cas se présentent , comme dans précédent , selon la valeur de Δ . traitons le cas $\Delta > 0$, les autres ccas sont analogues . soient r_1 et r_2 les racines du plynôme caractéristique :

$$q(t) = A\left(\frac{e^{r_2t}}{r_2} - \frac{e^{r_1t}}{r_1}\right)$$

Où la costante A est obtenue en exprimant $q(0) = q_0$.

Le courant i s'ecrit donc pour tout $t \geq 0$:

$$i(t) = A(e^{r_2t} - e^{r_1t})$$

Les deux racines r_1 et r_2 négatives donc $i(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.ceci est normal : le condensateur s'est déchargé .

Si $\Delta < 0$ les racines r_1 et r_2 sont complexes conjuguées .

2.3. Applications (équations linéaires du second ordre)

Elles ont une partie réel négative et on prouvera de même que $i(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Chapitre 3

Systèmes différentiels linéaires du premier ordre

Pour donner à notre travail une généralisation analytique on obtient , dereniermant la définition , de systemé différentielle d'ordre un . Avec ses méthodes du résolution par ses utilisations dans les domaines , étélectricité , physique , mecanique et tous les recharches scientifiques .

3.1 Définitions

- On notera K l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans les problèmes où les coefficients sont réels, $K = \mathbb{R}$ et on cherchera une solution réelle, même s'il est commode de commencer par chercher une solution complexe (choisissant alors $K = \mathbb{C}$). Et on supposera toujours que E est un espace de Banach sur le corps K . Pour les systèmes différentiels on prendra $E = K^n$, i.e. $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$.

N.B. : la variable t (le "temps") sera toujours une variable réelle.

- Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (non vide).

Définition 3.1.1 Une application $f : I \times E \rightarrow E$ notée $f(t; x)$ est dite linéaire en x si :

$$f(t; x) \stackrel{\text{déf}}{=} a(t)(x); \forall x \in E$$

Où $a : I \rightarrow L(E)$ est une fonction continue sur I . (On rappelle que $L(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E , i.e. l'ensemble des applications linéaires de $E \rightarrow E$.)

La linéarité de f en x s'écrit, pour tout $t \in I$, tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in K$:

$$f(t, x + \lambda y) = f(t, x) + \lambda f(t, y) \text{ ou bien } a(t)(x + \lambda y) = a(t)(x) + \lambda a(t)(y).$$

Exemple 3.1.1 Avec $E = \mathbb{R}$: avec $I = \mathbb{R}$, prendre par exemple $f(t, \cdot) = a(t)(\cdot)$

où $a(t) = 1, a(t) = t^2$; et avec $I =]0; \infty[$, un exemple est donné par $a(t) = \frac{1}{t}$. Ce n'est donc pas a qui est linéaire : mais pour chaque t , c'est $a(t) : E \rightarrow E$ qui l'est.

Notation 3.1.1 Pour chaque t , La fonction $a(t) : x \in E \rightarrow a(t)(x) \in E$ étant linéaire, on note, pour tout et tout $x \in E$:

$$a(t)(x) = a(t).x$$

Définition 3.1.2 Une application $f : I \times E \rightarrow E$ notée $f(t, x)$ est dite affine en x si :

$$f(t; x) \stackrel{\text{déf}}{=} a(t)(x) + b(t), \forall x \in E.$$

Où $a : I \rightarrow L(E)$ et $b : I \rightarrow E$ sont des fonctions continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.3 L'équation différentielle $x' = f(t, x)$ est dite linéaire si f est affine en x (attention donc), i.e. si elle est de la forme :

$$x' = a(t).x + b(t) \tag{3.1.1}$$

L'équation différentielle est dite linéaire homogène si f est linéaire en x , i.e. si elle est de la forme :

$$x' = a(t).x \tag{3.1.2}$$

On dit également qu'elle est linéaire sans second membre, sous entendue qu'elle s'écrit $x' - a(t).x = 0$.

Et une solution d'une équation différentielle linéaire est donc une fonction $\varphi : I \rightarrow E$ qui vérifie :

$$\varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t), \forall t \in I \quad (3.1.3)$$

Où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ où a et b sont continues, et qu'elle satisfait la condition initiale (t_0, x_0) si $\varphi(t_0) = x_0$.

3.2 Système différentiel du premier ordre

Dans le cas particulier où $E = E_1 \times \dots \times E_n$ est le produit cartésien des espaces vectoriels

$E_1, \dots, E_n$, on a $x \in E = E_1 \times \dots \times E_n$ et $f(t, x) \in E = E_1 \times \dots \times E_n$. On pourra alors noter $\vec{x}$ au lieu de x et $\vec{f}$ au lieu de f et le problème de Cauchy (1.3) s'écrit alors :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}), \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (3.2.1)$$

Ou encore si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\vec{f}(t, \vec{x}) = \begin{cases} \vec{f}_1(t, \vec{x}) \\ \vdots \\ \vec{f}_n(t, \vec{x}) \end{cases}$ où les $f_i : [0, T] \times E \rightarrow E_i$ sont n

fonction

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1(t_0) = x_{01} \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

3.2. Système différentiel du premier ordre

On dit qu'on a dans ce cas un système différentiel du premier ordre. La fonction inconnue

$\varphi : I \rightarrow E$ est alors notée $\vec{\varphi}$, et on note $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ la fonction vectorielle inconnue, les

fonctions inconnues

$\varphi_i : I \rightarrow E_i$ étant les n fonctions scalaires composantes de $\vec{\varphi}$.

Le système différentiel est un système dit couplé : chaque fonction φ_i inconnue dépend des autres valeurs inconnues φ_j pour $j = 1, \dots, n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1'(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n'(t) = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(t_0) = x_{01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n(t_0) = x_{0n} \end{array} \right.$$

La condition initiale est donc ici un couple $(t_0, \vec{x}_0) \in I \times E$ telle que la fonction (vectorielle) inconnue cherchée satisfasse à $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. Cette CI (vectorielle) est donc composée des n CI (t_0, x_{0i}) .

Et on dit également qu'on a dans ce cas n conditions initiales (une pour chacune des fonctions φ_i).

Exemple 3.2.1 *Le système :*

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Est un système différentiel (linéaire) : ici $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si on pose $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 \\ f_2(t, x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$ on a l'équation différentiel $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}$, i.e. le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

à résoudre.

On verra que ce système est un système différentiel linéaire (à coefficients constants), et qu'on l'écrira sous la forme matricielle :

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

où A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. L'unicité de la solution sera obtenue une fois des conditions initiales imposées.

3.3 Équation différentielle linéaire d'ordre n

3.3.1 Équation différentielle d'ordre n

On regarde le cas particulier d'un système différentiel d'ordre 1 où $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, \dots, x_n) = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) = x_n \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Et le problème de Cauchy $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$ avec C.I. $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ est donc donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(t_0) = x_{01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{array} \right.$$

On pose alors $x = x_1$, d'où $x'_n = x''_{n-1} = \dots = x^{(n)}_1 = x^{(n)}$, et on obtient immédiatement l'équation différentielle :

$$\frac{d^n x}{d^n t} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_{01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n} \end{array} \right.$$

Dite équation différentielle d'ordre n : en particulier, une équation différentielle d'ordre n possède n conditions initiales (scalaires).

Réciproquement, étant donnée une équation différentielle d'ordre n sous la forme:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

On peut la mettre immédiatement sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 : on définit les fonctions f_i par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(t, x_1, \dots, x_n) = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) = x_n \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \end{array} \right.$$

Et le système différentiel à résoudre est (3.1.3) (en fait, seule l'inconnue $x = x_1$ nous intéresse).

Donc une équation différentielle d'ordre n est un cas particulier d'un système différentiel.

Et la condition initiale est $(t_0, \vec{x}_0) = (t_0, x(t_0), x'_0(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))$. On dit aussi qu'on a n conditions initiales $x(t_0), x'_0(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$ (à l'instant t_0).

3.3.2 Équation différentielle linéaire d'ordre n

On regarde le cas particulier d'un système différentiel d'ordre 1 quand $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 \end{pmatrix} \text{ où } b \text{ et les } a_i \text{ sont des fonctions de } t. \text{ Le système}$$

différentiel s'écrit dans ce cas :

$$\vec{x}' = A.\vec{x} + b, A \in M_{n \times n} \text{ s'écrit dans ce cas :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \dots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + b \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x_1(t_0) = x_{01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

En particulier, on a $x_2 = x'_1, x_3 = x'_2 = x''_1, \dots, x'_{n-1} = x_1^{(n-1)}$ et donc l'inconue

$x_1 = \text{notée } x$ est solution de l'équation différentielle : $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots +$

$$a_{n-1} x' + a_n x = b \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_{01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n} \end{array} \right.$$

dite équation différentielle (scalaire) d'ordre n avec ses n conditions initiales (les n constantes d'intégration).

Réciproquement, une équation différentielle d'ordre n sous la forme:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = b \quad \text{avec } x(t_0) = x_{01}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n} \quad (3.3.2)$$

Peut être mise immédiatement sous la forme du système différentiel d'ordre 1 (3.2.1): pour cela on pose $x_1 = x$ et on introduit (on cherche) également $n - 1$ autres fonctions qu'on note $x_2, \dots, x_n$ qui vérifient les équations $x_j = x'_{j-1}$ avec pour $2 \leq j \leq n - 1$ et les **C.I.** $x_i(t_0) = x_{0i}$ (Donc x_j est une dérivée de x_{j-1} .)

Et le système différentiel à résoudre est (3.2.1) En fait, seule l'inconnue $x = x_1$ nous intéresse, les autres fonctions x_i pour $i \geq 2$ étant des intermédiaires de calcul.

Interprétation: $x_1 = x$ est la solution cherchée, solution de (3.2.1), qui peut s'interpréter comme une trajectoire, i.e. $x_1(t)$ est la position à l'instant t ; $x_2 = x'$ est la vitesse; $x_3 = x''$ est l'accélération...

Donc une équation différentielle d'ordre n est un cas particulier d'un système différentiel. Et la condition initiale $(t_0, \vec{x}_0) = (t_0, x(t_0); x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))$ est alors équivalente aux $\ll n$ conditions initiales scalaires $x(t_0); x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0) \gg$ (à l'instant t_0).

Exemple 3.3.1 Soit l'équation différentielle :

$$x^{(3)} = a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x + d(t)$$

$$x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta, \quad x''(0) = \gamma$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On renomme $x = x_1$ et on introduit l'inconnue supplémentaire x_2 telle que $x_2 = x' = x'_1$ (dérivée de x_1) et $x_3 = x'_2 = x''_1 = x''$. On doit donc résoudre : trouver les fonctions x_1, x_2 et x_3 t.q. :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = a(t)x_3 + b(t)x_2 + c(t)x_1 + d(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = \alpha \\ x_2(0) = \beta \\ x_3(0) = \gamma \end{array} \right.$$

Avec la C.I. $(0, (\alpha, \beta, \gamma))$, i.e. $x_1(0) = \alpha, x_2(0) = \beta$ et $x_3(0) = \gamma$. On obtiendra les fonctions solutions $t \rightarrow x_1(t)$,

$$t \rightarrow x_2(t) \text{ et } t \rightarrow x_3(t)$$

Conclusion

Depuis l'époque de Newton, les équations différentielles sont utilisées pour comprendre les phénomènes physiques, biologiques et architecturaux, et plus de cela elles contribuent à l'étude, l'analyse mathématique et l'économie et la sociologie.

On dit équation différentielle toute équation qui contient des dérivées et ces dernières sont les inconnues de ces équations, le but de la résolution de ces équations de trouver des primitives de ces fonctions telles que leurs dérivées vérifient ces équations.

Nous souhaiterons à l'avenir, que nous avons présentée sera enrichir afin d'aider les étudiants de fin d'étude qui sont intéressés à ce sujet.

Bibliographie

- [1] A.R. Forsyth. Theory of differential equations. Part IV, vol. VI. Cambridge, 1906
- [2] C.F. Carrier and C.E. Pearson, Partial Differential Equations, 2nd Edition, Academic Press, Boston, 1988
- [3] D. Grigoriev, F. Schwarz. Factoring and solving linear partial differential equations. Computing , vol. 73 , p. 179 – 197, 2004
- [4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger , Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Grundlehren, Vol . 224, Springer Verlag, Berlin, 1983
- [5] D.W. Jordan and P. Smith, Nonlinear Ordinary Differential Equations, 3rd Edition, Oxford University Press, Oxford, 1999
- [6] E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. t . 2 , Paris, 1898 .
- [7] E.L. Ince, Ordinary Differential Equations, Dover, New York, 1956.
- [8] F. Peng and Z. X. Chen, On the growth of solutions of some second-order linear differential equations, J. Inequal. Appl. 2011.
- [9] G. Birkhoff and G-C Rota, Ordinary Differential Equations 4th ed., John Wiley & Sons, 1989.
- [10] G. STEPHENSON , mathematical methods for science students , Longman, 1973, London
- [11] J.C. Burkill, The Theory of Ordinary Differential Equations, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956.

- [12] J. Lelong-Ferrand et J.-M. Arnaudiès, Cours de mathématiques tome 2, Dunod.
- [13] K. H. Kwon, Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations, Kodai Math. J.19(1996)
- [14] L.C.E vans, Partial Differential Equations . Graduate Studies in Mathematics ,Vol .19, AMS, Providence , 1991.
- [15] M. S. Liu, X. M. Zhang, Fixed points of meromorphic solutions of higher order Linear differential equations, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31(2006)
- [16] M.W. Hirsch, S. Smale and R.L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, 2nd Edition, Academic Press, New York,2004.
- [17] V.I.Arnold, Ordinary Differential Equations, Second printing of the 1992 edition, Springer-Verlag, Berlin, 2006
- [18] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, Elementary Differential Equations, 8th Edition, Wiley, New York, 2005.
- [19] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7th–9th eds., John Wiley & Sons.
- [20] W. Hurewicz, Lectures on Ordinary Differential Equations, Dover, New York,1990.

Abstract

In this note we offered ways to solve the differential equation the first document , also dealt with solution of ways to solve the differential equation of the second document ,and finally we have studied the linear differential equation systems first document.

Key words : problem Cauchy- differential equation the first document- differential equation of the second document- differential equation systems first document -homogeneous equation .

Résumé

Dans ce mémoire on expose dans le premier chapitre les méthode de résolution d'équation différentielle de premier ordre , et dans le deuxième chapitre on a traité les méthodes de résolution d'équation différentielle de deuxième ordre, finalement on a vue des systèmes différentielle linéaire de premier ordre .

Les mots clés : Problème de Cauchy- d'équation différentielle de premier ordre- d'équation différentielle de deuxième ordre- système différentielle linéaire de premier ordre- Equation homogène.

الملخص

في هذه المذكرة عرضنا في الفصل الأول طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى كما عالجتنا في الفصل الثاني طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ، وأخيرا درسنا حل جمل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى .

الكلمات المفتاحية : مسألة كوشي - المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى -المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية- جمل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى- المعادلات التفاضلية المتجانسة .