

Remerciements

En tout premier lieu, on remercie le bon Dieu, tout puissant, de nous avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

*Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au " **Approximations de solutions d'équations différentielles non linéaires.** ", sous la direction du " **Dr. Safia Meftah**", nos plus grande gratitude va à notre encadreur, pour sa disponibilité et la confiance qu'elle nous a accordée. On a profité pendant longtemps du savoir et du savoir-faire dont on a pu bénéficier au cours de nombreuses discussions. Nous aimerons aussi la remercier pour l'autonomie qu'elle nous a accordée, et ses précieux conseils qui nous ont permis de mener à bien ce travail.*

Afin de n'oublier personne, nos sincères remerciements vont à tous ceux qui nous ont aidés à réaliser notre mémoire.

Notations générales

$L_i(x)$	polynômes de base de Lagrange.
$P_n(x)$	polynômes d'interpolation de Lagrange .
$\triangle(x)$	l'Erreur d'interpolation .
$\delta_n(\epsilon)$	Fonctions d'ordre .
$E(x)$	l'approximation d'erreur.
$F(y, \dot{y})$	une fonction numérique par rapport à y et $\dot{y}$.
$\dot{y} = \frac{dy}{d\theta}$	la dérivée première de y par rapport à θ .
$\ddot{y} = \frac{d^2y}{d\theta^2}$	la dérivée deuxième de y par rapport à θ .
$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$	la dérivée première de F par rapport à y .
$F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	la dérivée deuxième de F par rapport à y .
$F_{\dot{y}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$	la dérivée première de F par rapport à $\dot{y}$.
$F_{y\dot{y}} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{y}}$	la dérivée deuxième de F par rapport à y et $\dot{y}$.
$F_{\dot{y}y} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial y}$	la dérivée deuxième de F par rapport à $\dot{y}$ et y .
$F_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}$	la dérivée deuxième de F par rapport à $\dot{y}$.

Table des figures

1.1	Asymptote verticale d'une fonction f .	4
1.2	Asymptote horizontale de la fonction f .	4
1.3	L'intersection des fonctions f_1 et f_2 .	6
1.4	Quelque itérations de la méthode de dichotomie	7

Table des matières

Introduction générale	1
1 Préliminaires	3
1.1 Approximation d'un nombre	3
1.1.1 Utilité d'approximation	3
1.2 Droite asymptotique	4
1.3 Approximation d'une solution d'équations non linéaire	5
1.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires	5
1.3.2 Méthode de dichotomie	6
1.3.3 Théorème du point fixe	9
1.4 Interpolation et approximation polynômiale	10
1.4.1 Interpolation de Lagrange	10
1.4.2 Formule d'Erreur	13
1.5 Théorie des perturbations	17
1.5.1 Introduction	17
1.5.2 Quelques Exemples	17
1.5.3 Développement simple	19
1.6 Solutions périodiques d'équations différentielles linéaires	20
2 Solutions des systèmes perturbés non linéaires	21
2.1 Perturbation simple	21
2.2 Méthode de Lindstedt-Poincaré	26
2.2.1 Termes séculaires	26

2.2.2	Principe de la méthode de Lindstedt-Poincaré	27
2.2.3	Exemple	29
3	Quelques résultats des solutions approximatives	37
3.1	Quelques Propositions	37
3.2	Comparaisons des solutions approximatives	40
3.3	Nouvelle approche	43
	Bibliographie	53

Introduction générale

L'approximation est une partie très importante en mathématiques. Cela signifie supprimer un grand nombre et les convertir en un entier ou en terminant un nombre décimal. Les chercheurs ont eu recours aux approximations en raison de la difficulté à résoudre certains problèmes, en particulier les problèmes difficiles et non linéaires.

L'une des théories qui peut être considérée bien ancienne que nouvelle et qui gagne actuellement une popularité considérable parmi les chercheurs et les mathématiciens et les mécaniciens est la théorie de la perturbation.

Dans les applications actuelles, certaines considérations nécessitent uniquement l'utilisation d'un petit nombre de termes dans l'expansion de la perturbation, mais l'application de la perturbation simple est problématique si nous voulons calculer une solution uniformément valide.

Par conséquent, pour structurer une solution uniformément valide, il faut rechercher une approximation qui élimine les termes à l'origine du problème (termes séculaires). Une technique pour éviter la présence de ces termes a été développée par Lindstedt.

Ce travail est divisé en trois chapitres.

- Le premier chapitre est consacré aux notions de base et outils fonctionnels concernant des différents types des solutions approximatives et la théorie de la perturbation utilisés dans ce travail.
- Dans le deuxième chapitre, nous donnons les notions et les propriétés préliminaires utilisées pour définir et étudier la méthode de perturbation simple et de la méthode de Lindstedt avec des exemples de base.

- Dans le dernier chapitre, nous donnons quelques résultats des approximations résultant de la méthode Lindstedt. De plus, nous démontrons des conditions supplémentaires d'approximations.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions fondamentales sur la théorie des approximations dans le cas générale et la théorie de perturbation que nous utiliserons dans les chapitres 2 et 3.

1.1 Approximation d'un nombre

La théorie d'approximation est une partie très importante des mathématiques. Cela signifie supprimer un grand nombre de nombres et les convertir en un entier ou en terminant un nombre décimal. C'est un outil très utile dans la vie quotidienne, grâce à l'approximation, nous avons pu réduire une énorme quantité d'énormes nombres décimaux en un entier composé de 5 ou 6 nombres, ainsi que nous pouvons estimer le montant d'argent et le temps et les distances approximatifs.

1.1.1 Utilité d'approximation

Lors de l'arrondi d'une décimale, nous supprimons une partie décimale. Par exemple, un nombre comme 2,9848425 est considéré comme un très grand nombre pour que nous puissions le lire. En gros, nous pouvons le lire facilement et supprimer tous ces chiffres jusqu'à ce que le résultat devienne 3. Sans l'approximation, nous aurions vécu une vie pleine de nombres décimaux que l'on ne peut pas lire.

Quelques exemples

- $\pi \simeq 3.141592654\dots$
- $e^1 \simeq 2.71828183$
- $\sqrt{2} \simeq 1.414213562\dots$

1.2 Droite asymptotique

On suppose que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- On dit que la courbe C_f de la fonction f admet une asymptote verticale $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

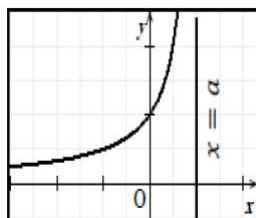


FIGURE 1.1 – Asymptote verticale d'une fonction f .

- On dit que la courbe C_f de la fonction f admet une asymptote horizontale $y = b$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

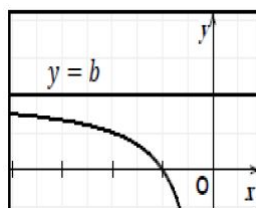


FIGURE 1.2 – Asymptote horizontale de la fonction f .

- La courbe représentant la fonction f accepte une sous-section infinie dont nous considérons la courbe en calculant le terme suivant $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

1.3 Approximation d'une solution d'équations non linéaire

L'objectif de cette section est d'identifier certaines méthodes numériques en trouvant des solutions approximatives pour des équations de la forme $f(x) = 0$, avec f est une fonction non linéaire, voir [3].

1.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

On considère une suite croissante finie $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ de valeurs de x telle que $x \in [a, b]$. Si f est continue et $f(a)f(b) < 0$, alors il existe entre a et b au moins une racine de f .

Exemple 1.3.1. Le polynôme P défini par : $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 6$ a au moins deux racines réelles $\alpha_1 \in]-3, -1[, \alpha_2 \in]0, 2[$ car :

$P(-4) = 270, P(-3) = 72, P(-1) = -12, P(0) = -6, P(2) = 12$ et $P(3) = 60, \dots$

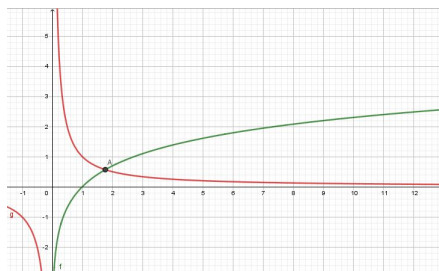
Soit on trace (expérimentalement ou par étude de variations de f) le graphe de la fonction f et on cherche son intersection avec l'axe (O_x).

Soit on décompose f en deux fonctions f_1 et f_2 simples à étudier, telles que $f = f_1 - f_2$, et on cherche les points d'intersection des graphes de f_1 et f_2 , dont les abscisses sont exactement les racines de f .

Remarque 1.3.1. On choisit souvent f_1 et f_2 de façon que leurs courbes soient des courbes connues.

Exemple 1.3.2. La fonction f définie par : $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x \in]0, +\infty[$ a une racine unique dans l'intervalle $[\frac{5}{4}, \frac{5}{2}]$. En effet ; posons $f_1(x) = \ln x$ et $f_2(x) = \frac{1}{x}$. Alors $f(x) = 0 \iff f_1(x) = f_2(x)$ et d'après le graphe 1.3.1

$$G(f_1) \cap G(f_2) = (\alpha, f(\alpha)), \alpha \in [\frac{5}{4}, \frac{5}{2}]$$

FIGURE 1.3 – L'intersection des fonctions f_1 et f_2 .

1.3.2 Méthode de dichotomie

Cette méthode est utilisée pour approcher les racines d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. S'il existe a, b ($a < b$) avec $f(a)f(b) < 0$, on sait alors qu'il existe au moins une racine α de f dans l'intervalle $]a, b[$.

La méthode de dichotomie (aussi appelée méthode de bisection) consiste à diviser en deux un intervalle donné, et à choisir le sous intervalle où f change de signe, voir [1].

Plus précisément, si on note $I_{(0)} =]a, b[$ et $I_{(k)}$ le sous-intervalle retenu à l'étape k , on choisit le sous-intervalle $I_{(k+1)}$ de $I_{(k)}$ pour lequel f a un signe différent à ses deux extrémités. En répétant cette procédure, on est assuré que chaque $I_{(k)}$ ainsi construit contiendra une racine α . La suite $x_{(k)}$ des milieux des intervalles $I_{(k)}$ convergera vers α puisque la longueur de ces intervalles tend vers zéro quand k tend vers l'infini.

La méthode est initialisée en posant

$$a_0 = a, b_0 = b, I_0 =]a_0, b_0[, x_0 = \frac{(a_0 + b_0)}{2}.$$

En chaque étape $k \geq 1$, on choisit le sous-intervalle $I_{(k)} =]a_{(k)}, b_{(k)}[$ de $I_{(k-1)} =]a_{(k-1)}, b_{(k-1)}[$ comme suit

étant donné $x_{(k-1)} = \frac{(a_{(k-1)} + b_{(k-1)})}{2}$.

- Si $f(x_{(k-1)}) = 0$. alors $\alpha = x_{k-1}$ et on s'arrête.
- Si $f(a_{(k-1)})f(x_{(k-1)}) < 0$ poser $a_{(k)} = a_{(k-1)}, b_{(k)} = x_{(k-1)}$.
- Si $f(x_{(k-1)})f(b_{(k-1)}) < 0$ poser $a_{(k)} = x_{(k-1)}, b_{(k)} = b_{(k-1)}$.

On définit alors $x_{(k)} = \frac{a_{(k)} + b_{(k)}}{2}$ et on incrémente k de 1.

Par exemple, dans le cas présenté sur la Figure 1.3.2, qui correspond à $f(x) = x^2 - 1$, en

prenant $a_{(0)} = -0.25$ et $b_{(0)} = 1.25$, on obtient

$$I_{(0)} =] - 0.25, 1.25[, x_{(0)} = 0.5.$$

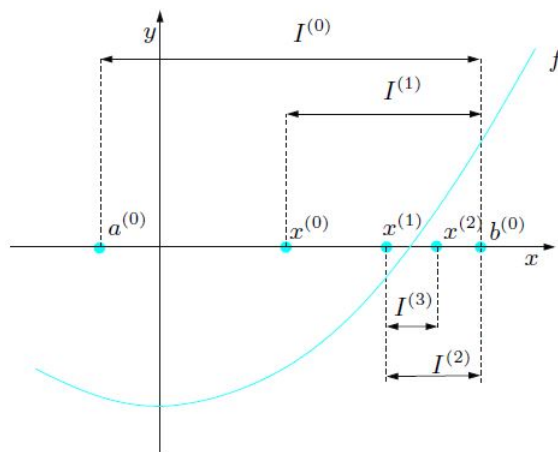
$$I_{(1)} =]0.5, 1.25[, x_{(1)} = 0.875.$$

$$I_{(2)} =]0.875, 1.25[, x_{(2)} = 1.0625.$$

$$I_{(3)} =]0.875, 1.0625[, x_{(3)} = 0.96875.$$

Remarquer que chaque sous-intervalle $I_{(k)}$ contient le zéro α . De plus, la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ converge nécessairement vers α puisqu'à chaque étape la longueur $|I_{(k)}| = b_{(k)} - a_{(k)}$ de $I_{(k)}$ est divisée par deux. Comme $|I_{(k)}| = (1/2)^k |I_{(0)}|$, l'erreur à l'étape k vérifie

$$|e_k| = |x_{(k)} - \alpha| < \frac{1}{2} |I_{(k)}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (b - a)$$



6.JPG

FIGURE 1.4 – Quelques itérations de la méthode de dichotomie

Exemple :

Soit $f(x) = xe^x - 1, \forall x \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$

- 1- Prouver que f admet une seule solution dans $[0, 1]$.
- 2- Trouver la solution approximative α à l'aide de 10^{-3} en utilisant la méthode de la dichotomie ?
- 1- On sait que f est continue et croissante sur $[0, 1]$, (car : $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) > 0$).

De là, selon le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)$ admet une seule solution α sur $[0,1]$

2-1 On a

$$E(x) \simeq |x_n - \alpha| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\frac{b-a}{2^n}}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}},$$

et $a = 0, b = 1$, donc

$$E(x) \simeq \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{1-0}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2-2 Pour que la précision 10^{-3} soit suffisante

$$E(x) \simeq \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}.$$

Alors

$$2^{n+1} \geq 10^3.$$

Donc

$$\ln 2^{n+1} \geq \ln 10^3.$$

$$\implies (n+1)\ln 2 \geq 3\ln 10.$$

$$\implies n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1.$$

Il suffit de prendre

$$n = \left\lceil \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1 \right\rceil + 1.$$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	0.5	$f(x_0) < 0$
1	0.5	1	0.75	$f(x_1) > 0$
2	0.5	0.75	0.625	$f(x_2) > 0$
3	0.5	0.625	0.5625	$f(x_3) < 0$
4	0.5625	0.625	0.59375	$f(x_4) > 0$
5	0.5625	0.59375	0.578125	$f(x_5) > 0$
6	0.5625	0.578125	0.5703125	$f(x_6) > 0$
7	0.5625	0.5703125	0.56640625	$f(x_7) < 0$
8	0.96640625	0.5703125	0.52835937	$f(x_8) > 0$

1.3.3 Théorème du point fixe

On suppose que f ne possède qu'une seule racine, notée α sur $[a, b]$.

Principe de cette méthode, voir [1] :

On remplace l'équation $f(x) = 0$ par une équation équivalente $x = \phi(x)$ où ϕ est continue, et on construit la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b], \\ x_{n+1} = \phi(x_n), n \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Avec l'espoir que la suite (x_n) converge vers la solution α du problème posé.

Proposition 1.3.1. *Considérons la suite (1.1)*

1) *Supposons que $\phi(x)$ est continue sur $[a, b]$ et telle que $\phi(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$, alors il existe au moins un point fixe $\alpha \in [a, b]$.*

2) *De plus, si $\exists L < 1$ t.q. $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \forall x_1, x_2 \in [a, b]$, alors ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$ et la suite définie converge vers α , pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$.*

Remarque 1.3.2. *Ou en d'autres termes*

$\forall x \in [a, b] / |\phi'(x)| \leq L$ telle que : $(0 < L < 1)$ et $\phi \in C^1([a, b])$.

Application :

Etude de quelques cas (suivant ϕ)

Les exemples qui suivent montrent que les transformations en $x = \phi(x)$ aboutissent à des comportements différents :

1. Si $f(x) = x^2 + 3e^x - 12 = 0$, on peut l'écrire sous les différentes formes :

* $x = x + f(x) = \phi_1(x), x \in \mathbb{R}.$

* $x = x - f(x) = \phi_2(x), x \in \mathbb{R}.$

* $x = \sqrt{12 - 3e^x} = \phi_3(x), x \leq \ln 4.$

* $x = \ln\left(\frac{12-x^2}{3}\right) = \phi_4(x), -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}.$

2. Soit $f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$. Cette fonction admet deux racines : $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 4$. On peut écrire l'équation $f(x) = 0$ sous les deux formes suivantes :

i) $x = \frac{x^2+8}{6} = \phi_1(x)$ et ii) $x = \sqrt{6x-8} = \phi_2(x)$.

Cas i) : $|\phi_1'(x)| = \frac{|x|}{3} < 1 \implies |x| < 3$,

alors la méthode du point fixe correspondante converge vers $\alpha_1 = 2$ si on prend, par exemple $[a, b] = [1, \frac{5}{2}]$.

Cas ii) : $|\phi_2'(x)| = |\frac{3}{\sqrt{6x-8}}| < 1 \implies x > \frac{17}{6} \simeq 2.82$,

alors la méthode du point fixe correspondante converge vers $\alpha = 4$ si on prend, par exemple $[a, b] = [3, 5]$.

1.4 Interpolation et approximation polynômiale

Les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement sont les fonctions polynômes. Il est donc important de savoir approximer une fonction arbitraire par des polynômes. Dans ce cadre, l'un des outils de base est la méthode d'interpolation de Lagrange, voir [6].

Notations :

Dans toute la suite, on designera par P_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n ; on a donc $\dim P_n = n + 1$.

Par ailleurs, si f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la norme uniforme de f sur $[a, b]$ sera notée $\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

1.4.1 Interpolation de Lagrange

Polynôme d'interpolation

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n + 1$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$. Il s'agit de construire un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que

$$\forall i = 0, 1, 2, \dots, n, p(x_i) = f(x_i) \quad (1.2)$$

Théorème 1.4.1. *Il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n solution de (1.2). Le polynôme s'écrit*

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad (1.3)$$

où

$$L_i(x_k) = \prod_{k=0, k \neq i}^{k=n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}. \quad (1.4)$$

ou le produit correspond aux les indices k tels que $0 \leq k \leq n, k \neq i$.

Il est clair que $L_i \in P_n$ et que

$$\begin{cases} L_i(x_k) = 0 & \text{si } k \neq i, \\ L_i(x_k) = 1 & \text{si } k = i. \end{cases}$$

Définition : Le polynôme p_n est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Les polynômes L_i sont appelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.

Théorème 1.4.2. *Le problème d'interpolation*

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n, \quad (1.5)$$

admet une solution et une seule, donnée par la formule suivante

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad p_n \in P_n. \quad (1.6)$$

Démonstration 1.4.1. Existence : On vérifie directement que le polynôme donné par (1.6) est solution de (1.5) (on utilise le fait que $L_i(x_k) = \delta_{ik}$).

Unicité : Soit Q un autre polynôme solution. Alors $\forall i = 0, 1, \dots, n$

$Q(x_i) - P(x_i) = 0$. Ainsi $Q - P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en $n + 1$ points. Il est donc identiquement nul.

Exemple 1.4.1. Interpolation linéaire. On applique (1.3) avec $n = 1$ pour trouver

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Ceci s'écrit encore

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0).$$

Remarque 1.4.1. La formule (1.6) du polynôme d'interpolation est intéressante au point de vue théorique, mais peu du point de vue numérique : elle a un caractère peu algorithmique. De plus, son évaluation requiert trop d'opérations élémentaires.

On préfère la formule de Newton qui consiste à écrire le polynôme d'interpolation P_n aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ sous une forme généralisant (1.6) sous la forme

$$p_n(x) = a_0^n + a_1^n(x - x_0) + \dots + a_n^n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Notons d'abord que tout polynôme de degré inférieur ou égal à n peut se mettre sous cette forme dès que les x_i sont tous distincts. L'avantage de cette écriture est que la partie tronquée

$$a_0^n + a_1^n(x - x_0) + a_2^n(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n^n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-2}).$$

n'est pas autre chose que

$$p_{n-1}(x) = a_0^{n-2} + a_1^{n-1}(x - x_0) + \dots + a_{n-1}^{n-2}(x - x_0)\dots(x - x_{n-2}).$$

en effet, il s'agit d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que

$$\forall i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad p_n(x_i) = f(x_i).$$

Donc, connaissant p_{n-1} , il suffit de calculer a_n^n pour connaître p_n (a_n^n est aussi le coefficient de x_n dans p_n écrit sous forme usuelle). Les a_n^i sont donnés par la formule de Newton.

Théorème 1.4.3. Interpolation de Newton

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points distincts $x_0, x_1, \dots, x_n$ est donné par

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

où $f[.]$ désigne les différences divisées de f définies par :

$$\forall i = 0, \dots, n, \quad f[x_i] = f(x_i),$$

et

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] \doteq \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Remarque 1.4.2. *Par convention*

$$\prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \doteq 1, \quad \text{si } i < 1.$$

1.4.2 Formule d'Erreur

L'erreur d'interpolation est donnée par la formule théorique suivante

Théorème 1.4.4. *Théorème de Rolle*

On suppose que f est $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe un point $\xi_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que $i = 0 \dots n + 1$.

$$\Delta(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x) f^{n+1}(\xi_x).$$

avec

$$\Pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

On a besoin du lemme suivant, qui découle du théorème de Rolle.

Lemme 1.4.1. Soit g une fonction p fois dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $p + 1$ points $c_0 < c_1 < \dots < c_p$ de $[a, b]$ tels que $g(c_i) = 0$. Alors il existe $\xi \in]c_0, c_p[$ tel que $g^{(p)}(\xi) = 0$.

Ce lemme se démontre par récurrence sur p . Pour $p = 1$, c'est le théorème de Rolle. Supposons le lemme démontre pour $p - 1$. Le théorème de Rolle donne des points $\gamma_0 \in]c_0, c_1[, \dots, \gamma_{p-1} \in]c_{p-1}, c_p[$ tels que $g'(\gamma_i) = 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc $\xi \in]\gamma_0, \gamma_{p-1}[\subset]c_0, c_p[$ tel que $(g')^{(p-1)}(\xi) = g^{(p)}(\xi) = 0$.

Démonstration 1.4.2. • Si $x = x_i$, on a $\Pi_{n+1}(x_i) = 0$, tout point ξ_x convient.

• Supposons maintenant x distinct des points x_i .

Soit $p_{n+1}(t)$ le polynôme d'interpolation de $f(t)$ aux points $x, x_0, \dots, x_{n+1}$, de sorte que $p_{n+1} \in P_{n+1}$. Par construction $f(x) - p_n(x) = p_{n+1}(x) - p_n(x)$. Or le polynôme $p_{n+1} - p_n$ est de degré $\leq n + 1$ et s'annule aux $n + 1$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$. On a donc

$$p_{n+1}(t) - p_n(t) = c \cdot \Pi_{n+1}(t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Considérons la fonction

$$g(t) = f(t) - p_{n+1}(t) = f(t) - p_n(t) - c \Pi_{n+1}(t).$$

Cette fonction s'annule en les $n + 2$ points $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ donc d'après le lemme il existe $\xi_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Or

$$p_n^{(n+1)} = 0,$$

$$\Pi_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!$$

On a par conséquent $g^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - c.(n+1)! = 0$, d'où

$$f(x) - p_n(x) = p_{n+1}(x) - p_n(x) = c\Pi_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x).$$

En prenant la borne supérieure de la valeur absolue des deux membres dans la formule d'erreur, on obtient en particulier :

$$\|f - p_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\Pi_{n+1}\| \|f^{(n+1)}\|.$$

Ces formules montrent que la taille de l'erreur d'interpolation $f(x) - p_n(x)$ dépend à la fois de la quantité $\|f^{(n+1)}\|$, qui peut être grande si f oscille trop vite, et de la quantité $\|\Pi_{n+1}\|$, qui est liée à la répartition des points x_i dans l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 1.4.2. Trouvez la limite de polarisation pour la fonction f en utilisant la méthode de Lagrange, où f est connu comme suit

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f(x_i)$	1	2	3

La solution

Tout d'abord, nous recherchons des polynômes de Lagrange pour l_0, l_1, l_2

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{\prod_{j=1}^{j=2} (x - x_j)}{\prod_{j=1}^{j=2} (x_0 - x_j)} \\ &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ &= \frac{(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})}{(0 - \frac{1}{4})(0 - \frac{1}{2})} \end{aligned}$$

Donc

$$l_0(x) = 8x^2 - 6x + 1,$$

et on a

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{\prod_{j=0, j \neq 1}^{j=2} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq 1}^{j=2} (x_1 - x_j)} \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ &= \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{4} - 0)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Donc

$$l_1(x) = -8(2x^2 - x) = -16x^2 + 8x,$$

et on a

$$\begin{aligned} l_2(x) &= \frac{\prod_{j=0}^{j=1} (x - x_j)}{\prod_{j=0}^{j=1} (x_2 - x_j)} \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{4})}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})}, \end{aligned}$$

donc

$$l_2(x) = 82x^2 - 2x.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \sum_{i=0}^{i=2} l_i(x) f(x_i) \\ &= l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) + l_2(x) f(x_2) \\ &= (8x^2 - 6x + 1) + 2(-16x^2 + 8x) + 3(8x^2 - 2x), \end{aligned}$$

donc

$$P_2(x) = 4x + 1.$$

Exemple 1.4.3. *Soit*

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$

1. *On a*

$$l_0(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2},$$

et

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ &= \frac{(x - 1)(x - 3)}{(2 - 1)(2 - 3)}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l_1(x) = -x^2 + 4x + 3,$$

et

$$\begin{aligned} l_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{(x - 1)(x - 2)}{(3 - 1)(3 - 2)}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l_2(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \sum_{i=0}^2 l_i(x) f(x_i) \\ &= l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) + l_2(x) f(x_2). \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 5x + 6) + \frac{2}{3}(-x^2 + 4x - 3) + \frac{3}{8}(x^2 - 3x + 2). \\ \Rightarrow P_2(x) &= \frac{-x^2 + 7x + 6}{24}. \end{aligned}$$

2. *Calculez la valeur approximative au point 1.5*

$$f(1.5) \simeq P_2(1.5) = \frac{-(1.5)^2 + 7(1.5) + 6}{24} \simeq 0.59375$$

3. Trouver l'approximation d'erreur

$$\begin{aligned} E(1.5) &= | f(1.5) - P_2(1.5) | \\ &= \left| \frac{1.5}{1.5 + 1} - 0.59375 \right| \\ &= | 0.6 - 0.59375 | \end{aligned}$$

donc

$$E(1.5) = 0.00625.$$

Dans la section suivante, nous présentons tous les concepts et définitions dont nous avons besoin dans notre sujet de théorie de la perturbation.

1.5 Théorie des perturbations

1.5.1 Introduction

Le développement de la théorie de l'influence des petites perturbations sur les solutions des équations différentielles a commencé au XVIIIe siècle. Étant donné que la théorie des perturbations de Poincaré (vers 1900) est de plus en plus florissante avec de nouvelles idées et des applications fondamentales importantes.

Tout d'abord, nous donnons quelques exemples du problèmes de perturbations.

1.5.2 Quelques Exemples

Exemple 1.5.1. *Un exemple simple d'une perturbation naturelle, voir [4]. Considérons une oscillation harmonique, décrite par l'équation*

$$\ddot{x} + x = 0, \tag{1.7}$$

l'effet du frottement a été négligé (en pratique la friction sera toujours présente). Si l'oscillateur tel que le frottement est petit, un modèle amélioré pour les oscillations est donné par

l'équation

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x} + x = 0. \quad (1.8)$$

Le terme $\epsilon \dot{x}$ s'appelle " terme de frottement " ou "terme d'amortissement" et ce terme particulier la forme du terme de frottement repose sur certaines hypothèses concernant la mécanique de frottement. Le paramètre ϵ est assez petit i.e $0 \leq \epsilon \ll 1$. Si on met $\epsilon = 0$ dans l'équation (1.8), on récupère l'équation originale (1.7) ; nous appelons l'équation (1.7) " problème non perturbé ".

L'introduction de petites perturbations déclenche qualitativement et comportement quantitatif des solutions qui divergent énormément du comportement des solutions du problème non perturbé. On peut l'observer déjà dans l'exemple simple de l'oscillateur amorti décrit par l'équation (1.8).

Exemple 1.5.2. Nous allons montrer maintenant que dans le cas de solutions bornées, la différence entre les solutions du problème perturbé et du problème non perturbé peut être considérable, voir [4].

$$\ddot{x} + (1 + \epsilon)^2 x = 0, \quad x(0) = 0, \dot{x} = 1 \quad (1.9)$$

La solution est

$$x(t) = \frac{1}{1 + \epsilon} \sin(1 + \epsilon)t.$$

Le problème non perturbé est

$$\ddot{y} + y = 0, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1 \quad (1.10)$$

Avec la solution $y(t) = \sin t$. Le lecteur doit analyser la différence $x(t) - y(t)$. Les solutions sont proches depuis longtemps, mais si on attend assez longtemps, prenez par exemple $t = \pi/(2\epsilon)$, la différence devient considérable.

Cet exemple pour illustrer qu'en construisant d'approximation de solution de problème de valeur initiale, il faut indiquer sur quel intervalle de temps on cherche une approximation. Dans de nombreux cas, nous voudrions que cet intervalle de temps soit aussi grand que possible.

Nous allons maintenant introduire un certain nombre de concepts qui nous permettent d'estimer les fonctions vectorielles en fonction d'un petit paramètre ϵ .

1.5.3 Développement simple

Considérons la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la fonction $f(t, x, \epsilon)$ est continue dans les variables $t \in \mathbb{R}$ et $x \in D \subset \mathbb{R}$, ϵ est un petit paramètre.

La fonction f a une développement de Taylor par rapport à ϵ , nous avons

$$f(t, x, \epsilon) = f(t, x, 0) + \epsilon f_1(t, x) + \epsilon^2 f_2(t, x) + \dots + \epsilon^n f_n(t, x) + \dots, \quad (1.11)$$

avec les coefficients $f_1, f_2, \dots$ dépendent de t et x . Les expressions $\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n, \dots$ sont appelés les fonctions d'ordre.

Le plus souvent, nous ne connaissons pas explicitement la fonction vectorielle, par exemple car il a été défini implicitement comme la solution d'une équation avec des conditions (initiales).

Remarque 1.5.1. Très souvent, nous chercherons un développement de la forme

$$f(t, x, \epsilon) = \sum_{n=0}^N \delta_n(\epsilon) f_n(t, x) + \dots, \quad (1.12)$$

dans lequel $\delta_n(\epsilon), n = 0, 1, 2, \dots$ sont des fonctions d'ordre.

Définition 1.5.1. La fonction $\delta(\epsilon)$ est continue, positive dans $(0, \epsilon_0]$, et monotone décroissante telle que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon)$ existe lorsque ϵ tends vers zéro; $\delta(\epsilon)$ est appelé une fonction d'ordre.

Dans le cas du développement de Taylor, les fonctions d'ordre qui ont été utilisées sont

$$\{\epsilon^n\}_{n=0}^{\infty}$$

D'autres exemples de fonctions d'ordre sur $(0, 1]$ sont

$$\epsilon |\ln(\epsilon)|, |\sin(\epsilon)|, e^{-\frac{1}{\epsilon}}.$$

Très souvent, nous comparons des fonctions d'ordre selon leurs vitesses de convergence vers zéro, comme lorsqu'on dit ϵ^4 va plus vite vers zéro que ϵ^2 ; pour cette comparaison, nous utiliserons le symbole O de Landau.

Définition 1.5.2.

a) $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ s'il existe une constante k telle que

$$\delta_1(\epsilon) \leq k(\delta_2(\epsilon)) \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

b) $\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon))$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = 0.$$

Remarque 1.5.2. Si la limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = k$ existe, alors on a $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$.

Exemples

$\epsilon^4 = o(\epsilon^2)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $\sin(\epsilon) = O(\epsilon)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $\epsilon |\ln \epsilon| = o(1)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Dans la théorie des perturbations, nous omettons généralement l'expression "lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ ", car c'est toujours le cas à considérer.

1.6 Solutions périodiques d'équations différentielles linéaires

Nous abordons maintenant la question : dans quelles conditions une équation différentielle a-t-elle une solution périodique ?

Définition 1.6.1. Le système

$$x' = A(t)x \tag{1.13}$$

avec $A(t+T) = A(t)$, $\forall t$, $T > 0$ est appelé non critique par rapport à T .

Le système (1.13) n'admet pas de solution périodique de période T autre que la solution zéro.

Théorème 1.6.1.

$$x' = A(t)x + p(t) \tag{1.14}$$

tqs $p : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, A et p sont continus sur $(-\infty, +\infty)$, les deux sont périodiques de période T , et soit (1.13) non critique par rapport à T . Alors (1.14) a une solution périodique unique de période T .

Preuve. La preuve est bien détaillée dans [2]. □

Chapitre 2

Solutions des systèmes perturbés non linéaires

Dans ce chapitre, nous déterminons les solutions des systèmes perturbés non linéaires, en utilisant deux méthodes ; la perturbation simple et la méthode de Lindstedt.

2.1 Perturbation simple

Considérez le problème de la valeur initiale

$$\dot{x} = f(t, x, \epsilon), \quad x(0) \text{ donné},$$

où $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Si nous pouvons développer $f(t, x, \epsilon)$ dans une série de Taylor par rapport à ϵ

$$f(t, x, \epsilon) = f_0(t, x) + \epsilon f_1(t, x) + \epsilon^2 \dots,$$

alors on pourrait supposer qu'il existe une expansion similaire pour la solution

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 \dots$$

Il semble naturel de s'attendre à ce que l'expansion formelle représente une approximation asymptotique de la solution. Nous montrerons que c'est correct, mais seulement dans un sens très restreint.

La procédure générale de l'approximation simple consiste à substituer à l'équation, à développer en puissances de ϵ , et mettre tous les coefficients des puissances de ϵ égal à zéro. Cela donne un système d'équations différentielles linéaires non homogènes que nous pouvons résoudre récursivement, voir [4].

On donne des exemples simples pour bien l'illustrer.

Exemple 2.1.1. Soit l'équation différentielle non linéaire suivant :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + 2\epsilon y^3 = 0. \quad (2.1)$$

Supposons que la solution de cette équation de la forme suivant

$$y(t, \epsilon) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \dots \quad (2.2)$$

La substitution de (2.2) dans l'équation (2.1) donne

$$\left(\frac{d^2 y_0}{dt^2} + y_0 \right) + \epsilon \left(\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 + 2y_0^3 + 6y_0 y_1 \right) + \epsilon^2 \left(\frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2 + 6y_0^2 y_1 + 6y_0 y_1^2 \right) + \dots = 0. \quad (2.3)$$

Nous égalons tous les coefficients des différentes puissances de ϵ à zéro, on obtient alors le système suivant

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} + y_0 = 0. \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = -2y_0^3 - 6y_0 y_1. \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2 = -6y_0 (y_0^2 - 1). \quad (2.6)$$

.....

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + y_n = F_n(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad (2.7)$$

où F_n est une fonction polynomiale cubique en ses arguments. Notons que ce système d'équations peut être résolu de manière récursive, c'est-à-dire que la détermination de y_k nécessite seulement la connaissance des fonctions y_m pour $0 \leq m \leq k-1$.

On peut résoudre ces équations avec les conditions initiales

$$y(0) = A, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0, \quad (2.8)$$

ainsi,

$$\begin{cases} y_0(0) = A, & y_i(0) = 0 & \text{pour } i \geq 1, \\ \frac{dy_k(0)}{dt} = 0, & & \text{pour } k \geq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

La solution de (2.4) avec les conditions (2.9) est

$$y_0(t) = A \cos t. \quad (2.10)$$

En substituant ce résultat dans le côté droit de l'équation (2.5) on obtient

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = -2y_0^3 - 6y_0 = -2A^3 \cos^3 t - 6A \cos t = -\frac{A^3}{2} (3 \cos t + \cos 3t) - 6A \cos t. \quad (2.11)$$

La solution particulière de cette équation est

$$y_{1P}(t) = \left(\frac{A^3}{16}\right) \cos 3t - \left(\frac{3A^3}{4}\right) \sin t - 3At \sin t. \quad (2.12)$$

Par conséquent, la solution générale est

$$y_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \left(\frac{A^3}{16}\right) \cos 3t - \left(\frac{3A^3}{4}\right) \sin t - 3At \sin t. \quad (2.13)$$

Les conditions initiales, spécifiées par les équations (2.9), permettent de déterminer les constantes arbitraires C_1 et C_2 , on obtient $C_1 = (-A^3/32)$ et $C_2 = 0$, ainsi $y_1(t)$ devient

$$y_1(t) = \left(\frac{A^3}{16}\right) (\cos 3t - \cos t) - 3At \sin t. \quad (2.14)$$

Ainsi, pour l'ordre ϵ , la solution perturbée de premier ordre de l'équation (2.1) est

$$y(t, \epsilon) = A \cos t + \epsilon \left[\left(\frac{A^3}{16}\right) (\cos 3t - \cos t) - 3At \sin t \right]. \quad (2.15)$$

Cependant, la solution (2.15) montre que $y_1(t)$, (le terme de correction de la fonction périodique $y_0(t)$ est supposé petit) est non seulement non périodique mais de plus non borné lorsque $t \rightarrow \infty$. Ainsi, une application directe de (2.15) conduit à des difficultés si on veut calculer des approximations des solutions analytiques et périodiques d'équations différentielles non linéaires de la forme donnée par (2.1).

Exemple 2.1.2. [7] Soit l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + x = \epsilon(-\dot{x} + x^2), \quad (2.16)$$

avec les valeurs initiales $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$.

On suppose que la solution de (2.16) est sur la forme suivant :

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (2.17)$$

On substitue l'équation (2.17) dans (2.16) :

$$\begin{aligned} & (\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \epsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots) + (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) \\ &= \epsilon \left[-(\dot{x}_0 + \epsilon \dot{x}_1 + \epsilon^2 \dot{x}_2 + \dots) + (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^2 \right]. \end{aligned}$$

On compare, on trouve

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad x_0(0) = A, \dot{x}_0(0) = 0. \quad (2.18)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\dot{x}_0 + x_0^2, \quad x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0. \quad (2.19)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -\dot{x}_1 + 2x_0 x_1, \quad x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0. \quad (2.20)$$

Sachez que la solution de (2.18) est

$$x_0(t) = A \cos t. \quad (2.21)$$

Nous commençons à résoudre l'équation (2.19)

$$\ddot{x}_1 + x_1 = A \sin t + A^2 \cos^2 t = A \sin t + A^2 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) = A \sin t + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2t.$$

La solution particulière de cette équation est

$$x_{1p}(t) = -\frac{A}{2} \cos t + \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{6} \cos 2t. \quad (2.22)$$

Par conséquent, la solution générale est

$$x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{A}{2} \cos t + \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{6} \cos 2t. \quad (2.23)$$

Les conditions initiales, spécifiées par les équations (2.19), permettent de déterminer les constantes arbitraires C_1 et C_2 ; telles que $C_1 = -(A^2/3)$ et $C_2 = (A/2)$, ainsi $x_1(t)$ devient

$$x_1(t) = -\frac{A^2}{3} \cos t + \frac{A}{2} \sin t - \frac{A}{2} t \cos t + \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{6} \cos 2t. \quad (2.24)$$

Ainsi, pour l'ordre ϵ , la solution perturbée de premier ordre de l'équation (2.19) est

$$x(t, \epsilon) = A \cos t + \epsilon \left(-\frac{A^2}{3} \cos t + \frac{A}{2} \sin t - \frac{A}{2} t \cos t + \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{6} \cos 2t \right).$$

Exemple 2.1.3. [7] Soit l'équation différentielle

$$\ddot{x} + (1 + 2\epsilon \cos 2t)x = 0, \quad x(0) = A, \dot{x}(0) = 0. \quad (2.25)$$

Supposons que la solution soit de la forme suivant

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots \quad (2.26)$$

La substitution de (2.26) dans l'équation (2.25) donne

$$(\ddot{x}_0 + x_0) + \epsilon(\ddot{x}_1 + x_1 + 2x_0 \cos 2t) + \epsilon^2(\ddot{x}_2 + x_2 + 2x_1 \cos 2t) + \dots = 0.$$

Nous égalons tous les coefficients des différentes puissances de ϵ à zéro, on obtient alors le système suivant

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad x_0(0) = A, \dot{x}_0(0) = 0. \quad (2.27)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2x_0 \cos 2t, \quad x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0. \quad (2.28)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2x_1 \cos 2t, \quad x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0. \quad (2.29)$$

Il est clair que la solution de (2.27) est

$$x_0(t) = A \cos t.$$

Résolvons l'équation (2.28)

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2A \cos t \cos 2t = -A(\cos 3t + \cos t).$$

La solution particulière de cette équation est

$$x_{1p}(t) = \frac{A}{8} \cos 3t - \frac{A}{2} t \sin t. \quad (2.30)$$

Donc, la solution générale est

$$x_1(t) = n_1 \cos t + n_2 \sin t + \frac{A}{8} \cos 3t - \frac{A}{2} t \sin t. \quad (2.31)$$

Les conditions initiales, spécifiées par les équations (2.28), permettent de déterminer les constantes arbitraires n_1 et n_2 ; telles que $n_1 = -(A/8)$ et $n_2 = 0$, ainsi $x_1(t)$ devient

$$x_1(t) = -\frac{A}{8} \cos t + \frac{A}{8} \cos 3t - \frac{A}{2} t \sin t, \quad (2.32)$$

donc la solution approximative d'ordre un d'équation différentielle (2.25) est

$$x(t, \epsilon) = A \cos t + \epsilon \left(-\frac{A}{8} \cos t + \frac{A}{8} \cos 3t - \frac{A}{2} t \sin t \right).$$

2.2 Méthode de Lindstedt-Poincaré

Dans cette section, nous montrerons comment trouver des approximations de séries convergentes de solutions périodiques en utilisant le théorème d'expansion et la périodicité de la solution. Cette méthode est généralement appelée d'après Lindstedt-Poincaré, elle est aussi appelée méthode de continuation, voir [8].

2.2.1 Termes séculaires

Pratiquement, plusieurs considérations concernant le temps et/ou le calcul oblige d'utiliser qu'un petit nombre de termes dans l'expansion de perturbation.

Les calculs dans l'exemple précédent montrent que l'utilisation d'une solution de la forme donnée par l'expansion ne donne pas une approximation de la solution analytique et périodique de l'équation, si seulement un nombre fini de termes est retenu.

Définition 2.2.1. *Les termes tels que $t^m \cos(pt)$ ou $t^m \sin(nt)$ où $m, n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ sont appelés **termes séculaires**.*

Ces expressions apparaissent parce que l'expansion n'est pas uniformément valide. L'existence de telles expressions fait perdre la périodicité de l'expansion donnée par quand seulement un nombre fini de termes est utilisé. Par conséquent, pour construire une solution uniformément valide, il faut chercher une approximation qui élimine les termes séculaires.

Une technique pour éviter la présence de termes séculaires a été développée par Lindstedt-Poincaré. Plus tard, Poincaré a prouvé que les expansions obtenues par la technique de Lindstedt-Poincaré sont à la fois asymptotiques et uniformément valables. Bien que la méthode de Lindstedt-Poincaré donne des expansions asymptotiques uniformément valables pour les solutions périodiques d'oscillations faiblement non linéaires, c'est-à-dire $0 < \epsilon < C_1$, la technique ne fonctionne pas si l'amplitude de l'oscillation est en fonction du temps.

Dans le paragraphe, on présente le principe de la méthode de Lindstedt-Poincaré. Il montre comment les solutions approchées de l'équation peuvent être uniformément valables.

2.2.2 Principe de la méthode de Lindstedt-Poincaré

Dans ce partie, nous donnons une méthode pour obtenir des solutions uniformément valides de l'équation différentielle non linéaire.

Soit l'équation différentielle suivant

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + y &= \epsilon F(y, \frac{dy}{dt}). \\ y(0, \epsilon) &= A, \quad (dy/dt)(0, \epsilon) = 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si $\epsilon = 0$ nous obtenons le problème non perturbé suivant :

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t, 0) + y(t, 0) = 0. \quad (2.34)$$

L'essence de la méthode est d'introduire une transformation de la variable indépendante. Cette transformation nous permettra d'éviter l'occurrence de termes séculaires dans les solutions d'équations des séries de perturbations (2.33), voir [12].

L'idée fondamentale est venue de l'astronome Lindstedt-Poincaré et est basée sur l'observation que l'un des effets du terme non linéaire dans l'équation (2.33) est de changer la fréquence du système de la valeur linéaire $\omega_0 = 1$ à $\omega(\epsilon)$. Pour tenir compte de ce changement de fréquence, une nouvelle variable $\theta = \omega t$ (lorsque ϵ est nul, la solution périodique résultante a une fréquence unitaire; si ϵ est non nul et petit, alors la fréquence dépend de ϵ et est proche de l'unité si $y(t)$ a la période $2\pi/\omega(\epsilon)$, puis en mettant $\theta = \omega t$. nous obtenons une nouvelle fonction $y(\theta)$ avec la période 2π) est introduite, et les deux y et ω sont étendus en puissances de ϵ comme suit :

$$y(\theta, \epsilon) = y_0(\theta) + \epsilon y_1(\theta) + \dots + \epsilon^n y_n(\theta) + \dots, \quad (2.35)$$

$$\omega(\epsilon) = 1 + \epsilon \omega_1 + \dots + \epsilon^n \omega_n + \dots, \quad (2.36)$$

où à ce point les ω_j sont des constantes inconnues.

On introduit les notations suivantes

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{d\theta}, \quad \ddot{y} \equiv \frac{d^2 y}{d\theta^2}. \quad (2.3a)$$

$$F_y(y, \dot{y}) \equiv \frac{\partial F(y, \dot{y})}{\partial y}, \quad F_{\dot{y}}(y, \dot{y}) \equiv \frac{\partial F(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}}. \quad (2.3b)$$

On a $\theta = \omega t$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dy}{d(\omega t)} = \frac{1}{\omega} \frac{dy}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= \omega \frac{dy}{d\theta}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{d\theta} \right) = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 y}{dt^2}. \quad (2.38)$$

Mettre $\theta = \omega t$ alors l'équation (2.33) devient

$$\omega^2 \frac{d^2 y}{d\theta^2}(\theta, \epsilon) + y(\theta, \epsilon) = \epsilon F \left(y, \omega \frac{dy}{d\theta} \right) \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow \omega^2 \ddot{y} + y = \epsilon F(y, \omega \dot{y}), \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (2.40)$$

où $y(0, \epsilon) = A$, $\dot{y}(0, \epsilon) = 0$. Lorsque nous substituons l'expansion (2.35) à l'équation (2.40), on obtient

$$(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \epsilon^3\omega_3 + \dots)^2 (\ddot{y}_0 + \epsilon\ddot{y}_1 + \epsilon^2\ddot{y}_2 + \epsilon^3\ddot{y}_3 + \dots) + (y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \epsilon^3 y_3 + \dots) = \epsilon F(y, \omega \dot{y}).$$

les coefficients des différentes puissances de ϵ sont égaux à zéro, alors on a

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0, \quad (2.41)$$

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -2\omega_1 \dot{y}_0 + F(y_0, \dot{y}_0), \quad (2.42)$$

$$\ddot{y}_2 + y_2 = -2\omega_1 \dot{y}_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_2) \ddot{y}_0 + F_y(y_0, \dot{y}_0) y_1 + F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1), \quad (2.43)$$

$$\ddot{y}_3 + y_3 = G_3(\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{y}_2; y_0, y_1, y_2), \quad (2.44)$$

⋮

$$\ddot{y}_n + y_n = G_n(\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_{n-1}; y_0, y_1, \dots, y_{n-1}). \quad (2.45)$$

Si F est une fonction polynomiale en y et dy/dt , alors G "est aussi une fonction polynomiale par rapport à ses arguments".

La condition de la périodicité pour la nouvelle variable θ peut être exprimée comme

$$y(\theta) = y(\theta + 2\pi). \quad (2.46)$$

Les conditions correspondantes pour $y_n(\theta)$ sont

$$y_n(\theta) = y_n(\theta + 2\pi). \quad (2.47)$$

La solution (2.35) doit être une solution périodique de l'équation (2.33), puis les côtés droits des équations (2.41), (2.42), (2.43) et (2.44) ne doivent pas contenir des multiples constants de $\sin\theta$ ou de $\cos\theta$; sinon, des termes séculaires existeraient. Par conséquent, si $y_n(0)$ doit être périodique, deux conditions doivent être satisfaites à chaque étape du calcul.

Il existe une situation pour laquelle l'analyse précédente peut être simplifiée. Cela se produit lorsque la fonction $F(y, dy/dt)$ est une fonction paire de dy/dt . Pour ce cas, on peut choisir $y(t)$ comme une fonction paire de t en utilisant les conditions initiales

$$y(0) = A, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0. \quad (2.48)$$

Par conséquent, $y(\theta)$ et $y_n(\theta)$ sont des fonctions paires de θ . Ainsi, les côtés droits des équations (2.41), (2.42) et (2.43) ne contiennent pas de terme dans $\sin\theta$. Pour cette situation, un seul paramètre libre ω_n est nécessaire pour s'assurer qu'il n'y a pas de terme dans $\cos\theta$. Ce résultat implique que les équations (2.48) devient

$$\begin{cases} y_0(0) = A_0, & y_i(0) = 0 & \text{pour } i \geq 1, \\ \frac{dy_k(0)}{dt} = 0, & & \text{pour } k \geq 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

Donc, la $(n+1)$ ième approximation de la solution de l'équation (2.33) selon la méthode de Lindstedt-Poincaré est donnée par

$$y(t, \epsilon) = \sum_{m=0}^n \epsilon^m y_m(t) + O(\epsilon^{n+1}), \quad (2.50)$$

tel que

$$\theta = \omega t = [1 + \epsilon\omega_1 + \dots + \epsilon^m\omega_m + O(\epsilon^{n+1})] t. \quad (2.51)$$

Remarque 2.2.1. *Poincaré a démontré l'existence de la solution analytique de Lindstedt sous quelques condition, voir [8].*

2.2.3 Exemple

On refaire l'exemple 2.1.1 avec la méthode de Lindstedt-Poincaré

Exemple 2.2.1. Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \epsilon (2y^3) = 0. \quad (2.52)$$

Avec les conditions initiales $y(0) = A$ et $(dy/dt)(0) = 0$, (pour avoir des solutions périodiques il faut que l'amplitude du mouvement ne soit pas trop grande).

Supposons que la solution approximative d'ordre "2" est

$$y(\theta, \epsilon) = y_0(\theta) + \epsilon y_1(\theta) + \epsilon^2 y_2(\theta). \quad (2.53)$$

On a $\theta = \omega t$ telle que

$$\omega(\epsilon) = 1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2, \quad \omega(\epsilon) \neq 1.$$

Alors, en utilisant (2.37) et (2.37) l'équation (2.52) devient

$$\omega^2 \ddot{y} + y = -2\epsilon y^3. \quad (2.54)$$

Avec compensation nous trouvons

$$(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2)^2 (\ddot{y}_0 + \epsilon\ddot{y}_1 + \epsilon^2\ddot{y}_2) + (y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2) = -2\epsilon (y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2)^3.$$

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0, \quad y_0(0) = A, \dot{y}_0 = 0. \quad (2.55)$$

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -2\omega_1 \ddot{y}_0 - 2y_0^3, \quad y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0. \quad (2.56)$$

$$\ddot{y}_2 + y_2 = -2\omega_1 \ddot{y}_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_1) \dot{y}_0 - 6y_0^2 y_1, \quad y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0. \quad (2.57)$$

Il est clair que la solution de (2.55) est

$$y_0(\theta) = A \cos \theta.$$

Substituer ce résultat dans l'équation (2.56), donne

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 2A\omega_1 \cos t - 2A^3 \cos^3 t = 2A\omega_1 \cos t - \frac{A^3}{2} [3\cos t + \cos 3t]. \quad (2.58)$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_1 + y_1 = [2A\omega_1 - 3\frac{A^3}{2}]cost - \frac{A^3}{2}cos3t.$$

Donc L'absence de termes séculaires donne

$$2A\omega_1 - 3\frac{A^3}{2} = 0 \Rightarrow \omega_1 = 3\frac{A^2}{4}.$$

Aucun terme séculaire n'apparaît, implique que $\omega_1 = 3(A^2/4)$. Si l'équation différentielle résultante est résolue pour $y_1(\theta)$, sous les conditions initiales $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$, alors l'équation (2.56) devient

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -\frac{A^3}{2}cos3t, \quad y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0. \quad (2.59)$$

La solution particulier donné par

$$y_{1p} = \frac{A^3}{16}cos3t. \quad (2.60)$$

Par conséquent, la solution générale est

$$y_1(\theta) = C_1cos\theta + C_2sin\theta + \frac{A^3}{16}cos3\theta. \quad (2.61)$$

Les conditions initiales, spécifiées par les équations (2.56), permettent de déterminer les constantes arbitraires C_1 et C_2 ; telles que $C_1 = -(A^2/16)$ et $C_2 = 0$, ainsi $y_1(\theta)$ devient

$$y_1(\theta) = -\frac{A^3}{16}cos\theta + \frac{A^3}{16}cos3\theta = \frac{A^3}{16}[cos3\theta - cos\theta]. \quad (2.62)$$

La solution de l'équation (2.55) est $y_0(\theta) = Acos\theta$, et la solution de l'équation (2.55)

est $y_1(\theta) = \frac{A^3}{16}[cos3\theta - cos\theta]$ et $\omega_1 = 3(A^2/4)$. Substituer ce résultat dans l'équation (2.57), donne

$$\ddot{y}_2 + y_2 = 2A\omega_2cos\theta + \frac{3A^5}{8}(cos^2\theta cos3\theta - cos^3\theta).$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_2 + y_2 = 2A\omega_2cos\theta + \frac{3A^5}{32}(cos3\theta + cos3\theta cos2\theta) - \frac{3A^5}{32}(3cos\theta + cos3\theta).$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_2 + y_2 = 2A\omega_2cos\theta + \frac{3A^5}{32}\left(\cos3\theta + \frac{1}{2}(\cos5\theta + \cos\theta)\right) - \frac{3A^5}{32}(3cos\theta + cos3\theta).$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_2 + y_2 = \left(2A\omega_2 - \frac{15A^5}{64}\right) \cos\theta + \left(\frac{3A^5}{64}\right) \cos 5\theta.$$

Donc, l'absence de termes séculaires donne

$$2A\omega_2 - \frac{15A^5}{64} = 0 \Rightarrow \omega_2 = 15 \frac{A^4}{128}.$$

Aucun terme séculaire n'apparaît, implique que $\omega_2 = (15A^4/128)$. Si l'équation différentielle résultante est résolue pour $y_2(\theta)$, sous les conditions initiales $y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$, alors l'équation (2.57) devient

$$\ddot{y}_2 + y_2 = \left(\frac{3A^5}{64}\right) \cos 5\theta, \quad y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0. \quad (2.63)$$

La solution particulier de cette équation est

$$y_{2p}(\theta) = -\frac{A^5}{512} \cos 5\theta.$$

Alors, la solution générale est

$$y_2(\theta) = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta - \frac{A^5}{512} \cos 5\theta.$$

Les conditions initiales, spécifiées par les équations (2.57), permettent de déterminer les constantes arbitraires C_1 et C_2 ; telles que $C_1 = (A^5/512)$ et $C_2 = 0$, ainsi $y_2(\theta)$ devient

$$y_2(\theta) = \frac{A^5}{512} (\cos\theta - \cos 5\theta). \quad (2.64)$$

Finalement, l'approximation d'ordre "2" de la solution de l'équation (2.52) est

$$y(\theta, \epsilon) = A \cos\theta + \epsilon \left(\frac{A^3}{16}\right) [\cos 3\theta - \cos\theta] + \epsilon^2 \left(\frac{A^5}{512}\right) [\cos\theta - \cos 5\theta],$$

où $\theta = \omega t$ telle que

$$\omega(\epsilon) = 1 + \epsilon \left(3 \frac{A^2}{4}\right) + \epsilon^2 \left(15 \frac{A^4}{128}\right) + \dots$$

Remarque 2.2.2. 1) La méthode de Lindstedt ne donne que les solutions périodiques.

2) Notons ici qu'il y a des équations n'admettent pas des solutions périodiques.

• La proposition suivante donne la condition nécessaire et suffisante de la périodicité.

Proposition 2.2.1. (voir [9]) Soit l'équation

$$\ddot{y} + y = G(\theta), \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0. \quad (2.65)$$

La solution de ce problème est

$$y(\theta) = \int_0^\theta \sin(\theta - \tau) G(\tau) d\tau. \quad (2.66)$$

* De plus, l'équation (2.42) a une solution périodique $y_1(\theta)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} F(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta d\theta = 0, \\ 2\pi\omega_1 A + \int_0^\theta F(A \cos \theta, -A \sin \theta) \cos \theta d\theta = 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

Preuve 2.1. La solution générale de l'équation (2.65) est

$$y(\theta) = C_1 \cos(\theta) + C_2 \sin(\theta) + y_p(\theta),$$

tel que $y_p(\theta) = C_1 \cos(\theta) + C_2 \sin(\theta)$, avec

$$\begin{cases} C_1'(\theta) \cos \theta + C_2'(\theta) \sin \theta = 0 \\ -C_1'(\theta) \sin \theta + C_2'(\theta) \cos \theta = G(\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -C_1'(\theta) = -\sin \theta G(\theta) \Rightarrow C_1(\theta) = -\int_0^\theta \sin \tau G(\tau) d\tau, \quad C_1(0) = 0, \\ C_2'(\theta) = \cos \theta G(\theta) \Rightarrow C_2(\theta) = \int_0^\theta \cos \tau G(\tau) d\tau, \quad C_2(0) = 0, \end{cases}$$

ce qui implique

$$y_p(\theta) = (-\int_0^\theta \sin \tau G(\tau) d\tau) \cos \theta + (\int_0^\theta \cos \tau G(\tau) d\tau) \sin \theta = \int_0^\theta (-\sin \tau \cos \theta + \cos \tau \sin \theta) G(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow y_p(\theta) = \int_0^\theta \sin(\theta - \tau) G(\tau) d\tau \Rightarrow y(\theta) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \int_0^\theta \sin(\theta - \tau) G(\tau) d\tau$$

Avec les valeurs initiales $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ on trouve $C_1 = C_2 = 0$. Donc la solution du

problème (2.65) est bien (2.66).

*De plus, l'équation (2.42) donne

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 + G(\tau). \end{cases}$$

D'autre part, la condition de périodicité par la nouvelle variable θ peut être exprimée par

$$y(\theta) = y(\theta + 2\pi). \quad (2.68)$$

Donc, les conditions correspondantes pour $y_n(\theta)$ sont

$$y_n(\theta) = y_n(\theta + 2\pi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.69)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(2\pi) = y_1(0) = 0 \\ y_2(2\pi) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne la condition de périodicité

$$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin(\theta - \tau) G(\tau) d\tau = 0, \quad (2.70)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \theta G(\theta) d\theta = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \theta G(\theta) d\theta = 0. \end{cases} \quad (2.71)$$

D'après l'équation (2.42), on a $G(\theta) = -2\omega_1 \ddot{y}_0 + F(y_0, \dot{y}_0)$

Nous récrivons l'équation comme

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \theta [2\omega_1 A \cos \theta + F(A \cos \theta, -A \sin \theta)] d\theta = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \theta [2\omega_1 A \cos \theta + F(A \cos \theta, -A \sin \theta)] d\theta = 0. \end{cases} \quad (2.72)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\omega_1 A \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos \theta F(A \cos \theta, -A \sin \theta) d\theta = 0, \\ 2\omega_1 A \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \sin \theta F(A \cos \theta, -A \sin \theta) d\theta = 0. \end{cases} \quad (2.73)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\pi\omega_1 A + \int_0^{2\pi} F(A \cos \theta, -A \sin \theta) \cos \theta d\theta = 0, \\ \int_0^{2\pi} F(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta d\theta = 0. \end{cases} \quad (2.74)$$

Ce qui est requis.

Exemple 2.2.2. On refaire l'exemple 2.1.2, sachant que cette exemple a été résolu par la méthode de perturbation simple.

Soit l'équation différentielle suivante

$$\ddot{x} + x = \epsilon (-\dot{x} + x^2). \quad (2.75)$$

D'abord on vérifie la condition de périodicité.

On sait que la solution de cette équation est donnée par

$$x(t, \epsilon) = A \cos t + \epsilon \left(-\frac{A^2}{3} \cos t + \frac{A}{2} \sin t - \frac{A}{2} t \cos t + \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{6} \cos 2t \right). \quad (2.76)$$

D'après le proposition 2.2.1 on a

$$\begin{aligned} F(x, \dot{x}) &= -\dot{x} + x^2 \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} F(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta d\theta & \\ &= \int_0^{2\pi} [A \sin \theta + A^2 \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta \\ &= A \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{A}{2} \int_0^{2\pi} [1 - \cos^2 2\theta] d\theta = A\pi \neq 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Alors, la solution d'équation (2.75) est non périodique.

Enfin, nous ne pouvons pas appliquer la théorème de Lindstedt-Poincaré.

Exemple 2.2.3. Soit le problème perturbé suivant

$$\ddot{x} + 2\epsilon \dot{x} + x = 0, \quad x_n(0) = A, \dot{x}_n(0) = 0, \quad (2.78)$$

On a la solution approximative de premier ordre à un problème perturbé par la méthode de perturbation simple est

$$x(t, \epsilon) = A \cos t + \epsilon (A \sin t - At \cos t). \quad (2.79)$$

S'appuyer sur la proposition 2.2.1 pour voir que la condition 2.67 est vérifiée ou non

$$F(x, \dot{x}) = -2\dot{x},$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} F(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.80)$$

$$= 2A \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = A \int_0^{2\pi} 1 - \cos 2\theta d\theta = 2A\pi \neq 0.$$

On remarque la condition 2.67 n'est pas vérifiée donc, la solution d'équation (2.78) est non périodique .

Alors, nous ne pouvons pas appliquer la théorème de Lindstedt-Poincaré.

Chapitre 3

Quelques résultats des solutions approximatives

3.1 Quelques Propositions

Proposition 3.1.1. *La formule générale de l'équation (2.44) est*

$$\begin{aligned} \ddot{y}_3 + y_3 = G_3(\theta) = & -2\omega_1 \ddot{y}_2 - (\omega_1^2 + 2\omega_2) \ddot{y}_1 - (2\omega_3 + 2\omega_1\omega_2) \ddot{y}_0 + y_2 F_y(y_0, \dot{y}_0) + \frac{y_1^2}{2} F_{yy}(y_0, \dot{y}_0) + \\ & + y_1 (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) F_{y\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + (\omega_2 \dot{y}_0 + \omega_1 \dot{y}_1 + \dot{y}_2) F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + \frac{1}{2} (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2 F_{\dot{y}\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Preuve 3.1. *Première, par substitute l'équation (2.35) et (2.36) dans (2.33) on a*

$$\begin{aligned} \epsilon^3 (\ddot{y}_3 + y_3 + 2\omega_1 \ddot{y}_2 + (\omega_1^2 + 2\omega_2) \ddot{y}_1 + (2\omega_3 + 2\omega_1\omega_2) \ddot{y}_0) &= \frac{\epsilon^3}{2} \frac{\partial^2 F(y_0, \dot{y}_0)}{\partial \epsilon^2} \\ \Rightarrow \ddot{y}_3 + y_3 &= -2\omega_1 \ddot{y}_2 - (\omega_1^2 + 2\omega_2) \ddot{y}_1 - (2\omega_3 + 2\omega_1\omega_2) \ddot{y}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(y_0, \dot{y}_0)}{\partial \epsilon^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(y, \omega \dot{y})}{\partial \epsilon^2} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \omega \dot{y}}{\partial \epsilon} \right) \\ &= \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial F}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 y}{\partial \epsilon^2} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \omega \dot{y}}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial^2 \omega \dot{y}}{\partial \epsilon^2} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \\ &= \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{y}} \frac{\partial \omega \dot{y}}{\partial \epsilon} \right) + \frac{\partial^2 y}{\partial \epsilon^2} F_y + \frac{\partial^2 \omega \dot{y}}{\partial \epsilon^2} F_{\dot{y}} + \frac{\partial \omega \dot{y}}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} \frac{\partial \omega \dot{y}}{\partial \epsilon} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right)^2 F_{yy} + 2 \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \frac{\partial \omega \dot{y}}{\partial \epsilon} F_{y\dot{y}} + \frac{\partial^2 y}{\partial \epsilon^2} F_y + \frac{\partial^2 \omega \dot{y}}{\partial \epsilon^2} F_{\dot{y}} + \left(\frac{\partial \omega \dot{y}}{\partial \epsilon} \right)^2 F_{\dot{y}\dot{y}},$$

où

$$F_{yy} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y}, \quad F_{y\dot{y}} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{y}}, \quad F_{\dot{y}\dot{y}} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial \dot{y}}.$$

D'un autre côté, dans le troisième ordre, nous avons

$$y = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \epsilon^3 y_3 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \epsilon} = y_1 + 2\epsilon y_2 + 3\epsilon^2 y_3 \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial \epsilon^2} = 2y_2 + 6\epsilon y_3,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega \dot{y}}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon} \dot{y} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \epsilon} \omega = (\omega_1 + 2\epsilon \omega_2 + 3\epsilon^2 \omega_3) (\dot{y}_0 + \epsilon \dot{y}_1 + \epsilon^2 \dot{y}_2 + \epsilon^3 \dot{y}_3) \\ &\quad + (\dot{y}_1 + 2\epsilon \dot{y}_2 + 3\epsilon^2 \dot{y}_3) (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \epsilon^3 \omega_3), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega \dot{y}}{\partial \epsilon^2} &= (2\omega_2 + 6\epsilon \omega_3) (\dot{y}_0 + \epsilon \dot{y}_1 + \epsilon^2 \dot{y}_2 + \epsilon^3 \dot{y}_3) + 2 (\dot{y}_1 + 2\epsilon \dot{y}_2 + 3\epsilon^2 \dot{y}_3) (\omega_1 + 2\epsilon \omega_2 + 3\epsilon^2 \omega_3) \\ &\quad + (2\dot{y}_2 + 6\epsilon \dot{y}_3) (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \epsilon^3 \omega_3), \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(y_0, \dot{y}_0)}{\partial \epsilon^2} &= \frac{y_1^2}{2} F_{yy}(y_0, \dot{y}_0) + (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) y_1 F_{y\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + y_2 F_y(y_0, \dot{y}_0), \\ &\quad + (\omega_2 \dot{y}_0 + \omega_1 \dot{y}_1 + \dot{y}_2) F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + \frac{1}{2} (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2 F_{\dot{y}\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

lorsque nous substituons (3.3) dans l'équation (3.2), nous obtenons (3.1).

Proposition 3.1.2. *L'équation (2.43) a une solution périodique $y_2(\theta)$ si et seulement si*

$$\left\{ \begin{aligned} w_2 &= -\frac{w_1^2}{2} + \frac{1}{2A\pi} \int_0^{2\pi} (2w_1 \cos \theta \dot{y}_1 - \cos \theta F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 \\ &\quad - (w_1 A \sin \theta \cos \theta + \dot{y}_1 \cos \theta) F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta)) d\theta, \\ \int_0^{2\pi} \sin \theta (F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 + F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \dot{y}_1) \\ &\quad - \omega_1 \int_0^{2\pi} (2 \sin \theta \dot{y}_1 + A F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin^2 \theta) d\theta = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.4)$$

Preuve 3.2. *La condition de périodicité donne*

$$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin(\theta - \tau) G(\tau) d\tau = 0, \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \theta G(\theta) = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \theta G(\theta) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

D'après l'équation (2.43), on a

$$G(\theta) = -2\omega_1 \ddot{y}_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_2) \ddot{y}_0 + F_y(y_0, \ddot{y}_0) y_1 + F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0)(\omega_1 \dot{y}_0, \dot{y}_1),$$

$$y_0(\theta) = A \cos \theta.$$

$$\begin{aligned} y_1(\theta) &= \int_0^{\theta} \sin(\theta - \tau) G(\tau) d\tau = \int_0^{\theta} \sin(\theta - \tau) [-2w_1 \ddot{y}_0(\tau) + F(y_0, \dot{y}_0)] d\tau, \\ &\Rightarrow y_1(\theta) = \int_0^{\theta} \sin(\theta - \tau) (2w_1 A \cos \tau + F(A \cos \tau, -A \sin \tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Nous récrivons (3.5) comme

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \theta [-2w_1 \ddot{y}_1 - (w_1^2 + 2w_2)(-A \cos \theta) + F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1] d\theta \\ + \int_0^{2\pi} \cos \theta [F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta)(-w_1 A \sin \theta + \dot{y}_1)] d\theta = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \theta [-2w_1 \ddot{y}_1 - (w_1^2 + 2w_2)(-A \cos \theta) + F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1] d\theta \\ + \int_0^{2\pi} \cos \theta [F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta)(-w_1 A \sin \theta + \dot{y}_1)] d\theta = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2w_1 \int_0^{2\pi} \cos \theta \ddot{y}_1 d\theta + (w_1^2 + 2w_2) A \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos \theta F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 d\theta \\ - w_1 A \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \dot{y}_1 \cos \theta d\theta = 0, \\ -2w_1 \int_0^{2\pi} \sin \theta \ddot{y}_1 d\theta + (w_1^2 + 2w_2) A \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \sin \theta F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 d\theta \\ - w_1 A \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \dot{y}_1 \sin \theta d\theta = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2w_1 \int_0^{2\pi} \cos \theta \ddot{y}_1 d\theta + (w_1^2 + 2w_2)A\pi + \int_0^{2\pi} \cos \theta F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 d\theta \\ -w_1 A \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \dot{y}_1 \cos \theta d\theta = 0, \\ -2w_1 \int_0^{2\pi} \sin \theta \ddot{y}_1 d\theta + \int_0^{2\pi} \sin \theta F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 d\theta \\ -w_1 A \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \dot{y}_1 \sin \theta d\theta = 0. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_2 = -\frac{w_1^2}{2} + \frac{1}{2A\pi} \int_0^{2\pi} (2w_1 \cos \theta \ddot{y}_1 - \cos \theta F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 \\ + w_1 A F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta \cos \theta - F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \dot{y}_1 \cos \theta) d\theta, \\ -2w_1 \int_0^{2\pi} \sin \theta \ddot{y}_1 d\theta + \int_0^{2\pi} \sin \theta F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 d\theta \\ -w_1 A \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \dot{y}_1 \sin \theta d\theta = 0. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_2 = -\frac{w_1^2}{2} + \frac{1}{2A\pi} \int_0^{2\pi} (2w_1 \cos \theta \ddot{y}_1 - \cos \theta F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 \\ - (w_1 A \sin \theta \cos \theta + \dot{y}_1 \cos \theta) F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta)) d\theta, \\ \int_0^{2\pi} \sin \theta (F_y(A \cos \theta, -A \cos \theta) y_1 + F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \dot{y}_1) \\ - \omega_2 \int_0^{2\pi} (2 \sin \theta \ddot{y}_1 + A F_{\dot{y}}(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin^2 \theta) d\theta = 0. \end{array} \right.$$

3.2 Comparaisons des solutions approximatives

[11] Dans ce partie essentielle de notre travail, nous traitons quelques équations non classiques, plus générales que l'équation (2.33), et également différentes de l'équation étudiée. Nous considérons les équations sous la forme suivante

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2}(t, \epsilon) + \tilde{y}(t, \epsilon) = g(\epsilon) F\left(\tilde{y}(t, \epsilon), \frac{d\tilde{y}}{dt}(t, \epsilon)\right), \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (3.10)$$

où $\tilde{y}(0, \epsilon) = A$, $\frac{d\tilde{y}}{dt}(0, \epsilon) = 0$, tel que ϵ est un petit paramètre positif, et F est supposé une fonction analytique de $\tilde{y}(t, \epsilon)$ et $d\tilde{y}/dt(t, \epsilon)$.

Pour calculer une solution périodique uniformément approximative, une nouvelle variable $\tilde{\theta} = \tilde{\omega}t$ est introduit, et les deux $\tilde{y}$ et $\tilde{\omega}$ sont étendus en puissances de ϵ comme suit

$$\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon) = \tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0) + \epsilon \tilde{y}_1(\tilde{\theta}, 0) + \epsilon^2 \tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0) + \epsilon^3 \tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0) + \dots + \epsilon^n \tilde{y}_n(\tilde{\theta}, 0) + \dots, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\omega}(\epsilon) = 1 + \epsilon \tilde{\omega}_1 + \epsilon^2 \tilde{\omega}_2 + \epsilon^3 \tilde{\omega}_3 + \dots + \epsilon^n \tilde{\omega}_n + \dots \quad (3.12)$$

Nous notons qu'à cette étape, le $\tilde{\omega}_j$ sont des inconnues, on les obtient par élimination des termes séculaires.

Pour utiliser la solution périodique uniformément approximative (3.10), nous donnons d'abord la fomule générale de $\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0)$, $\tilde{y}_1(\tilde{\theta}, 0)$, $\tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0)$ et $\tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0)$ dans la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *Les termes $\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0)$, $\tilde{y}_1(\tilde{\theta}, 0)$, $\tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0)$ and $\tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0)$ sont respectivement des solutions de (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16) tels que*

$$\ddot{\tilde{y}}_0 + \tilde{y}_0 = 0, \quad (3.13)$$

$$\ddot{\tilde{y}}_1 + \tilde{y}_1 = \tilde{G}_1(\tilde{\theta}), \quad (3.14)$$

$$\ddot{\tilde{y}}_2 + \tilde{y}_2 = \tilde{G}_2(\tilde{\theta}), \quad (3.15)$$

$$\ddot{\tilde{y}}_3 + \tilde{y}_3 = \tilde{G}_3(\tilde{\theta}). \quad (3.16)$$

où

$$\tilde{G}_1(\tilde{\theta}) = -2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_0 + c_1 F\left(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)\right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\tilde{\theta}) = & -2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_0 + c_1 F\left(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)\right) - 2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_1 - (\tilde{\omega}_1^2 + 2\tilde{\omega}_2) \ddot{\tilde{y}}_0 \\ & + c_1 \left(F_{\tilde{y}}\left(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)\right) \tilde{y}_1 + F_{\dot{\tilde{y}}}\left(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)\right) (\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1)\right) + c_2 F\left(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_3(\tilde{\theta}) &= -2\tilde{\omega}_1\ddot{\tilde{y}}_2 - (\tilde{\omega}_1^2 + 2\tilde{\omega}_2)\ddot{\tilde{y}}_1 - (2\tilde{\omega}_3 + 2\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2)\ddot{\tilde{y}}_0 \\
&+ c_2 \left[F_{\tilde{y}}(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)) \tilde{y}_1 + F_{\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)) (\tilde{\omega}_1\dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1) \right] \\
&+ c_1 \left[\frac{\tilde{y}_1^2}{2} F_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)) + (\tilde{\omega}_1\dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1) \tilde{y}_1 F_{\tilde{y}\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)) + \tilde{y}_2 F_{\tilde{y}}(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)) \right] \\
&+ c_1 \left[(\tilde{\omega}_2\dot{\tilde{y}}_0 + \tilde{\omega}_1\dot{\tilde{y}}_1 + \dot{\tilde{y}}_2) F_{\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)) + \frac{1}{2} (\tilde{\omega}_1\dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1)^2 F_{\dot{\tilde{y}}\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)) \right] \\
&+ c_3 F(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)).
\end{aligned}$$

Preuve. L'équation (3.10) sera écrite comme

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon)}{dt^2} + \tilde{y}(\tilde{\theta}) &= \sum_{k \geq 1} \epsilon^k c_k F\left(\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon), \frac{d\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon)}{dt}\right) = \epsilon \left(\sum_{k \geq 0} \epsilon^k c_{k+1} F\left(\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon), \frac{d\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon)}{dt}\right) \right) \\
&= \epsilon K\left(\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon), \frac{d\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon)}{dt}\right),
\end{aligned}$$

où K est un fonction analytice de y et dy/dt .

Substitution de l'équation (3.11) dans l'équation (3.10), nous avons

$$\begin{aligned}
&(1 + \epsilon\tilde{\omega}_1 + \epsilon^2\tilde{\omega}_2 + \epsilon^3\tilde{\omega}_3 + \dots)^2 (\ddot{\tilde{y}}_0 + \epsilon\ddot{\tilde{y}}_1 + \epsilon^2\ddot{\tilde{y}}_2 + \epsilon^3\ddot{\tilde{y}}_3 + \dots) + (\tilde{y}_0 + \epsilon\tilde{y}_1 + \epsilon^2\tilde{y}_2 + \epsilon^3\tilde{y}_3 + \dots) \\
&= \epsilon K(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + \epsilon^2 \frac{\partial K(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \epsilon} + \frac{\epsilon^3}{2} \frac{\partial^2 K(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \epsilon^2} + \dots, \\
&= \epsilon c_1 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + \epsilon^2 \left[c_1 \frac{\partial F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \epsilon} + c_2 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \right] + \epsilon^3 \left[c_3 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + c_2 \frac{\partial F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \epsilon} + \frac{c_1}{2} \frac{\partial^2 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \epsilon^2} \right] + \dots, \\
&= \epsilon c_1 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + \epsilon^2 \left[c_1 \left(\frac{\partial F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \tilde{y}} \cdot \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \dot{\tilde{y}}} \cdot \frac{\partial \omega \dot{\tilde{y}}}{\partial \epsilon} \right) + c_2 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \right] \\
&+ \epsilon^3 \left[c_3 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + c_2 \left(\frac{\partial F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \tilde{y}} \cdot \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \dot{\tilde{y}}} \cdot \frac{\partial \omega \dot{\tilde{y}}}{\partial \epsilon} \right) + \frac{c_1}{2} \frac{\partial^2 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)}{\partial \epsilon^2} \right] \\
&= \epsilon c_1 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + \epsilon^2 \left[c_1 \left(F_{\tilde{y}}(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \tilde{y}_1 + F_{\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) (\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1) \right) + c_2 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \right] \\
&+ \epsilon^3 \left[c_3 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + c_2 \left(F_{\tilde{y}}(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \tilde{y}_1 + F_{\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) (\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1) \right) \right] \\
&+ \epsilon^3 \left[c_1 \left(\frac{\tilde{y}_1^2}{2} F_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + (\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1) \tilde{y}_1 F_{\tilde{y}\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + \tilde{y}_2 F_{\tilde{y}}(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) + (\tilde{\omega}_2 \dot{\tilde{y}}_2 + \tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_1 + \dot{\tilde{y}}_2) F_{\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+\epsilon^3 \left[\frac{1}{2} (\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1)^2 F_{\dot{\tilde{y}}\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \right].$$

Puis nous mettons tous les différents pouvoirs de ϵ à zéro, et nous obtenons des équations (3.13), (3.14), (3.15), (3.16). $\square$

3.3 Nouvelle approche

Le but de cette étude est de construire une nouvelle approche de l'équation (2.34), ce qui donne une solution approximative plus proche de l'équation (2.34) plus qu'une solution approximative de l'équation (2.33). Les relations entre une solution approximative de l'équation (3.10) et celle de (2.33) sont déterminées par le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Si la fonction $g(\epsilon)$ est étendu en puissances de ϵ*

où $g(0) = 0$ i.e $g(\epsilon) = \sum_{k \geq 1} \epsilon^k c_k$, tel que c_k sont des constantes, on a

$$1) \tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0) = y_0(\tilde{\theta}, 0).$$

$$2) \tilde{y}_1(\tilde{\theta}, 0) = c_1 y_1(\tilde{\theta}, 0).$$

$$3) \tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0) = c_1^2 y_2(\tilde{\theta}, 0) + c_2 y_1(\tilde{\theta}, 0).$$

$$4) \tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0) = c_1^3 y_3(\tilde{\theta}, 0) + 2c_1 c_2 y_2(\tilde{\theta}, 0) + c_3 y_1(\tilde{\theta}, 0).$$

Remarque 3.3.1. *La preuve des points 1, 2 et 3 dans lemme 3.3.1 est dans [11] et on a montré le point 4.*

Démonstration 3.3.1. 1) L'équation (3.13) donne

$$\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0) = A \cos \tilde{\theta} = A \cos(\tilde{\omega}(0)t) = A \cos t = A \cos(\omega(0)t) = A \cos \theta = y_0(\theta, 0).$$

2) Lorsque nous appliquons la condition de périodicité (2.71) à l'équation (3.14), nous avons

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \tilde{G}_1(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \tilde{G}_1(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[-2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_0 + c_1 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \right] d\tilde{\theta} = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[-2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_0 + c_1 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \right] d\tilde{\theta} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A\pi\tilde{\omega}_1 + c_1 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) d\tilde{\theta} = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) d\tilde{\theta} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = -\frac{c_1}{2A\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) d\tilde{\theta}, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) d\tilde{\theta} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = c_1 \omega_1, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) d\tilde{\theta} = 0. \end{cases}$$

D'autre part, selon (2.66) la solution $\tilde{y}_1(\tilde{\theta}, 0)$ d'équation (3.14) est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(\tilde{\theta}, 0) &= \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) \tilde{G}_1(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} = \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) [-2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_0 + c_1 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)] d\tilde{\tau} \\ &= \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) [-2c_1 \omega_1 \ddot{y}_0 + c_1 F(y_0, \dot{y}_0)] d\tilde{\tau} = c_1 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) [-2\omega_1 \ddot{y}_0 + F(y_0, \dot{y}_0)] d\tilde{\tau} \\ &= c_1 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) G_1(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} = c_1 y_1(\tilde{\theta}, 0). \end{aligned}$$

3) Lorsque nous appliquons la condition de périocité (2.71) à l'équation (3.15), nous avons

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \tilde{G}_2(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \tilde{G}_2(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} [-2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_0 + c_1 F(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0))] - 2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_1 - (\tilde{\omega}_1^2 + 2\tilde{\omega}_2) \ddot{\tilde{y}}_0 \\ + c_1 F_{\tilde{y}}(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)) \tilde{y}_1 + c_1 F_{\dot{\tilde{y}}}(\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1) + c_2 F(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0))] d\tilde{\theta} = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} [-2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_0 + c_1 F(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0))] - 2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_1 - (\tilde{\omega}_1^2 + 2\tilde{\omega}_2) \ddot{\tilde{y}}_0 \\ + c_1 F_{\tilde{y}}(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0)) \tilde{y}_1 + c_1 F_{\dot{\tilde{y}}}(\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1) + c_2 F(\tilde{y}_0(\tilde{\theta}, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\tilde{\theta}, 0))] d\tilde{\theta} = 0. \end{cases}$$

En utilisant Lemme 3.3.1 on a

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} [-2c_1 \omega_1 \ddot{y}_0 + c_1 F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] - 2c_1^2 \omega_1 \ddot{y}_1 - (c_1^2 \omega_1^2 + 2\tilde{\omega}_2) \ddot{y}_0 \\ + c_1 F_y(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) c_1 y_1 + c_1 F_{\dot{y}}(c_1 \omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) + c_2 F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} [-2c_1 \omega_1 \ddot{y}_0 + c_1 F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] - 2c_1^2 \omega_1 \ddot{y}_1 - (c_1^2 \omega_1^2 + 2\tilde{\omega}_2) \ddot{y}_0 \\ + c_1 F_y(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) c_1 y_1 + c_1 F_{\dot{y}}(c_1 \omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) + c_2 F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} [-2\omega_1 \ddot{y}_1 - w_1^2 \ddot{y}_0 + F_y(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) y_1 + F_{\dot{y}}(w_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)] d\tilde{\theta} \right) \\ + c_1 \left(\int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} [-2w_1 \ddot{y}_0 + F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} \right) + c_2 \left(\int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} [F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} \right) \\ - \left(\int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} [-2\tilde{w}_2 \ddot{y}_0] d\tilde{\theta} \right) = 0, \\ c_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} [-2\omega_1 \ddot{y}_1 - w_1^2 \ddot{y}_0 + F_y(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) y_1 + F_{\dot{y}}(w_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)] d\tilde{\theta} \right) \\ + c_1 \left(\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} [-2w_1 \ddot{y}_0 + F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} \right) + c_2 \left(\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} [F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} \right) \\ - \left(\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} [-2\tilde{w}_2 \ddot{y}_0] d\tilde{\theta} \right) = 0. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} [-2\omega_1 \ddot{y}_1 - w_1^2 \ddot{y}_0 + F_y(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) y_1 + F_{\dot{y}}(w_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)] d\tilde{\theta} \right) \\ + c_1 \left(\int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} [-2w_1 \ddot{y}_0 + F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} \right) + c_2 \left(\int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} [F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} \right) \\ = -2A\pi \tilde{w}_2, \\ c_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} [-2\omega_1 \ddot{y}_1 - w_1^2 \ddot{y}_0 + F_y(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) y_1 + F_{\dot{y}}(w_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)] d\tilde{\theta} \right) \\ + c_1 \left(\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} [-2w_1 \ddot{y}_0 + F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} \right) + c_2 \left(\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} [F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] d\tilde{\theta} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Nous avons de l'équation (2.67)

$$w_1 = \frac{-1}{2A\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) d\tilde{\theta} \implies \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) d\tilde{\theta} = -2A\pi w_1.$$

En utilisant l'équation (3.9) et (2.67) on a

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2c_1^2 A\pi w_2 + 2A\pi c_1 w_1 - 2A\pi c_1 \omega_1 - 2A\pi c_2 \omega_1 = -2A\pi \tilde{w}_2, \\ -2c_1^2 A w_2 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} + c_1 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) d\tilde{\theta} \\ + c_2 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) d\tilde{\theta} = 0. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = c_1^2 \omega_2 + c_2 \omega_1, \\ (c_1 + c_2) \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) d\tilde{\theta} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = c_1^2 \omega_2 + c_2 \omega_1, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) d\tilde{\theta} = 0. \end{cases}$$

En revanche, selon (2.66) la solution $\tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0)$ d'équation (3.15) est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0) &= \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) \tilde{G}_2(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \\ &= c_1^2 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) G_2(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} + c_2 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) \left[-2\tilde{\omega}_1 \ddot{y}_0 + c_1 F(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \right] d\tilde{\tau}, \\ &\Rightarrow \tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0) = c_1^2 y_2(\tilde{\theta}, 0) + c_2 y_1(\tilde{\theta}, 0). \end{aligned}$$

4) Lorsque nous appliquons la condition de périodicité (2.71) à l'équation (3.16), nous avons

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \tilde{G}_3(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \tilde{G}_3(\theta) d\tilde{\theta} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[-2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_2 - (\tilde{\omega}_1^2 + 2\tilde{\omega}_2) \ddot{\tilde{y}}_1 - (2\tilde{\omega}_3 + 2\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2) \ddot{\tilde{y}}_0 \right] d\tilde{\theta} \\ + c_2 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[F_{\tilde{y}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) \tilde{y}_1 + F_{\dot{\tilde{y}}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) \left(\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1 \right) \right] d\tilde{\theta} \\ + c_1 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[\frac{\tilde{y}_1^2}{2} F_{\tilde{y}\tilde{y}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) + \left(\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1 \right) \tilde{y}_1 F_{\tilde{y}\dot{\tilde{y}}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) + \tilde{y}_2 F_{\tilde{y}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) \right] d\tilde{\theta} \\ + c_1 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[\left(\tilde{\omega}_2 \dot{\tilde{y}}_0 + \tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_1 + \dot{\tilde{y}}_2 \right) F_{\dot{\tilde{y}}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1 \right)^2 F_{\dot{\tilde{y}}\dot{\tilde{y}}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) \right] d\tilde{\theta} \\ + c_3 F \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) d\tilde{\theta} = 0, \\ \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[-2\tilde{\omega}_1 \ddot{\tilde{y}}_2 - (\tilde{\omega}_1^2 + 2\tilde{\omega}_2) \ddot{\tilde{y}}_1 - (2\tilde{\omega}_3 + 2\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2) \ddot{\tilde{y}}_0 \right] d\tilde{\theta} \\ + c_2 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[F_{\tilde{y}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) \tilde{y}_1 + F_{\dot{\tilde{y}}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) \left(\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1 \right) \right] d\tilde{\theta} \\ + c_1 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[\frac{\tilde{y}_1^2}{2} F_{\tilde{y}\tilde{y}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) + \left(\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1 \right) \tilde{y}_1 F_{\tilde{y}\dot{\tilde{y}}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) + \tilde{y}_2 F_{\tilde{y}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) \right] d\tilde{\theta} \\ + c_1 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[\left(\tilde{\omega}_2 \dot{\tilde{y}}_0 + \tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_1 + \dot{\tilde{y}}_2 \right) F_{\dot{\tilde{y}}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{\omega}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1 \right)^2 F_{\dot{\tilde{y}}\dot{\tilde{y}}} \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) \right] d\tilde{\theta} \\ + c_3 F \left(\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \right) d\tilde{\theta} = 0. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[-2c_1\omega_1(c_1^2\ddot{y}_2 + c_2\ddot{y}_1) - c_1(c_1^2\omega_1^2 + 2(c_1^2\omega_2 + c_2\omega_1)\ddot{y}_1 - (2\tilde{\omega}_3 + 2c_1\omega_1(c_1^2\omega_2 + c_2\omega_1))\ddot{y}_0) \right] \\ + c_2 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[c_1 F_y(y_0, \dot{y}_0) y_1 + c_1 F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) \right] \\ + c_1 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[\frac{c_1^2 y_1^2}{2} F_{yy}(y_0, \dot{y}_0) + (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) c_1^2 y_1 F_{y\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + (c_1^2 y_2 + c_2 y_1) F_y(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_1 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[((c_1^2 \omega_2 + c_2 \omega_1) \dot{y}_0 + c_1^2 \omega_1 \dot{y}_1 + c_1^2 y_2 + c_2 y_1) F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + \frac{c_1^2}{2} (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2 F_{\dot{y}\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_3 F(y_0, \dot{y}_0) d\theta = 0, \\ \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[-2c_1\omega_1(c_1^2\ddot{y}_2 + c_2\ddot{y}_1) - c_1(c_1^2\omega_1^2 + 2(c_1^2\omega_2 + c_2\omega_1)\ddot{y}_1 - (2\tilde{\omega}_3 + 2c_1\omega_1(c_1^2\omega_2 + c_2\omega_1))\ddot{y}_0) \right] \\ + c_2 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[c_1 F_y(y_0, \dot{y}_0) y_1 + c_1 F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) \right] \\ + c_1 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[\frac{c_1^2 y_1^2}{2} F_{yy}(y_0, \dot{y}_0) + (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) c_1^2 y_1 F_{y\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + (c_1^2 y_2 + c_2 y_1) F_y(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_1 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[((c_1^2 \omega_2 + c_2 \omega_1) \dot{y}_0 + c_1^2 \omega_1 \dot{y}_1 + c_1^2 y_2 + c_2 y_1) F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + \frac{c_1^2}{2} (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2 F_{\dot{y}\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_3 F(y_0, \dot{y}_0) d\theta = 0. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1^3 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[-2\omega_1 \ddot{y}_2 - \omega_1^2 \ddot{y}_1 - 2\omega_2 \ddot{y}_1 - 2\omega_1 \omega_2 \ddot{y}_0 + \frac{y_1^2}{2} F_{yy}(y_0, \dot{y}_0) + y_1(\dot{y}_0 \omega_1 + \dot{y}_1) F_{y\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_1^3 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[y_2 F_y(y_0, \dot{y}_0) + (\omega_2 \dot{y}_0 + \dot{y}_1 \omega_1 + \dot{y}_2) F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + \frac{1}{2} (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2 F_{\dot{y}\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_1 c_2 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} \left[-4\omega_1 \ddot{y}_1 - 2\omega_1^2 \ddot{y}_0 + 2y_1 F_y(y_0, \dot{y}_0) + 2(\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_3 \int_0^{2\pi} \cos \tilde{\theta} F(y_0, \dot{y}_0) d\tilde{\theta} = -2A\pi \tilde{\omega}_3, \\ \\ c_1^3 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[-2\omega_1 \ddot{y}_2 - \omega_1^2 \ddot{y}_1 - 2\omega_2 \ddot{y}_1 - 2\omega_1 \omega_2 \ddot{y}_0 + \frac{y_1^2}{2} F_{yy}(y_0, \dot{y}_0) + y_1(\dot{y}_0 \omega_1 + \dot{y}_1) F_{y\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_1^3 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[y_2 F_y(y_0, \dot{y}_0) + (\omega_2 \dot{y}_0 + \dot{y}_1 \omega_1 + \dot{y}_2) F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + \frac{1}{2} (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2 F_{\dot{y}\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_1 c_2 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \left[-4\omega_1 \ddot{y}_1 - 2\omega_1^2 \ddot{y}_0 + 2y_1 F_y(y_0, \dot{y}_0) + 2(\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) \right] \\ + c_3 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(y_0, \dot{y}_0) d\tilde{\theta} = 0. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2A\pi c_1^3 \omega_3 - 4A\pi c_1 c_2 \omega_2 - 2A\pi c_3 \omega_1 = -2A\pi \tilde{\omega}_3, \\ -2\omega_3 c_1^3 A \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} + 2\omega_2 c_1 c_2 A \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} + c_3 \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(y_0, \dot{y}_0) d\tilde{\theta} \\ = -2\tilde{\omega}_3 A \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta}. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}_3 = c_1^3 \omega_3 + 2c_1 c_2 \omega_2 + c_3 \omega_1, \\ \int_0^{2\pi} \sin \tilde{\theta} F(y_0, \dot{y}_0) d\tilde{\theta} = 0. \end{array} \right.$$

En revanche, selon (2.66) la solution $\tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0)$ d'équation (3.16) est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0) &= \int_0^{2\pi} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) \tilde{G}_3(\tilde{\theta}) = \int_0^{2\pi} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) [-2\tilde{w}_1 \ddot{\tilde{y}}_2 - (\tilde{w}_1^2 + 2\tilde{w}_2) \ddot{\tilde{y}}_2 - (2\tilde{w}_3 + 2\tilde{w}_1 \tilde{w}_2) \ddot{\tilde{y}}_0 \\ &+ c_2 [F_{\tilde{y}}(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] \tilde{y}_1 + F_{\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0(\theta, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\theta, 0)) (\tilde{w}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1)] \\ &+ c_1 [\frac{\tilde{y}_1^2}{2} F_{\tilde{y}\tilde{y}}(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))] + \tilde{y}_1 (\tilde{w}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1) F_{\tilde{y}\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0(\theta, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\theta, 0)) \\ &+ \tilde{y}_2 F_{\tilde{y}}(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) + (\tilde{w}_2 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1 \tilde{w}_1 + \dot{\tilde{y}}_2) F_{\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0(\theta, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\theta, 0)) \\ &+ \frac{1}{2} (\tilde{w}_1 \dot{\tilde{y}}_0 + \dot{\tilde{y}}_1)^2 F_{\dot{\tilde{y}}\dot{\tilde{y}}}(\tilde{y}_0(\theta, 0), \dot{\tilde{y}}_0(\theta, 0))] + c_3 F(y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0) &= \int_0^{2\pi} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) [-2c_1 w_1 (\ddot{y}_2) - (c_1^2 w_1^2 + 2(c_1^2 w_2 + c_2 w_1)) c_1 \ddot{y}_1 \\
&- (2(c_1^3 w_3 + c_1 c_2 2w_2 + c_3 w_1) + (2c_1 w_1 (c_1^2 w_2 + c_2 w_1)) \ddot{y}_0 + c_2 [F_y((y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)) c_1 y_1 \\
&+ F_{\dot{y}}((y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))) (c_1 w_1 \dot{y}_0 + c_1 \dot{y}_1)] + c_1 [(c_1 w_1 \dot{y}_0 + c_1 \dot{y}_1) c_1 y_1 F_{\dot{y}\dot{y}}((y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))) \\
&+ (c_1^2 y_2 + c_2 y_1) F_y((y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))) \\
&+ ((c_1^2 w_2 + c_2 w_1) \dot{y}_0 + c_1 w_1 \dot{y}_0 + c_1 \dot{y}_2) F_{\dot{y}}((y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))) + \frac{1}{2} (c_1 w_1 \dot{y}_0 + c_1 \dot{y}_1)^2 F_{\dot{y}\dot{y}}((y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0))) + \\
&c_3 F((y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)))],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0) &= c_1^3 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) [-2\omega_1 \ddot{y}_2 - (\omega_1^2 + 2\omega_2) \ddot{y}_1 - (2\omega_3 + 2\omega_1 \omega_2) \ddot{y}_0 + y_2 F_y(y_0, \dot{y}_0) \\
&+ \frac{y_1^2}{2} F_{yy}(y_0, \dot{y}_0) + y_1 (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1) F_{y\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) + (\omega_2 \dot{y}_0 + \omega_1 \dot{y}_1 + \dot{y}_2) F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) \\
&+ \frac{1}{2} (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2 F_{\dot{y}\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0)] d\tilde{\tau} \\
&+ 2c_1 c_2 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) [-2\omega_1 \ddot{y}_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_2) \ddot{y}_0 + F_y(y_0, \dot{y}_0) y_1 + F_{\dot{y}}(y_0, \dot{y}_0) (\omega_1 \dot{y}_0 + \dot{y}_1)] d\tilde{\tau} \\
&+ c_3 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) [-2\omega_1 \ddot{y}_0 + F((y_0(\theta, 0), \dot{y}_0(\theta, 0)))] d\tilde{\tau}, \\
\Rightarrow \tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0) &= c_1^3 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) G_3(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} + 2c_1 c_2 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) G_2(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} + c_3 \int_0^{\tilde{\theta}} \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\tau}) G_1(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau},
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0) = c_1^3 y_3(\tilde{\theta}, 0) + 2c_1 c_2 y_2(\tilde{\theta}, 0) + c_3 y_3(\tilde{\theta}, 0).$$

Théorème 3.3.1. Si la fonction $g(\epsilon)$ est élargi en pouvoirs de ϵ

où $g(0) = 0$ i.e $g(\epsilon) = \sum_{k \geq 1} \epsilon^k c_k$, tel que c_k sont de constantes réels, donc

1) Si $c_1 \neq 0$, avec $|c_1| < 1$, les solutions approximatives d'équation (3.10) sont plus proches des solutions d'équation (2.34) que les solutions approximatives d'équation (2.33).

2) Si $c_1 = 0$ et $|c_2| < 1$, avec $c_2 \neq 0$, les solutions approximatives d'équation (3.10) sont plus proches des solutions d'équation (2.34) que les solutions approximatives d'équation (2.33).

3) Si $c_1 = c_2 = 0$ et $|c_3| < 1$, avec $c_3 \neq 0$, les solutions approximatives d'équation (3.10) sont plus proches des solutions d'équation (2.34) que les solutions approximatives d'équation (2.33).

De plus, les solutions approximatives d'équation (3.10) sont plus proches des solutions d'équation (2.34) que les solutions approximatives d'équation (2.33) où $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$.

Preuve. D'après les résultats donnés par le lemme (3.3.1), on a

1) Si $|c_1| < 1$, et $c_1 \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} \left| y_0(\theta, 0) - \tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| &= \left| y_0(\theta, 0) - y_0(\tilde{\theta}, 0) - \epsilon \tilde{y}_1(\tilde{\theta}, 0) - o(\epsilon) \right| = \left| \epsilon \tilde{y}_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon) \right| \\ &= \left| c_1 \epsilon y_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon) \right| = |c_1| \left| \epsilon y_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon) \right| < \left| \epsilon y_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon) \right| \\ &= \left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right|. \end{aligned}$$

Donc, $\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon)$ est une approximation de $y_0(\theta, 0)$ plus proche que $y(\tilde{\theta}, \epsilon)$.

2) Si $c_1 = 0$ et $|c_2| < 1$ où $c_2 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| y_0(\theta, 0) - \tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| &= \left| y_0(\theta, 0) - y_0(\tilde{\theta}, 0) - \epsilon^2 \tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0) - o(\epsilon^2) \right| = \left| \epsilon^2 \tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon^2) \right| \\ &= \left| \epsilon^2 c_2 y_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon^2) \right| = |c_2| \left| \epsilon^2 y_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon^2) \right| = |c_2| \left| \epsilon^2 (y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) + \epsilon^2 y_2(\tilde{\theta}, 0)) \right| \\ &< \left| \epsilon^2 (y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) + \epsilon^2 y_2(\tilde{\theta}, 0)) \right| < \epsilon^2 \left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| + \epsilon^4 \left| y_2(\tilde{\theta}, 0) \right|. \end{aligned}$$

Depuis, $\left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| = o(\epsilon)$, pour ϵ assez petit, il existe une constante réelle C positive telle que $\left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| \leq C\epsilon$.

Soit h une fonction definire par $h(\epsilon) \doteq (\epsilon^2 - 1)C + \epsilon^3 \left| y_2(\tilde{\theta}, 0) \right|$. Donc, h est continu avec $h(0) = -C < 0$, alors $\exists \epsilon_0 > 0$ telle que $\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[$, on a $h(\epsilon) < 0$.

Par conséquent, pour tous $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ on a

$$(\epsilon^2 - 1) \left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| + \epsilon^4 \left| y_2(\tilde{\theta}, 0) \right| \leq \epsilon \left((\epsilon^2 - 1)C + \epsilon^3 \left| y_2(\tilde{\theta}, 0) \right| \right) = \epsilon h(\epsilon) < 0.$$

Ce qui implique de ce qui précède que

$$\left| y_0(\theta, 0) - \tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| < \left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right|.$$

Donc $\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon)$ est une approximation de $y_0(\theta, 0)$ plus proche que $y(\tilde{\theta}, \epsilon)$.

En outre, si $c_1 = 0$ et $c_2 \neq 0$, puis $\exists \epsilon_0 \left(< \frac{1}{|c_2|} \right) > 0$ tel que $\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[$,

$$\left| y_0(\theta, 0) - \tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| = \left| y_0(\theta, 0) - y_0(\tilde{\theta}, 0) - \epsilon^2 \tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0) - o(\epsilon^2) \right| = \left| \epsilon^2 \tilde{y}_2(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon^2) \right|$$

$$= \left| \epsilon^2 c_2 y_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon^2) \right| = \epsilon |c_2| \left| \epsilon y_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon) \right| = \epsilon |c_2| \left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| < \left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right|.$$

Donc $\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon)$ est une approximation de $y_0(\theta, 0)$ plus proche que $y(\tilde{\theta}, \epsilon)$.

3) Si $c_1 = c_2 = 0$ et $|c_3| < 1$ où $c_3 \neq 0, \exists \epsilon_1 (1/\sqrt{|c_3|}) > 0$ tel que $\forall \epsilon \in]0, \epsilon_1[$ on a

$$\left| y_0(\theta, 0) - \tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon) \right| = \left| y_0(\theta, 0) - y_0(\tilde{\theta}, 0) - \epsilon^3 \tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0) - o(\epsilon^3) \right| = \left| \epsilon^3 \tilde{y}_3(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon^3) \right|$$

$$= \left| c_3 \epsilon^3 y_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon^3) \right| = |c_3| |\epsilon^2| \left| \epsilon y_1(\tilde{\theta}, 0) + o(\epsilon) \right| = |c_3| |\epsilon^2| \left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right|$$

$$< \left| y_0(\theta, 0) - y(\tilde{\theta}, \epsilon) \right|.$$

Donc $\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon)$ est une approximation de $y_0(\theta, 0)$ plus proche que $y(\tilde{\theta}, \epsilon)$.

□

Remarque 3.3.2. Soit g une fonction réelle telle que $g(\epsilon) = \epsilon^m h(m)$, $m \in \mathbb{N}^*$ où $h(\epsilon)$ peut être déposé en pouvoirs de $h(\epsilon) = \sum_{k \geq 1} \epsilon^k a_k$, où a_k constante réelle.

(1) Si $m = 1$ où 2 , selon les conditions de Théorème 3.3.1 nous concluons que $y(\tilde{\theta}, \epsilon)$ est une approximation de $y_0(\theta, 0)$ plus près que $y_0(\theta, 0)$.

(2) Si $m > 2$ (dans le cas où $m = 3$, la quatrième terme est donné par Proposition 3.1.1), on peut s'attendre à ce que $\tilde{y}(\tilde{\theta}, \epsilon)$ est une approximation de $y_0(\theta, 0)$ plus près que $y(\tilde{\theta}, \epsilon)$.

Bibliographie

- [1] A.Quarteroni, F.Saleri and P.Gervasio , *Scientific Computing with MATLAB and Octave* , Italia, Springer-Verlag, 2008.
- [2] Burton T.A, *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*, 1985.
- [3] F.C-Emard, *Analyse 2, Calcul différentiel, Intégrales multiples, Séries de fourier* ,2006.
- [4] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, 2nd edition, Springer, Berlin (1989).
- [5] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 2011.
- [6] J-P.Demailly, *Analyse Numérique Et Equations Differentielles*,Nouvelle Edition , France,2006.
- [7] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition, Springer, New York (2001).
- [8] R-E.Mickens, *An Introduction to nonlinear oscillations*, Cambridge University , 1981.
- [9] R.E. Mickens , *Oscillations in planar dynamics systems*,World Scientifics, Singapore ,1996.
- [10] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Book Publishing, LLC, Cambridge, MA (1994).
- [11] S. Meftah, *A new approach to approximate solutions for nonlinear differential equation* , J. IJMMS, 6 (1), pp. 26-38. 2018.
- [12] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.